UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 15

Septiembre de 2008

Índice

Septiembre de 2008, Número 15, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Colabora

Fundación Carolina

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, página 3
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Timothy Gowers

Breve reseña

William Timothy Gowers nació el 20 de noviembre de 1963 en Marlborough (Inglaterra). Realizó sus estudios de Matemáticas en la Universidad de Cambridge, en la que alcanzó el grado de doctor y de la que ahora es profesor.

Sus investigaciones matemáticas se han centrado en el Análisis Funcional y la Teoría de Números, en donde ha aplicado técnicas combinatorias. Ha destacado en la resolución de célebres problemas abiertos en la teoría de espacios de Banach, particularmente el "problema de la base incondicional".

Su labor ha sido reconocida mediante diferentes premios, especialmente por la concesión de la medalla Fields en el Congreso Internacional de los Matemáticos celebrado en Berlín en agostote 1998.

En nuestra sección de *firma invitada,* reproducimos unas páginas de su obra *Matemáticas. Una breve introducción,* recientemente publicada en castellano, que hace especial referencia a la enseñanza de nuestra ciencia. Los editores de UNIÓN agradecemos la generosidad de T. Gowers, Alianza Editorial y Oxford University Press por permitirnos la reproducción de dicho texto.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 5-7
ISSN: 1815-0640

firma invitada

¿Porqué hay tanta gente con auténtica aversión a las matemáticas? [1]

T. Gowers

No es frecuente oír decir a alguien que nunca le ha gustado la biología o la literatura. Es indudable que estas materias no entusiasman a todo el mundo, pero quienes no se emocionan con ellas suelen entender que otros sí lo hagan. En cambio, las matemáticas y otras materias con gran contenido matemático, como la física, parecen provocar no sólo indiferencia sino auténtica antipatía. ¿Qué es lo que provoca que muchas personas abandonen las matemáticas en cuanto pueden y las recuerden con horror durante el resto de la vida?

Probablemente el hecho de que la gente les encuentre poco atractivo no se debe tanto a las matemáticas en sí como a la experiencia vivida en las clases de matemáticas, y esto resulta más fácil de entender. Como las matemáticas se basan continuamente sobre sí mismas, es importante tenerlas al día a lo largo de todo el aprendizaje. Por ejemplo, si no se nos da muy bien la multiplicación de números con dos dígitos, entonces es fácil que no tengamos una buena percepción intuitiva de la ley distributiva. Sin esto es poco probable que nos sintamos cómodos al multiplicar los paréntesis de una expresión como

$$(x + 2)\,(x + 3)\ ,$$

y entonces seremos incapaces de entender bien las ecuaciones de segundo grado. Y si no entendemos las ecuaciones de segundo grado, entonces no entenderemos por qué la razón áurea es

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ .$$

Hay muchas conexiones de este tipo, pero en matemáticas no sólo hay que tener al día la fluidez técnica. De vez en cuando se introduce una idea nueva de gran importancia y mucho más sofisticada que las que la precedieron, y con cada una de ellas aparece la posibilidad de quedarse atrás. Un ejemplo obvio lo

[1] Este texto forma parte del libro de Timothy Gowers, *Mathematics: a very short introduction* (Oxford University Press, 2002), en su versión castellana *Matemáticas. Una breve introducción* (Alianza editorial, 2008; Traducción de Dulcinea Otero-Piñeiro y revisión técnica de David Galadí-Enríquez)

constituye el empleo de letras que funcionan como números, algo que confunde a mucha gente pero que resulta fundamental para todas las matemáticas por encima de cierto nivel. Otros ejemplos los encontramos en los números negativos, los números complejos, la trigonometría, el uso de potencias, los logaritmos y los inicios del análisis matemático. Quienes no estén preparados para dar el salto conceptual necesario cuando se encuentran con alguna de estas ideas acusarán la inseguridad en todas las matemáticas basadas en ellas. Poco a poco se acostumbran a entender sólo a medias lo que se explica en clase y, tras unos pocos pasos más en falso, comprueban que incluso la comprensión a medias queda fuera de su alcance. Mientras, ven que otras personas del aula siguen el ritmo sin ninguna dificultad en absoluto. No es de extrañar que las clases de matemáticas se conviertan para mucha gente en una experiencia horrible.

¿Es indispensable esta circunstancia? ¿Es que, sencillamente, algunas personas están condenadas a odiar las matemáticas en el colegio? O ¿sería posible enseñar la materia de otro modo, de manera que quedara mucha menos gente excluida de ella? Estoy convencido de que cualquiera que reciba clases particulares de matemáticas desde una edad temprana por parte de una persona competente y entusiasta crecerá gustándole la materia. Por supuesto, esto no es una apelación directa a una política educativa viable pero, cuando menos, revela que queda espacio para mejorar en la enseñanza de las matemáticas.

De las ideas que he enfatizado a lo largo de este libro se deriva una recomendación. Más arriba he diferenciado de manera implícita entre tener soltura técnica y comprender conceptos difíciles, pero parece que casi toda la gente que es buena en una cosa lo es también en la otra. Y, de hecho, si la comprensión de un objeto matemático depende en mayor medida del aprendizaje de las reglas a las que obedece que de la captación de su esencia, entonces eso es exactamente lo que cabe esperar. La diferencia entre la fluidez técnica y el entendimiento matemático está menos clara de lo que podría parecer.

¿Cómo debe influir esta observación en la docencia? No abogo por ningún cambio revolucionario (las matemáticas ya han sufrido demasiado), pero un pequeño cambio de acentuación tendría recompensa. Por ejemplo, supongamos que un alumno comete el error habitual de creer que

$$x^{a+b} = x^a + x^b \ .$$

El docente que enfatice el significado intrínseco de expresiones como x^a señalará que x^{a+b} significa x multiplicado por sí mismo $a + b$ veces, lo que equivale claramente a x multiplicado por sí mismo a veces, y multiplicado por sí mismo b veces. Por desgracia, a muchos niños este razonamiento les resulta demasiado complicado para asimilarlo y, de todos modos, deja de ser válido si a y b no son números enteros positivos.

Esos chicos aprovecharán mejor un enfoque más abstracto. Tal como ya señalé, lo único que hay que saber sobre las potencias se puede inferir a partir de unas pocas reglas muy simples, la más importante de las cuales es

$$x^{a+b} = x^a\, x^b\,.$$

Si se hace hincapié en esta regla, no sólo decrece la probabilidad de que se cometa el error anterior en primer lugar, sino que también resulta más fácil de corregir: a quien cometa el error basta con decirle que olvidó aplicar la regla adecuada. Desde luego, es importante conocer los hechos básicos como que x^3 significa $x \cdot x \cdot x$, pero éstos se pueden presentar como consecuencias de las reglas, en lugar de como justificación de las mismas.

No pretendo insinuar que se intente explicar a niños en qué consiste el método abstracto, sino simplemente que los docentes deben ser conscientes de sus posibilidades. La principal es que resulta bastante factible aprender a usar bien ciertos conceptos matemáticos sin decir qué significan con exactitud. Tal vez parezca una idea nefasta pero suele ser más fácil enseñar el uso, mientras que la comprensión más profunda del significado, si es que *existe* algún significado aparte del uso, suele seguirle por sí sola.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 9 - 31
ISSN: 1815-0640

Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores

Tomé Torres, Clara Coutinho y José Fernandes

Resumo

Nesta investigação estudámos o impacto da exploração do tema Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores, enquanto tecnologias de recolha e tratamento de dados, sobre a aprendizagem e a motivação de alunos do 12.º ano de escolaridade, na disciplina de Matemática A, em Portugal.
Foi adoptada uma metodologia de investigação predominantemente qualitativa, seguindo um paradigma interpretativo, visando a descrição e compreensão dos processos de raciocínio desenvolvidos pelos alunos.

Abstract

In this research we studied the impact of the exploration of the theme Applications and Mathematic Modelling using the graphic calculator and sensors, as collecting and data processing technologies, concerning the learning process and the motivation of the12th year students, in the subject of Mathematics A, in Portugal.
It was adopted a research methodology mainly qualitative, following an interpretative paradigm, aiming the description and understanding of the reasoning processes developed by the students.

Introducción

É consensual que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) proporcionam inúmeras potencialidades para o processo de ensino e aprendizagem, mas, no entanto, continuamos a assistir a uma utilização redutora das mesmas, não se criando alternativas estratégicas para exploração pedagógica destes recursos.

A procura de novas ferramentas que sejam eficazes no processo de ensino/aprendizagem faz pois parte das aspirações de qualquer profissional de educação. O objectivo último de qualquer professor é encontrar um recurso que motive os alunos e potencie a aprendizagem do leque mais abrangente possível de conhecimentos. As tecnologias, em particular as TIC têm prometido, ou fomentado promessas, de grandes revoluções na educação muito embora o seu impacto ao nível da sala de aula ainda esteja muito longe de atingir os níveis desejados (Paiva, 2002). De qualquer forma é hoje inegável que as TIC desempenham já um papel importante como ferramentas privilegiadas ao serviço dos professores e da educação em geral e a questão que se coloca já não é se devemos ou não utilizar as TIC em contexto educativo, mas antes como devemos utilizá-las para delas tirar o melhor proveito possível.

No caso particular da educação matemática, são os professores quem mais deve contribuir para colocar a tecnologia ao serviço da Matemática, criando momentos adequados nas suas aulas “para o desenvolvimento de actividades que permitam aos alunos construírem, descobrirem e investigarem Matemática” (Cunha, 2006: 5). Esta argumentação ganha ainda mais força quando se pensa na actividade de modelação e aplicação da Matemática (Matos, 1997: 43).

Em Portugal, a “modelação matemática” faz parte integrante dos conteúdos dos programas de Matemática do Ensino Secundário, “constituindo uma base de apoio que os alunos utilizam na sua actividade matemática”, que, “atravessam o programa de forma transversal” (ME, 2002: 5).

Já em meados da década de 70, Sebastião e Silva (1975: 13), referindo-se à sua participação nas reuniões internacionais de professores promovidas pela OCDE, afirmou que, um dos pontos assentes nestes encontros, é que “o professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um professor de matematização, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos”.

Em 1974, Griffiths & Howson (citado por Topa, 2003: *enum*), apontam vários motivos para a utilização da modelação matemática no ensino, salientando: (i) preparação dos alunos para uma melhor inserção na sociedade; (ii) a modelação constitui uma forma de motivar os alunos; (iii) a modelação é em si mesma uma herança cultural da Matemática e da humanidade; e (iv) pode constituir uma forma de evitar aprendizagens incorrectas.

Também no início dos anos 90 do século XX, Jaime Carvalho e Silva (1992: 4-5), defendia para todos os ciclos de ensino em Portugal, um ensino da Matemática que contemplasse as aplicações e a modelação matemática.

Relativamente à tecnologia, esta assume importância considerável nos programas portugueses de Matemática. Os programas consideram que “as calculadoras gráficas, que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa, sendo de uso obrigatório” (ME, 2002: 34). E o programa estabelece uma ligação explícita da modelação matemática com o uso da tecnologia, indicando que “devem ser explorados com a calculadora gráfica” (ME, 2002: 11) vários tipos de actividades matemáticas, entre as quais: a modelação, a simulação e a resolução de situações problemáticas.

Sendo assim, as novas tecnologias em geral, e a calculadora e os sensores em particular, apresentam inúmeras vantagens e em várias dimensões (afectivas, cognitivas, …) no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Neste artigo procuramos dar a conhecer uma experiência de implementação de um programa de Aplicações e Modelação Matemática (AMM) com recurso à calculadora gráfica e sensores numa turma do 12.º ano de escolaridade (em Portugal), bem como, o contributo destas tecnologias no ensino-aprendizagem desta temática.

Assim, nesta investigação estudamos o impacto da exploração do tema AMM com recurso à calculadora gráfica e a sensores, enquanto tecnologias de recolha e tratamento de dados, sobre a aprendizagem e a motivação de alunos. Este estudo teve como questão central, a seguinte: *A utilização da calculadora gráfica e dos sensores na modelação matemática contribuirá para melhorar a aprendizagem e motivação dos alunos?*

Com este estudo não se pretendeu obter confirmações de resultados previamente estabelecidos, mas sim, o de compreender os comportamentos dos alunos a partir das suas perspectivas pessoais. Assim, foram traçados os seguintes objectivos:

- Desenvolver actividades experimentais e de investigação ligadas às aplicações e modelação matemática;
- Identificar dificuldades reveladas pelos alunos em contextos de aplicações e modelação matemática;
- Caracterizar comportamentos e atitudes dos alunos face à utilização da calculadora e de sensores na modelação matemática;
- Avaliar o impacto da implementação das actividades de aplicação e de modelação matemática na aprendizagem dos alunos e nas suas percepções em relação ao ensino da matemática.

1. Modelação Matemática no Ensino da Matemática

Segundo Dantas (1996: 56), já na Idade Média, os matemáticos usavam processos de modelação, pois tinham como principal objectivo a “quantificação daquilo que os rodeava”, procurando leis matemáticas que descrevessem os fenómenos do mundo real. Citando Frank Swetz (1991), este autor refere ainda alguns cientistas que usaram o processo de modelação nos seus trabalhos matemáticos, como por exemplo, Galileo (1564-1643), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Evangelista Torricelli (1608-1647) e Kepler (1571-1630).

No século XVII surgiu o cálculo diferencial e integral, uma ferramenta importantíssima para a modelação matemática (Neto, 1999: 77).

Da necessidade de optimizar os modelos matemáticos criados, foram surgindo ao longo dos tempos máquinas mecânicas para realizar cálculos, e que acabaram por desembocar, em meados do século XX no computador digital.

Desde os anos 80 que "as aplicação da Matemática ao mundo real constituem uma preocupação pedagógica, (…) surgindo como uma alternativa ao que era visto como uma Matemática escolar virada para si própria, preocupada essencialmente com o ensino de estruturas e com aspectos de linguagem". O surgimento das calculadoras e dos computadores impulsionam a modelação matemática, surgindo desde então "algumas investigações essencialmente centradas nos modelos de ensino e aprendizagem" (Ponte, Matos & Abrantes, 1998: 178).

1.1. Discussão dos conceitos fundamentais

Modelos são descrições simplificadas de situações reais ou imaginárias (Ponte, 1992: 15), podendo ser encarados como formas simplificadas de representar determinados aspectos de um sistema real (Edwards & Hamson, 1990; citados por Carreira e Matos, 1993: 2, 1995: 14), sendo por isso, uma réplica de um objecto, que pode ser boa se possui a maior parte das propriedades e características do objecto que retrata (Swetz, 1992: 45).

Quando os princípios de um modelo teórico têm uma base matemática, diz-se que se criou um **modelo matemático**, sendo por isso, uma estrutura matemática que descreve aproximadamente as características de um fenómeno em questão (Swetz, 1992: 45).

Segundo Carreira (1993: 11), o termo **aplicações da matemática** significa, a "intenção de estabelecer conexões entre a matemática e o mundo real, podendo entender-se, neste sentido, os modelos matemáticos como parte integrante das aplicações e o processo de modelação como forma de utilização da matemática em situações extra-matemáticas".

Para Blum & Niss (1991; citado por Carreira e Dantas, 1993: 11, 1996: 58) e Ponte (1992: 15), **matematização** é o processo que se inicia com o modelo real e culmina dentro do mundo Matemático, sendo uma das etapas inerentes ao processo de modelação. **Matematizar** poderá corresponder ao acto de representar matematicamente determinados aspectos de uma situação do mundo real.

Entende-se por **modelação matemática** todo um processo que tem origem num dado fragmento da realidade e que culmina na construção de um modelo matemático dessa realidade (Niss, 1989; citado por Carreira, 1993:4; Matos, 1995:18).

1.2. O processo modelação

O processo de modelação matemática é usualmente descrito através de um conjunto de fases em que o núcleo de actividades ora se centra mais no fenómeno ora se centra no modelo, e como diz Matos (1995: 30), é aqui que a matemática pode ser vista em acção. Este processo é descrito como um ciclo (ciclo de modelação) que se pode repetir sucessivamente até se obter um modelo adequado à situação a modelar.

Há vários[1] modos de descrever o ciclo de modelação matemática e a versão que a seguir apresentamos é uma deles.

Esta formulação (Figura 1) é apresentada por Jaime Carvalho e Silva (2000: 25-26) e citada em vários manuais de matemática do ensino secundário em Portugal.

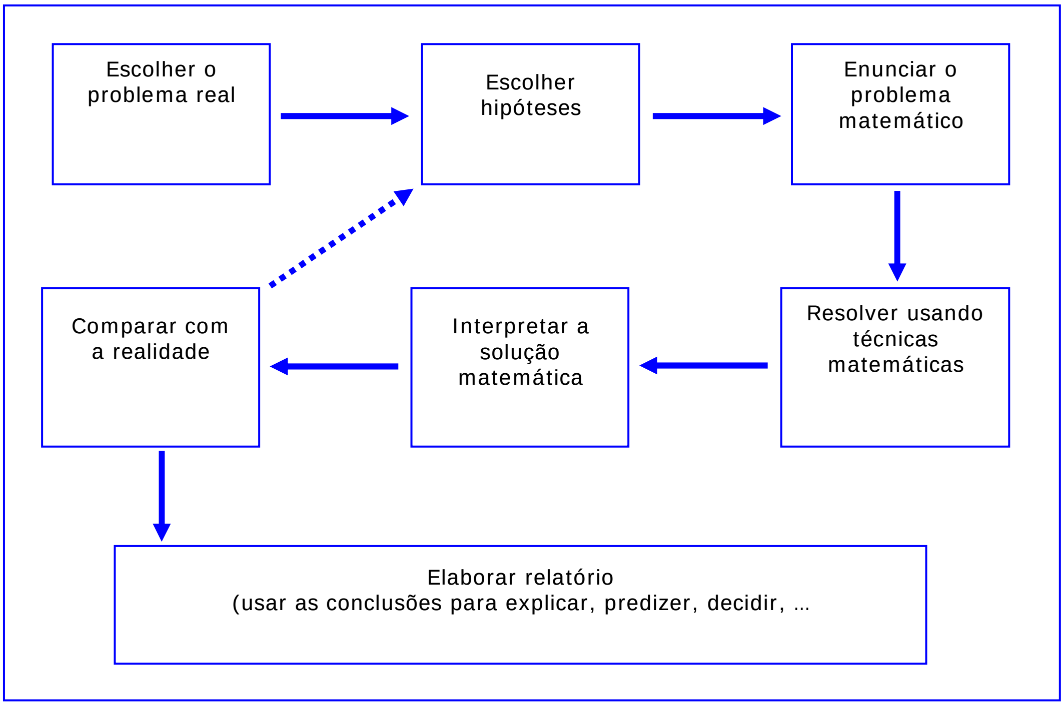


Figura 1 – Ciclo de modelação matemática apresentado por Silva (1994: 26)

Este ciclo de modelação matemática é formado pelas sete etapas seguintes:

1.ª) *Problema real* – segundo este autor, "tudo começa com a escolha de um problema real que pode estar mais ou menos indefinido".

2.ª) *Escolha de hipóteses* – para seleccionar as hipóteses temos que decidir sobre a aceitação de determinadas características. Para este investigador, "a validação das conclusões apenas pode ser considerada tendo como referência as hipóteses seleccionadas".

3.ª) *Enunciado do problema matemático* – nesta etapa devemos ter em consideração questões como: Que equações ou inequações há que resolver? Quais são as variáveis? O que é constante? Etc.

4.ª) *Resolução usando técnicas matemáticas* – escolher a técnica/teoria matemática mais adequada para resolver o problema matemático e tentar chegar à solução.

[1] Na sua tese de Mestrado, Tomé Torres (2007: 56-63) apresenta seis modos de descrever o processo de modelação matemático.

5.ª) *Interpretação da solução* – nesta etapa temos que analisar o significado da solução no contexto do problema real. Por exemplo, se 3 for a solução do problema matemático, no contexto real poderemos ter: 3 metros ou 3 dias ou 3 graus ou 3 pessoas ou … etc.

6.ª) *Comparação com a realidade* – temos agora que confrontar a solução com a realidade, analisando se faz sentido ou não o resultado obtido quando confrontado com a situação concreta. Se a solução não for possível, isto quer dizer que "ou erramos os cálculos ou as nossas hipóteses não são aceitáveis".

7.ª) *Elaboração de um relatório* – esta etapa é muito importante pois permite passar a escrito o que se teve de fazer. Na elaboração do relatório a "solução do problema é usada para explicar o fenómeno, ou prever a evolução futura, ou para servir de suporte e uma tomada de decisões".

Se observarmos o esquema (figura 1), ele sugere que se volte à situação real e se apure o modelo, retomando o mesmo ciclo as vezes que forem necessárias, até obtermos o modelo que melhor se ajusta à situação em estudo.

Em suma, o processo de construção de modelos matemáticos da realidade é um processo dinâmico e envolve diversas fases. O aperfeiçoamento e robustez de um modelo evoluem em cada uma das repetições do ciclo de modelação que consiste na identificação da situação, tradução dos aspectos relevantes da situação para um modelo matemático, exploração matemática desse modelo matemático e avaliação da adequação do modelo à situação (Matos, 1995: 20-21).

2. Desenvolvimento da investigação

2.1. Metodologia de investigação

Foi adoptada uma metodologia de investigação predominantemente qualitativa, seguindo um paradigma interpretativo, visando a descrição e compreensão dos processos de raciocínio desenvolvidos pelos alunos, ao longo de doze sessões de actividades de AMM, com recurso à calculadora gráfica e aos sensores. Assim, o estudo de caso foi o modelo que se adequou melhor a esta investigação.

2.2. Descrição do estudo

O presente estudo foi realizado numa turma do 12.º ano de escolaridade da Escola Secundária Carlos Amarante (ESCA) – Braga, do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, na disciplina de Matemática A. A intervenção experimental decorreu no 2.º e 3.º períodos do ano lectivo de 2006/2007 e desenvolveu-se em três períodos de quatro sessões de 90 minutos cada uma, tendo abrangido um total de 12 blocos lectivos de 90 minutos cada um.

Na 1.ª sessão e parte da 2.ª, foi dado a conhecer aos alunos o projecto, foi feita a calendarização, foram distribuídos os 16 alunos por 4 grupos, foram definidas as regras de funcionamento das sessões e foram distribuídos e analisados/explorados os documentos de apoio às sessões: o guião para a elaboração dos relatórios e textos de apoio contendo alguns conceitos de aplicações e modelação matemática, designadamente modelos de regressão e modelos matemáticos explorados com a calculadora gráfica

A 4.ª e a 8.ª sessões foram destinadas à introdução e exploração das ferramentas tecnológicas calculadoras gráficas[2] e sensores.

A última sessão (12.ª) foi destinada à avaliação final e individual das sessões experimentais.

Em todas as sessões, era resolvida uma Ficha de Trabalho (FT) e elaborado um relatório por grupo.

Esta experiência foi dividida em 3 partes: na 1.ª parte, foi abordada a modelação analítica (sessões 2 e 3); na 2.ª parte, foram resolvidas actividades de AMM com recurso apenas à calculadora gráfica (sessões 4 a 7); e na 3.ª parte, foram resolvidas actividades de AMM utilizando os recursos tecnológicos, calculadora gráfica e sensores (sessões 8 a 11).

Para apoiar a parte experimental desta investigação, principalmente na 4.ª e 8.ª sessões, recorremos a um computador portátil, ao software[3] educacional emulador da calculadora gráfica e a um projector multimédia para efectuar demonstrações e explicar o funcionamento da calculadora gráfica à turma inteira (note-se que este foi o primeiro contacto que os alunos tiveram com esta calculadora, visto que no dia-a-dia usam outro tipo[4] de calculadoras gráficas).

As actividades realizadas pelos alunos, com o recurso à calculadora gráfica e aos sensores, foram seleccionadas tendo em conta o tempo disponível para a sua concretização na sala de aula e a oportunidade da sua utilização relativamente a conceitos e métodos estudados. Todas as actividades foram objecto de apreciação, crítica e aperfeiçoamento, quer por professores externos ao projecto, quer por dois professores da Universidade do Minho, especialistas neste tipo de estudos e que acompanharam a investigação. Importa ainda referir que as actividades têm uma estrutura idêntica, iniciando-se com a apresentação de uma situação da vida real que serve de ponto de partida para um conjunto de questões posteriores.

Cada sessão foi dividida em dois momentos: em média, nos primeiros 60 minutos os alunos eram convidados a resolverem a actividade proposta sobe a forma de uma ficha de trabalho orientada, e nos últimos 30 minutos era solicitado aos alunos a elaboração de um relatório (em grupo) sobre o trabalho efectuado referente à actividade desenvolvida.

Relativamente ao teor das actividades das oito fichas de trabalho (Torres, 2007: 181-216), apresentamos no quadro 2 uma descrição sucinta das mesmas.

---

[2] No estudo foram utilizadas calculadoras gráficas TI-84 Plus Silver Edition, da Texas Instruments.
[3] Referimo-nos ao software TI-SmartView, emulador das calculadoras gráficas da família TI-84.
[4] No dia-a-dia, os alunos usam a calculadora gráfica fx-9860G da Casio.

2.3. Caracterização dos intervenientes no projecto

A turma que participou na investigação tinha 16 alunos do 12.º ano inscritos na disciplina de Matemática A, sendo 7 do sexo masculino e 9 do sexo feminino. As idades dos alunos variavam entre os 17 e os 20 anos, sendo a média de idades de 18,2 anos. Isto justifica o facto de 75% destes alunos já terem reprovado pelo menos uma vez.

Desde o 10.º ano que esta turma é caracterizada como tendo baixo aproveitamento e com muitas dificuldades a Matemática A, tendo vindo a melhorar. Estes alunos tiveram sempre apoio pedagógico acrescido a esta disciplina.

Apesar do seu aproveitamento irregular, é uma turma simpática, unida e esforçada, revelando interesse pela disciplina e pela escola, tendo aderido com entusiasmo a este projecto de investigação.

2.4. Recursos utilizados

As sessões experimentais decorreram quase todas no Laboratório de Matemática. No quadro 1 são apresentados os recursos utilizados no estudo e a sua distribuição em cada uma das 12 sessões.

Quadro 1 – Recursos utilizados em cada sessão.

<table>
<tr><th rowspan="2">Sessão</th><th colspan="2">Recursos utilizados</th></tr>
<tr><th>Em papel</th><th>Tecnológicos</th></tr>
<tr><td>S1</td><td>- Calendarização das 12 sessões</td><td>- Computador portátil e projector multimédia</td></tr>
<tr><td>S2</td><td>- Fichas Informativas 1 e 2</td><td>- Computador portátil e projector multimédia</td></tr>
<tr><td>S3</td><td>- Ficha de Trabalho n.º 1 (FT1)
- Folha de resolução da FT1
- Folha para elaborar o Relatório 1</td><td>- Computador portátil e projector multimédia</td></tr>
<tr><td>S4</td><td>- Ficha de Trabalho n.º 2 (1.ª Parte) (FT2A)
- Folha de resolução da FT2A
- Folha para elaborar o Relatório 2A</td><td>- Computador portátil e projector multimédia
- Software TI-SmartView
- 16 Calculadoras Gráficas</td></tr>
<tr><td>S5</td><td>- Ficha de Trabalho n.º 3 (FT3)
- Folha de resolução da FT3
- Folha para elaborar o Relatório 3</td><td>- Computador portátil e projector multimédia
- Software TI-SmartView
- 16 Calculadoras Gráficas</td></tr>
<tr><td>S6</td><td>- Ficha de Trabalho n.º 4 (FT4)
- Folha de resolução da FT4
- Folha para elaborar o Relatório 4</td><td>- 16 Calculadoras Gráficas</td></tr>
<tr><td>S7</td><td>- Ficha de Trabalho n.º 5 (FT5)
- Folha de resolução da FT5
- Folha para elaborar o Relatório 5</td><td>- 16 Calculadoras Gráficas</td></tr>
<tr><td>S8</td><td>- Ficha de Trabalho n.º 2 (2.ª Parte) (FT2B)
- Folha de resolução da FT2B
- Folha para elaborar o Relatório 2B</td><td>- Computador portátil e projector multimédia
- Software Ti-SmartView
- 16 Calculadoras Gráficas e 1 painel ViewScreen
- CBR, CBL, sensor de pressão e outros
- Retroprojector</td></tr>
</table>

S9	- Ficha de Trabalho n.º 6 (FT6) - Folha de resolução da FT6 - Folha para elaborar o Relatório 6	- 16 Calculadoras Gráficas - CBR
S10	- Ficha de Trabalho n.º 7 (FT7) - Folha de resolução da FT7 - Folha para elaborar o Relatório 7	- 16 Calculadoras Gráficas - CBL e Sensor de pressão
S11	- Folha de resolução da FT8 - Folha para elaborar o Relatório 8	- 16 Calculadoras Gráficas - CBR
S12	- Questionário	–

2.5. Caracterização das actividades

Ao longo desta investigação foram realizadas 12 actividades (quadro 2), previamente elaboradas, distribuídas da seguinte forma: 3 actividades em cada uma das fichas de trabalho FT1 e FT2, e 1 actividade em cada uma das fichas de trabalho FT3, FT4, FT5, FT6, FT7 e FT8.

Quadro 2 – Apresentação sucinta das actividades das oito FT e respectivos recursos necessários.

Fichas de Trabalho (FT)	Actividades	Recursos tecnológicos	Modelo matemático	Observações
FT1	- Candeeiros numa estrada - Bactérias na praia - A roda gigante	–	- Modelo racional - Modelo exponencial - Modelo sinusoidal	Modelação analítica
FT2	- Funções - Estatística/regressão - Imitar o gráfico	- Calculadora gráfica - Calculadora gráfica - Calc. gráfica + CBR[5]	–	Adaptação à calculadora gráfica e sensores
FT3	- Quanto custa exceder os limites de velocidade?	- Calculadora gráfica	- Modelo de potência	Modelação utilizando recursos tecnológicos
FT4	- Crescimento logístico de uma população	- Calculadora gráfica	- Modelo logístico	
FT5	- Eclipses solares	- Calculadora gráfica	- Modelo sinusoidal	
FT6	- Bola saltitante	- Calculadora gráfica - Sensor CBR	- Modelo quadrático	
FT7	- Pressão e volume de um gás	- Calculadora gráfica - CBL[6] - Sensor de pressão	- Modelo potência	
FT8	- O Pêndulo	- Calculadora gráfica - Sensor CBR	- Modelo sinusoidal	

[5] Calculator_Based RangerTM – detector de movimento sónico utilizado com as calculadoras gráficas da TI, permite recolher, ver e analisar dados de movimento (TI, 1997, 2004).
[6] Calculator_Based LaboratoryTM – dispositivo de recolha de dados portátil destinado a recolher dados do "mundo real", com acoplamento de sensores adequados (TI, 2003).

O formato das actividades de cada FT, obedeceram à seguinte estrutura: (1) introdução, onde é descrita a situação real que serve de base à actividade; e (2) questões, relacionadas com a situação apresentada e que constituem a base para o desenvolvimento de processos de modelação e aplicação da Matemática. Algumas destas questões desempenham apenas o papel de orientação para a utilização dos recursos tecnológicos utilizados. Nos quadros 3 e 4 são apresentadas duas actividades desenvolvidas pelos alunos.

Quadro 3 – Actividade "Eclipses solares" da FT 5
(actividade de modelação utilizando a calculadora gráfica)

Actividade: Eclipses solares

Os eclipses solares têm sido observados e registados, despertando a atenção dos astrónomos chineses desde há muito tempo. Observações mais cuidadosas foram feitas a partir da invenção do telescópio, no século XVII, por um sem-número de astrónomos: de Galileu a William Herschel, de Heinrich Schwabe a Johann Rudolph Wolf. A tabela ao lado regista o número de eclipses solares observados desde 1978 a 1998.

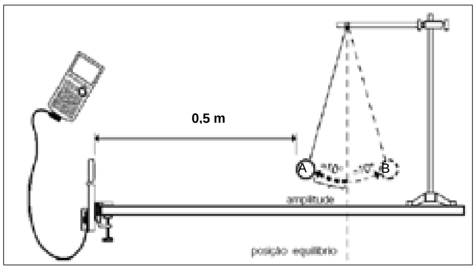
Ano	N.º de eclipses	Ano	N.º de eclipses
1978	93	1989	158
1979	155	1990	143
1980	155	1991	146
1981	140	1992	94
1982	116	1993	55
1983	67	1994	30
1984	46	1995	18
1985	18	1996	9
1986	13	1997	22
1987	29	1998	64
1988	100		

1. Construa a tabela no editor de listas estatístico da calculadora gráfica.
2. Recorrendo ao STAT-PLOT da calculadora gráfica, represente graficamente a nuvem de pontos correspondente aos dados apresentados na tabela.
3. Da análise do gráfico obtido e das potencialidades da calculadora, justifique sumariamente que, relativamente aos modelos estudados, o modelo sinusoidal se presta melhor para descrever a situação em estudo.
4. Use a calculadora gráfica para definir o modelo sinusoidal que melhor se aproxima dos dados (apresente os valores obtidos com aproximação às décimas de milésima).
5. Em 2001, o número de eclipses foi de 111. Verifique se o modelo encontrado se ajusta a este valor.
6. Quantos eclipses prevê que tenha havido em 1950? E este ano, quantos haverá?

Quadro 4 – Actividade "O Pêndulo" da FT 8
(actividade de modelação utilizando a calculadora gráfica e o CBR)

Actividade: O Pêndulo

O objectivo desta actividade é o de continuar o estudo das funções trigonométricas e das suas propriedades, desenvolvendo e explorando modelos sinusoidais. É também uma boa oportunidade para analisar o que faz com que um modelo seja ideal ou apenas razoável.



A. Recolha de Dados

Equipamento Necessário: TI-84 Plus com a aplicação CBL/CBR; 1 Sensor CBR; 1 cabo de ligação; 1 Pêndulo com suporte; 1 Cronómetro e 1 Fita métrica

Instruções da experiência: O objectivo da experiência é recolher dados relativos à distância entre o pêndulo e o CBR, quando o pêndulo é posto em movimento.

1. Alinhar o pêndulo de forma que ele se desloque na direcção do CBR.
2. Colocar o CBR a mais de 0,5 m da posição mais avançada do pêndulo, tal como se mostra na figura.
3. Medir a distância do CBR até à posição de equilíbrio do pêndulo.
4. Determine o período do pêndulo, ou seja, o tempo correspondente a uma oscilação completa (de A até B). Para isso, usar um cronómetro para medir o tempo correspondente a 10 oscilações.
5. Ligar o CBR à TI-84 Plus com o cabo de ligação.
6. Colocar a calculadora gráfica no modo radiano.
7. Premir a tecla APPS, escolher CBL/CBR e premir ENTER.
8. Seleccionar 3:Ranger e premir a tecla ENTER para avançar para o ecrã seguinte.
9. No ecrã MAIN MENU seleccionar 1:SETUP/SAMPLE, premir ENTER e escolher as seguintes opções:
   REALTIME: NO ; TIME (S): 10 ; DISPLAY: DISTANCE ; BEGIN ON: ENTER ; SMOOTHING: LIGHT ; UNITS: METERS
10. Seleccionar START NOW e premir ENTER para iniciar a recolha de dados. É conveniente que uma pessoa segure a calculadora e outra coloque o pêndulo em movimento, deslocando-o cerca de 10^{o} da posição de equilíbrio. Quando a recolha estiver completa, a calculadora apresenta, de imediato, um gráfico *distância-tempo* relativo aos dados recolhidos.

B. Questões

1. Qual é a distância do CBR à posição de equilíbrio do pêndulo?
2. A que distância da posição de equilíbrio lançou o pêndulo?
3. Qual é o período do pêndulo? Qual é a distância correspondente a um período?
4. Observe o gráfico da calculadora e descreva-o. Identifique no gráfico a posição de equilíbrio do pêndulo.
5. Encontre uma função que modele o comportamento *distância-tempo* do pêndulo (use a regressão trigonométrica).
6. No **4: PLOT MENU** do **MAIN MENU**, escolha **VELOCITY-TIME** para observar o gráfico correspondente à velocidade-tempo. Desenhe e compare os gráficos distância-tempo e velocidade-tempo, analisando as semelhanças e as diferenças.
7. Em qual posição está a velocidade máxima do pêndulo? E a velocidade mínima do pêndulo?

2.6. Métodos e instrumentos de recolha de dados

- ***Análise documental***: consulta de alguns documentos de registo de avaliação dos alunos e as actas dos conselhos de turma, desde o 10.º até ao 12.º ano;
- ***Registo de Observações***: recolha de informações junto dos alunos através da observação directa e de conversas informais (ao longo das sessões);
- ***Fichas de Trabalho*** (FT): elaboradas oito FT, umas construídas pelo investigador e outras adaptadas a partir de protocolos existentes (Torres, 2007: 181-216). Estas FT foram resolvidas em grupo, tendo por base experiências realizadas pelos alunos nas aulas.
- ***Relatório dos alunos***: No final de cada tarefa era solicitado a elaboração, em grupo, de um relatório, onde constasse um relato o mais completo possível de tudo o que se passou ou poderia ter-se passado ao longo da sessão, bem como a descrição do sentimento com que ficaram no final da mesma. O guião para a elaboração dos relatórios pedidos aos alunos (Torres, 2007: 173-176) é uma adaptação do guião construído e utilizado por Carreira (1993: 373-376) na sua dissertação do Mestrado.
- ***Questionário Final***: No final de todas as actividades, foi preenchido individualmente um questionário por todos os alunos da turma (Torres, 2007: 217-222). O questionário final da parte prática do estudo, passado aos alunos, foi uma adaptação dos questionários construídos e utilizados por Carreira (1993: 391-396) e Cunha (2006: 228-230, 248-249), sendo formado por quatro partes.

2.7. Análise dos dados

A análise dos dados foi organizada atendendo ao (i) trabalho desenvolvido pelos alunos em grupo, onde se apresenta uma descrição comentada dos diversos resultados; ao (ii) desempenho dos grupos nas FT, onde são avaliadas todas as FT resolvidas; e às (iii) opiniões dos alunos sobre a experiência realizada/vivida, recolhidas através de um questionário final individual.

3. Apresentação dos resultados

3.1. Dificuldades no trabalho desenvolvido pelos alunos

Inicialmente os alunos estavam um pouco baralhados pois, apesar dos exercícios terem enunciados claros, não se sentiam à vontade neste tipo de actividades. Foi necessário aconselhar alguma calma, proceder a uma pequena explicação sobre o que se pretendia em cada actividade, sugerindo aos alunos que começassem por analisar as situações apresentadas através de esquemas e exemplos particulares e, depois de entenderem o processo, partirem para a generalização.

Um outro momento em que os alunos sentiram dificuldades, foi na elaboração do primeiro relatório, pois não possuíam experiencias neste tipo de trabalho. Para ultrapassar estas dificuldades foi necessário proceder a uma explicação detalhada dos itens mais importantes a abordar.

Apresenta-se no quadro 5, opiniões de alunos extraídas dos relatórios por eles elaborados, que nos levaram a concluir que estes procedimentos foram suficientes para os orientar para as tarefas propostas.

Quadro 5 – Opiniões de alguns alunos sobre as dificuldades no trabalho desenvolvido.

Encontramos algumas dificuldades no início, mas foram facilmente ultrapassadas com a explicação do professor.

A princípio, e talvez por ser a primeira actividade, não compreendemos logo o que era pedido, mas com a ajuda do professor conseguimos começar. A partir daqui, conseguimos avançar e concluir as outras actividades com mais facilidade.

No início elaborar o relatório era algo aborrecido e complicado, apesar das orientações do professor. Com o desenrolar da experiência, comecei a ver os relatórios como algo importante, pois neles sintetizávamos a matéria dada, identificamos dificuldades e consolidamos os conhecimentos adquiridos. As dificuldades devem-se ao facto de não termos experiência neste tipo de trabalhos escritos.

3.2. Desempenho dos grupos nas Fichas de Trabalho

No grupo I, a percentagem de abordagens satisfatórias foi superior a 80% em todas as FT, excepto na FT2, que foi de 71%. Salientamos ainda que nas FT3 e FT7 o desempenho satisfatório atingiu os 100%. Em termos médios, este desempenho rondou os 87%.

No grupo II, a percentagem de abordagens satisfatórias foi superior a 80% nas várias FT, excepto nas FT6 e FT8, cujo desempenho satisfatório ficou pelos 80%. Nas FT1, FT4 e FT7 este sucesso foi pleno, correspondendo a 100% o desempenho satisfatório. A média percentual deste desempenho rondou os 89%.

No grupo III, a percentagem de abordagens satisfatórias foi superior a 80% nas actividades das primeiras sete FT e o desempenho satisfatório foi de 80% na FT8. Nas FT1, FT3 e FT5, este desempenho atingiu os 100%. Salienta-se ainda a excelente média de 92%, obtida pelo grupo no desempenho satisfatório.

No grupo IV, a percentagem de abordagens satisfatórias variou entre os 65%, obtida na FT2, e os 100%, obtida na FT7. Mesmo assim, a média percentual do desempenho satisfatório rondou os 80%.

Fazendo agora uma análise comparativa do desempenho satisfatório dos quatro grupos na parte experimental deste projecto (figura 2), podemos observar que, em termos médios, os grupos I, II e III obtiveram um sucesso superior a 80% e o grupo IV, apesar de ter obtido uma percentagem média inferior à dos restantes grupos, esta encontra-se muito próxima dos 80%.

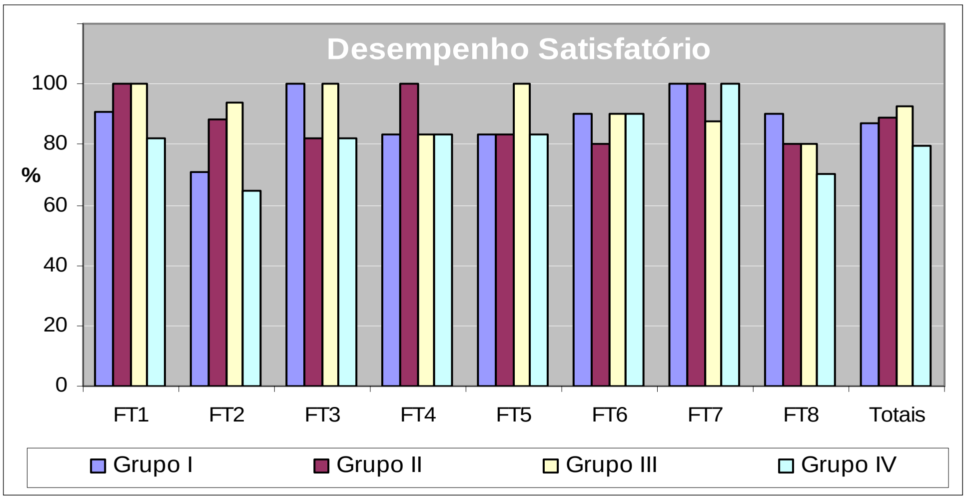


Figura 2 – Gráfico do desempenho satisfatório dos alunos dos 4 grupos em cada uma das FT.

Comparando os grupos em cada uma das FT, podemos observar que:

- Nas FT 1, 3, 4, 5, 6 e 7, todos os grupos obtiveram um sucesso superior a 80%; enquanto que na FT2 apenas os grupos II e III obtiveram desempenho satisfatório superior a 80%; e na FT8 só o grupo IV não conseguiu atingir a marca de 80%;
- Relativamente ao desempenho satisfatório pleno (100%), podemos ver que: o grupo I obteve 100% nas FT 3 e 7; o grupo II obteve 100% nas FT1, 4 e 7; o grupo III obteve 100% nas FT 1, 3 e 5; enquanto que o grupo IV obteve 100% na FT7.

Em suma, todos os grupos obtiveram um desempenho muito positivo em todas as actividades em que se envolveram, algumas das quais ultrapassaram mesmo todas as expectativas. Notou-se um maior desempenho por parte do grupo III, tendo sido o grupo IV que revelou maiores dificuldades. Salienta-se ainda que todos os grupos se empenharam muito neste projecto e desenvolveram as actividades com muita dedicação e rigor, o que se reflecte nos resultados obtidos por todos os grupos.

3.3. As opiniões dos alunos sobre a experiência realizada

As duas primeiras partes do questionário destinaram-se à caracterização dos alunos envolvidos no projecto, enquanto que, a 3.ª e a 4.ª parte, estão relacionadas com o desenvolvimento do estudo.

A análise dos dados das 19 questões da 3.ª parte do questionário final (figura 3), é apresentada por três grupos de questões que se encontram associadas, tendo em conta a sua relevância para responder à questão central de investigação: “A utilização da calculadora gráfica e sensores na modelação matemática contribuirá para melhorar a aprendizagem e motivação dos alunos?”

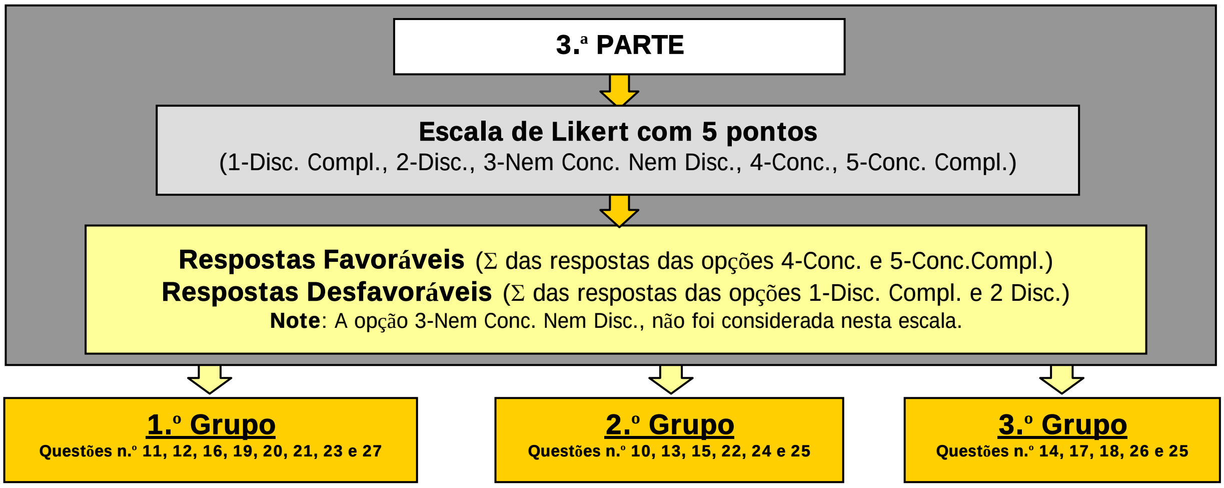


Figura 3 – Escalas utilizadas nas respostas às questões da 3.ª parte do questionário final.

1.º Grupo de questões: Utilização da calculadora gráfica e sensores para melhorar a aprendizagem em Matemática, nomeadamente na temática AMM (quadro 6).

Quadro 6 – Resultados das respostas dadas pelos alunos
nas questões 11, 12, 16, 19, 20, 21, 23 e 27.

N.º	Itens	Percentagem de respostas	
		Favoráveis	Desfavoráveis
11.	Com a utilização da calculadora gráfica e sensores senti estar a construir o meu próprio conhecimento.	81	0
12.	Neste trabalho de grupo, com a ajuda da calculadora gráfica e dos sensores fui capaz de adquirir conhecimentos que sozinho não conseguiria.	75	6
16.	O recurso à calculadora gráfica e aos sensores facilitou a minha aprendizagem das Aplicações e da Modelação Matemática.	81	0
19.	Sozinho e sem utilizar a calculadora gráfica e os sensores seria muito mais difícil chegar às mesmas conclusões.	50	19
20.	No meu grupo, quando algum aluno adquiria um conhecimento todos tirávamos partido disso, aprendendo uns com os outros.	88	0
21.	Durante a realização das várias tarefas, os conhecimentos que foram sendo adquiridos facilitaram a realização e compreensão das tarefas seguintes.	100	0
23.	Ao longo da realização das várias tarefas deste projecto com a calculadora gráfica e os sensores recorri cada vez menos à ajuda do professor.	56	6
27.	Em grupo e sem utilizar a calculadora gráfica e os sensores não teria conseguido chegar às mesmas conclusões.	69	25

Em termos de resultados, salienta-se que, à excepção das questões 19 e 23, todas as restantes apresentam um nível de satisfação superior a 75%. As percentagens de 50% e 56% de respostas favoráveis nas questões número 19 e 23, respectivamente, devem-se ao facto de muitos alunos optarem pelo nível “3-Nem concordo nem discordo” (31% e 38%), o que diminuiu consideravelmente a percentagem de respostas favoráveis.

Apresenta-se no quadro 7 alguns excertos retirados dos relatórios dos alunos, que nos podem ajudar a perceber as melhorias introduzidas na sua aprendizagem.

Quadro 7 – Opiniões de alguns alunos sobre as melhorias introduzidas na aprendizagem.

Na resolução das fichas, quando um elemento do grupo encontra um obstáculo, por não perceber o exercício, debatíamos em conjunto e ultrapassávamos o obstáculo. Também, quando um exercício suscitava diferentes maneiras de o resolver, tentávamos ver a que melhor se adequava à situação apresentada.

Foi muito positivo a parte em que fomos nós a realizar as experiências com a calculadora e sensores, pois assim pude descobrir coisas que já tinha ouvido falar nelas mas nunca tinha percebido.

Estas actividades permitiram uma melhor compreensão e interpretação de gráficos e dos modelos matemáticos através das experiências reais realizadas com recurso à calculadora e sensores.

Quando estudei na Física o movimento do pêndulo, não cheguei a perceber porque era sinusoidal. Quando realizei e repeti a experiência com a calculadora e o sensor do movimento, entendi que as oscilações se repetiam e que se tratava de um movimento periódico.

Foi importante o contacto com estas tecnologias, que nos proporcionou outro tipo de aprendizagem utilizando exemplos reais que de forma analítica não seria possível.

2.º Grupo de questões: Utilização da calculadora gráfica e sensores nas aulas de Matemática para motivar os alunos nas aulas de Matemática (quadro 8).

Quadro 8 – Resultados das respostas dadas pelos alunos nas questões 10, 13, 15, 22, 24 e 25.

N.º	**Itens**	**Percentagem de respostas**	
		Favoráveis	**Desfavoráveis**
10.	Nas actividades realizadas com a calculadora gráfica e sensores aprendi Matemática de uma forma mais “real” e motivadora.	100	0
13.	A utilização da calculadora gráfica e dos sensores neste trabalho de grupo fez com que eu colaborasse mais com os meus colegas do que habitualmente.	69	6
15.	A utilização da calculadora gráfica e dos sensores fez com que eu me sentisse mais responsável pela minha aprendizagem e pela dos meus colegas de grupo.	94	0
22.	No meu grupo, no final de cada tarefa tínhamos a preocupação de que todos a cumprissem e compreendessem.	56	13
24.	O facto de ter sido eu a construir o meu conhecimento despertou em mim vontade de saber mais.	94	0
25.	Partilhei, mais do que habitualmente, com os meus amigos e familiares as actividades e conhecimentos deste projecto.	50	13

Em termos de resultados, salienta-se que nas questões 10, 15 e 24 a percentagem de respostas favoráveis é superior a 90%, sendo de 100% na questão 10. Nas restantes questões a percentagem de respostas favoráveis varia de 50% a 70%. Nestas questões verificou-se uma grande número de respostas no nível "3-Nem concordo nem discordo" (entre 25% e 37%), o que diminuiu a percentagem de respostas favoráveis.

<u>3.º Grupo de questões</u>: Níveis de usabilidade dos recursos tecnológicos (calculadora gráfica e sensores) nas aulas de Matemática (quadro 9).

Quadro 9 – Resultados das respostas dadas pelos alunos nas questões 14, 17, 18, 26 e 28.

N.º	Itens	Percentagem de respostas	
		Favoráveis	**Desfavoráveis**
14.	É fácil de utilizar a calculadora gráfica e os sensores.	31	19
17.	O uso da calculadora gráfica e dos sensores tornou as aulas mais interessantes e atractivas.	94	6
18.	Gostei das actividades desenvolvidas com recurso à calculadora gráfica e aos sensores.	94	6
26.	É fácil aprender a trabalhar com a calculadora gráfica e com os sensores.	63	19
28.	Utilizou-se a calculadora gráfica e os sensores com satisfação e agrado.	88	0

Em termos de resultados, salienta-se que nas questões 17, 18 e 28 os valores percentuais de respostas favoráveis são superiores a 85%, enquanto que na questão 26 esta percentagem é de 63%.

Na questão 14 a percentagem de respostas favoráveis fica-se pelos 31%, o que se deveu ao facto de nesta questão 50% dos alunos terem optado pelo nível "3-Nem concordo nem discordo".

A 4.ª parte do questionário (questões de resposta aberta) aborda a opinião dos alunos sobre a importância dos relatórios, a eficácia do trabalho desenvolvido sobre a aprendizagem, o interesse das actividades e aspectos positivos e negativos das aulas de Aplicações e Modelação Matemática. Assim:

- **Importância dos relatórios**: 87,5% dos alunos têm opinião favorável, argumentando que: (i) nos relatórios é feita a descrição dos raciocínios desenvolvidos na realização das actividades, obrigando os alunos a estar atentos aos pormenores da resolução da FT para os poderem expor/relatar; e (ii) com os relatórios foi possível aos alunos sintetizarem a matéria dada, identificarem dificuldades e consolidarem os conhecimentos adquiridos.
- **Eficácia do trabalho desenvolvido para a aprendizagem das AMM**: todos os alunos expressaram opiniões favoráveis. Segundo os alunos, a maneira interessante e interactiva como decorreram as aulas tornou a aprendizagem de AAM mais fácil. Foram aulas diferentes, o que fez com que os alunos se interessassem mais pela Matemática, não se limitando a

ouvir o professor, mas também descobrindo "coisas" através de outros métodos, como o uso de tecnologias e o trabalho em grupo.

- **Interesse das actividades**: não houve opiniões desfavoráveis, referindo mesmo que experiências do género seriam úteis a outros alunos, independentemente do nível de ensino em que se encontrem. Todos gostariam de relacionar os problemas matemáticos com a realidade e actividades deste género poderiam suscitar curiosidade na sua realização, não só a nível de resolução escrita como também no uso da tecnologia.
- **Aspectos positivos**: os alunos valorizaram as actividades desenvolvidas, o uso das tecnologias, o trabalho de grupo e as experiências realizadas por eles. As aulas foram interactivas e agradáveis, despertando um maior interesse pela Matemática.
- **Aspectos negativos**: falta de alguma organização intra-grupo.

4. Conclusões do estudo

Assim, quer a questão central, quer os objectivos da investigação, encaminha-nos para três itens conclusivos fundamentais: Melhoria da aprendizagem dos alunos nas aulas de AMM; motivação dos alunos nas aulas de AMM; e utilização dos recursos tecnológicos no estudo das AMM.

4.1. Melhoria da aprendizagem

Os resultados encontrados permitem tirar as seguintes conclusões:

(a) As actividades exploradas permitiram aos alunos desenvolver aprendizagens significativas

Os alunos criaram, em cada situação, um modelo matemático, aperfeiçoaram-no sucessivamente (às vezes por "tentativa erro") com base num processo de Modelação Matemática, até encontrarem uma solução satisfatória.

De entre as aprendizagens desenvolvidas pelos alunos, salientam-se: (i) utilizar a Matemática para abordar e compreender situações do mundo real; (ii) descobrir relações entre situações reais conhecidas e determinados modelos matemáticos, assim como lidar com fenómenos reais menos comuns através da sua representação matemática; (iii) desenvolver estratégias e métodos adequados para a resolução das actividades propostas, tais como discussão e análise das situações, elaboração de esquemas, identificação de dados relevantes, tradução de aspectos reais para aspectos matemáticos através de condições, gráficos e tabelas e procura de soluções; (iv) tirar partido da calculadora gráfica e dos sensores para "fazer Matemática" e obter resultados; e (v) praticar a troca de ideias e o confronto de pontos de vista, desenvolvendo a capacidade de argumentação e de exposição de raciocínios.

A conclusões idênticas chegou Carreira (1993) num estudo sobre AMM utilizando a Folha de Cálculo.

(b) A utilização da tecnologia, e em particular da calculadora gráfica e sensores, promoveu e facilitou a aprendizagem dos alunos

Os resultados obtidos no estudo tornam claro que a utilização da calculadora gráfica e dos sensores foi determinante na abordagem e exploração das actividades propostas sobre AMM. Estas tecnologias promoveram e facilitaram a recolha e organização dos dados e a procura de relações funcionais entre eles.

Os alunos usaram as potencialidades dos sensores para obterem dados resultantes de experiências por eles realizadas, bem como usaram os recursos gráficos da calculadora gráfica e tiraram partido das traduções entre tabelas, gráficos e fórmulas para validarem e avaliarem os seus modelos.

(c) O ambiente e as estratégias pedagógicas foram meios facilitadores da aprendizagem dos alunos

Os alunos gostaram das actividades de AMM propostas, consideraram-nas inovadoras em Matemática e reconheceram-nas como importantes/interessantes para a sua aprendizagem. Também geraram nos alunos grande motivação e criaram oportunidades para a aplicação de conhecimentos, despertando novas formas de raciocínio.

A avaliação feita pelos alunos das actividades propostas e da metodologia adoptada nas sessões experimentais permite-nos afirmar que existiu um ambiente pedagógico estimulante e produtivo. A aceitação (quase unânime), por parte dos alunos, da elaboração de um relatório em cada actividade é um exemplo desse ambiente gerado à volta deste projecto, pois, apesar de representarem mais um esforço para os alunos, os relatórios foram vistos como úteis para a clarificação e estruturação de ideias, sistematização de resultados e aprofundamento do trabalho realizado nas aulas.

4.2. Motivação dos alunos

Os resultados encontrados conduzem às seguintes conclusões:

(a) A utilização da tecnologia, em particular da calculadora gráfica e sensores, promoveu e facilitou a autonomia e a motivação dos alunos, bem como a partilha de conhecimentos

O entusiasmo revelado pelos alunos relativamente à integração da calculadora gráfica e sensores no estudo das AMM permitiu uma maior atenção na sala de aula, facilitando a aprendizagem dos alunos na disciplina de Matemática. Também o facto de terem sido os executores das experiências, por iniciativa própria, contribuiu, certamente, para a motivação e autonomia dos alunos, ao permitir a partilha de conhecimentos e ao facilitar o desenvolvimento de aplicações das tecnologias a outras actividades e a outras áreas disciplinares.

Assim, as tecnologias, em particular a calculadora e os sensores, funcionam como elementos desbloqueadores de situações de resistência à aprendizagem da Matemática, criando nos alunos um maior entusiasmo/motivação.

(b) As actividades desenvolvidas em grupo fizeram com que cada elemento do grupo se esforçasse mais, colaborando mais do que o habitual e ajudando na compreensão e no cumprimento das tarefas

O trabalho de grupo estimulou e inspirou os alunos, e a temática AMM foi bem debatida no seio dos grupos aquando da resolução das tarefas propostas, ficando bem compreendida. Verificou-se uma grande colaboração por parte de todos os elementos dos vários grupos, ajudando-se mutuamente e com grande espírito democrático. As opiniões de cada aluno foram discutidas de uma forma construtiva, procurou-se chegar a um maior consenso possível e as decisões tomadas por cada grupo foram de encontro aos consensos gerados.

(c) A auto-construção do conhecimento despertou nos alunos a vontade de saber mais, responsabilizando-os também pela sua aprendizagem e pela dos seus colegas

De actividade para actividade notou-se nos alunos um aumento de motivação e gosto pelo trabalho que estavam a explorar. Nestas aulas, os alunos adoptaram posturas muito positivas e mostraram-se responsáveis e muito colaborativos no seio dos grupos. Mesmo os alunos com mais dificuldades em Matemática e maior desinteresse pela disciplina, nestas sessões foram grandes incentivadores do trabalho desenvolvido pelo grupo, adoptando uma postura responsável e interessada, preocupando-se em saber "como se faz" e "porque se faz", sendo os primeiros a colaborarem nas várias experiências desenvolvidas.

4.3. Utilização dos recursos tecnológicos

Os resultados encontrados conduzem às seguintes conclusões:

(a) Foi fácil aos alunos aprenderem a trabalhar com a calculadora gráfica e com os sensores e o uso destas tecnologias agradou-lhes

Apesar de os alunos terem utilizado neste estudo um modelo de calculadora gráfica diferente da que habitualmente usavam, as dificuldades no seu uso foram muito reduzidas e, a partir de certa altura, deixaram mesmo de existir.

De modo semelhante, relativamente à utilização dos sensores, apesar de serem tecnologias totalmente desconhecidas dos alunos, não foi difícil aprenderem a usarem-nas na realização das experiências propostas. Para tal contribuiu o ter existido no início uma sessão de exploração destas tecnologias de recolha de dados, em que o investigador partilhou com os alunos algumas experiências, nas quais era necessário o uso de sensores acoplados à calculadora gráfica.

Estes aspectos foram reconhecidos pelos alunos nas respostas dadas no questionário final, onde 63% dos alunos referiram que foi fácil aprender a trabalhar com a calculadora gráfica e os sensores e 88% dos alunos utilizaram estas tecnologias com satisfação e agrado.

(b) As tecnologias tornaram as aulas mais interessantes e atractivas, e os alunos preferiram as actividades desenvolvidas com estes recursos

No presente estudo, todos os alunos referiram que as aulas com recurso às novas tecnologias foram mais interessantes e produtivas, sendo uma forma de quebrar a rotina das aulas monótonas de Matemática (método expositivo).

Ainda, segundo os alunos, tratou-se de uma maneira diferente de aprender, onde foram realizadas actividades criativas e o facto de terem sido eles a explorar os problemas apresentados tornou as actividades mais interessantes.

Com a utilização das tecnologias na sala de aula, os alunos começam a aderir mais à Matemática, sendo uma forma de os incentivar e levá-los a ver esta disciplina de uma forma mais interessante.

Em suma: Uma das ideias fundamentais sobre a aprendizagem da Matemática é o envolvimento dos alunos em actividades significativas, tendo oportunidade de vivenciar experiências concretas, recorrendo, por exemplo, a instrumentos tecnológicos como a calculadora gráfica e sensores. Assim, a utilização das tecnologias como recursos de apoio às actividades de AMM, promovem e facilitam a aprendizagem dos alunos nas aulas de Matemática.

Uma segunda ideia, refere-se à auto-construção do conhecimento por parte dos alunos, que passa, essencialmente, pela motivação e pelo gosto/prazer em aprender, pois “dificilmente alguém poderá estudar Matemática com proveito se não tirar algum prazer disso” (Silva, 1991:18).

Uma terceira ideia, tem a ver com a utilização das tecnologias no ensino-aprendizagem da Matemática. O facto de os alunos viverem na era das TIC e serem grandes consumidores das novas tecnologias, faz com que estejam muito familiarizados com o uso destes recursos, sendo por isso, fácil para os alunos aprenderem a utilizar a calculadora gráfica e os sensores.

Assim, urge pensar em mudanças nas aulas de Matemática, principalmente no que diz respeito ao método de ensino utilizado. A facilidade com que estes recursos podem ser manipulados contribui para encorajar uma abordagem experimental e indutiva da Matemática.

Referências

- Carreira, S. (1993): *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de Cálculo*. Colecção Teses. APM, Lisboa.
- Cunha, J. E. (2006): *Aprendizagem colaborativa mediada por ambientes de Geometria Dinâmica: promoção de estratégias e metodologias de investigação-acção com alunos do 8º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade do Minho, Braga.
- Dantas, J. F. (1996): *Estudo de actividades de construção de modelos matemáticos, no âmbito das funções, recorrendo ao SCA (DERIVE)*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade do Minho, Braga.
- Furtado, J. F.; Rei, N. (1991): "Um modelo matemático". *Educação e Matemática*, *18*, 23-26.
- Matos, J. F. (1995): *Modelação Matemática*. Universidade Aberta, Lisboa.
- Matos, J. F. (1997): "Modelação matemática: o papel das tecnologias de informação". *Educação e Matemática*, *45*, 41-43.
- ME (2002): Programa de Matemática A do Ensino Secundário. Ministério da Educação, Lisboa.
- Neto, F. D. M. (1999): "Estruturas em modelagem matemática e computacional". *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, *40*, 75-90.
- Paiva, J. (2002): *Uso das Tecnologias de Informação e Comunicação pelos Professores.* Acedido em 10/06/2007, de: http://nautilus.fis.uc.pt/cec/estudo/.
- Ponte, J. P. (1992): "A modelação no processo de aprendizagem". *Educação e Matemática*, *23*, 15-19.
- Ponte, J. P.; Matos, J. M.; Abrantes, P. (1998): Investigação em educação matemática. Implicações curriculares. *Ciência da Educação*. Instituto Inovação Educativa, Lisboa. ISBN 972-8353-79-0.
- Silva, J. C. (1991). Ensino da Matemática: um problema de hoje e de sempre. *Noesis*. 21, 16-19.
- Silva, J. C. (1992): "As aplicações da Matemática: a vida quotidiana na sala de aula". *Educação e Matemática*, 23, 3-9.
- Silva, J. C.; Pinto, J. A.; Balsa, J. C. (2000): "Modelação Matemática num Ambiente Laboratorial usando Calculadoras Gráficas". *Curso no PROFMAT 2000*, Funchal. Acedido em 20/12/2006, de: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/func model. html.
- Silva, J. S. (1975): *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática. Curso Complementar do Ensino Secundário*. Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica, Lisboa. 2.º/3.º vol.
- Swetz, F. (1992): "Quando e como podemos usar modelação?" *Educação e Matemática*, 23, 45-48.
- TI (1997): Guia da Calculadora Gráfica TI-83. Texas Instruments, Dallas.
- TI (2003): Como começar a utilizar o sistema CBL 2™. Texas Instruments, Dallas.
- TI (2004): *Guia de utilização do CBR: Como começar com o CBR2 Detector de Movimento Sónico*. Texas Instruments, Dallas.
- Topa, P. J. (2003): *Ensino e Aprendizagem em Matemática dos 10 aos 12 anos*. Acedido em 20/02/2006, de: http://www2.ese.ipvc.pt/~cadetevoador1/trabalhos/matemati/matema.htm#Toc45894813.

- Torres, T. A. M. (2007): *Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores: um estudo com alunos do 12.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade do Minho, Braga.

Tomé António Mendes Torres. Professor de Matemática da Escola Secundária Carlos Amarante – Braga/Portugal. Licenciatura em Ensino de Matemática, pela Universidade do Minho – Braga/Portugal. Pós-Graduação nas Novas Tecnologias do Ensino da Matemática, pela Universidade de Lusíada – V. N. Famalicão/Portugal. Mestrado em Educação, com Especialização em Tecnologia Educativa, pela Universidade do Minho – Braga/Portugal.
tome.torres@sapo.pt

Clara Maria Gil Fernandes Pereira Coutinho. Professora Auxiliar do Departamento de Currículo e Tecnologia Educativa do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho – Braga/Portugal. Licenciatura em Economia pelo Instituto Superior de Economia da Universidade Técnica de Lisboa - Portugal. Mestrado em Educação na Especialidade de Tecnologia Educativa, pela Universidade do Minho – Braga/Portugal. Doutoramento em Educação na Especialidade de Tecnologia Educativa pela Universidade do Minho – Braga/Portugal.
ccoutinho@iep.uminho.pt

José António da Silva Fernandes. Professor Auxiliar do Departamento de Metodologias da Educação do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho – Braga/Portugal. Licenciatura em Matemática e Desenho, pela Universidade do Minho – Braga/Portugal. Mestrado em Educação, Especialização em Informática no Ensino, pela Universidade do Minho – Braga/Portugal. Doutoramento em Educação, Área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática, pela Universidade do Minho – Braga/Portugal.
jfernandes@iep.uminho.pt

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 33 - 45
ISSN: 1815-0640

Estándares en educación estadística: Necesidad de conocer la base teórica y empírica que los sustentan

Jesús Humberto Cuevas Acosta y Carlos Ibáñez Bernal

Resumen

En este artículo se describe la importancia del desarrollo de competencias en estadística en los estudiantes, su relación con las evaluaciones nacionales e internacionales, el establecimiento de estándares y las adecuaciones a los currículos escolares en educación básica. Se analiza la pertinencia de conocer la base teórica y empírica en la cual se fundamentan los estándares. Paralelamente se hace una propuesta para conducir una investigación sistemática sobre los factores y procesos psicológicos que pueden determinar el desarrollo de determinadas competencias en estadística siguiendo la lógica del Modelo de las Interacciones Didácticas.

Abstract

In this article the importance of the development of statistical competences in students is described, their relation to national and international evaluations, the establishment of standards and the adjustments recently made to scholar curricula in basic education. The pertinence to know the theoretical and empirical fundamentals on which the standards are based is analyzed. In parallel, a proposal is made to conduct a systematic research on psychological factors and processes that may determine the development of statistical competences following the logic of the Model of the Didactic Interactions.

Introducción

Los resultados obtenidos por estudiantes mexicanos en diversas evaluaciones nacionales e internacionales como ENLACE y PISA respectivamente, muestran desempeños deficientes en la disciplina de matemáticas. De acuerdo con la clasificación utilizada en la prueba ENLACE aplicada en 2007, un 77% de los estudiantes en educación primaria –6 a 12 años de edad– tuvo un nivel de logro “insuficiente a elemental” y en educación secundaria –12 a 15 años – en el mismo nivel de logro se ubicó el 94.4% de los estudiantes evaluados, contrastando con el 0.5% que se posicionó en el nivel de logro “excelente” (INEE, 2007). Resultados similares se presentaron en la evaluación PISA de los años 2003 y 2006. En efecto, los puntajes obtenidos colocan a los estudiantes en el nivel 1 de 6 que comprende la escala global del nivel de desempeño en matemáticas (OCDE, 2003; OCDE, 2007).

Como se puede observar, los resultados obtenidos por estudiantes mexicanos de educación primaria y secundaria evidencian un “bajo rendimiento” en términos de dominio de las matemáticas, tanto en evaluaciones nacionales como internacionales Sin embargo, los estudiantes de otras naciones tampoco muestran resultados sobresalientes. En la evaluación PISA 2003 –que hizo énfasis en la disciplina de matemáticas–, únicamente Hong Kong – China y Finlandia pudieron alcanzar en promedio el nivel 4 de 6. En relación con la evaluación practicada en 2006, Corea y Taipéi China también alcanzaron el nivel 4. Resultado de lo anterior, los niveles de competencia matemática y estadística 5 y 6 en la evaluación PISA 2003 y 2006 quedaron desiertos.

Estos resultados son relevantes si se considera que en las últimas tres décadas se ha incrementado el interés por la enseñanza de la estadística en todos los niveles educativos, particularmente por las sugerencias de organismos, institutos y asociaciones internacionales de fomentar el desarrollo de una cultura estadística en los ciudadanos. Es así que diversas naciones alrededor del mundo han hecho adecuaciones a los currículos escolares, destacando el papel asignado a esta disciplina. También se muestra un marcado interés por adaptar los currículos en términos de estándares internacionales, de tal forma que diversos organismos nacionales e internacionales han promovido la práctica de evaluaciones académicas de los desempeños en estadística.

La importancia de ser competente en estadística

La estadística es una de las disciplinas que más importancia han tenido desde los inicios mismos del hombre. En las últimas décadas, sus métodos y aplicaciones han permeado la mayoría de las áreas de la ciencia. La realidad es que se ha convertido en una disciplina que evolucionó para quedarse e incorporarse a la cultura de la sociedad moderna. Actualmente la estadística está mucho más relacionada con otras disciplinas que las matemáticas. Se ha usado como lenguaje y método de investigación científica en áreas tan diferentes como la lingüística, geografía, física, ingeniería, psicología y economía (ICMI/IASE, 2006)

Sin embargo, en contextos más generales, como las notas que aparecen en medios masivos de comunicación, es común encontrar información con errores en la presentación y valoración de los datos. Del mismo modo, en documentos académicos se pueden encontrar representaciones gráficas y tablas mal elaboradas. En las aulas escolares ocasionalmente se detectan concepciones erróneas sobre conceptos estadísticos básicos. Lo anterior tiene naturalmente implicaciones desfavorables para la sociedad que los lee, observa o escucha. Por tanto, para el ciudadano común el saber estadística se ha convertido en una necesidad y una obligación de su educación integral porque implica más que su uso como herramienta, técnica o método.

Cultura estadística

Derivado de lo anterior, en las últimas dos décadas se ha venido forjando el término *statistical literacy* o *cultura estadística*. En efecto, tanto en eventos académicos como en múltiples publicaciones especializadas alrededor del mundo, es constante el uso de este término para referirse al hecho de que la estadística forma parte de la herencia cultural necesaria para un ciudadano educado. Ya en 1998 María Ottaviani hacía alusión al término cuando mencionaba que la UNESCO implementaba políticas de desarrollo económico y cultural para todas las naciones, incluyendo la alfabetización numérica. En esta última menciona que es importante difundir la estadística entre los ciudadanos no solo como técnica para manipular datos cuantitativos sino también como cultura, particularmente en términos de capacidad de comprensión lógica.

Por otra parte, este término se ha empleado de varias maneras en los últimos años. Katherine K. Wallman lo define en 1993 como la habilidad para entender y evaluar críticamente los resultados que impregnan la vida de los ciudadanos día a día, a la par de la habilidad para apreciar las aportaciones que el pensamiento estadístico puede hacer en nuestra toma de decisiones en el ámbito personal y profesional. Garfield (1999) lo describe como el entendimiento del lenguaje estadístico en función de palabras, símbolos y términos, que permitirán a su vez interpretar gráficos y tablas, aunado a la lectura con sentido de la estadística encontrada en notas y medios en general. Para Peñaloza y Vargas (2006), implica la habilidad para interpretar y evaluar críticamente información, argumentos, fenómenos estocásticos, así como la habilidad para comunicar y comprender significados e implicaciones en la toma de decisiones y la representatividad de las conclusiones obtenidas. Gal (2002) indica que la cultura estadística se refiere a la habilidad de las personas para interpretar y evaluar críticamente información y argumentos en el campo de la estadística. Menciona que esta información puede encontrarse en diversos contextos, como los medios de comunicación pero sin circunscribirse a ellos. Hace referencia a la habilidad para comunicar y discutir opiniones e inquietudes respecto a tal información cuando sea relevante (también citado por Watson y Chick, 2004; Batanero, 2002)

En suma, el término *cultura estadística* ha evolucionado en los últimos años. Cada vez es mayor la insistencia de académicos de diversas naciones en la necesidad de que los ciudadanos sean estadísticamente cultos. Por tanto, diversos comités, asociaciones, institutos y organismos internacionales han promovido adecuaciones a los currículos escolares, sugiriendo que la enseñanza de la estadística asuma un papel acorde a las necesidades actuales de la sociedad.

El propósito de este artículo es reflexionar sobre la necesidad de conocer con precisión la base teórica y empírica en la cual se fundamentan los estándares en estadística contemplados en evaluaciones nacionales e internacionales y a partir de los cuales se hacen adecuaciones a los currículos escolares, especialmente en educación básica. Paralelamente se hace una propuesta para conducir una investigación sistemática sobre los factores y procesos psicológicos implicados en el desarrollo de competencias en estadística, siguiendo la lógica del Modelo de las Interacciones Didácticas propuesto por Carlos Ibáñez en 2007.

Evolución de la estadística en el currículo escolar

En los últimos años la enseñanza de la estadística se ha hecho presente en el currículo escolar de las asignaturas de matemáticas, particularmente en la educación básica. En la educación superior su enseñanza tiene ya un espacio propio. Lo anterior ha generado un auge en la investigación orientada a crear currículos acordes a las necesidades de la sociedad actual.

Inglaterra se encuentra entre los pioneros en el desarrollo de currículos escolares donde se re-significa la enseñanza de la estadística. Un ejemplo de lo anterior son los proyectos desarrollados por el *Schools Council Project on Statistical Education* dirigido a estudiantes entre 11 y 16 años de edad. También en Italia se han desarrollado proyectos de reforma a los currículos escolares. Desde 1979 miembros de la Sociedad Estadística Italiana introdujeron tópicos probabilísticos en el currículo escolar en escuelas de nivel medio básico, con estudiantes entre 11 y 14 años de edad. Posteriormente se incluyó probabilidad, estadística y ciencias computacionales en el currículo escolar de educación elemental. En las últimas dos décadas han continuado los ajustes curriculares donde la estadística además de tener mayor importancia, esta configurando un espacio propio, de tal forma que para académicos como María Ottaviani y Silio Rigatti, la matemática y la estadística muestran muchos puntos de contacto, aunque las consideran como dos disciplinas distintas (Ottaviani y Rigatti, 2004, citados en Burrill y Camden, 2005). Estrada (2002) señala que en España se contempla la enseñanza de la estadística como parte importante dentro de los currículos escolares. En los últimos 15 años se han hecho reformas en la enseñanza en todos los niveles educativos. Particularmente se concede una valoración muy positiva a la enseñanza de la estadística en niveles escolares básicos.

Por otra parte, en los Estados Unidos de América se han desarrollado proyectos importantes. Uno de ellos es el llamado *Data Driven Curriculum Strand for High School Mathematics*, creado por la *National Science Fundation (NSF)*. Según Hopfensperger (1994), este proyecto fue dirigido a estudiantes del los grados 9-12. Otro proyecto es el *Quantitative Literacy Project*, fundado en 1985 por este mismo organismo. En forma similar, el *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM),* ha adoptado las propuestas de la *American Statistical Association (ASA)* con relación a la necesidad de integrar ideas modernas del análisis de datos para estudiantes de distintos niveles educativos. Por tanto, desde 1991 ha incorporado en sus estándares curriculares un apartado sobre análisis de datos y probabilidad.

También en América Latina se han desarrollado proyectos curriculares que enfatizan la importancia de enseñar estadística en diversos niveles educativos. Destaca el programa de extensión en ciencia y tecnología en probabilidad y estadística llamado *Explora*, coordinado por la *Comisión Chilena de Investigación en Ciencia y Tecnología (CONICYT)*. Aravena, Del Pino e Iglesias (2001) mencionan que una parte de este programa fue el proyecto *Azar, Ciencia y Sociedad,* dirigido a estudiantes de 15 a 17 años de edad. Por otra parte, Kucukbeyaz, Batto y Rosa (2006) indican que en Argentina se han hecho adecuaciones a los currículos escolares para incorporar la estadística desde la educación básica hasta la polimodal.

En Asia destacan las reformas curriculares impulsadas en China. En 1980 integró la enseñanza de la probabilidad y estadística en su educación secundaria y en 1990 realizaron ajustes en su currículo incrementando el número de horas dedicadas a su enseñanza. Debido al creciente movimiento internacional para introducir la estadística en los currículos escolares, el ministerio de educación ha impulsado una reforma curricular que las incluya en su educación básica y media básica. La implantación comenzó en el año 2001 y su velocidad de expansión ha sido extraordinaria (Li, 2004, citado en Burrill y Camden, 2005.)

En Oceanía, naciones como Australia y Nueva Zelanda tienen una larga tradición en el impulso al desarrollo de una cultura estadística en su sociedad. La consideran una meta importante en sus currículos escolares. Entre las reformas curriculares destacan las promovidas por el *Australian Education Council (AEC)* en 1991 y 1994. Nueva Zelanda por su parte realizó ajustes a su currículo en 1992 y 1993. Ambas naciones enfatizan la importancia de la estadística en otras disciplinas como la física, biología, educación ambiental, salud, historia, geografía, educación física, entre otras (Watson y Callingham, 2004, citados en Burrill y Camden, 2005.)

Estándares en educación

En las últimas décadas diversos organismos internacionales comenzaron a impulsar el establecimiento de estándares en la educación en todos los niveles educativos. La UNESCO, a través del Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE), plantea la necesidad de establecer estándares con el objetivo de que los usuarios del sistema educativo tengan una idea clara sobre lo que ofrecen las escuelas y lo que pueden esperar de ellas (Casassus, 1997).

Uno de los organismos que ha ejercido mayor influencia es la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Esta organización creó el Programa Internacional para la Evaluación de los Estudiantes (PISA) en 1997. El objetivo primario es dar seguimiento a los resultados en los sistemas educativos de los países miembros, utilizando instrumentos de evaluación con sólidas propiedades de medida, autenticidad y validez educativa. Según la OCDE (2004), diversos aspectos —como la preparación de los estudiantes para afrontar los retos presentes y futuros, dudas sobre la capacidad de analizar, razonar y comunicar ideas adecuadamente, así como la incertidumbre sobre la capacidad de los jóvenes para lograr aprendizajes a lo largo de sus vidas— conformaron las preguntas básicas cuyas respuestas necesitan conocer autoridades educativas y la opinión pública en su conjunto. Este programa evaluativo constituye por sí mismo una “recomendación” para el establecimiento de estándares a sus países miembros, con la consabida adecuación de los currículos escolares.

El programa evalúa el rendimiento de estudiantes de 15 años específicamente en los campos de lectura, matemáticas y ciencia. En relación al área de matemáticas, se evalúan "conocimientos" y habilidades en los estudiantes a partir de tres dimensiones relacionadas con los conceptos, procesos y situaciones de aplicación. Aproximadamente la cuarta parte de los reactivos en esta área están orientados a medir las competencias de los estudiantes en probabilidad y estadística. Según el documento sobre el marco de trabajo para la evaluación en ciencia, lectura y cultura matemática, la probabilidad y estadística tiene especial importancia para la educación matemática en áreas como la producción, análisis y presentación de datos, así como probabilidad e inferencia. Una razón de lo anterior son las múltiples recomendaciones para que estas disciplinas tengan un espacio más prominente en los currículos escolares, particularmente del *Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools* en 1982 y del *National Council of Teachers of Mathematics* (*NCTM)* en los años 1988 y 2000 (OCDE, 2006). En la siguiente tabla se presentan algunas recomendaciones derivadas de los estándares curriculares americanos propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics* en el año 2000.

Tabla #1. Algunas recomendaciones por nivel escolar

Nivel	Deben ser capaces de:
Preescolar	Plantear preguntas y recopilar datos sobre sí mismos y sus alrededores. Ordenar y clasificar objetos según sus características y organizar datos sobre los objetos.
Estudiantes de 3º a 5º grado	Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos. Recoger datos de observación, encuestas y experimentos. Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras. Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos. Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos. Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de datos se muestran mejor con cada una de ellas.
Estudiantes de 6º a 8º grado	Seleccionar, crear y usar representaciones gráficas apropiadas de datos, incluyendo histogramas, diagramas de caja y de dispersión. Encontrar, usar e interpretar medidas de tendencia central y de dispersión, incluyendo la media y rango intercuartil. Discutir y entender la correspondencia entre grupos de datos y sus representaciones gráficas, especialmente histogramas, diagramas de tallo y hojas, diagramas de caja y de dispersión. Utilizar las observaciones sobre diferencias entre dos o más muestras para hacer conjeturas sobre las poblaciones de donde las muestras fueron tomadas. Hacer conjeturas sobre relaciones posibles entre dos características de una muestra en base a los diagramas de dispersión de los datos y de las líneas aproximadas del ajuste.
Estudiantes de 9º a 12º grado	Calcular estadísticas básicas y poder diferenciar entre un estadístico y un parámetro. Para mediciones de datos univariados, ser capaz de representar su distribución, describir su forma y calcular resúmenes estadísticos. Para mediciones de datos bivariados, construir gráficas de dispersión, describir su forma, determinar ecuaciones de regresión y coeficientes de correlación usando herramientas tecnológicas. Identifique tendencias en datos bivariados y encuentre las funciones que modelan o transforman los datos. Usar la simulación para explorar la variabilidad de la muestra de una población conocida y construir distribuciones muestrales. Calcule e interprete el valor esperado de variables aleatorias en casos simples. Entender el concepto de probabilidad condicional y eventos independientes.

Es así que se observa en los estándares del NCTM (2000) una tendencia hacia una enseñanza de la estadística orientada a los datos. Prueba de ello son sus recomendaciones curriculares para los niveles de enseñanza del 2º al 12º grado en los Estados Unidos de América. Aunque estos estándares fueron desarrollados para el sistema educativo estadounidense, su influencia se ha extendido a diversos países que los han adoptado total o parcialmente para configurar sus propios currículos escolares.

En el caso de México, desde finales de la década de 1990 se han aplicado pruebas estándares nacionales, especialmente a partir del año 2002 cuando se fundó el Instituto Nacional para la Evaluación Educativa (INEE). Este instituto realizó en 2005 un estudio comparativo para evaluar estudiantes que cursaban el 6º grado de primaria y 3er grado de secundaria utilizando un instrumento aplicado previamente en 1999 por la Dirección General de Evaluación (DGE) de la Secretaría de Educación Pública (SEP). De acuerdo con el INEE (2005), el estudio empleó cuatro pruebas de estándares nacionales para medir dominios en dos grandes áreas: comprensión lectora y matemáticas. En relación con esta última, se midieron las habilidades desarrolladas por los estudiantes en seis ejes temáticos, destacando los referidos a la presentación, tratamiento de la información y probabilidad.

Puede notarse entonces que el establecimiento de estándares en los sistemas educativos de diversos países es una realidad. Se distingue la consideración y el énfasis dado al establecimiento de estándares y a la medición de habilidades y competencias en estadística. Lo anterior exige que profesores, investigadores y autoridades educativas analicen y valoren el panorama actual de la enseñanza de la estadística en sus instituciones, incluyendo el método que lo fundamenta.

Panorama actual de la investigación en educación estadística

En las últimas décadas han predominado los paradigmas cognitivos como sustento teórico y guía para la enseñanza de la ciencia. Históricamente, estos paradigmas son producto de las posiciones platónicas que asignaban a la mente humana un papel causal del desempeño humano ante la realidad. Dentro de esa lógica mentalista, se llegó a considerar el conocimiento como "algo" que se descubre, y que solo puede ser demostrado si se tiene "almacenado" en la propia mente. En estos paradigmas se observan metáforas distintas que han guiado la investigación: el aprendizaje como adquisición de respuestas, como adquisición de conocimiento y el aprendizaje como construcción de significados (Mayer, 1992; citado por Beltrán, 2002).

Dentro de los paradigmas cognitivos, llama la atención la acepción dada a conceptos como aprendizaje y conocimiento, así como el papel asignado al profesor. Por ejemplo, es común la acepción de que un aprendizaje "requiere conocimiento" y que éste último para ser útil, debe "ser comprendido". También se hace alusión a la necesidad de que el estudiante "haga algo" con el conocimiento que le es "presentado" por un profesor; para ello se le sugiere que lo "manipule" y así estar en condiciones de "construir" su propio conocimiento. De igual forma, otra vertiente cognitiva postula que el aprendizaje implica una "asimilación" orgánica y que el estudiante no se limita a la "adquisición" de conocimiento, sino que además lo "construye" usando sus conocimientos previos. Así, el papel asignado al profesor no es únicamente el de suministrar conocimientos, sino también compartir y participar en su construcción.

Aunado a lo anterior, la acepción de aprendizaje dada en los paradigmas cognitivos es un tanto ambigua. Según Woolfolk (1996), dentro de esta perspectiva, el aprendizaje es un proceso mental activo que consiste tanto en “adquirir”, “recordar” y “utilizar” el conocimiento, aunque perspectivas más modernas sugieren que el conocimiento se “construye” y enfatizan que un individuo debe utilizar al máximo sus “herramientas mentales” que tiene a su disposición para lograrlo.

Como se ve, estos paradigmas asignan a estos conceptos atributos tangibles y susceptibles de ser descritos en términos positivos, lo cual implica una concepción errónea que se traducirá en una articulación teórica incongruente, con una aplicación limitada y resultados difusos. El conocimiento no es un objeto físico, por lo que no se puede tocar, manipular, transmitirse, construirse o incluso compartirse; al menos de acuerdo a la acepción dada en este paradigma. De forma similar, al conceptualizar el conocimiento como si fuera un “objeto físico”, la acepción de aprendizaje como asimilación resulta poco clara. Como menciona Ibáñez (2007):

> Sin embargo, quizás después de realizar un examen cuidadoso del concepto de conocimiento y reflexionar sobre su naturaleza, se pueda concluir que el conocimiento en realidad no es una cosa, es decir, no posee las propiedades que por lo común definen a las entidades concretas y sustanciales. El conocimiento−admítase−no tiene masa, ni volumen, ni ocupa un lugar en el espacio; no se le puede ver, oír, oler o tocar; tampoco se puede comprar, guardar o intercambiar; el conocimiento es insustancial. (p. 89)

Por otra parte, en el paradigma cognitivo se argumenta que

> “no es suficiente que el profesor actúe como transmisor de conocimientos o facilitador del aprendizaje, sino que tiene que mediar el encuentro de sus alumnos con el conocimiento [negritas añadidas], en el sentido de orientar y guiar la actividad constructiva de sus alumnos, proporcionándoles una ayuda ajustada y pertinente a su nivel de competencia”. (Díaz y Hernández, 1998, p. 11)

De nuevo sobresale la acepción de conocimiento como un objeto que puede ser transferido o construido y el papel de profesor como mediador. En palabras de Ibáñez (2007):

> “Bajo esta figura metafórica, el profesor opera como un intermediario encargado de conseguir un producto −el conocimiento− para ofrecerlo a los estudiantes, quienes podrán adquirirlo de acuerdo a sus intereses y motivaciones” (p. 91)

Ahora bien, a pesar de las ambigüedades encontradas en el paradigma cognitivo y sus orientaciones constructivistas, se reconoce que en las últimas décadas sus postulados teóricos y metodológicos han tenido una considerable influencia en la investigación. Ya en 1995 Pérez y Gallego-Badillo mencionaban que el constructivismo era el marco teórico y metodológico que orientaba la gran mayoría de las investigaciones en enseñanza de las ciencias a nivel mundial. Estos postulados también han influido la investigación en educación estadística. Según Batanero, Garfield, Ottaviani y Truran (2000), la investigación en educación estadística es reciente y la formación disciplinar de los investigadores es variada. Producto de lo anterior, hay una relación estrecha entre los problemas de investigación sobre la enseñanza de la estadística y los enfoques teóricos y metodológicos utilizados.

Por otra parte, se considera a la Asociación Internacional para la Enseñanza de la Estadística (IASE por sus siglas en inglés) como una de las principales impulsoras de la educación estadística. Sobresale el apoyo que otorga a las Conferencias Internacionales en Enseñanza Estadística (ICOTS) que se realizan cada cuatro años en diferentes lugares alrededor del mundo. En estas conferencias se presentan los reportes de la investigación en educación estadística más relevantes y que generalmente se han sustentado en paradigmas cognitivo - constructivistas. En consecuencia, se promueve la implementación de métodos de enseñanza derivados de teorías de aprendizaje "generalmente aceptadas", pero que muestran las concepciones ambiguas que se describieron líneas atrás, especialmente las relacionadas con el conocimiento como objeto físico, el aprendizaje como proceso de asimilación de conocimiento, y el papel del profesor como gestor, facilitador, o mediador para que los estudiantes construyan conocimiento. Algunas propuestas sustentadas de alguna manera en estos paradigmas son las de (Fields, Baxter y Seawright, 2006; MacCullough, 2007; Miller, 2000; Peñaloza y Várgas, 2006; Rysz, 2005).

No obstante, en la última década ha cambiado la orientación de la investigación en educación estadística. En efecto, los trabajos presentados en las primeras ediciones de los ICOTS tuvieron como centro de atención la problemática relacionada con los procesos de enseñanza – aprendizaje. Actualmente el énfasis se ha desplazado a la comprensión y el desarrollo de competencias de los estudiantes (Ottaviani, 2002; citada por Batanero, 2002). También destaca la importancia que organismos internacionales como la UNESCO y la OCDE otorgan a la promoción, desarrollo, estandarización y evaluación de competencias en los estudiantes de todos los niveles educativos (UNESCO, 2005; OCDE, 2006).

Sin embargo, esta nueva orientación en investigación sobre educación estadística no ha implicado una evolución en los fundamentos psicológicos de las propuestas educativas para desarrollar competencias en estadística. Se observan las mismas concepciones ambiguas que en las propuestas educativas con basamento cognitivo enfocadas a tratar los problemas relacionados con el proceso de enseñanza – aprendizaje. Incluso se han radicalizado las posturas asumidas por los defensores del paradigma cognitivo, de tal forma que existe poca apertura a considerar otras opciones y perspectivas. Lo anterior representa un obstáculo para lograr una evolución satisfactoria en el tratamiento de la problemática educativa, ya que paradójicamente, esta comunidad epistémica defensora del paradigma cognitivo está incurriendo en prácticas dogmáticas históricamente rechazadas y utilizadas como fundamento de su crítica hacía otras opciones y perspectivas.

Por otra parte, al parecer los métodos de enseñanza fundamentados en el paradigma cognitivo no están respondiendo a las necesidades actuales de la sociedad. Resulta extraño que a más de cuarenta años de la implementación de modelos de enseñanza con soporte en este paradigma, los resultados son poco claros. La mayoría de los estudiantes no se desempeñan adecuadamente ni cumplen con lo que Ibáñez (2007) llama criterios morfológicos y funcionales establecidos por una determinada comunidad epistémica. No se observa evolución consistente en el desempeño de cada estudiante ante situaciones específicas. En cuanto al papel del profesor, los métodos cognitivos de enseñanza le dificultan el poder desarrollar competencias en sus estudiantes. Esto es así posiblemente por diversas razones:

1. Frecuentemente el profesor no se adecua al contexto requerido para que sus estudiantes desarrollen competencias.
2. El profesor presta poca atención a la evolución del comportamiento de los estudiantes frente a situaciones específicas.
3. En relación con su desempeño, el profesor no le indica a sus estudiantes los criterios de logro competencial.
4. Generalmente el profesor intenta desarrollar competencias en forma enciclopédica en lugar de mostrarle a sus estudiantes el "cómo se hace o se dice".

Las razones anteriores pueden ser un factor explicativo de las aseveraciones dadas por profesores y autoridades académicas en relación al declive académico de los estudiantes. Este declive se puede observar en los resultados obtenidos en las diversas evaluaciones nacionales e internacionales. Lo anterior resulta contradictorio si se considera la supuesta "madurez" del paradigma cognitivo- constructivista.

En suma, las propuestas educativas en la enseñanza de la estadística no están mostrando los resultados esperados en relación con el desarrollo de competencias en los estudiantes. Se reconoce que los principales institutos y asociaciones promotoras de la investigación en enseñanza de la estadística tienen como foco de atención el desarrollo de competencias en los estudiantes, sin embargo, continúan estimulando la fundamentación de los estudios en el marco de este paradigma aún y cuando éste presenta una fragilidad manifiesta en conceptos clave y un énfasis en los procesos mentales con la subjetividad que implica.

Partiendo de estas observaciones y considerando las recomendaciones para establecer estándares internacionales en la educación estadística por parte de influyentes institutos, comités y asociaciones, así como su influencia en la orientación de los reactivos, método y dominios a evaluar que componen las pruebas nacionales e internacionales, surgen varias interrogantes que exigen ser contestadas:

¿Qué razones pueden darse para explicar el bajo rendimiento de los estudiantes en las diversas evaluaciones en que participan? ¿Tienen los estudiantes matriculados en los niveles educativos iníciales el desarrollo psicológico suficiente para desempeñarse adecuadamente en las tareas estadísticas que exigen las diversas evaluaciones nacionales e internacionales?¿Qué relación tienen los resultados de las evaluaciones internacionales como PISA con la necesidad de un giro en las opciones y perspectivas psicológicas para mejorar el desempeño de los estudiantes en estadística?¿Cuál es el sustento teórico y empírico de los estándares en estadística que se consideran para su evaluación en educación básica y media básica por parte de los principales organismos evaluadores y que a la postre se utilizan para reconfigurar los currículos escolares?

Conclusiones

En este artículo se presenta un panorama general de la influencia de diversas asociaciones y organismos multilaterales en el establecimiento de estándares en la enseñanza de la estadística, las pruebas derivadas para su evaluación y la adecuación de los currículos escolares. También se alude a los insuficientes resultados obtenidos de la aplicación en educación del paradigma cognitivo–constructivista y de sus modelos psicopedagógicos en las últimas décadas, los que reclaman un cambio radical en la perspectiva a través de la cual se aborda la práctica y la investigación de la problemática educativa en relación con la enseñanza de la estadística, especialmente en educación básica. Se hizo un énfasis especial en la falta de claridad en el sustento empírico que se ha considerado para afirmar que los estudiantes que cursan este nivel escolar tienen la capacidad requerida para abordar y desempeñarse adecuadamente en las tareas estadísticas demandadas por los estándares establecidos en esta disciplina.

Estas razones, hacen que sea urgente revisar a profundidad y detalladamente la investigación psicológica llevada a cabo en el dominio de la estadística que permita determinar la consistencia del sustento teórico y empírico para establecer estándares en la enseñanza y evaluación de esta disciplina a edades tempranas. En caso de encontrar inconsistencias, se deberá generar evidencia empírica suficiente para corroborar o refutar la pertinencia de los estándares propuestos. De llevarse a cabo dicha indagación empírica, creemos que el Modelo de Interacciones Didácticas, sustentado en los postulados de la Psicología Interconductual, representa una alternativa natural para abordar sistemáticamente esta problemática Este modelo considera a los procesos educativos como interacciones complejas entre el estudiante y el ambiente ante el cual debe aprender a desempeñarse observando los criterios convenidos en una determinada comunidad epistémica. Estas características del modelo hacen innecesario concebir el aprendizaje como proceso mental para en su lugar comprenderlo como logro de criterios del desempeño individual. Este solo cambio conceptual genera una mayor precisión y congruencia en sus conceptos, coherencia en su método de trabajo y hace énfasis en analizar los procesos observables entre los principales agentes y factores educativos, lo que permite generar hipótesis factibles de ser probadas.

Bibliografía

- R. Aravena, G. Del Pino y P. Iglesias (2001): “Explora: Un programa Chileno de extensión en ciencia y tecnología en probabilidad y estadística”. *Actas de las Jornadas Europeas sobre la Enseñanza y la Difusión de la Estadística,* 391-402
- C. Batanero (2002): “Los retos de la cultura Estadística”. *Jornadas internacionales de Enseñanza de la Estadística*. Conferencia inaugural. Buenos Aires, Argentina.
- C. Batanero, J. Garfield, M. Ottaviani y J. Truran (2000): “Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias”. *Statistical Education Research Newsletter 1(2).* Reacciones de H. Bacelar, G. W. Bright, T.

Chadjipadelis, L. K. Cordani, M. Glencross, P. K. Ito, F. Jolliffe, C. Konold, S. Lajoie, M. P. y B. Lecoutre, M. Pfannkuch, y D. Pratt, *SERN 1(2).* Respuesta de los autores, *SERN,* 2(2).

- J. Beltrán (2002): *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Editorial Síntesis, Madrid.
- G. Burrill, M. Camden (Eds.) (2005): "Curricular Development in Statistics Education": *International Association for Statistical Education 2004 Roundtable*. International Statistical Institute. Voorburg, the Netherlands
- J. Casassus (1997): *Estándares en educación: conceptos fundamentales*. LLECE, ORELAC/UNESCO.
- F. Díaz, G. Hernández (1998): *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* Editorial McGraw-Hill, México.
- M. Estrada (2002): *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis Doctoral. Bellaterra, Universitat Autónoma de Barcelona.
- P. Fields, A. Baxter y L. Seawright (2006). "A constructivist approach to course design in a graduate statistics course": *International Conference on Statistical Education ICOTS-7*.
- I. Gal (2002): "Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities". *International Statistical Review, 70*(1), 1-51.
- J. Garfield (1999): "Thinking about Statistical Reasoning, Thinking and Literacy"*: First Annual Roundtable on Statistical Thinking, Reasoning, and Literacy (STRL-1).*
- P. Hopfensperger (1994): "A data driven Curriculum strand for High School Mathematics". *The Statistics Teacher Networks*. 37 (2), 4-5
- C. Ibáñez (2007): *Metodología para la planeación de la educación superior. Una aproximación desde la Psicología Interconductual*. (1ª ed). Mora-Cantúa Editores S. A. de C. V., México.
- ICMI/IASE (2006): **"**Estudio conjunto sobre Educación Estadística en la Matemática Escolar: Retos para la Enseñanza y la Formación del Profesor". Recuperado en noviembre del 2007, de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/, Auckland.
- INEE (2007): *Enlace 2007. Cifras nacionales*. [presentación en Power Point]. INEE, México
- INEE. (2005): *Estudio comparativo de la educación básica en México: 2000-2005.* (1ª ed.). INEE, México
- D. Kucukbeyaz, M. Batto y E. Rosa (2006): "Development of statistics methods teaching in primary and secondary education (school)". *International Conference on Statistical Education ICOTS-7.*
- D. MacCullough (2007): *A study of experts' understanding of arithmetic mean Tesis Doctoral*. The Pennsylvania State University.
- J. Miller (2000): *The Quest for The Constructivist Statistics Classroom: Viewing Practice Through Constructivist Theory. Tesis Doctoral*. The Ohio State University.
- N.C.T.M. (2000): *Principles and standards for school mathematics.* N.C.T.M Recuperado el 19 de septiembre del 2007, de http://standardstrial.nctm.org/document/index.htm , Reston, VA
- OCDE (2003): *PISA 2003. Technical Report*. OCDE, París

- OCDE (2004): *Learning for Tomorrow's World First Results from PISA 2003*. OCDE, París.
- OCDE (2006): *Assessing Scientific, Readingand Mathematical Literacy. A Framework for PISA 2006*. OCDE, París.
- OCDE (2007): *PISA 2006 en México*. OCDE, México.
- M. Ottaviani (1998): "Development and perspectives in statistical education". *Proceeding of the Joint IASS/IAOS Conference Statistics for Economic and Social Development*, *Aguascalientes*
- J. Peñaloza, C. Vargas (2006): "¿Qué debe cambiar en el aprendizaje de la estadística en las ciencias del comportamiento?". *XIV Jornadas de ASEPUMA y II Encuentro Internacional.*
- R. Pérez, R. Gallego-Badillo (1995): *Corrientes constructivistas. De los mapas conceptuales a la teoría de la transformación intelectual*. (2ª. ed). Cooperativa Editorial Magisterio, Santa Fe de Bogotá.
- T. Rysz (2005*): Metacognition in learning elementary probability and statistics. Tesis Doctoral.* University of Cincinnati.
- UNESCO (2005): *Educación para todos. El imperativo de la calidad.* Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, París.
- K. Wallman (1993): "Enhancing statistical literacy: enriching our society". *Journal of the American Statistical Association 88(421) 1-8.*
- J. Watson, H. Chick (2004): "What is unusual? The case of a media graph". *Proceedings of the 28th annual conference of the International Study Group for the Psychology of Mathematics Education* 2, 207-214. Bergen, Norway
- A. Woolfolk (1996): *Psicología Educativa*. (6ª ed). Prentice-Hall Hispanoamericana, México.

Jesús Humberto Cuevas Acosta, es ingeniero industrial por el Instituto Tecnológico de Delicias, especialista en docencia y maestro en ciencias en enseñanza de las ciencias por el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica. Actualmente se desempeña como profesor de tiempo completo en el departamento de ciencias básicas del Instituto Tecnológico de Chihuahua II y cursa el programa de Doctorado en Educación en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Autónoma de Chihuahua.
jhca_1@yahoo.com

Carlos Ibáñez Bernal, Universidad Autónoma de Chihuahua, Chihuahua, Chih., México. Nació en la Ciudad de México, D.F. el 16 de noviembre de 1954. Es licenciado y maestro en psicología por la Universidad Nacional Autónoma de México y doctor en ciencia del comportamiento por la Universidad de Guadalajara. Actualmente se desempeña como profesor de tiempo completo en el postgrado de educación en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Autónoma de Chihuahua. Ha publicado un libro y diversos artículos sobre psicología aplicada a la educación desde la perspectiva interconductual.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 47 - 59
ISSN: 1815-0640

A investigação como eixo da formação docente em Educação Matemática

Iran Abreu Mendes

Resumen

Neste artigo discutimos a necessidade de mudança no processo de ensino e pesquisa praticado em cursos de licenciatura em matemática, pois a diretriz para a formação do professor de matemática deve priorizar o desenvolvimento da habilidade investigatória desse profissional, apoiando-se em três pilares: os aspectos histórico-epistemológicos da matemática, o contexto sócio-cultural e o processo cognitivo de geração da matemática. Acreditamos que assim o futuro professor fará na sua prática docente uma investigação constante do desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Abstract

In this article we discussed the change need in the teaching process and researches practiced in degree courses in mathematics, because the guideline for the mathematics teacher's formation should prioritize the development of that professional's ability investigatory, leaning on in three pillars: the aspects description-epistemological of the mathematics, the sociocultural context and the cognitive process of generation of the mathematics. We believed that the future teacher will do like this in your educational practice a constant investigation of the students cognitive development

1. Primeiras considerações

Desde os tempos pré-históricos tem-se notado que a humanidade desenvolve estratégias cognitivas na perspectiva de ler, interpretar, compreender e explicar as realidades natural, social e cultural referente à sua sobrevivência no planeta. No decorrer do seu desenvolvimento histórico-civilizatório as sociedades sempre buscaram construir espaços que viabilizassem o intercâmbio das estratégias cognitivas geradas, bem como a consolidação e difusão dos conhecimentos acumulados a partir do exercício dessas estratégias. Historicamente, o processo produtivo do conhecimento humano concretizou-se com a formação de um corpo teórico-prático de saberes que preservou as estratégias de pensamento geradas em diferentes contextos sócio-culturais, bem como a sua ampliação em dimensões que subsidiaram diversos avanços na busca de soluções para os problemas de sobrevivência humana.

Os ambientes de intercâmbio do conhecimento produzido se materializam com a criação dos ambientes escolares, em níveis e modelos diferenciados, conforme o contexto histórico, filosófico e cultural de cada sociedade. Nesse panorama surgiu o modelo universitário de ensino com a perspectiva de criar ambientes de formalização, sistematização e validação do conhecimento, muitas vezes, produzido em diferentes contextos sócio-culturais.

Neste artigo discutimos a necessidade de mudança no processo de ensino e pesquisa praticado em cursos de licenciatura em matemática, pois a diretriz para a formação do professor de matemática deve priorizar o desenvolvimento da habilidade investigatória desse profissional. Para isso deve apoiar-se nos aspectos histórico-epistemológicos da matemática, no contexto sócio-cultural em que ela se desenvolveu e se desenvolve atualmente e o processo cognitivo de geração dessa matemática pelo estudante. Acreditamos que assim o futuro professor fará na sua prática docente uma investigação constante do desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

É importante considerarmos a matemática como um conhecimento sistematizado em contínua transformação, o que favorece o desenvolvimento de uma proposta de ensino centrada na investigação histórica como eixo para a formação de professores de matemática.

2. Um conhecimento sistematizado em contínua transformação

Historicamente a matemática construída pela sociedade foi difundida culturalmente, mantida viva por estudiosos sobre o assunto, selecionada e reorganizada de acordo com a necessidade da ciência, e armazenada posteriormente em textos de divulgação científica ou em manuais escolares. Esse percurso histórico, entretanto, nos permite estabelecermos um diálogo entre o conhecimento aprendido e disseminado mecanicamente, a memória da prática manipulativa que utiliza os objetos matemáticos, os textos, documentos, relatos da prática e outros registros de um modo geral, que os armazena para torná-los públicos.

Partindo dessa possibilidade, é possível utilizarmos a matemática produzida por outros povos e em outras épocas, para produzir novas matemáticas, compará-las com a produção anterior e ampliar o corpo de conhecimento já existente. Essa dinâmica implica armazenar, selecionar e dispor das informações matemáticas conforme as necessidades configuradas em diferentes contextos e épocas, o que perpassa a produção sócio-cultural de cada sociedade. Nesse movimento, percebemos que o indivíduo não é um observador passivo e, por esse motivo, sempre adiciona suas impressões ao conhecimento experienciado.

Conclui-se daí, então, que o conhecimento produzido traz consigo a subjetividade inerente ao contexto sócio-cultural de quem o produz, posto que essa matemática é construída historicamente em um processo cognitivo ocorrido nos diversos contextos sócio-culturais e se configura sob a forma de questões resolvidas e questões em aberto, que determinam os diversos modos de explicar, compreender e interrogar-se diante dos desafios fornecidos pelo contexto em social.

As questões são geradas na tentativa de resolver problemas do cotidiano. Na medida em que são resolvidas, oferecem elementos que viabilizam a criação de um processo de codificação do problema visando a sua comunicação, bem como a (re)utilização desse processo de representação codificada, na solução de problemas similares surgidos diariamente ou, até mesmo, na sua reformulação viando a tentativa de solução dos novos problemas gerados sócio-culturalmente. Essas são chamadas de *questões resolvidas*, o que para muitos são chamadas, também, modelos matemáticos.

Nessa determinação de respostas para as questões surgidas nos problemas cotidianos bem como na sua codificação, via formulação matemática, as soluções das questões sempre deixam emergir novos questionamentos sobre o problema, que precisam melhor ser explicados. Surgem assim novas questões, aqui chamadas de *questões em aberto*. Essas questões, entretanto, surgem nas entrelinhas de cada questão resolvida e codificada, constituindo-se em fontes provocadoras para novos estudos, transformando, assim, o processo de geração de conhecimento em um ato cíclico de produção de estratégias e representações mentais ou simbólicas que sustentam os modelos matemáticos.

Consideramos, portanto, que o conhecimento matemático é gerado e organizado, primeiramente, a partir de questões abertas surgidas no contexto sócio-cultural, como estratégias de pensamento, elaboradas com vistas a solucionar os problemas surgidos cotidianamente. Quando tais questões são resolvidas e codificadas, passam a se constituir em conhecimentos formalizados que estão prontos para serem comunicados e difundidos através de divulgação científica – o chamado conhecimento institucionalizado, ou seja, o conhecimento considerado científico que será disseminado no meio escolar. O descritor a seguir, mostra como esse processo se configura (Figura 1).

Assim, as questões respondidas passam a se tornar instrumentos ou ferramentas matemáticas que se configuram como representações das estratégias cognitivas a serem utilizadas na busca de soluções para novas dúvidas surgidas e/ou para as interrogações matemáticas já existentes. Tais questões, muitas vezes, são usadas para solucionar as questões em aberto. Percebe-se, entretanto, que na medida em que as questões são codificadas, geram constantemente, novos questionamentos que se configuram em novas questões em aberto.

Diante das considerações apresentadas anteriormente, podemos afirmar que no processo de construção da matemática escolar, o conhecimento deve ser apresentado ao estudante sob a forma de questões em aberto e, por intermédio do professor e em um processo didático baseado na investigação, poderão gerar questões resolvidas pelos estudantes, durante a realização de atividades investigatórias, que certamente se tornam em conhecimento construído. Todavia, esse movimento de aprendizagem fará surgir entre os estudantes alguns novos questionamentos que se manifestarão como novas questões em aberto a serem investigadas posteriormente por eles, para ampliação de sua aprendizagem.

Cabe-nos uma questão: Como se pode abordar a matemática escolar, a partir dessa perspectiva? Há possibilidades de uso da história na geração e difusão desse conhecimento? Essas são algumas das nossas inquietações a respeito da situação atual do ensino da matemática, em diferentes níveis.

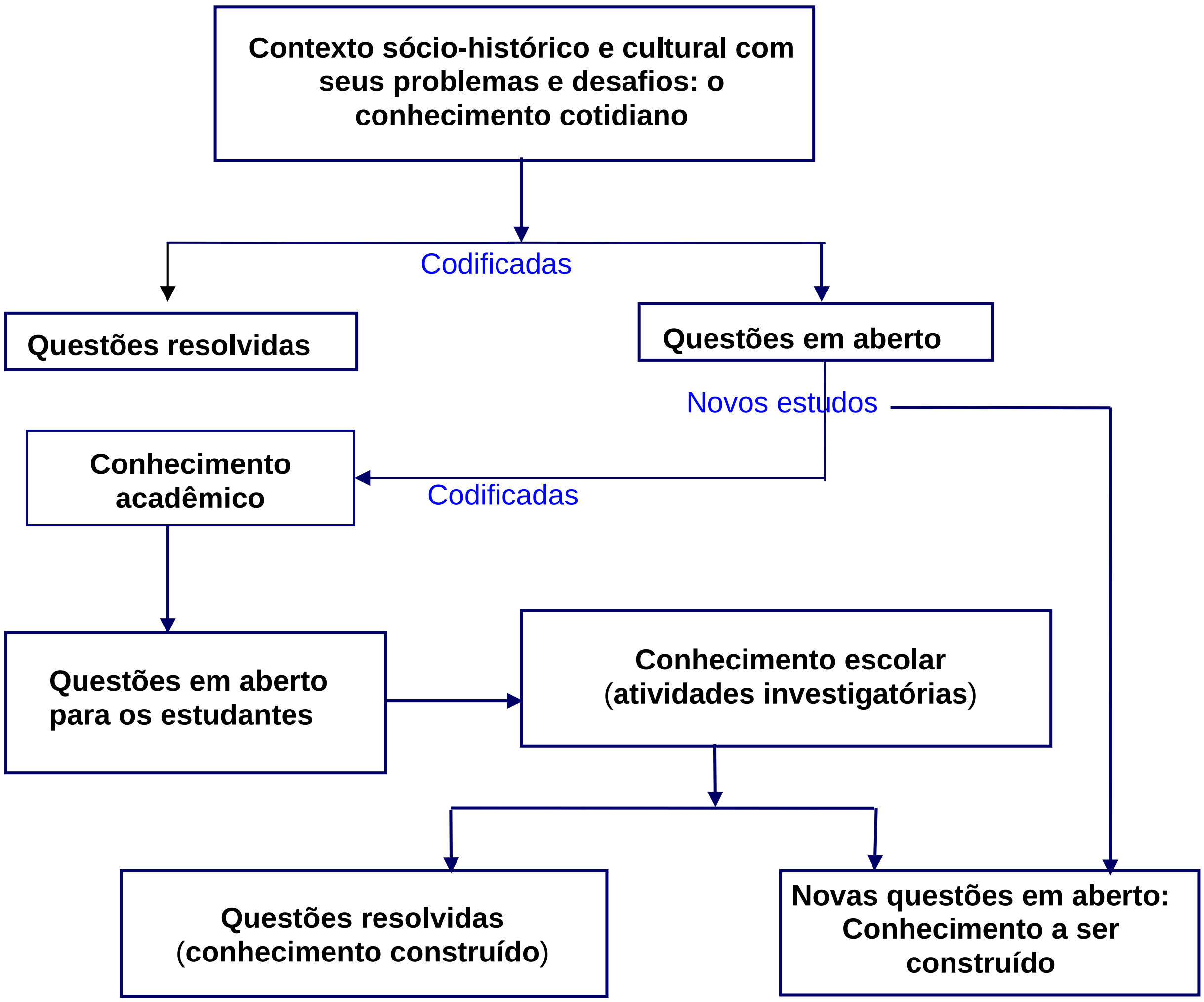


Figura 1

3. Investigação histórica na formação de professores

Um exemplo de abordagem investigatória para a matemática escolar, tomando a história da matemática como eixo norteador, refere-se ao conceito de função, quando ensinado aos alunos de diferentes níveis de ensino. A noção de função é de importância central na concepção e no estudo de modelos (dinâmicos, probabilísticos, de distribuição espacial,...), qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser uma noção-chave na Matemática atual. (TEIXEIRA, P. et al, 1997). Nessa forma de abordar tal assunto, devemos levar em consideração os níveis de desenvolvimento conceitual apontado em diversas etapas da história, tendo em vista o grau de abrangência que se deseja dar a esse tópico damatemática.

Sabemos que o conceito de função sugere a relação entre variáveis e hoje o que nos parece simples. Todavia, essa noção é resultado de uma construção histórica que foi avançando cada vez mais para a abstração e que só no século XIX teve uma formulação matemática mais satisfatória, que hoje é ensinada nas escolas do ensino secundário, retendo no seu fundamento a idéia de dependência entre variáveis. (ROXO, E., 1930;COSTA, M. A.; 1981).

Nossas experiências didáticas na formação de professores de matemática têm mostrado que os alunos necessitam investigar o processo histórico de construção das noções de função para que ampliem sua compreenção das relações entre grandezas (variáveis) na medida em que diferentes problemas foram surgindo no contexto da sociedade e da cultura, sendo resolvidos por estudiosos de diferentes áreas, quase sempre apoiados pelos conhecimentos matemáticos já existentes.

Os estudantes de graduação entretanto, necessitam de um maior envolvimento no processo de investigação histórica para que as várias *questões em aberto* que surgem no seu desenvolvimento cognitivo sobre o tema, seja superado. Isso ocorrerá na medida em que as atividades investigatórias sejam propostas pelo professor durante as experiência na formação matemática do futuro professor de matemática.A trigonometria se constitui em outro assunto que apresenta em seu desenvolvimento histórico, vários fatos possíveis de serem mencionados a fim de concretizar o exercício da investigação histórica em sala de aula, anteriormente mencionadas. Um exemplo disso refere-se ao fato de que as bases da trigonometria estão na astronomia babilônica, nas práticas de medição dos egípcios e nos estudos gregos como os de Hiparco, Menelau e Ptolomeu, com o seu *Almagesto*, útil ao modelo de ciência da sua época. Além disso, há dados históricos indicativos de que os árabes também se apropriaram da trigonometria produzida pelos babilônios, egípcios e gregos, adaptando-a às suas conveniências e necessidades, transformando-a e difundindo-a pela Europa e Ásia até que esse conhecimento se transformasse em uma ferramenta matemática útil à elaboração e representação de novas idéias matemáticas, como por exemplo, os números complexos e as funções de uma variável complexa. (BOYER, C. B., 1974; EVES, H.; 1995).

O teorema de Pitágoras é outro tópico da matemática que pode ser abordado numa perspectiva da investigação histórica pois é a partir de sua elaboração que desencadeou-se o estudo da distância, levando-se a criação do sistema de coordenadas, até a elaboração da geometria analítica, o que nos conduziu ao cálculo diferencial, provocando o aparecimento da análise, entre outros aspectos matemáticos investigados atualmente. (MENDES, I., 2001a; MENDES, I., 2001b).

Se tomarmos, entretanto, uma investigação histórica em uma parte de algum tópico da matemática, na sala de aula, certamente estaremos tomando apenas um dos recortes do objeto dessa investigação, de modo a obter subsídios históricos que levem os alunos a compreenderem esse tópico da matemática escolar. Se a fizermos uma investigação histórica em uma perspectiva mais globalizante, tenderemos a envolver outras áreas do conhecimento relacionadas ao objeto investigado. Em sala de aula, essa abordagem pode ser desenvolvida através de projetos de investigação numa perspectiva transdisciplinar, de modo a resgatar esses aspectos históricos para a construção dos conceitos matemáticos entre os alunos de cada classe, numa perspectiva mais atual.

Assim, é necessário refletirmos acerca das transformações do contexto no qual o ensino de matemática se desenvolve, considerando que a matemática escolar é um conhecimento sistematizado em ampliação e formalização continua que requer o espírito investigatório do aprendiz. Logo o seu ensino deve ser tomado nessa perspectiva quando abordado no contexto da formação de professores de matemática.

A história da matemática vem confirmando cada vez mais que esse conhecimento constitui-se na análise da sucessão de dificuldades encontradas nos diversos contextos humanos, ocasionando o surgimento de questões que provocam o aparecimento dos conceitos matemáticos. O trabalho do matemático implica no envolvimento com um problema no qual procura fazer o levantamento de conjecturas, as investigações necessárias à busca de soluções, a análise das soluções encontradas e as refutações daquelas que se mostram inviáveis a solução fiel do problema investigado.

É com base nessa perspectiva que o processo didático da investigação histórica fica caracterizado, pois caberá, ao professor, desenvolver uma análise histórico-epistemológica (investigação temática) do tópico a ser abordado na sala de aula, considerando que é necessário ampliar seu conhecimento acerca do referido assunto, bem como suas diversas conexões com os conteúdos da matemática em geral. Além disso, é essencial que o professor detenha um conhecimento regular acerca de outras disciplinas, pois tal domínio contribuirá para que seja possível ampliar a compreensão relacional do aluno durante as atividades investigatórias, principalmente a partir da orientação docente.

O professor deve, ainda, tem um bom conhecimento acerca dos aspectos pedagógicos ligados ao ensino de matemática (teorias pedagógicas, estrutura curricular, etc.), bem como acerca da orientação educacional, posto que é necessário conhecer o que os estudantes sabem a respeito do seu contexto sócio-cultural, etc. Daí em diante será possível relacionar tais informações ao contexto do ensino e da educação, considerando que o processo é amplo, contínuo e globalizante, não havendo possibilidade de fragmentação.

No ensino dessa matemática o professor precisa exercitar um pouco de sua reflexão, tendo em vista seus objetivos, o contexto escolar e o alvo principal desse conhecimento: o aluno. É necessário refletir sobre o envolvimento dos alunos nesse processo de investigação e apreensão da matemática, considerando as estratégias cognitivas desenvolvidas por cada um deles quando se deparam com a matemática escolar em diferentes situações de aprendizagem.

4. O contexto universitário e a formação de professores

As abordagens a serem efetivadas no contexto universitário de ensino devem ter como meta principal fomentar a aquisição da educação científica pelos estudantes, posto que é importante explicitar o caráter investigatório nos ambientes em que esses estudantes estão envolvidos. É necessário, porém, que os professores proponham e efetivem atividades formativas permeadas por estratégias didáticas que estimulem o espírito investigador dos estudantes de modo a articular a pesquisa à formação do futuro professor pesquisador (no caso das licenciaturas) que faça da sua prática docente um constante ir e vir na busca de soluções para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Há alguns aspectos importantes que se referem ao ensino de matemática em contexto universitário, pois não é possível conceber esse ensino desvinculado de um espírito investigador que busque sempre articular os conhecimentos discutidos durante a formação acadêmica do futuro professor de matemática, com as condições humanas na qual nos inserimos no planeta. Nesse sentido, é salutar que o professor exerça sua docência, considerando três grandes aspectos: a sociedade, a cultura e processo cognitivo gerado pelos e nos dois primeiros, no qual se inclui a matemática produzida.

A preocupação com tais aspectos refere-se ao processo interativo de viver, ouvir, refletir e propor situações e soluções matemáticas que favoreçam a compreensão e sustentação da vida. Logo, a evidência do alcance dos objetivos do ensino, através da aprendizagem, está nas ações propostas com base na vivência e na reflexão sobre o contexto de vida de cada estudante. No diálogo estabelecido entre essas vivências, certamente ocorrerá um enriquecimento cognitivo amplo para os participantes desse processo.

O trabalho intelectual do estudante de licenciatura em matemática deve ser, muitas vezes, comparável ao do matemático, pois saber matemática não é apenas aprender definições e teoremas e suas utilizações práticas, ou seja, não é somente resolver situações-problema. Encontrar boas questões é tão importante como encontrar soluções para elas. O espírito investigatório desse estudante reflete-se na aquisição de atitude científica: formulação de hipóteses, demonstrações, construção de modelos, elaboração e domínio de linguagem matemática, conceitos, teorias, discussão sobre os conceitos matemáticos, reconhecimento das várias formas de representar um mesmo conceito conforme a cultura ou contexto.

A percepção das possibilidades de uma padronização através do processo de modelação matemática pode ser enriquecida com a realização de atividades investigatórias (pesquisa como metodologia de ensino) que o leve a ler, compreender e formalizar a matemática investigada, sob a forma de conceitos, propriedades e teorias, etc. Nesse sentido, o trabalho do professor deve contribuir para que o estudante de licenciatura exercite uma (re)contextualização da matemática para que a mesma se torne aprendizável pelo aluno.

Cabe, porém, ao professor, simular na sua aula de matemática, um ambiente investigatório em que o conhecimento seja gerado a partir de boas questões e debates que fomentem a criação de uma linguagem adequada à demonstração das soluções das questões geradas e discutidas em sala de aula. O professor deve, portanto, propor e fomentar tal ambiente investigatório entre os alunos. É na construção desse ambiente que o professor poderá possibilitar aos estudantes, o desenvolvimento de habilidades matemáticas para (re)descontextualizar e (re)despersonalizar o seu conhecimento (saber) a partir do que lhe é posto pela comunidade científica e cultural da época.

Trata-se, porém de um exercício da investigação científica com objetivos didáticos, visto ter como principal alvo, a aprendizagem matemática do aluno. Todavia, há um princípio norteador dessa aprendizagem que e decisivamente formativo: a pesquisa como princípio educativo, pois é nela que reside o princípio da autonomia para a aprendizagem do estudante. Algumas experiências já vivenciadas por nós, durante a formação de professores de matemática, têm apontado nessa direção.

5. Perspectiva para a formação de professores pesquisadores

Ao refletirmos sobre as possibilidades metodológicas para a formação de professores de matemática, acreditamos que a universidade precisa formar um professor de matemática com habilidade para pensar a matemática escolar aliada aos seus processos histórico-epistemológicos e sócio-culturais de produção, pois a matemática vem sofrendo uma desvinculação desses aspectos, o que não tem conduzido a escola na sua verdadeira função: a de formação do espírito inquiridor, investigador e reorganizador das informações já existente na tentativa de explicar os fatos de todas as ordens. Há necessidade, portanto, de um estímulo ao ato de aprender a aprender no qual a prática investigatória se mostra como um princípio norteador do ato cognitivo de pensar, constituindo-se no elemento formativo do professor pesquisador com um perfil mais convergente ao ato de fazer para aprender.

O uso de projetos de investigação no ensino de matemática constitui-se em uma alternativa possível para a formação licenciada em matemática, devido subsidiar entre professores e alunos uma relação interativa no processo de construção da matemática escolar, considerando a matemática como produção humana. Essa possibilidade metodológica mostra a importância da pesquisa como forma de conduzir o licenciando na (re)elaboração do conhecimento existente nos livros didáticos de matemática, assim como desenvolver atividades científicas voltadas para a investigação em educação matemática.

A modelagem matemática, as investigações em história da matemática e em etnomatemática podem materializar-se na forma de projetos de investigação no ensino de matemática como alternativa metodológica a serem efetivadas em sala de aula durante todo o curso de formação licenciada em matemática. Essas tendências em Educação Matemática, quando aliadas as habilidades adquiridas no uso de projetos, constituem a estrutura básica para a organização de uma pesquisa voltada à verificação da origem, desenvolvimento e utilização da matemática, ou seja, seus aspectos formativos, informativos e utilitários (MENDES, I. A., 2006a).

Além disso, contribui especificamente no desenvolvimento da capacidade de: observação, raciocínio, método de trabalho, iniciativa, auto-direção, criatividade, cooperação, responsabilidade e auto-expressão. A sua utilização em sala de aula tem o mérito de familiarizar o aluno com um modo de trabalho que ele freqüentemente vai encontrar no plano prático e corrente, na resolução dos problemas comunitários.

6. Experiência na formação de professores

No desenvolvimento de um projeto de ensino, pesquisa e extensão voltado para a formação inicial e continuada de professores de matemática nos deparamos com várias situações bastante significativas com relação à implantação de estratégias metodológicas para o ensino de matemática. Todas elas relacionadas ao uso de projetos de investigação em conjunção com a etnomatemática, a história da matemática ou a modelagem matemática.

A primeira experiência desenvolveu-se em cursos de formação de professores de 1ª a 4ª série (quatro primeiros anos de escolaridade) bem como na formação continuada desses professores. Tal experiência diz respeito à utilização de projetos de investigação em sala de aula. Nessa experiência, discutimos a importância de se desenvolver pequenos projetos de investigação visando estabelecer relações entre a matemática de sala de aula e as situações-problema encontradas no dia-a-dia. Nessa prática elaboramos, desenvolvemos e modelamos matematicamente as situações investigadas, mostrando aos professores a possibilidade de subsidiar a aprendizagem dos estudantes. Os resultados foram tão significativos que desencadearam até, a elaboração de monografias de graduação na área da licenciatura em Matemática, bem como originaram projetos de Especialização e Mestrado, posteriormente. (MENDES, I. A., 1995).

Todavia, apontaram alguns obstáculos na sua utilização metodológica, tais como a: falta de orientação durante o curso de formação inicial; a dificuldade de conectar a realidade a ser investigada com a matemática a ser ensinada. Não obstante, as dificuldades apontadas foram superadas a medida que apontamos possíveis caminhos de superação das dificuldades surgidas. O exercício de superação dos obstáculos evidenciou as potencialidades pedagógicas da proposta em desenvolvimento. (MENDES, I. A., 1995).

Outra experiência ocorreu durante a utilização da história da Matemática como subsídio metodológico para o ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos abordados no ensino fundamental e médio (faixa etária entre os 12 e 18 anos). Essa experiência desenvolveu-se com professores que atuavam nesses níveis de ensino, bem como com alunos de licenciatura em matemática. Nessa prática procuramos evidenciar o caráter investigatório presente nas informações históricas da matemática. A partir desses aspectos elaboramos e testamos com os professores, um módulo de atividades de ensino visando avaliar as possibilidades de uso das mesmas junto aos alunos dos referidos níveis de ensino. (MENDES, I. A., 1997).

Os resultados obtidos mostraram que o caráter investigatório das atividades dá autonomia e dinâmica às aulas, despertando o interesse de quem investiga, gerando aprendizagem. Torna os tópicos abordados, mais significativos para quem aprende; mais significativo porque a investigação possibilita a compreensão da criação matemática centrada na busca continua de respostas às questões humanas, nos diversos contextos e momentos históricos. (MENDES, I. A., 1997).

Ultimamente, realizamos uma pesquisa aplicada com a finalidade principal de investigar a utilização da história da matemática como reorganizador cognitivo da matemática escolar na formação continuada de professores de matemática, tendo em vista a superação das dificuldades conceituais desses professores. Além disso, foi possível analisamos a importância cognitiva do exercício da pesquisa bibliográfica em história da matemática, como meio de compreensão dos conteúdos matemáticos ministrados no ensino fundamental e médio, tendo como implicação didática a elaboração e utilização de textos de história da Matemática para a geração de conceitos matemáticos a serem ensinados no ensino fundamental e médio. (MENDES, I. A., 2006; 2007).

Iniciamos a pesquisa com a investigação das concepções, atitudes e experiências dos professores de matemática acerca da história da matemática e do seu uso pedagógico, de modo a identificar em quais conteúdos matemáticos os professores sentem mais dificuldades de compreensão e domínio pedagógico. A partir dos resultados obtidos elaboramos atividades apoiadas no desenvolvimento histórico da matemática para serem utilizadas pelos professores, visando facilitar a compreensão dos alunos acerca dos temas trabalhados na sala de aula.

A avaliação das possibilidades pedagógicas dessas atividades concretizou-se durante a realização de cursos de aperfeiçoamento oferecido aos professores envolvidos na pesquisa, considerando a importância desse tipo de produção didática para a superação das dificuldades conceituais advindas da formação desses professores. Além disso, testamos e avaliamos as atividades elaboradas. Ao final do estudo organizamos um catálogo com indicação de textos históricos da matemática, já publicados em língua portuguesa. (MENDES, I. A., 2007).

7. Possibilidades de uma formação docente para a pesquisa

Para finalizar é importante apontarmos alguns direcionamentos nos quais será possível trilharmos o nosso caminho se quisermos concretizar, de fato, uma proposta de formação contínua e produtiva para um professor de matemática investigador. Trata-se de avançarmos nos estudos sobre as possibilidades de uso da pesquisa como princípio formativo desse professor, buscando constantemente construir uma proposta de matemática viva para uso em sala de aula em todos os níveis de ensino. Para isso acontecer, é necessário que tenhamos uma compreensão maior dos problemas enfrentados por todos os professores de matemática e pelos estudantes de licenciatura em matemática das universidades. Talvez daí seja possível elaborarmos um programa mais amplo de utilização dessas possibilidades na formação licenciada.

Uma das vias de acesso a essa reformulação da prática do professor de matemática seria estabelecer um diálogo entre as tendências em educação matemática e as disciplinas específicas do curso de licenciatura em matemática, de modo que fossem desenvolvidos estudos investigatórios (pesquisas orientadas semestralmente) articuladas às disciplinas de formação pedagógica desses estudantes de licenciatura, como prática de ensino ou estágio supervisionado. Esse programa abrangeria principalmente os dois últimos anos do curso de formação do professor de matemática.

A aliança entre as disciplinas, através da pesquisa articulada às tendências em Educação Matemática, certamente favorecerá a formação de um professor mais criativo e menos dependente dos livros-textos. Além disso, fomentará nos futuros professores, o espírito investigador centrado na busca do conhecimento e na produção de texto escrito a partir da investigação realizada.

Sob a orientação do professor de metodologia da matemática, os estudantes poderão fazer seus estudos investigatórios acerca dos aspectos histórico-epistemológicos da matemática voltados aos conteúdos matemáticos abordados no ensino fundamental e médio para, em seguida construírem textos didáticos e atividades a serem utilizados com estudantes desses níveis de ensino. Tais produtos certamente fomentarão a elaboração e execução de pequenos projetos de pesquisa voltados ao ensino de matemática a serem desenvolvidos durante as fases de estágio supervisionado.

Os resultados obtidos podem oferecer os subsídios necessários para que, tanto os professores universitários, quanto os estudantes de licenciatura e os professores de matemática do nível fundamental e médio pudessem ter uma visão ampla do processo deflagrado durante esse estudo. Daí em diante, seria possível discutir as estratégias de superação das dificuldades encontradas durante a prática docente.

De acordo com as idéias apresentadas anteriormente, fica evidente a nossa perspectiva de ensino, pesquisa e extensão a ser desenvolvida nos cursos de licenciatura em matemática e na formação continuada de professores, considerando a necessidade da formação de um professor pesquisador.

É muito importante que estudos dessa natureza, realizados pelas universidades, estejam sempre articulados com a rede de ensino fundamental e médio, pois é a partir dessa articulação que surgirá um diálogo no qual os pesquisadores em Educação Matemática poderão encontrar um eco para as suas idéias e certamente poderão ampliar continuamente o seu raio de abrangência na elaboração de estudos e programas que possam contribuir para a superação das dificuldades encontradas por toda a comunidade, em se tratando de Educação Matemática.

Referências

- C. B. Boyer (1974). *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, EDUSP. Tradução de History of Mathematics.
- E. Roxo (1937). A matemática na educação secundária. São Paulo: companhia editora nacional.
- H. Eves (1995) *Introdução à História da Matemática*. Tradução por Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da UNICAMP. Tradução de: An Introduction to the History of Mathematics.
- I. A. Mendes. (2007). Relatório técnico do projeto A formação de professores de matemática a partir da história da matemática. Projeto financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico – CNPq. Natal, RN: Impresso.
- I. A. Mendes (2006a). “Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem”. Natal: flecha do tempo.
- I. A. Mendes (2006b). A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: A história como um agente de cognição na Educação Matemática. I. A. Mendes, et al. Porto Alegre: Sulina, 2006.
- I. A. Mendes. (2005) A formação de professores de matemática a partir da história da matemática. Projeto financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico – CNPq. Natal, RN: Impresso.
- I. A. Mendes (2001a). “Ensino da Matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da matemática”. 283 p. Tese (Doutorado em Educação) - Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- I. A. Mendes (2001b). O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA.

- I. A. Mendes (1997) MENDES, I. A. Ensino de trigonometria através de atividades históricas. 165p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- I. A. Mendes (1995). "Modelagem matemática como suporte metodológico em cursos de formação de professores". Monografia apresenta no Curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática. Belém/PA: UFPA.
- M. A. Costa (1981). Idéias fundamentais da matemática e outros ensaios. São Paulo: Editorial Grijalbo, Ltda. São Paulo: EDUSP.
- P. Teixeira Et al (1997). Funções 10º escolaridade. Lisboa: Ministério da Educação/Depto. de Ensino Secundário.

Iran Abreu Mendes. É professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Licenciado em Matemática e Especialista em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Mestre e Doutor em Educação (Educação Matemática) pela UFRN. Pesquisador do Grupo de Estudos em Matemática e Cultura da UFRN. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, ambos da UFRN. Atualmente desenvolve estudos e pesquisas em História e Ensino de Matemática, Formação de Professores e em Etnomatemática.
iamendes@digizap.com.br

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 61 - 87
ISSN: 1815-0640

Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas

Juan Antonio García Cruz

Resumen

La Historia de las Matemáticas ofrece múltiples ejemplos que pueden utilizarse, en el aula, mediante una metodología muy próxima a la resolución de problemas y al mismo tiempo servir de ejemplificación de cómo las matemáticas organizan los fenómenos cotidianos. Mostramos aquí dos ejemplos tomados de la historia del cálculo de probabilidades y la estadística matemática. El primero es el conocido problema del reparto de la apuesta en la versión de Huygens para la conceptualización de la esperanza matemática. El segundo es el test de hipótesis de Fisher. Ambos se presentan mediante un enfoque en el que los problemas sirven para introducir y desarrollar, no aplicar, los conceptos subyacentes.

Abstract

History of Mathematics gives us multiple situations that can be used as a setting to develop a problem solving approach and at the same time serve as an exemplification of how mathematics can organize everyday phenomena. In this paper we outline this approach using two episodes of the history of probability and statistic. The first is the know Huygens' solution to the problem "division of stake" which is a first step toward the conceptualization of mathematics expectation. The second is the Fisher's test. Both are used to introduce and develop, not to apply, the under laying concepts.

Introducción

En el capítulo segundo de *Didactical Fenomenology of Mathematical Structures*, Freudenthal (1983) expone su *método*. Antes ha utilizado la longitud como medio paradigmático para ilustrar su *fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. En el proceso de construcción del conocimiento matemático Freudenthal distingue entre *phainomenon* y *nooumena*. *Phainomenon* es el fenómeno que queremos comprender y estructurar, mientras que *nooumena* corresponde a las entidades de pensamiento con las que organizamos tal fenómeno. *Nooumenon* procede de *noos* o *nous* forma arcaica, cuyo significado es mente, inteligencia, pensamiento, memoria, razón, intelecto, incluso, alma, intención y deseo. De ahí el sustantivo *to nooumenon*, lo que solo es capaz de concebirse con la mente, la idea. Mientras que *phainomenon* procede de *phainomai*, verbo antiguo que significa aparecer, mostrarse, manifestarse, hacerse visible, de ahí *to phainomeno*, lo comprensible o inteligible solo a través de la experiencia.

Para Freudenthal los *objetos* matemáticos son *nooumena*, y una parte de la matemática puede *experimentarse* como un *phainomenon*. Por ejemplo, los números son *nooumena* y trabajar con números puede ser un *phainomenon*. De esta forma los conceptos, estructuras e ideas matemáticas, es decir los *nooumena*, sirven para organizar los fenómenos, entendidos como experiencias personales, tanto del mundo real como de la misma matemática. Por otro lado, los fenómenos no son algo ajeno a nosotros, sino que son la parte esencial de cómo nosotros percibimos la realidad y vamos conformando nuestras experiencias del mundo y de la propia matemática. La fenomenología de Freudenthal surge de la interrelación entre ambos conceptos.

La relación entre los *phainomena* y los *nooumena* puede estudiarse de varias maneras. Sin embargo a nosotros, profesores de matemáticas, nos interesa principalmente la relación que surge del proceso de enseñanza y aprendizaje. La fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa, en la terminología empleada por Freudenthal (Freudenthal, 1983, p. 28), describir el *nooumenon* en relación con el *phainomena,* del cual es el medio de organización, indicando qué fenómeno se crea para organizar y a cuál puede ser ampliado, cómo actúa sobre tal fenómeno como medio de organización, y con qué poder nos arma a nosotros frente a tal fenómeno. Si en esa relación, lo que se enfatiza es el elemento didáctico, es decir, se presta atención a cómo se adquiere tal relación en el proceso de enseñanza y aprendizaje, entonces se habla de la *fenomenología didáctica* de tal *nooumenon*.

A partir de esta exposición Freudenthal elabora el principio didáctico que sustenta su concepción del proceso de enseñanza: se debe comenzar por los fenómenos que se quiere organizar y enseñar al estudiante a manejar los medios de organización.

Para este enfoque, Freudenthal, conscientemente evita el término *adquisición* del concepto. Por el contrario habla de la *constitución* de objetos mentales (*nooumenon*) que precede en su teoría a la adquisición de conceptos. Frente a la adquisición de los conceptos por medio de la materialización concreta, Freudenthal antepone la constitución de objetos mentales basados en la fenomenología. Para enseñar grupos, en vez de comenzar por el concepto de grupo y buscar alrededor un material concreto para tal concepto, uno debería en primer lugar buscar un fenómeno que empuje al estudiante a constituir el objeto mental que luego será matematizado por el concepto de grupo. En la fenomenología de Freudenthal los *nooumena* son primariamente objetos mentales y sólo de forma secundaria son conceptos. Por lo tanto, la manipulación de objetos mentales precede a la explicitación de los conceptos. Para cada caso particular, uno debería establecer los criterios que se deben cumplir para que se pueda considerar constituido el objeto mental.

Freudenthal aboga por una actividad matemática o por una matemática activa como base de la enseñanza. Tal forma de entender la matemática posee una característica fundamental denominada **matematización**, y que consiste en o*rganizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos y descubrir regularidades, relaciones y estructuras.*

La experimentación de los fenómenos por los alumnos permite la aparición de soluciones y concepciones particulares. La labor del profesor, en coherencia con el principio, debe ser avanzar desde esas soluciones y concepciones particulares hacia las más elaboradas de la matemática. Surge así, la disquisición de A. Treffers (1987) sobre la matemática horizontal y vertical. En el proceso de matematización, dominio del fenómeno mediante herramientas matemáticas, se establece una dicotomía entre los procesos de matemática horizontal y vertical. La matemática horizontal nos lleva desde el mundo real al mundo de los símbolos y posibilita el tratamiento matemático de los problemas. Este tipo de actividad tiene su principal característica en la utilización de los procesos de tipo general siguientes:

- IDENTIFICAR las matemáticas en contextos generales
- ESQUEMATIZAR
- FORMULAR y VISUALIZAR un problema de varias maneras
- DESCUBRIR relaciones y regularidades
- RECONOCER aspectos isomorfos en diferentes problemas
- TRANSFERIR un problema real a uno matemático
- TRANSFERIR un problema real a un modelo matemático conocido.

Una vez que el problema ha sido formulado en términos matemáticos la actividad se vuelve específicamente matemática. Este tipo de matematización ha sido denominada **matematizacion vertical**. Tal actividad se caracteriza por el uso y potenciación de los siguientes procesos generales:

- REPRESENTAR una relación mediante una fórmula
- UTILIZAR diferentes modelos
- REFINAR y AJUSTAR modelos
- COMBINAR e INTEGRAR modelos
- PROBAR regularidades
- FORMULAR un concepto matemático nuevo
- GENERALIZAR

Quizás sea ahora el momento de preguntarnos:

¿Qué papel juega la historia aquí?

Como bien señala Barbin (1996) el estudio de la historia de la matemática por los profesores cambiará de forma profunda el estatus epistemológico del conocimiento matemático y transformará la práctica de la enseñanza. La historia de la matemática muestra, y un ejemplo será los episodios que conforma esta exposición, que los conceptos matemáticos se construyen, se modifican, se amplían en orden a resolver problemas. De esta forma se puede decir que todo conocimiento matemático es la respuesta a una cuestión, es la solución a un problema.

La historia de la matemática y, de forma especial, la historia del cálculo de probabilidades y de la inferencia estadística proporciona suficientes elementos para reconsiderar la enseñanza de dichos temas en la educación secundaria y universitaria. Mostraré tres episodios de la historia que ilustran cómo la matemática sirvió para organizar el fenómeno del azar a través de la resolución de ciertos problemas. A partir de estos episodios reflexionaré sobre la enseñanza y configuraré la propuesta metodológica.

Primer Episodio: ¿Cómo repartir la apuesta en un juego inacabado?

A comienzos de la segunda mitad del siglo XVII ocurren dos hechos históricos que van a significar un hito en el nacimiento y desarrollo de la teoría matemática de las probabilidades. El primero lo constituye la correspondencia entre Pascal y Fermat sobre el problema propuesto a Pascal por el caballero de Meré, y conocido con el nombre del problema del reparto de la apuesta. El problema se puede formular de la siguiente forma: *Dos jugadores participan en un juego. Al comienzo cada uno coloca una misma cantidad de monedas como apuesta. El ganador será el primero que consiga S puntos. Sin embargo, el juego se interrumpe cuando uno de los jugadores ha ganado α puntos ($\alpha < S$) y el otro β puntos ($\beta < S$). La cuestión es cómo dividir la apuesta inicial*.

El segundo hecho es la publicación por C. Huygens de un tratado sobre los cálculos en los juegos de azar: *De ratiociniis in ludo aleae.*

Tanto la correspondencia como el tratado se refieren a la solución del problema del reparto de la apuesta y, como a continuación expondré, son de gran interés para el tema que estamos tratando.

El primer personaje histórico que aborda el problema del reparto de la apuesta es Fra Luca Pacioli (ca1445-ca1514). En su obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venecia 1494) presenta la siguiente versión del problema:

Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 puntos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando queda con 50 puntos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del premio le corresponde a cada bando.

En el supuesto de que se ganen 10 puntos en cada lance, Pacioli afirma que el juego lo más que puede durar es 11 lances. Como se han jugado 8, habrá que dividir la apuesta proporcional a lo que cada grupo ha ganado en el momento de la interrupción. Luego $\frac{8}{11}$ equivale a 22 ducados, y por lo tanto se tiene que al bando que va ganando le corresponderá $\frac{5}{11}$ de 22 ducados ($13\frac{3}{4}$ ducados) y al bando que va perdiendo le corresponderá $\frac{3}{11}$ de 22 ducados ($8\frac{1}{4}$ ducados)[1].

Posteriormente Niccolo Tartaglia (ca1499-1557) aborda el problema en su obra *Trattato generale di numeri et misure* (Venecia 1556). Tartaglia reproduce la solución dada por Paccioli y lanza la siguiente objeción: *Supongamos que en un juego, un bando ha ganado 10 puntos y el otro bando 0 puntos. En esta situación el bando que tiene 10 puntos debería recibir toda la apuesta, lo cual no tiene sentido.* Frente al argumento de Pacioli, puntos ganados por cada jugador, el argumento de Tartaglia se basa en la ventaja de un jugador respecto del otro en el momento en que debe interrumpirse el juego. En la versión del problema dada por Pacioli, la solución de Tartaglia es como sigue: *50-30=20;* $\frac{20}{60}=\frac{1}{3};\frac{22}{3}=7\frac{1}{3}$*, luego el jugador A recibe* $22+7\frac{1}{3}=29\frac{1}{3}$ *y el jugador B recibe* $22-7\frac{1}{3}=14\frac{2}{3}$*.*

En ambos casos, Pacioli y Tartaglia han enfocado el problema hacia lo que ha ocurrido. Un cambio en el enfoque y un método de solución correcto es la contribución de Pascal y Fermat por un lado y Christiaan Huygens por el otro. Sin embargo, G. Cardano (1501-1576) ya había avanzado el enfoque correcto consistente en mirar hacia lo que podría ocurrir en la eventualidad de que el juego continuara, en su obra *Practica arithmeticae generalis* (1539) pero sin proporcionar un método de solución correcto.

El miércoles 29 de julio de 1654, Pascal escribe una carta a Pierre de Fermat en la que entre otras cosas le dice:

"Para conocer el valor del reparto, cuando participan dos jugadores en tres tiradas y pone cada uno 32 monedas en la apuesta:

Supongamos que el primero de ambos tiene 2 puntos y el otro 1 punto. Si, ahora, vuelven a lanzar el dado las posibilidades son tales que si el primero gana, ganará el total de monedas en la apuesta, es decir, 64. Pero si es el otro el que gana, estarán 2 a 2 y en consecuencia, si desean acabar o se interrumpe el juego, sigue que cada uno tomará su apuesta, es decir, 32 monedas.

Por lo tanto Señor, se ha de considerar que, si el primero gana, 64 monedas le pertenecerán y si pierde, entonces sólo le pertenecerán 32 monedas. Si no desearan

[1] La forma de presentar los cálculos es confusa, de hecho corresponden a un reparto proporcional en el que al jugador que va ganando le asignan cinco partes de ocho y tres al que va perdiendo.

jugar este punto, y desearan separarse, el primero podría argumentar "Tengo seguras 32 monedas, pues incluso si pierdo las recibiré. Las 32 restantes, quizás las gane o quizás no, el riesgo es el mismo. Por lo tanto, dividamos esas 32 restantes por la mitad, y dadme además las 32 que tengo seguras".

El primero tendrá 48 monedas y el segundo tendrá 16.

Supongamos ahora que el primer jugador tiene 2 puntos y el segundo ninguno. Las posibilidades son tales que si el primero gana, recibirá toda la apuesta, 64 monedas. Si es el otro el que gana, entonces volvemos al caso anterior en el que el primero tiene 2 puntos y el segundo uno. Sabemos que en este caso al primero le corresponden 48 monedas. Por lo tanto, si desearan seguir jugando, el primero podría argumentar que si gana, le corresponderían 64 monedas y si perdiera le corresponderían 48. En cualquier caso, tendría 48 seguras, luego dividamos las 16 restantes por la mitad pues tiene las mismas posibilidades de ganar que de perder. Luego al primero le corresponden 56 monedas y 8 al segundo.

Supongamos, por último, que el primer jugador tiene un punto y el otro ninguno. Si volvieran a jugar y ganara el primero tendría entonces dos puntos y, estaríamos en el caso anterior en el que le corresponden 56 monedas. Si por el contrario, perdiera entonces le corresponderían 32 monedas. Luego podría argumentar que si no continuaran el juego, le corresponderían 32 monedas en cualquier caso. Las que restan de 52 deben dividirse por la mitad. De 52 restamos 32 y obtenemos 24. 24 dividido por la mitad hace 12. Tomando las 12 con las 32 hacen un total de 44 monedas para el primer jugador.

Pascal expone mediante un ejemplo concreto su método empezando con el tanteo particular 2:1 y continuando con los otros dos posibles tanteos parciales, 2:0 y 1:0, en caso de que se pacte a tres el juego. Para el caso 2:0 el argumento es, resumido, como sigue. Supongamos que gana el primer jugador. Entonces le corresponderá el total de la apuesta, es decir 64 monedas. Si pierde, entonces estarán 2:1 y le corresponderán, según lo visto, 48 monedas. En cualquier caso le corresponderán 48, y de las 64-48= 16 restantes, le corresponderán la mitad, es decir, 8. Por tanto, en este caso al jugador que va ganando le corresponde un total de 48+8=56 monedas. Por último, sea 1:0 el tanteo parcial. Si ahora gana el primero estarán 2:0 y, por lo visto en el caso anterior, le corresponde 56 monedas. Si pierde estarán 1:1 y dividirán por la mitad la apuesta, correspondiendo a cada uno 32 monedas. Por lo tanto, al jugador que va en primer lugar le corresponde 32 que tiene seguras y de las 56-32=24 restantes le corresponde la mitad. Al jugador que lleva ventaja le corresponde, por lo tanto, 32+12=44 monedas en este caso.

A Fermat, el método recursivo de Pascal, le debió parecer poco general y le respondió con otro método en una carta que se ha perdido. Sin embargo, se conserva la respuesta de Pascal en la que critica el método de Fermat, y gracias a la cuál conocemos tal método. El método de Fermat, según se desprende del resto del comentario de Pascal es como sigue. Supongamos que hay dos jugadores. Al primer jugador, le faltan dos lances para ganar y al segundo jugador, le faltan tres lances. Obsérvese el cambio en el enunciado: independientemente del número de lances requeridos y el tanteo particular, lo que importa es el número de lances que le falta a cada jugador para concluir el juego.

Sigamos con la exposición de Pascal del método de Fermat. En primer lugar, hay que determinar *necesariamente* en cuántos lances el juego quedará decidido con toda seguridad. Fermat supone que el juego acabará en cuatro lances. Luego habrá que ver cómo se distribuyen los cuatro lances entre los dos jugadores, cuántas *combinaciones* harán ganar al primero, cuántas al segundo, y dividir la apuesta de acuerdo con tal proporción. Supongamos, pues, que el juego se desarrolla con un dado de dos caras en el que en una cara aparece la letra **a** (gana el primer jugador) y en la otra cara la letra **b** (gana el segundo jugador). ¿Cuántas *combinaciones* posibles hay? La siguiente tabla es la respuesta.

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Luego todas las combinaciones en las que hay dos **a** significa que gana el primer jugador y todas en las que hay tres **b** gana el segundo jugador. Por lo tanto, la apuesta debe dividirse como 11 es a 5. Pascal expresa en la carta las dificultades que tiene de comprender tal razonamiento que involucra *combinaciones*, y hace una objeción seria al método de Fermat *pues no es necesario, cuando al primero le faltan dos lances para ganar, tener que jugar cuatro lances, pues podrían ser dos o tres o quizás cuatro.*

Ambos métodos (Fermat más tarde refinó el suyo), son correctos pero ninguno puede ser considerado como un método general (Maistrov, 1974, p. 45). El primer método general, que conlleva además la formulación de un nuevo concepto, es debido a Christiaan Huygens. Veamos la aportación de C. Huygens a la solución del problema.

En 1655 a la edad de 26 años, Christiaan Huygens (1629-1695) realiza su primer viaje a Francia. Durante su estancia en París llegó a conocer, sin duda, el problema y la respuesta de Pascal. El 27 de abril de 1657 envía a su tutor Frank van Schooten un manuscrito titulado *Van Rekinigh in Spelen van Geluck.* En la carta introductoria, Huygens explica a su tutor el contenido del manuscrito. Por tal carta sabemos que, los problemas de los que trata, ya fueron tema de ocupación de grandes matemáticos de Francia y que, por lo tanto, el mérito de la nueva teoría que presenta no se le debe atribuir sólo a él. También cuenta que tales problemas eran propuestos, entre los sabios franceses, sin mostrar los métodos de solución, con el objetivo de ponerse a prueba entre ellos. La carta finaliza en los siguientes términos: *Por lo tanto, he tenido que examinar y profundizar por mi cuenta en esta materia, empezando con lo más básico. Por esta razón, para mí es imposible afirmar que haya partido desde los mismos principios. Finalmente he hallado que mis* *respuestas, en muchos casos, no difieren de las de ellos*. El manuscrito de Huygens, escrito en holandés, es traducido al latín por el propio van Schooten (Todhunter, 1949, p. 22), con el título *De ratiociniis in ludo aleae,* y publicado como un apéndice al libro quinto de su obra *Exercitationvm Mathematicorum*, sirviendo de introducción la carta antes referida.

De ratiociniis in ludo aleae se desarrolla en catorce páginas (521-534) y consta de catorce proposiciones, más un apéndice de cinco problemas propuestos y no resueltos. Veamos la primera proposición.

Proposición I: Si puedo obtener igual de fácil, **a** *o* **b***, entonces mi* ***expectatio*** *es* $\frac{a+b}{2}$.

A continuación Huygens pasa a probar su afirmación. La prueba consta de dos partes. En la primera determina el valor de la ***expectatio*** para las condiciones de la afirmación; en la segunda parte verifica la solución al más puro estilo utilizado en la resolución de ecuaciones. Huygens supone que su ***expectatio*** es **x** y que puede llegar a ella mediante un juego equitativo. En el juego participa Huygens y un oponente. Cada uno ha colocado **x** como apuesta y acuerdan que el que gane dará la cantidad **a** al que pierda. Luego hay la misma probabilidad de ganar **a** que de ganar **2x-a**.

Sea **2x-a=b**, se sigue que $x = \frac{a+b}{2}$.

En la segunda parte muestra la comprobación. Como cada jugador ha puesto la misma cantidad, el montante total de la apuesta es **a+b**. Si ahora gana entonces dará a su oponente la cantidad **a**, y él se quedará con la cantidad **b**. Si pierde ganará **a** y su oponente **b**. Y ambos sucesos tienen la misma probabilidad (*ganar igual de fácil,* **a** *o* **b**). Luego está comprobado que $\frac{a+b}{2}$ es la ***expectatio***.

Una vez finalizada la prueba, Huygens pone un ejemplo numérico: *Si puedo obtener de igual suerte 3 que 7, entonces mi expectatio es 5.* Más adelante mostraré cómo utilizar este ejemplo en una clase con alumnos de secundaria.

La segunda proposición se refiere a la ***expectatio*** cuando intervienen tres cantidades que puedo ganar con igual suerte. Su intención es que el lector generalice, a partir de las dos primeras proposiciones, utilizando la inducción empírica.

La tercera proposición es la expresión general del concepto de ***expectatio***, utilizando la noción de media ponderada

Proposición III: Sea p el número cualquiera de casos para a, sea q el número cualquiera de casos para b, tomando todos los casos igualmente posibles (proclivi), mi ***expectatio*** *es* $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Proposición IV: Así pues, para que lleguemos primeramente a la cuestión propuesta, sobre cómo hacer la distribución entre diversos jugadores, cuando las suertes de estos son desiguales, es necesario que empecemos por las más fáciles. Supongamos que juego contra mi oponente al primero que gane tres lances, habiendo yo ganado ya dos y mi oponente uno. Deseo saber qué parte de la apuesta me corresponde si decido no jugar los lances restantes.

¡De nuevo encontramos aquí el problema del *reparto de la apuesta* en los mismos términos propuestos por Pascal a Fermat!

Sigamos a Huygens en su exposición: *Para calcular la proporción para cada uno de nosotros, debemos considerar que ocurriría si el juego hubiera continuado. Es cierto, que si yo gano la primera ronda entonces habré acabado el juego y por lo tanto ganaría el monte total de la apuesta, a lo que llamaré* α. *Pero, si es mi oponente el que gana la primera ronda, entonces nuestras posibilidades serán iguales a partir de ese mismo momento, dado que a cada uno nos restará un punto para acabar el juego; por lo tanto cada uno podrá reclamar* $\frac{1}{2}\alpha$. *Evidentemente, tengo las mismas posibilidades de ganar que de perder la primera ronda. Luego, tengo iguales posibilidades de conseguir* α *o* $\frac{1}{2}\alpha$, *de acuerdo con la primera proposición mi proporción es* $\frac{3}{4}\alpha$ *y la de mi oponente* $\frac{1}{4}\alpha$.

Apliquemos la primera proposición de Huygens a la versión del problema presentada por Pascal.

Caso 2:1. Puedo ganar de igual forma 64 que 32, luego mi ***expectatio*** es $\frac{64+32}{2}=48$.

Caso 2:0. Puedo ganar de igual forma 64 que 48, luego mi ***expectatio*** es $\frac{64+48}{2}=56$.

Caso 1:0: Puedo ganar de igual forma 56 que 32, luego mi ***expectatio*** es $\frac{32+56}{2}=44$.

En las tres primeras proposiciones Christiaan Huygens define un nuevo concepto matemático: ***expectatio*****,** y da una expresión para su cálculo. El resto de las proposiciones las dedica a exponer diferentes situaciones y calcular la ***expectatio*** correspondiente. Huygens es el primero que introduce, en la historia de la matemática, la noción de ***esperanza matemática***, la ***expectatio*** es un antecedente de tal concepto[2], a partir de la noción de ***juego equitativo***. En la terminología de Huygens, la ***expectatio*** o ***esperanza matemática*** es tanto lo que espero ganar como el valor de la apuesta para tal ganancia.

Durante casi un siglo, la ***esperanza matemática***, fue un concepto más básico que el concepto de probabilidad (Hacking, 1995, p. 123) y el tratado de Huygens tuvo gran influencia sobre el desarrollo posterior de la nueva teoría. De hecho, el primer capítulo de *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli es una reproducción comentada de *De ratiociniis in ludo aleae,* que además le sirvió de inspiración en el desarrollo de las fórmulas para el cálculo de probabilidades, en especial, la aplicación de la fórmula de la potencia del binomio al cálculo de probabilidades.

El método de Huygens es, sin duda, mucho más simple y elegante. Pero no es fácil de entender para los alumnos. Por otro lado, la solución aportada por Pascal es engorrosa y difícil de seguir. Por último, la solución aportada por Fermat no es económica y puede además inducir al error.

Después de todo esto, es inevitable la pregunta: ¿se puede sacar algún partido de esta historia?

Veamos. Presente a los alumnos la siguiente formulación del problema:

Dos jugadores participan en un juego. Cada uno coloca sobre la mesa 32 monedas. Acuerdan que el primero que consiga 3 puntos gana el total de la apuesta. Por algún motivo el juego debe interrumpirse cuando un jugador lleva ganados 2 puntos y el otro 1 punto. ¿Cómo debe repartirse la apuesta inicial? Justificar el reparto.

Como ve, es la formulación del problema hecha por Pascal y Huygens. Pienso que tal formulación es la más sencilla de las posibles sin llegar a ser trivial (partir de un empate).

Espere un tiempo prudencial y observará la cantidad de preguntas que surgen de los alumnos sobre aclaraciones del juego. En primer lugar, en ningún sitio se ha dicho que el juego sea al azar. Como queremos que tal situación sirva de punto de partida, podemos aclarar este término. Por ejemplo, los jugadores utilizan un artefacto aleatorio en cada lance del juego. Además garantizamos la equidad en los lances. Estas son dos ideas importantes en la conceptualización del azar. Luego vendrán las soluciones.

Por lo general los alumnos presentan la de Pacioli, es decir, el reparto proporcional a los puntos ganados. De forma similar a Pacioli y Tartaglia, los alumnos se centran en lo ocurrido, en la certeza del juego. Este es un obstáculo difícil de superar. Solo la argumentación y la toma de posición en el juego pueden hacer que se acepte otra forma de solución. Para tal fin, se debe conseguir que los alumnos se pongan en la situación del jugador que lleva 1 punto, de esa forma aceptarán como conveniente el argumento de que eso no es lo acordado al principio

[2] En palabras de Freudenthal estaríamos en la fase de constitución del concepto.

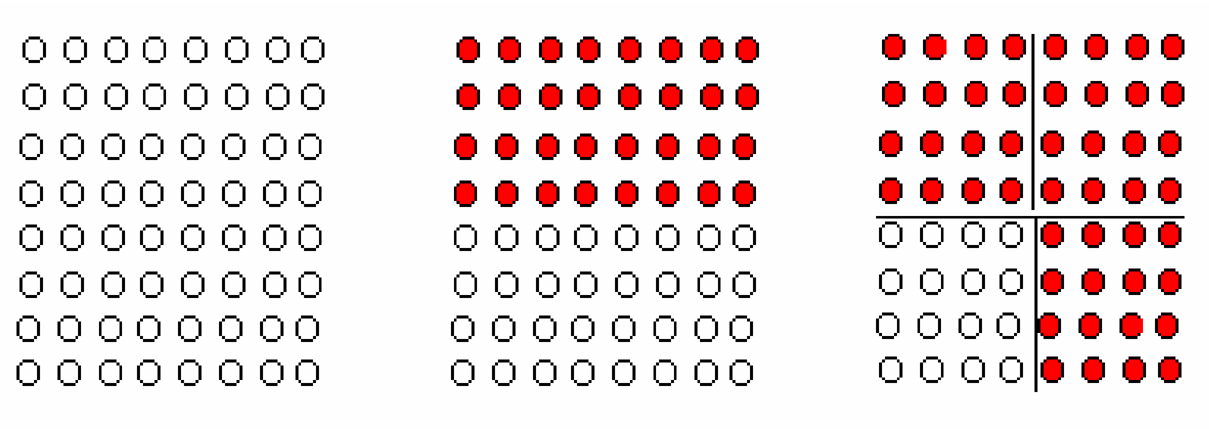
y por lo tanto, no satisface al que va perdiendo. Hay que hacerles ver que si el juego continuara podrían ganar y que tal posibilidad no se tiene en cuenta con la solución de Pacioli. La solución dada por Tartaglia no suele proponerse por los alumnos. Por lo menos a mí nunca se me ha presentado en clase. Es bastante sutil. Pero se puede dar como una forma de solución a discutir en clase. Después de estas discusiones se debe explicitar que ambas soluciones sólo tienen en cuenta lo que ha ocurrido y no lo que podría ocurrir. La certeza frente a lo incierto.

¿Cómo seguir? Lo más probable es que nadie presente una solución como la de Pascal y menos aun como la de Huygens. En caso contrario, es usted un profesor afortunado.

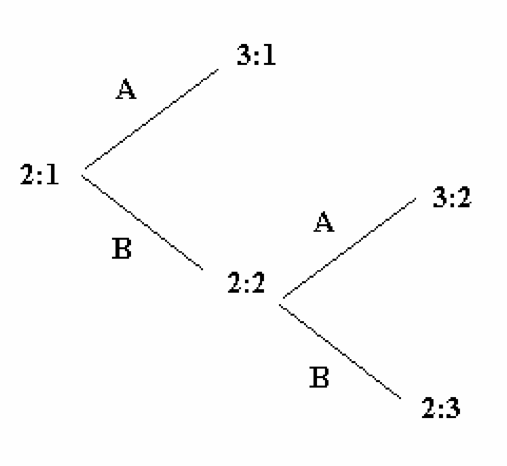
Cuente la historia del problema hasta ese momento. Es una buena oportunidad para que los alumnos se trasladen en el tiempo y vean la importancia matemática que tuvo el problema. Además, les llamará la atención que, la solución dada por ellos, corresponda con un personaje de la antigüedad. Ahora es el momento de que aparezcan en clase Pascal y Fermat.

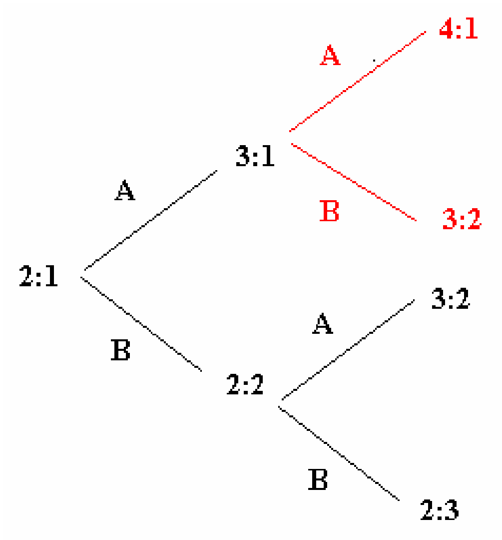
Es el momento de introducir dos herramientas visuales que permiten analizar la situación: el diagrama figurado y el diagrama de árbol.

El siguiente diagrama figurado, reproduce gráficamente el reparto de las 64 monedas, de acuerdo con las diferentes contingencias del juego si este pudiera continuarse. Me fue sugerido por la lectura del texto de Pascal, incluso llegué a pensar que este era el método de solución dado allí.



El diagrama es concluyente, la representación gráfica muestra claramente que de la división de la apuesta inicial en cuatro partes, tres corresponderían al jugador que ha ganado dos juegos y la parte restante al otro jugador. La herramienta visual, geométrica, aporta comprensión, frente a la retórica empleada por Pascal que, aunque suficientemente concisa y explícita, es difícil de seguir.





El método de Fermat sugiere, de alguna manera, el diagrama de árbol. Si utilizáramos el diagrama de árbol para resolver el problema en el que el tanteo parcial está 2:1, tendríamos cuatro posibles formas de acabar el juego, dos favorables al primer jugado(A) y una favorable al segundo jugador (B). Muchos alumnos (y profesores) tienen como primera reacción dividir la apuesta total en tres partes iguales y entregar dos al primer jugador y una al segundo. Pasando por alto que la alternativa 3:1 tiene *mayor valor* que las otras, y estas últimas son *equivalentes*. Para estos alumnos es necesario completar el diagrama con dos resultados que nunca ocurrirían en la realidad y que muestran la *equivalencia* de las cuatro posibles soluciones del juego. Este es en esencia el método de Fermat. Completar la tabla de forma que todas las alternativas fuesen equiprobables pudo ser la idea que indujo a Fermat a presentar una tabla en la que, como hemos visto, hay lances que jamás ocurrirían en la realidad. De este modo, se concluye en que el resultado 3:1 vale el doble que 3:2 o 2:3. Por lo tanto, el reparto debe ser realizado como 3:1 favorable al primer jugador (A).

La combinación de las dos herramientas de representación del problema, el diagrama de árbol y el diagrama figurado, facilitan la comprensión. El diagrama de árbol tiene dos funciones: la primera es facilitar el recuento sistemático de todas las posibilidades (hechos o sucesos) del juego, en segundo lugar hacer operativo el cálculo de la probabilidad de cada evento.

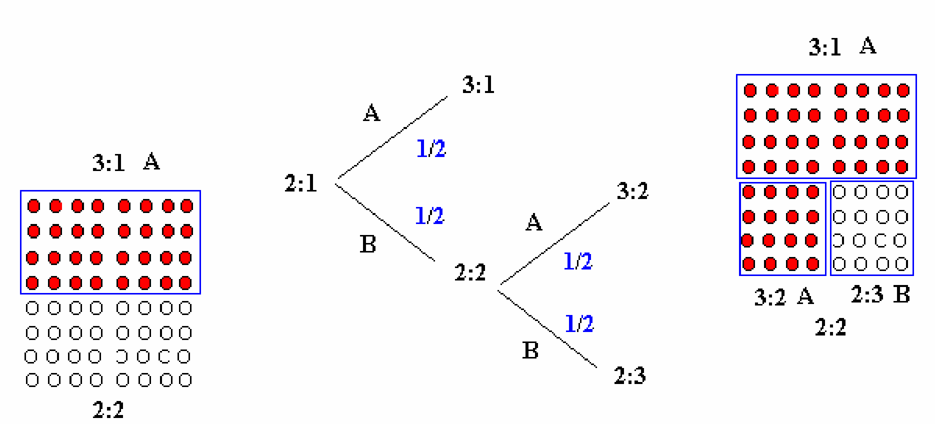
Uno de los errores que suele cometer el alumnado, al utilizar el diagrama de árbol, es sumar las probabilidades que se sitúan en ramas consecutivas.

Si combinamos las dos representaciones (diagrama figurado y diagrama de árbol) podemos introducir el cálculo de las probabilidades de cada evento y de este modo intentar que no se produzca tal error.

A tal fin se debe mantener las dos representaciones a la vista y señalar qué partes de cada representación corresponden entre sí. Se debe comenzar por el diagrama de las monedas y aclarar que el reparto se hará al mismo tiempo que se enumeran las alternativas del juego mediante el diagrama de árbol.

Así, a la alternativa gana A, resultado 3:1, corresponde la mitad de la apuesta total (señalada en el diagrama de monedas). A la alternativa gana B, resultado 2:2, corresponde la parte no recuadrada del diagrama de monedas.

Ahora, el diagrama de árbol continúa a partir de este último resultado, y tendríamos que gana A (3:2), mitad de lo restante (cuarta parte del total) o gana B (2:3), la otra mitad (cuarto restante).



Una vez que se han identificado las partes correspondientes en los dos diagramas, queda por introducir la ley multiplicativa de las probabilidades parciales.

Se mostrará que el resultado $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ corresponde con la probabilidad de la alternativa BA, por ejemplo, dado que su valor es equivalente a la parte correspondiente del diagrama de monedas (3:2 A). De igual forma, se debe señalar la otra alternativa BB que corresponde con la parte del diagrama de monedas (2:3 B). Es conveniente señalar al alumnado que no se deben sumar las probabilidades, pues $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ y tal valor otorgaría el total de la apuesta, lo que no tiene sentido. Pienso que esta es una forma natural de introducir la ley de multiplicación de probabilidades parciales para obtener la probabilidad total a través de un itinerario posible del juego.

La historia del problema de la división de la apuesta es una historia ejemplar de cómo se produce el tránsito entre un conocimiento consolidado, la aritmética y las operaciones básicas de división, reparto y media aritmética, a una nueva teoría matemática: la probabilidad. Los intentos de solución del problema presentados por Pacioli y Tartaglia se centraron en lo que ha ocurrido, puntos ganados por los contrincantes en Pacioli y ventaja del que va ganando en Tartaglia, es decir en aquello sobre lo que tenemos la más absoluta certeza. Girolamo Cardano fue el primero que aventuró otro camino, el camino de lo incierto, de lo que está por ocurrir, pero no fue capaz de arbitrar un algoritmo para la resolución del problema. La correspondencia entre Pascal y Fermat retoma el problema en el punto en que lo había dejado Cardano y, aunque su método de solución es correcto, no establecen una nueva noción conceptual. Esto último es el mérito de Christiaan Huygens. El interés de Huygens está centrado en los *riesgos* o *suertes* que son los que permiten, de forma fácil, definir las apuestas y pagos en un juego de azar, y que más tarde serán la base del estudio de las pensiones vitalicias y de los seguros de vida. Tal punto de partida lleva a la noción de esperanza matemática. Como señalará más tarde J. Bernoulli en su Ars Conjectandi (1713), el significado de la palabra *expectatio* es diferente del uso común de la misma. La expectativa o esperanza, en el sentido ordinario del término, se refiere al resultado posible más favorable, aunque sabemos que puede también ocurrir lo menos favorable. En el uso empleado por Huygens del término debemos entender ***expectatio***, como la esperanza de conseguir lo mejor, disminuida por el temor de conseguir lo peor. De este modo, nuestra ***expectatio*** se sitúa a medio camino entre lo mejor que podemos esperar y lo peor que podemos temer.

Para experimentar el significado del término, nada mejor que una simulación o la realización de un juego. Tomemos el ejemplo que utiliza Huygens en su tratado y al que aplica la primera proposición. Juguemos en clase a un juego en el que se puede ganar 7 € o 3 € con la misma *facilidad*.

¿Cuál es el valor de la apuesta? Según la proposición uno de Huygens es (7+3)/2=5. ¿Cuál es su significado?

Juguemos un cierto número de veces, por ejemplo cada alumno juega veinte veces (simulemos 200 veces el juego). La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos por diez alumnos.

Ganancias (series de 20)	Suma	Promedio
37333333773773333337	84	4,2
73773773733373777333	100	5,0
33337773333773733373	88	4,4
73373737377333737737	100	5,0
33373337373733337337	84	4,2
77337373777333737737	104	5,2
37777373777777337373	112	5,6
37777777777377773777	128	6,4
33777777333777733337	104	5,2
37777373777777733737	116	5,8
		5,1

En primer lugar observamos la variabilidad de las muestras aleatorias obtenidas. La variabilidad es una característica del muestreo aleatorio a la que se accede por experimentación personal al realizar o al observar los resultados de tales muestreos. Si efectuamos el promedio total de ganancia, última casilla de la tercera columna, vemos que corresponde aproximadamente a 5 €. Si jugamos por el placer de jugar, ni ganamos ni perdemos después de un cierto número de jugadas, ese sería el valor de la apuesta que tendríamos que haber realizado en cada jugada para compensar las pérdidas con las ganancias y acabar, prácticamente con la misma cantidad de dinero con la que empezamos a jugar. Eso es lo que ocurriría después de esas 200 jugadas.

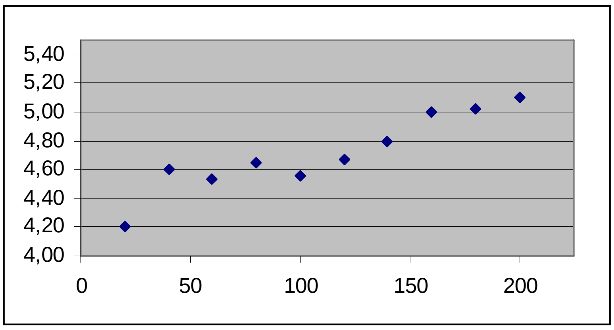
La tabla muestra lo que ha ocurrido en cada uno de los diez juegos individuales a veinte apuestas. En seis casos hemos obtenido una cantidad superior o igual a 100 (apuesta 5, 100 en veinte juegos), habiendo obtenido una cantidad menor en los cuatro casos restantes. Los promedios se dan en la tercera columna. Una primera conclusión es la disparidad en los resultados obtenidos.

Consideremos ahora el juego como una secuencia acumulada de 20, 40, 60... 200 jugadas. Para mejor observar este hecho construyamos una tabla con las frecuencias acumuladas.

jugadas	veces 3	veces 7	Ganancia	promedio	
20	14	6	84	4,20	0,80
40	24	16	184	4,60	0,40
60	37	23	272	4,53	0,47
80	47	33	372	4,65	0,35
100	61	39	456	4,56	0,44
120	70	50	560	4,67	0,33
140	77	63	672	4,80	0,20
160	80	80	800	5,00	0,00
180	89	91	904	5,02	-0,02
200	95	105	1020	5,10	-0,10

La última columna muestra las diferencias del promedio de ganancia con respecto a la ***expectatio*** de Huygens.

Mediante una gráfica:



Se observa una tendencia hacia el valor 5 (¿si?) y una disminución (al mismo tiempo) entre el promedio y la ***expectatio***. Un profesor debe aprovechar la oportunidad que proporciona un ejemplo como este para discutir el significado de la tendencia y cómo se observa.

Esta es una forma de experimentar el fenómeno del azar y que la esperanza de Huygens, y las demás nociones vistas del cálculo de probabilidades, constituyen un medio para su organización.

Segundo Episodio: ¿En qué consiste y qué prueba un experimento estadístico?

Primera parte: Primeras nociones sobre el test de significación. Uso de la Estadística para sustentar creencias sobre las que no se tiene base empírica.

John Arbuthnot nació en 1667 en Inverbervie (Escocia) y murió el 27 de Febrero de 1735 en Londres. En 1692 tradujo al inglés el tratado *De Ratiociniis in ludo aleae* de Christiaan Huygens. En 1696 se graduó como médico por la Universidad de St Andrews. Fue miembro de la Royal Society y del Real Colegio de Médicos. Fue también médico personal de la Reina Ana de Inglaterra. En la actualidad se le considera un escritor satírico, estimado por sus contemporáneos al mismo nivel que Jonathan Swift.

John Arbuthnot ha pasado a la historia de la estadística por haber sido el primero en llevar a cabo un test de inferencia con el que creyó haber probado la existencia de la Divina Providencia. Las Philosophical Transactions de la Royal Society, volumen xxvii, correspondiente a los años 1710, 1711 y 1712 contienen la memoria titulada *An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observ'd in the Births of both Sexes*[3] cuyo autor es John Arbuthnot (Todhunter, 1945, p.197).

La memoria comienza así...*entre las innumerables Huellas de la Divina Providencia que se pueden encontrar en la obras de la Naturaleza, hay una sobresaliente entre las demás y es aquella que se puede observar en el equilibrio exacto que se mantiene entre el número de hombres y mujeres; con ello se garantiza que las especies nunca fallen y no perezcan, ya que cada macho tendrá a su hembra, y de una edad proporcionada. Esta igualdad entre machos y hembras no es el efecto del Azar sino de la Divina Providencia, que trabaja para un buen Fin, y es lo que así paso a demostrar.*

Arbuthnot argumenta que la mano conductora del ser divino puede observarse en la razón casi constante de varones y hembras cristianizados en la ciudad de Londres, en el período de 82 años comprendido entre 1629 y 1710. Los datos presentados por Arbuthnot muestran que, durante tal período, el número anual de varones cristianizados fue consistentemente bastante más alto que el número de hembras cristianizadas, aunque nunca mucho más alto. La razón más alta de varones respecto de las hembras (1'156) ocurrió el año 1661, y equivale a una proporción de varones nacidos igual a 0'536; la proporción más baja (1'011) es la correspondiente al año 1703, que equivale a una proporción de varones nacidos

[3] Un argumento en favor de la Divina Providencia, tomado de la constante regularidad observada en los nacimientos de ambos sexos.

igual a 0'503 (Shoesmith, 1987). Tales observaciones llevaron a Arbuthnot a plantearse la siguiente cuestión:

¿Es el azar lo que determina el sexo o, por el contrario, debemos atribuir tal determinación a una intervención de la Divina Providencia?

Analicemos el *argumento*, forma de razonamiento, empleado por Arbuthnot.

En primer lugar supone la Hipótesis de equiprobabilidad para la determinación del sexo en los nacimientos. Sea, por lo tanto, tal probabilidad igual a 0'5. De esta forma el sexo en los nacimientos queda determinado por el lanzamiento de un dado, equilibrado, con dos caras marcadas respectivamente por V(varón) y H (hembra).

A continuación razona sobre lo que cabría esperar según el modelo de azar asumido. La probabilidad de que, al lanzar un número par n de dados de ese tipo, se obtenga un mismo número de V y de H es igual al término central $\binom{n}{n/2} 0'5^{n}$ del desarrollo de la potencia enésima del binomio. Arbuthnot observa que tal valor es muy pequeño para valores de n grandes, y concluye que es poco probable observar el mismo número de varones que de hembras en los nacimientos. A continuación y, sin realizar ningún cálculo se fija en los extremos las colas de la distribución, afirmando que la probabilidad de que el número de V superen considerablemente al número de H y viceversa es también muy pequeño sin llegar a ser despreciables. Finalmente, concluye que la probabilidad de que ocurra un *año masculino*, es decir un año en el que las V superen a las H es menor que 0'5. Si asumimos que tal probabilidad vale 0'5, entonces la probabilidad de observar 82 años masculinos consecutivos es 10^{-25}, un número del orden $0'5^{82}$. Es decir, **1** posibilidad entre **4836000000000000000000000** (cuatrocientos ochenta y tres mil seiscientos trillones). Sin embargo, tal hecho ha ocurrido como lo demuestra el registro de cristianizados de la ciudad de Londres en los años que van de 1629-1710. Por lo tanto Arbuthnot concluye que la constante regularidad observada en los registros de nacimientos no puede ser debida al azar. Arbuthnot ve en los datos empíricos presentados "*un acto de la voluntad Divina*" (*God will in action!*).

El método de inferencia empleado por Arbuthnot consiste en contrastar una hipótesis (H) por medio de un suceso observado (S), utilizando como valor del contraste la probabilidad condicionada p(S/H). Si el valor de tal probabilidad es pequeño entonces se rechaza la hipótesis H (*likelihood argument*).

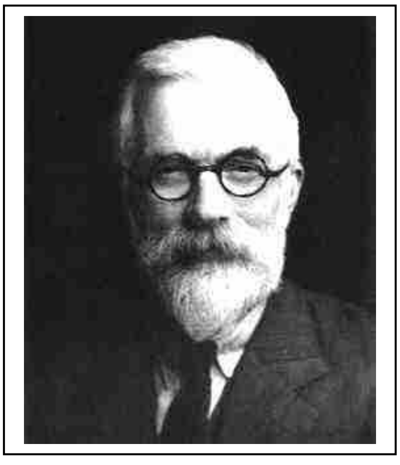
El argumento presenta dos razonamientos, solo uno de los cuales es cierto. Rechazar la equiprobabilidad es una consecuencia inmediata del razonamiento, pero inferir de ahí que la constante regularidad no es debida al azar es falso. Tal regularidad es la que cabría esperar si la proporción de varones a hembras fuera 18:17, como mostró posteriormente Nicolás Bernoulli. No se excluye el fenómeno del azar si el dado equilibrado de dos caras se reemplaza por un dado en el que aparezcan 18 caras con V y 17 con H. Este hecho empírico hace más comprensible la ley de los grandes números de Jacob Bernoulli, al mostrar una estabilidad estadística observable de que un suceso con probabilidad p ocurrirá, con mucha seguridad, en un número de ensayos suficientes, con frecuencia relativa próxima a p.

$$P\left(\left|p-\frac{k}{n}\right|<\varepsilon\right)\rightarrow 1, \quad \text{cuando} \quad n\rightarrow\infty$$

El artículo fue entregado a la Royal Society por William Burnet, hijo de Gilbert Burnet, Obispo de Salisbury. Fue leído en el encuentro de la Royal Society celebrado el 19 de Abril de 1711. Su publicación y difusión por los círculos ilustrados de la época produjo gran controversia. Sin embargo, la importancia del trabajo de Arbuthnot fue que posibilitó el surgimiento de un grupo, dentro de la Royal Society, conocido como los Teólogos, que aprovecharon la estabilidad mostrada por los procesos estocásticos, y demostrada por el primer teorema del límite, como evidencia del designio divino (Hacking, 1995). La regularidad estocástica se utilizó para confirmar ciertas creencias para las cuales no existe evidencia estadística.

Pero más importante aún, el argumento de Arbuthnot fue utilizado por Nicolás Bernoulli como un ejemplo real al que aplicar las primeras leyes de que disponía la teoría emergente de las probabilidades mostrando que, una vez que se descartaba la igualdad inicial de probabilidades en la determinación del sexo, el resultado obtenido en el registro de Londres se derivaba de forma natural del cálculo de probabilidades y que no era necesaria la consideración de una hipótesis divina. Asociar equiprobabilidad con azar, unido a ciertas creencias, se puede convertir en un obstáculo cognitivo en el desarrollo y conceptualización de los conceptos de probabilidad y estadística.

Segunda parte: El test de significación de Fisher. Argumento contra el razonamiento inductivo.



En el desarrollo moderno de la estadística jugó un papel esencial Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), al punto de ser considerado uno de sus fundadores. Entre las importantes contribuciones de Fisher cabe destacar el diseño de experimentos y el test de hipótesis.

Según Fisher, el razonamiento inductivo nunca puede confirmar una hipótesis. En todo caso, a lo más que se puede llegar es a rechazar la hipótesis por insostenible a la luz de los datos aportados por los experimentos.

La obra *The World of Mathematics* (Newman, 1956) contiene un artículo de R. A. Fisher paradigmático sobre la prueba de significación de una hipótesis estadística titulado *Las matemáticas de una catadora de té*.

El artículo comienza con la siguiente afirmación, *Una dama afirma que al probar el té con leche puede distinguir qué fue lo primero que se echó en la taza, el té o la leche*.

Fisher considera el problema de plantear un experimento mediante el cuál se llegue a demostrar la afirmación de la catadora de té, y que constituye toda una metodología sobre la prueba de significación de una hipótesis estadística.

La cuestión de partida es ¿Cómo realizar el experimento y por qué?

Experimento

Se preparan 8 tes con leche, cuatro de una forma y cuatro de la otra. Luego se llevan las tazas, escogidas al azar, a la catadora para que indique su opinión. Deberá separar las tazas en dos grupos según su modo de formación.

Interpretación de los resultados posibles

Es necesario que consideremos todos los resultados posibles y qué interpretación corresponde a cada uno de ellos. Al separar las tazas en dos grupos, caben los siguientes resultados:

i) Cuatro aciertos.

ii) Tres aciertos y un fallo.

iii) Dos aciertos y dos fallos.

iv) Un acierto y cuatro fallos.

v) Ningún acierto.

Lo siguiente que se pregunta Fisher es qué probabilidad tiene cada uno de tales resultados. Como hay 70 formas de elegir 4 tazas de un conjunto de 8, entonces la siguiente tabla proporciona la distribución de probabilidades de los resultados posibles del experimento:

Resultado	**Probabilidad**
Cuatro aciertos	1/70
Tres aciertos y un fallo	16/70
Dos aciertos y dos fallos	36/70
Un acierto y tres fallos	16/70
Ningún acierto	1/70

Una persona que no tuviese la habilidad de la catadora de té conseguiría acertar las cuatro tazas con una probabilidad de 1/70, es decir, un poco más de un 1%. La posibilidad de éxito es tan pequeña que habría que atribuir tal resultado al azar.

La tabla anterior proporciona los resultados del experimento bajo la hipótesis de que un sujeto no distingue entre dos objetos (Hipótesis nula). Bajo esa hipótesis se ha construido la tabla de probabilidades de los resultados posibles del experimento, es decir, la hipótesis nula proporciona la distribución de probabilidad para el contraste de la hipótesis.

Una objeción: ¿Por qué ocho tazas y no, por ejemplo, seis tazas con tres de cada tipo? Aclarar esta objeción nos lleva a clarificar la prueba de significación.

Prueba de significación

¿Cuándo consideraremos que el resultado del experimento no es debido al azar y que, por lo tanto, es significativo estadísticamente? Esta cuestión nos conduce a fijar el nivel de significación de la prueba. Fisher fija el nivel base o tipo de significación en 1 sobre 20 (*5%, por corriente y conveniente*).

Si hubiéramos utilizado seis tazas, tres de cada tipo, entonces la probabilidad de dividir correctamente el conjunto de seis tazas es 1/20, es decir el sujeto obtendría un éxito en la prueba, por puro azar, en el 5% de las veces que la realizara. Esta es la razón por la que se descarta el experimento compuesto por seis y se opta por el de ocho tazas.

Al fijar tal nivel, también se descarta el resultado tres aciertos y un fallo, pues su probabilidad es algo superior al 20%.

Luego los posibles resultados del experimento se dividen en dos grupos cuyas interpretaciones son opuestas: los que no muestran una desviación significativa respecto de la hipótesis y aquellos que sí muestran diferencias significativas, regiones de aceptación y rechazo de la hipótesis, respectivamente.

El examen de los resultados posibles del experimento nos proporciona una prueba estadística significativa. Sin embargo, Fisher hace una observación importante: *El hecho de que 1 acontecimiento sobre 70 (cuatro aciertos) sea significativo estadísticamente no basta para demostrar experimentalmente cualquier fenómeno natural. Para afirmar que un fenómeno natural es experimentalmente demostrable se necesita un verdadero método de realización y no sólo una referencia aislada*.

Cuando sometemos una hipótesis a un test, nuestra intención es concluir que la misma es verdadera o falsa. Sin embargo, la lógica nos impide llegar a conclusiones tan categóricas.

Veamos desde el punto de vista lógico el significado de la observación anterior de Fisher.

Sea H la hipótesis “la catadora posee la habilidad que afirma”. Sea S el suceso “dadas 8 tazas, la catadora divide correctamente el conjunto en dos mitades”. Tenemos pues que si H es verdadera también lo es S. Ahora bien, S es verdadera (*ocurre* es el significado de *verdad* para nuestro caso), ¿qué podemos concluir respecto de H

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{H \rightarrow S} \\ \mathbf{S}\end{array}}{\mathbf{H}}$$

Si concluimos que H es verdadera hemos incurrido en lo que se denomina la falacia del consecuente. Sabemos que tal conclusión no es lógicamente válida. El hecho de que ocurra S hace más creíble H, pero no se deduce de ello. Sin embargo, si disponemos del siguiente argumento lógico (*modus tollens*):

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{H \rightarrow S} \\ \mathbf{\neg S}\end{array}}{\mathbf{\neg H}}$$

Es decir, si S es *falsa* (*no ocurre*), entonces también es falsa H. Esta es la base lógica del test de Fisher y su principal argumento contra el razonamiento inductivo. A lo sumo podemos rechazar una hipótesis, nunca confirmarla mediante tal razonamiento. Lo visto suministra la base argumental del siguiente apartado.

La hipótesis nula

Para Fisher la hipótesis nula nunca puede demostrarse y sí refutarse. En este sentido cada experimento existe para darnos la oportunidad de refutar la hipótesis nula.

¿Qué ocurre entonces con la hipótesis contraria? (hipótesis alternativa).

En su argumentación Fisher explícita por primera vez cuál es la hipótesis nula: *El sujeto es incapaz de distinguir dos tipos de objetos*. Obsérvese que es lo contrario de lo que afirma la catadora de té. Entonces, se podría objetar que si un experimento excluye la hipótesis nula debe probar la hipótesis contraria. Contra esta objeción Fisher argumenta que aunque la hipótesis contraria sea razonable no interesa como hipótesis nula por inexacta. Pues si fuera posible asegurar que un individuo nunca se equivoca en sus juicios, deberíamos tener de nuevo una hipótesis exacta y esta se podría refutar por un simple fallo y en cambio nunca podría ser demostrable por una cantidad finita de experiencias. Tal hipótesis nula debe ser exacta porque suministra el estadístico de prueba y su distribución, a partir de la cuál se construye la prueba de significación.

Según esta argumentación, el test de significación de Fisher no es más que una forma de inferencia incierta. Disponemos de los datos suministrados por una muestra y de una hipótesis. La decisión se toma entre dos alternativas: o bien ha ocurrido un resultado extraño y sorprendente (la catadora acierta) o bien la hipótesis no es cierta. Lo que aquí cabe es cuantificar, probabilísticamente hablando, lo extraño y sorprendente del hecho de que la catadora presente una división exacta de las ocho tazas. Esta cuantificación se obtiene al fijar, como hemos visto, el nivel de significación.

Para Fisher la alternativa de rechazar una hipótesis nula no es aceptar la hipótesis alternativa, sino medir el riesgo de equivocarnos. Es decir, controlar la probabilidad de que rechacemos una hipótesis nula cierta, valor que es proporcionado por el nivel de significación o error de tipo I: α =p(rechazar H_0/ H_0 cierta).

El artículo de Fisher muestra las debilidades del razonamiento inductivo y, al mismo tiempo, clarifica el papel que en un test de hipótesis juega la hipótesis nula al suministrar el modelo de azar para el contraste y valorar el riesgo de rechazar la hipótesis nula mediante el nivel de significación.

Reflexionemos sobre los dos episodios expuestos.

En apariencia en el primero, un simple problema de reparto, nos lleva a considerar diferentes formas o procedimientos de solución. Los dos primeros procedimientos, de Luca y Tartaglia, enfocan la solución sobre lo que ha ocurrido, mientras que los restantes procedimientos, enfocan la solución en lo que está por venir. Esto último supone un cambio en el enfoque dado al problema. Un cambio cualitativo que permite una conceptualización nueva: la ***expectatio*** de Christiaan Huygens. La igualdad de soluciones numéricas proporcionadas para un caso concreto, reparto en un juego pactado a 3 lances y en diversas contingencias parciales del mismo, por los tres métodos últimos (Pascal, Fermat y Huygens) es lo único que en apariencia los hace equivalentes, pues es difícil ver la base teórica común que permitiría establecer la equivalencia entre ambos. Esta equivalencia es posible planteando el nuevo concepto de probabilidad. Por el camino recorrido hacia la solución, se proporcionan nuevos métodos de solución dados por Pascal y por Fermat, este último basado en combinaciones, primera aproximación a un conjunto fundamental de sucesos (CFS) para el experimento aleatorio. Vemos así que la génesis de la noción de probabilidad se produce a partir de diferentes métodos o reglas para el cálculo pero sobre todo a partir de los conceptos de ***expectatio*** y de ***juego equitativo***.

En el segundo episodio entramos en una cuestión fundamental: ¿En qué consiste y qué prueba un experimento estadístico?

El test de Arbuthnot muestra como históricamente se confunde azar con equiprobabilidad y como se utiliza una inferencia válida (no equiprobabilidad) para aceptar una hipótesis mediatizada por las creencias religiosas y sobre la cuál no es posible disponer de datos empíricos. Además, la historia muestra un ejemplo válido de razonamiento sobre la ley de Bernoulli que permite superar el obstáculo de equiprobabilidad-azar.

El Test de Fisher muestra algunas ideas básicas que conviene aclarar en el estudio y aplicación de la estadística a situaciones reales. En primer lugar, el papel de la hipótesis nula y la distribución de probabilidad que genera, utilizada como elemento de contraste para los datos empíricos proporcionados por el experimento. En segundo lugar, la alternativa que consiste en establecer una medida apropiada al riesgo que correríamos al rechazar la hipótesis nula en el supuesto de que sea cierta. Esto nos lleva al concepto de nivel de significación, cuyo profundo significado está en la respuesta a la cuestión tantas veces planteada en situaciones de incertidumbre: ¿Cuán raro es este hecho? El nivel de significación permite una cuantificación del mismo y es, no lo olvidemos, una decisión que debe tomar el diseñador del experimento.

En resumen, con la exposición de estos dos episodios he querido, por un lado mostrar cómo las ideas emergentes del cálculo de probabilidades sirvieron históricamente para organizar el fenómeno del azar. Por otro, observar cómo suministran un ejemplo metodológico para presentar el tema en el aula de secundaria (o en la universidad).

Una forma vívida de iniciar el estudio de la inferencia estadística es partir de una situación realista en la que sea fácil involucrar a los alumnos en una controversia. En otro lugar (García Cruz, 2000) he presentado, en forma de diálogo entre varios personajes, un problema cuya discusión permite aflorar concepciones y creencias sobre la probabilidad y, mediante la guía del profesor, desembocar en la construcción de una distribución de probabilidad *ad hoc* que permite tomar una decisión sobre lo extraño de un resultado. El diálogo y la dramatización se ha sugerido como recurso útil para la presentación del nacimiento y desarrollo de los conceptos matemáticos (Hirchcock, 1996).

Durante varios años presenté a mis alumnos de bachillerato el siguiente relato (el lector interesado en una recreación teatral de este problema puede consultar García Cruz, 2000):

El caso de los despedidos de la empresa Westvaco: A finales de los años 80, la empresa Westvaco procedió a una regulación de empleo. Esta se realizó en dos fases. Después de la primera fase de la regulación, las edades de los empleados que permanecieron contratados eran: 25, 33, 35, 38, 40, 55, 55, 55, 56, 64. En la segunda fase, la empresa despidió a tres empleados de edades 55, 55, 64. El comité de empresa argumentó que la empresa cometió discriminación por edad, en los despidos. La empresa afirmó que los tres empleados despedidos habían sido elegidos al azar y no por su edad.

La discusión que proporciona este problema sobre si la muestra ha sido o no elegida al azar, sirve para clarificar el significado de un suceso extraño y para cuantificar su probabilidad. El estudio de la distribución de la media de edad para muestras de tamaño tres, nos lleva a la construcción de la tabla de la función de distribución siguiente ($f(a)=P(\text{media} \leq a)$):

Estadístico		**Probabilidad**	*Estadístico*		**Probabilidad**	*Estadístico*		**Probabilidad**
31,00	*-2,34*	**0,01**	**41,33**	*-0,69*	**0,27**	**48,67**	*0,49*	**0,68**
32,00	*-2,18*	**0,02**	**42,00**	*-0,58*	**0,29**	**49,33**	*0,60*	**0,71**
32,67	*-2,08*	**0,03**	**42,33**	*-0,52*	**0,31**	**49,67**	*0,65*	**0,73**
33,33	*-1,97*	**0,04**	**42,67**	*-0,47*	**0,36**	**50,00**	*0,71*	**0,76**
34,33	*-1,81*	**0,05**	**43,00**	*-0,42*	**0,38**	**50,33**	*0,76*	**0,78**
35,33	*-1,65*	**0,06**	**43,33**	*-0,36*	**0,41**	**50,67**	*0,81*	**0,81**
36,00	*-1,54*	**0,07**	**43,67**	*-0,31*	**0,42**	**51,00**	*0,87*	**0,82**
37,00	*-1,38*	**0,08**	**44,00**	*-0,26*	**0,43**	**51,33**	*0,92*	**0,84**
37,67	*-1,27*	**0,11**	**44,33**	*-0,20*	**0,45**	**51,67**	*0,97*	**0,85**
38,00	*-1,22*	**0,12**	**44,67**	*-0,15*	**0,46**	**52,33**	*1,08*	**0,88**
38,33	*-1,17*	**0,14**	**45,00**	*-0,10*	**0,49**	**52,67**	*1,13*	**0,88**
38,67	*-1,11*	**0,15**	**45,33**	*-0,04*	**0,52**	**53,00**	*1,19*	**0,91**
39,33	*-1,01*	**0,18**	**45,67**	*0,01*	**0,53**	**53,33**	*1,24*	**0,92**
39,67	*-0,95*	**0,18**	**46,33**	*0,12*	**0,54**	**55,00**	*1,51*	**0,93**
40,00	*-0,90*	**0,21**	**47,33**	*0,28*	**0,55**	**55,33**	*1,56*	**0,95**
40,33	*-0,85*	**0,22**	**47,67**	*0,33*	**0,58**	**58,00**	*1,99*	**0,98**
40,67	*-0,79*	**0,23**	**48,00**	*0,39*	**0,63**	**58,33**	*2,04*	**1,00**
41,00	*-0,74*	**0,25**	**48,33**	*0,44*	**0,66**			

Los números en negrita, bajo la etiqueta *estadístico*, corresponden a los valores que puede tomar la media muestral de tamaño tres. La distribución de medias muestrales tiene una media igual a 45,6. Los números en cursiva (bajo la misma etiqueta), llamados valores críticos, corresponden a la distancia (tomando como unidad de medida la desviación típica) entre cada media muestral y el valor promedio 45,6. Por último, los números en negrita bajo la etiqueta probabilidad representan la probabilidad acumulada. Es decir, para 31 (media muestral) tenemos 0,01, que es la probabilidad de extraer una muestra cuya media de edad sea igual que 31; para 32 la probabilidad es también 0,01, pero sumando las dos tenemos 0,02. Así, en la tabla, cada probabilidad corresponde a un valor de la media muestral menor o igual al número correspondiente, en negrita, a la derecha. Elijamos un número más avanzado en la tabla. Por ejemplo, al 40 (valor media muestral) corresponde una probabilidad (acumulada) de 0,21. En otras palabras, la probabilidad de extraer, al azar, una muestra cuya media sea menor o igual que 40 años es 0,21 (o también 21 de 100). Ahora podemos formular una pregunta mucho más precisa: la media de la muestra elegida por la empresa nos parece grande, pero ¿cuán grande es? Es decir, ¿cuál es la probabilidad de que por azar se elija una muestra cuya media sea igual o mayor que la de la muestra elegida por la empresa? La tabla tiene la respuesta. La probabilidad de que la media sea menor estrictamente que 58 años es de 0,95 o del 95%. Luego, obtener por azar una muestra cuya media de edad sea mayor o igual que 58 años es sólo del 5%. Luego debemos esperar que, por azar, tal media ocurrirá una vez de cada veinte que realicemos el experimento. Poco, muy poco como para creer que la empresa haya elegido la muestra por azar. Además, los datos nos dicen que nos equivocaremos una vez de cada veinte si consideramos que la empresa no actuó por azar.

La propuesta metodológica

Simplificando, existen dos formas de mirar al conocimiento matemático, cada una corresponde a un estatus epistemológico diferente y con una concepción diferente también de la enseñanza.

Si consideramos que la matemática es primordialmente un sistema formal acabado con aplicación general, entonces la enseñanza consiste en descomponer el conocimiento matemático formal en procedimientos de aprendizaje que, el estudiante aprende a aplicar más tarde.

Si, por el contrario, concebimos la matemática como un proceso en el que prima la actividad de resolución de problemas, la enseñanza se concibe, en correspondencia, como la actividad de hacer matemáticas, donde resolver problemas cotidianos es parte del trabajo y esencia en la construcción del conocimiento.

Ambas concepciones se diferencian fundamentalmente en cómo se estructura el proceso de enseñanza.

Si contemplamos la matemática como un sistema formal entonces su aplicabilidad está garantizada por el carácter general de sus conceptos y procedimientos. Luego lo primero que hay que hacer es adaptar este conocimiento abstracto para resolver problemas planteados en la realidad.

Conocimiento matemático formal

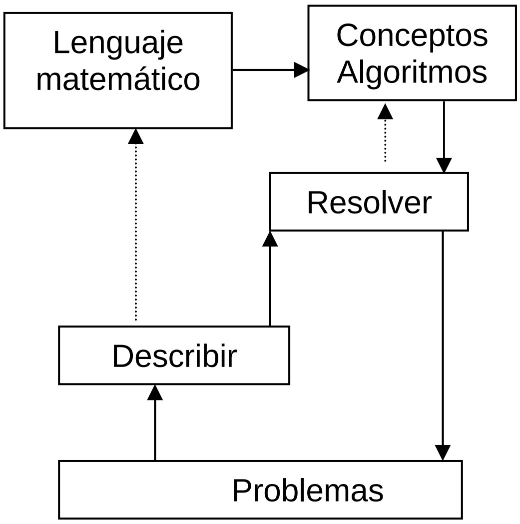
↑ ↓

Problemas contextualizados

Primero se traduce el problema a términos matemáticos. Luego se resuelve el problema con ayuda de los medios matemáticos disponibles. Finalmente, la solución matemática se traduce al contexto original. En primer lugar se imparte el conocimiento abstracto que luego, si cabe, será utilizado para resolver ciertas situaciones de aplicación.

Por el contrario, si elegimos enseñar matemáticas como una actividad, la resolución de problemas cobra un significado diferente. La enseñanza se centra en los problemas, lo que significa que el problema es el objetivo, en vez de ser simplemente el lugar donde utilizar las herramientas matemáticas.

Resolver un problema en este nivel menos formal difiere grandemente de la aplicación de un procedimiento formal.



Se parte de un problema y se comienza con una descripción del mismo que incluye tanto la forma de entender el problema en sí, como el enfoque que se le dará a su solución. La descripción de los problemas desarrolla un lenguaje informal y pone en juego las concepciones y formas de entender la situación por los alumnos. Al mismo tiempo, el lenguaje informal evoluciona en un lenguaje cada vez más formal debido al proceso de simplificación y formalización guiado por el profesor. A largo plazo, la resolución de un tipo particular de problemas se convierte en una rutina, al condensarse y formalizarse el procedimiento en el curso del tiempo, dando lugar a la constitución de los objetos mentales involucrados que precederían, en el sentido señalado por Freudenthal en su fenomenología didáctica, a los conceptos matemáticos formales.

Como señale anteriormente citando a Barbin, pienso que la historia puede y debe producir un cambio epistemológico en la concepción de la enseñanza de las matemáticas por los profesores. Sin ese cambio, la enseñanza de la Matemática se mantendrá en un ámbito puramente abstracto y alejado del profundo significado que han tenido los conceptos y estructuras matemáticas a lo largo de su historia.

Bibliografía

- Barbin, E. (1996). 'The Role of Problems in the History and Teaching of Mathematics', en R. Calinger (editor), *Vita Matemática. Historical Research and Integration with Teaching.* MAA Notes. No. 40, pp 17-25.
- Calinger, R. (editor) (1996). *Vita Matemática. Historical Research and Integration with Teaching.* MAA Notes. No. 40. The Mathematical Association of America. Washington.
- Fisher, R.A. (1976). 'Las matemáticas de una catadora de té' en James R. Newman (editor) *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Tomo 3, pp 194-201. Ediciones Grijalbo. Barcelona.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Reidel Publishing Company.
- García Cruz, J.A. (2000). El caso de los despedidos de la empresa Westvaco. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 23, 121-128.
- García Cruz, J.A. (2002). Inferencia y significación estadística, en E. Palacián y J. Sancho (editores): *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* Actas II, 457-466. Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza y Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Sánchez Ciruelo.
- Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad*. Editorial Gedisa. Barcelona. (Traducción de la obra: *The emergence of probability*, Cambridge University Press. 1975).
- Hitchcock, G. (1996). 'Dramatizing the Birth and Adventures of Mathematical Concepts: Two Dialogues', en R. Calinger (editor), *Vita Matemática. Historical Research and Integration with Teaching.* MAA Notes. No. 40, pp 27-41.
- Hugenius, C. (1657). 'De ratiociniis in ludo aleae', en F. Schooten *Exercitationvm Mathematicorum*. Libri quinque, pp 517-534.
- Maistrov, L.E. (1974). *Probability Theory. A Historical Sketch*. Academic Press. New York.
- Newman, J. R. (1976). *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*. 5 volúmenes. Ediciones Grijalbo. Barcelona. (Traducción de la obra: *The World of Mathematics*. Simon and Schuster. New York. 1956).
- Todhunter, I. (1949). *A history of the Mathematical Theory of Probability. From the time of Pascal to that of Laplace.* Chelsea Publishing Company. New York.
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Shoesmith, E. (1987). The continental controversy over Arbuthnot's argument for divine providence. *Historia Mathematica.* **14** (2), pp 133-146.

Juan Antonio García Cruz, es profesor titular de la Universidad de La Laguna, Tenerife, España, y catedrático de Bachillerato en excedencia. Fue director de la revista Números editada por la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas de la que fue Vicepresidente. Ha publicado libros y artículos sobre educación matemática y participado en numerosos congresos nacionales e internacionales. Además de la educación matemática se interesa por la historia de las Matemáticas y de la Cartografía.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 89 - 103
ISSN: 1815-0640

Reflexiones sobre la Formación del Profesor en Matemática según el diseño curricular de la Provincia de Buenos Aires-Argentina

Norma Susana Cotic

Resumen

En el presente artículo se describe y analiza el actual diseño curricular para la Formación del Docente en Matemática de la Provincia de Buenos Aires específicamente, sus principios organizadores, espacios formativos y ejes transversales.
Se destacan algunas modificaciones importantes como la implementación de la práctica efectiva en instituciones escolares desde el primer año de la carrera.
Se incluyen reflexiones sobre algunos aspectos claves como la mejora continua de la calidad en la formación profesional y se exponen propuestas de proyectos presentados por diferentes instituciones para complementar en parte las dificultades y carencias detectadas.

Abstract

The present article describes and analyzes the principles, training contexts and transversal axes of the current curriculum design for Maths Teacher Training and Development within the province of Buenos Aires. Emphasis is given to significant changes such as the introduction of classroom teaching practice right from the start of the teaching course of studies. Special attention is also given to the importance of continuous professional development and alternative projects and proposals are also considered with the aim of complementing the weaknesses detected.

Introducción

Las investigaciones y propuestas acerca de la implementación de innovaciones curriculares en la formación inicial y continua de los profesores en matemática constituyen un tema de permanente actualidad, tanto en términos de acción de políticas públicas como en términos de investigación y producción de todos los componentes de la comunidad educativa.

En Argentina, la Formación de Profesores para el Nivel Secundario (ex EGB y Polimodal) se realiza en los denominados Institutos Superiores de Formación Docente y Técnica. En la actualidad existen 209 Institutos de Formación Docente y Técnica de gestión estatal en la **Provincia de Buenos Aires** que con 10152 docentes atiende a 93000 alumnos.

En la década de los noventa se realizó un cambio estructural en la economía argentina que, entre muchos otros efectos, hizo posible una transformación organizativa importante de la educación ya que cada jurisdicción es autónoma y decide sus propios lineamientos curriculares para la formación de los futuros profesores.

El Marco Normativo que permitió llevar adelante estos cambios, se integra con las siguientes leyes:

- Ley Nº 24.049 de Transferencia de los Servicios Educativos a las Provincias (1992)
- Ley Nº 24.195 denominada Ley Federal de Educación (1993).
- Ley Provincial de Educación Nº 11.612 (1995)
- Ley de Educación Superior, Nº 24.521(1996).

En estos documentos se fijan las bases para la organización de la Formación Docente y se mencionan los tipos de instituciones comprometidas con esa formación:

a) Institutos Superiores de Formación Docente

b) Universidades

c) Institutos Universitarios

Organización

Los Institutos Superiores de Formación Docente forman docentes para el ejercicio profesional en el nivel secundario y superior. Acorde con convenios establecidos con diversas universidades, sus egresados pueden continuar los estudios de Licenciaturas y Maestrías en la especialidad.

A partir de la sanción de la Ley Federal de Educación y de la reciente Ley de educación Superior (2007); se inicia un proceso de transformación de la Formación Docente, sentando las bases para la organización y puesta en funcionamiento de un nuevo modelo para todos los niveles y modalidades, ordenado en cuatro instancias:

- **Formación de docentes para distintos niveles y especialidades**. Se define como la instancia inicial de preparación para el trabajo docente y en ella se establecen los contenidos básicos que otorgan la acreditación.
- **Perfeccionamiento del docente en actividad**. Consiste en la actualización y profundización de contenidos curriculares, metodológicos e institucionales.
- **Capacitación de graduados y docentes para nuevos roles y funciones**. Es la instancia de capacitación para roles y funciones diferentes de aquéllas para las que el graduado se formó inicialmente y que demanda el nuevo sistema.

- **Capacitación pedagógica de profesionales y técnicos superiores**. Es la instancia de formación pedagógica dirigida a profesionales no docentes y técnicos superiores que deseen incorporarse a la docencia.

La Transformación Educativa, incorpora al análisis del currículum la problemática cultural, social, política, ideológica y económica, así como el interés por adquirir autonomía en las instituciones educativas. No admite la propuesta de modelos y postula la importancia del lugar del docente como orientador para que el egresado comprenda el papel que su profesión juega en el contexto social amplio y del que ocupa como profesional.

Puntos esenciales

Refuerza en sus postulados los siguientes:

- **Resignificación de los contenidos curriculares** en base a los cambios culturales, científicos y tecnológicos que caracterizan el mundo actual.
- **Revisión de las teorías de aprendizaje y enseñanza**, considerando las más avanzadas corrientes pedagógicas y didácticas.
- **Transformación de las instituciones educativas**, en sus aspectos organizacionales, en los sistemas de comunicación internos y externos, en el fortalecimiento de los criterios de autonomía.
- **Vinculación del Diseño Curricular con los ámbitos de la producción y del trabajo** a través de proyectos institucionales y áulicos.
- **Revitalización de la formación y capacitación de recursos humanos** para desempeñar con eficiencia el rol profesional.
- **Actualización de las normativas vigentes** para facilitar el desempeño técnico administrativo de las distintas áreas del Sistema Educativo.

En la Provincia de Buenos Aires se observa que el currículum ha sido concebido a partir de sus aspectos estructurales - formales, o sea considerando prioritariamente las disposiciones oficiales, planes y programas de estudio, organización jerárquica de la escuela, legislaciones que reglamentan la vida institucional además de desarrollarse a partir de los aspectos prácticos contextuales que a veces son elementos de resistencia y que le otorgan un sello característico.

De acuerdo a lo expresado por Porlán[1]: “El currículum en la acción no puede cambiarse por un simple acto administrativo o por la mera presentación formal de una nueva teoría curricular. Para cambiarlo es necesario que los profesores varíen sus puntos de vista, sobre cuestiones filosóficas, sociológicas, pedagógicas, didácticas. Por ello se trata de establecer una adecuada relación entre teoría y práctica educativa, entre las aportaciones provenientes de las ciencias de la educación y el conocimiento práctico de los profesores, procurándose evitar el hecho

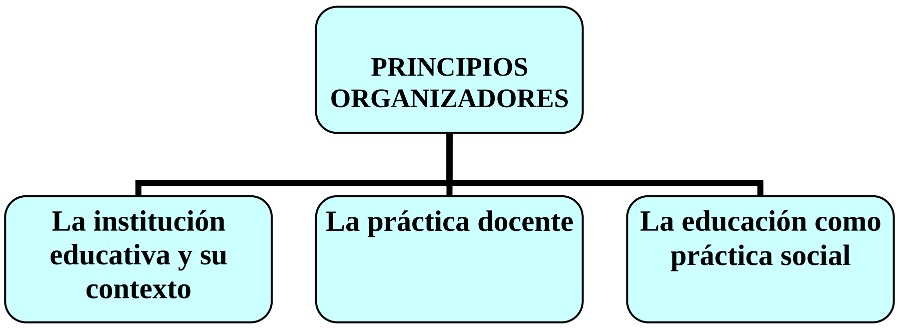
[1] Porlán, R. Constructivismo y escuela . (1993).

de poseer un discurso teórico y no saber modificar la práctica o, el otro, de pretender cambiar la práctica de algún marco de referencia teórico".

Estructura del Curriculum

Establece una **Dimensión Particular,** que se refiere al nivel educativo, el tipo de educación, población a la que va dirigido y una **Dimensión General** que se refiere a las relaciones de carácter social y político - educativo del currículum y que se compone de una **dimensión social amplia** (ideológica,cultural, política, social, económica), una **dimensión institucional** y una **dimensión didáctico áulica.**

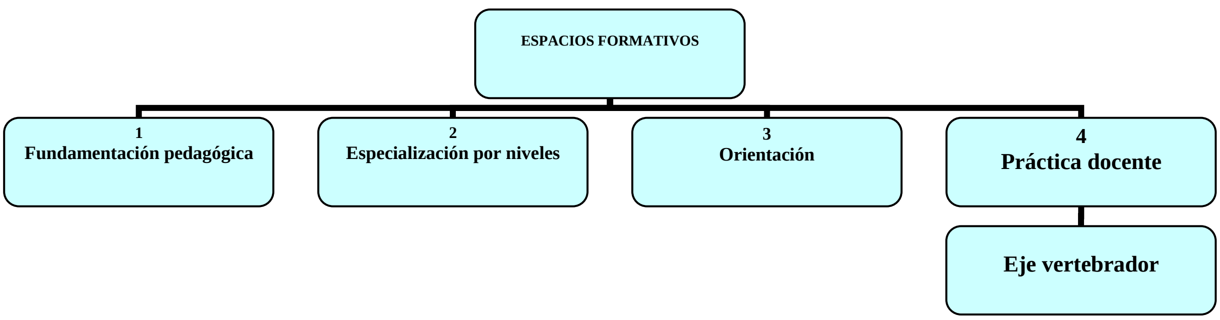
El currículum se sustenta sobre los **Principios Organizadores**.



Espacios Formativos

Son cuatro espacios que se encuentran relacionados por la Práctica en su carácter de Eje Vertebrador de la Formación Docente, con una revisión permanente de la reflexión sobre la acción y una clara conexión con el Espacio de la Fundamentación Pedagógica.

Esta integración no resulta tan manifiesta en el **Espacio de Especialización por Niveles y en el Espacio de la Orientación**, donde los contenidos presentan una clara delimitación.



1. Espacio de la Fundamentación Pedagógica

Constituye el ámbito preferencial para desarrollar en los futuros docentes la capacidad de la acción reflexiva, capacitándolos para que por sí mismos puedan examinar los problemas morales, éticos, sociológicos, políticos, así como la instrumentación necesaria de esquemas de pensamiento que les permitan reflexionar sobre su práctica diaria.

Componen el 14,50 % del Diseño Curricular y se distribuye durante los tres primeros años de la carrera. (ver cuadro I)

Cuadro I

Primer Año	Segundo Año	Tercer Año
Perspectiva Filosófico-Pedagógica I 64 hs. reloj anuales	Perspectiva Filosófico-Pedagógica II 64 hs reloj anuales	Perspectiva Filosófico-Pedagógico-Didáctica 64 hs. reloj anuales
Perspectiva Pedagógico-Didáctica I 64 hs. reloj anuales	Perspectiva Pedagógico-Didáctica II (Didáctica Especial) 64 hs reloj anuales	Perspectiva Político-Institucional 64 hs. reloj anuales
Perspectiva Socio-Política 64 hs. reloj anuales		

Se observa la escasa carga horaria para la **Perspectiva Socio Política y Perspectiva Político Institucional,** encontrándose poca presencia de los núcleos político culturales en la selección de contenidos.

2. Espacio de la Especialización por Niveles

Los contenidos se refieren a las diferentes etapas evolutivas (edades que oscilan entre 12 y 19 años), a sus características cognitivas, motrices, socioafectivas y lingüísticas.

Componen el 4% del Diseño Curricular y solo se presentan en los dos primeros años de la carrera (ver cuadro II)

Cuadro II

Primer Año	Segundo Año
Psicología y Cultura en la Educación 64 hs. reloj anuales	Psicología y Cultura del Alumno de EGB 3 y Polimodal 64 hs. reloj anuales

3. Espacio de la Orientación

Está conformado por los contenidos específicos de la especialidad con una sólida influencia del enfoque de la escuela francesa para la enseñanza de la matemática.

En general, cada profesor es un especialista en el área, esto hace que cada uno, en el intento de proporcionar al alumno el dominio del contenido matemático, olvide la presentación de cómo los diferentes tópicos matemáticos están integrados y cómo se presentan en los distintos niveles educativos.

El futuro profesor, además de la competencia en relación con el conocimiento matemático que enseñará, necesita saber como adaptar este contenido a su práctica cotidiana y esto, lamentablemente todavía no se ha podido lograr. Al hacer un análisis detallado del diseño curricular, se verifica solamente un cambio en los nombres de las asignaturas, gran parte del contenido desarrollado no tuvo una modificación substancial aunque si se observan cambios en las estrategias de evaluación.

Componen el 65,50 % del Diseño Curricular. (ver cuadro III)

Cuadro III

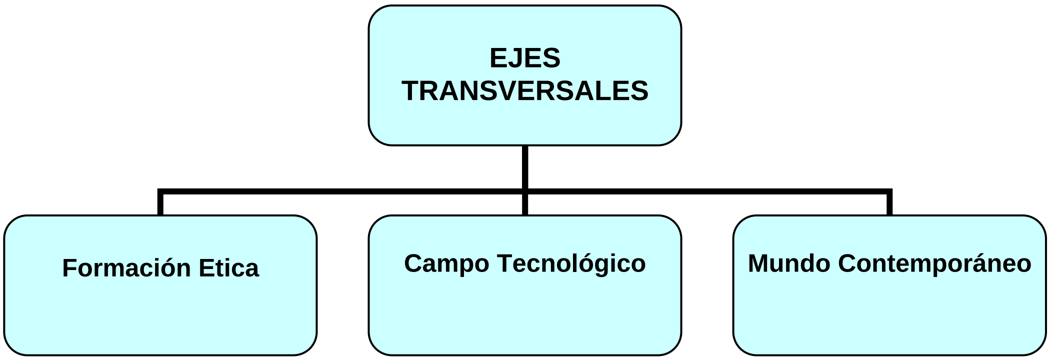
Primer Año	Segundo Año	Tercer Año	Cuarto Año
Introducción al Análisis Matemático 160 hs. reloj anuales	Análisis Matemático I 192 hs. reloj anuales	Álgebra 96 hs. reloj anuales	Computación 64 hs. reloj anuales
Álgebra y Geometría I 160 hs. reloj anuales	Álgebra y Geometría II 192 hs. reloj anuales	Historia de la Matemática 64 hs. reloj anuales	Fundamentos de la Matemática 96 hs. reloj anuales
Matemática y su Enseñanza I 64 hs. reloj anuales	Matemática y su Enseñanza II 64 hs. reloj anuales	Topología 64 hs. reloj anuales	Matemática Aplicada 128 hs. reloj anuales
		Análisis Matemático II 160 hs. reloj anuales	Física 160 hs. reloj anuales
		Probabilidad y Estadística 96 hs. reloj anuales	Geometría 160 hs. reloj anuales
		Matemática y su Enseñanza III 64 hs. reloj anuales	Metodología de la Investigación Educativa en Matemática 64 hs. reloj anuales

4. Espacio de la Práctica

Supone la presencia activa del alumno en una institución del nivel elegido para su carrera. Desde el primer año de estudios se promueve una interacción entre el conocimiento educativo y el conocimiento del contexto aúlico.

Ejes Transversales

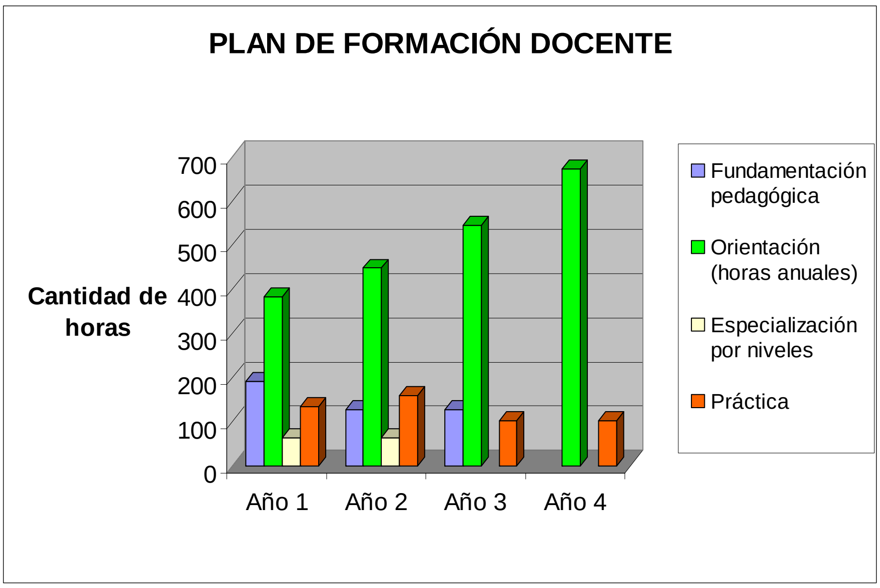
Un enfoque abierto incorpora en el currículo la **Formación ética**, **Campo tecnológico** y **Mundo contemporáneo** en todos los espacios formativos, sin carga horaria ni contenidos específicos, lo que favorece la multiplicidad y diversidad de lecturas y aporta autonomía en la implementación del proceso formativo pero que también puede producir cierta confusión con la superposición o repetición de contenidos prescriptos en el currículum existente.



Una de las fortalezas más notables del Plan de Formación actual, es la implementación de la práctica efectiva en instituciones escolares desde el primer año de la carrera, aunque es más significativo el incremento de este Espacio en el último año.

Estructuralmente, el problema de la vinculación con la práctica parece estar solucionado, aunque no quedan suficientemente claros los modos de establecer vínculos con la práctica docente de manera transversal y extrainstitucional.

Cuadro comparativo de asignaturas por año



Partiendo del concepto amplio de **Currículum de Formación de Grado,** sustentado en el concepto que da Alicia de Alba, quien define"***Currículum como síntesis de elementos culturales (conocimientos, valores, costumbres, creencias, hábitos) que conforman una determinada propuesta político educativa, pensada e impulsada por distintos grupos y sectores sociales cuyos intereses son diferentes y contradictorios***" y analizando lo expuesto anteriormente se pueden detectar los siguientes puntos problemáticos,que no son los únicos sino los más destacados:

- Desarticulación entre el campo del trabajo específico docente y lo que contempla el currículum
- Falta de procesos de evaluación en los planes ya establecidos. No están previstos en el Diseño.
- Escasa participación de los sujetos involucrados en la implementación del currículum en cuanto a la formulación, implementación y evaluación.
- Influencia de un criterio fuertemente prescriptivo.
- Las materias que conforman los planes de estudio, no contemplan las demandas sociales como inserción laboral, articulación entre los distintos niveles, etc.
- Falta de diversidad metodológica.

Es necesario tener presente que el currículum constituye el núcleo del proceso de institucionalización de la educación con una identidad social propia y particular. Por eso se necesitan docentes convenientemente preparados, con actitud crítica y de innovación, capaces de responder a las necesidades de los alumnos y a las demandas del currículum, capaces de asumir una conducta de resistencia cuando las propuestas sean reproductivistas y no permitan la autonomía y el juicio constructivo.

Reflexiones finales

La formación del docente en matemática para el nivel medio (Escuela secundaria básica y polimodal) en la Provincia de Buenos Aires - Argentina, se desarrolla en su mayoría en los Institutos Superiores de Formación Docente, donde sus profesores reducen su trabajo a la presentación de contenidos, a la utilización de técnicas y algoritmos y a la transposición de demostraciones, siendo muy escasa la propuesta de resolución de problemas o la presentación de modelos matemáticos acordes con las nuevas corrientes de la educación matemática.

Los contenidos matemáticos en las cátedras respectivas de la carrera son teóricos y complejos, no se vinculan con los contenidos y procesos que se contemplan en los programas de Enseñanzas Secundaria.

En general, cada profesor de la carrera docente es especialista en su materia y tiende a proporcionar al futuro profesor el dominio del contenido matemático, olvidando que es necesaria la integración con las otras asignaturas y la adaptación en el campo donde se aplica, además de la competencia en relación con el conocimiento matemático que el futuro docente enseñará y que debería vivenciar desde las primeras fases de la carrera, mediante experiencias de aula que le permitan discutir y reflexionar sobre las líneas pedagógicas de enseñanza y evaluación, integrando equipos de trabajo con un tutor especializado.

No se incentiva la investigación y se confunde con la copia de textos encontrados en libros, publicaciones o en Internet sin reflexión o análisis que permitan la adquisición de conocimientos y competencias. O sea, concluye su Curso con una visión fragmentada del conocimiento matemático y con mucha dificultad para identificar la finalidad de la educación en una sociedad en continua transformación.

Un posible riesgo de no cuidar el desarrollo del conocimiento matemático es el de continuar en el nivel secundario con docentes que tengan la capacidad de enseñar técnicas de modo repetitivo reproduciendo la misma enseñanza que vivenció en su trayectoria como estudiante y que luego exige de su alumno.

No es difícil concluir que uno de los aspectos claves para mejorar la calidad de los procesos de formación y de enseñanza y aprendizaje de la matemática es, mejorar la calidad de la formación profesional de los profesores de la carrera. Hay aquí un desafío importante, concretar a través de las Universidades, Institutos de Formación Docente y Sociedades de Educación Matemática, un aporte concreto y coordinado de perfeccionamiento y actualización profesional de los profesores, que generen un cambio de actitudes relacionadas con el aprender matemático en la sociedad, en las instituciones escolares y en el aula, así como otras modificaciones tendientes a elevar la calidad del dominio profesional del profesor de matemática.

El currículum es uno de los instrumentos más potentes para analizar, cómo la práctica docente se sostiene y se expresa de una forma particular, según el contexto en que se desarrolla.

Algunas propuestas

Ante las dificultades y carencias observadas, se presentan algunos de los proyectos que los Institutos de Formación Docente han desarrollado con el propósito de paliar las carencias que han surgido del análisis de la propuesta curricular actual.

Proyecto I: Convenios de articulación eficaz entre Institutos de Formación docente y Universidad. El desafío es llevar a la práctica un estilo de capacitación disciplinar y didáctica de los profesores en actividad, que propicie mejoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Consiste en la continuidad de estudios de postgrado o especializaciones en el área de su competencia.

Proyecto II: Capacitación en herramientas informáticas. Tiene dos finalidades, en principio capacitar en el uso de herramientas informáticas básicas, que puedan ser empleadas por los docentes en sus diferentes tareas y en segundo lugar adquirir las competencias que les permitan utilizar programas específicos para matemática como Cabri, Derive. Maple, graficadores, etc.

Proyecto III: Jornadas académicas. Destinadas a difundir las producciones pedagógicas de los alumnos en los diferentes Espacios Curriculares, propiciando un espacio de intercambio entre instituciones y grupos de trabajo en áreas de interés común

Proyecto IV: Departamento de Aplicación para el Profesorado de Matemática. Destinado a la práctica de los futuros docentes, como ayudantes de cátedra de un profesor titular en el nivel que le corresponde iniciar su residencia anual.

Proyecto V: Redes de Institutos de Formación Docente. Tendientes a mantener la comunicación y divulgación permanente de experiencias e investigaciones.

Proyecto VI: Talleres complementarios. Destinados a profundizar contenidos matemáticos específicos, metodologías y estrategias de enseñanza y aprendizaje, métodos de evaluación, técnicas de trabajo grupal, etc.

Proyecto VII: E-learning como camino para la formación y capacitación de los docentes. Destinado a la producción de cursos a distancia en las distintas áreas de formación docente.

Proyecto VIII: Laboratorio de materiales concretos. Destinado a la creación y utilización de materiales concretos y su aplicación didáctica.

Bibliografía

- A. de Alba (1995): Currículum: Crisis, mito y perspectiva. Miño y Dávila. Buenos Aires.
- Braslavsky, C. y Birgin, A (1992). Formación de profesores. Impacto, pasado y presente. Miño y Dávila. Buenos Aires.
- Camilloni, Alicia R.W. de y otras (1998). La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo. Paidós. Buenos Aires.
- Camilloni, Alicia R.W. de y otras (1997). Corrientes didácticas contemporáneas. Paidós. Buenos Aires.
- Davini, M. C. (1998).El currículum de formación del magisterio. Planes de estudio y programas de enseñanza. Miño y Dávila. Buenos Aires.
- Diaz Barriga, A. (1994).Didáctica y Currículo. Ediciones Nuevomar, México
- Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (1999). Diseño Curricular para la Formación Docente de Grado. Tomo I.
- Eggleston, J. (1973). Sociología del currículo escolar. Troquel. Buenos Aires.
- Grundy, S. (1993).Producto o praxis del currículum. Morata. Madrid.

- House, E. (1994). Evaluación, ética y poder. Morata. Madrid.
- Huberman, S. (1992).Cómo aprenden los que enseñan. Aique. Buenos Aires.
- Kemmis, S. El Currículo: más allá de la teoría de la reproducción. Morata. Madrid
- Porlán, R. (1993) Constructivismo y escuela. Hacia un modelo de enseñanza aprendizaje basado en la investigación. Diada.
- Schon, D. (1992).La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje de las profesiones. Ministerio de Educación y Ciencia. Barcelona.
- Sitios consultados:

http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/default.cfm
http://www.educ.ar/educar/index.html
http://www.me.gov.ar

Norma Susana Cotic. Docente de Geometría Analítica, Didáctica de la Matemática, Seminario de Investigación en Institutos de Formación Docente en Matemática. TSU en Informática Educativa con especialización en Educación a Distancia. Directora de Proyectos de Capacitación Docente en las TIC¨s. Publicó varios libros sobre su especialidad.
ncotic@uolsinectis.com.ar

PROFESORADO DE TERCER CICLO DE LA EGB
Y DE LA EDUCACIÓN POLIMODAL EN *MATEMÁTICA*

1er. AÑO

<table>
<tr><td colspan="3">ESPACIO DE LA FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA</td><td>ESPACIO DE LA ESPECIALIZACIÓN POR NIVELES</td><td colspan="3">ESPACIO DE LA ORIENTACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="3">192 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td><td colspan="3">384 hs. reloj anuales</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Filosófico-Pedagógica I</td><td>Perspectiva Pedagógico-Didáctica I</td><td>Perspectiva Socio-Política</td><td>Psicología y Cultura en la Educación</td><td>Introducción al Análisis Matemático</td><td>Álgebra y Geometría I</td><td>Matemática y su Enseñanza I</td></tr>
<tr><td>64 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td><td>160 hs. reloj anuales</td><td>160 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td></tr>
<tr><td colspan="7">FORMACIÓN ÉTICA, CAMPO TECNOLÓGICO, MUNDO CONTEMPORÁNEO

Atraviesan todos los Espacios</td></tr>
<tr><td colspan="7">ESPACIO DE LA PRÁCTICA DOCENTE I
4.30 hs. reloj anuales*

El tiempo previsto se corresponde con un turno completo de los Servicios Educativos de EGB 3 para desarrollar actividades de Observación y Práctica en dichos Establecimientos, así como de reflexión en el Instituto Formador sobre la realidad educativa del Nivel Implicado</td></tr>
</table>

TOTAL HORAS ANUALES: 784

* Se asignarán tres (3) horas reloj semanales a un Especialista en Pedagogía y dos (2) horas reloj semanales a un Especialista en Didáctica de la Matemática

2do. AÑO

<table>
<tr><td colspan="2">ESPACIO DE LA FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA</td><td>ESPACIO DE LA ESPECIALIZACIÓN POR NIVELES</td><td colspan="3">ESPACIO DE LA ORIENTACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">128 hs reloj anuales</td><td>64 hs reloj anuales</td><td colspan="3">448 hs reloj anuales</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Filosófico-Pedagógica II</td><td>Perspectiva Pedagógico-Didáctica II (Didáctica Especial)</td><td>Psicología y Cultura del Alumno de EGB 3 y Polimodal</td><td>Análisis Matemático I</td><td>Álgebra y Geometría II</td><td>Matemática y su Enseñanza II</td></tr>
<tr><td>64 hs reloj anuales</td><td>64 hs reloj anuales</td><td>64 hs reloj anuales</td><td>192 hs. reloj anuales</td><td>192 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td></tr>
<tr><td colspan="6">FORMACIÓN ÉTICA, TECNOLOGÍA, MUNDO CONTEMPORÁNEO

Atraviesan todos los Espacios</td></tr>
<tr><td colspan="6">ESPACIO DE LA PRÁCTICA DOCENTE II
5 hs. reloj semanales*

El tiempo previsto se corresponde con un turno completo de los Servicios de Educación Polimodal para desarrollar actividades de Observación y Práctica en dichos Establecimientos, así como de reflexión en el Instituto Formador sobre la realidad educativa del Nivel Implicado.</td></tr>
</table>

TOTAL HORAS ANUALES: 800

* Se asignarán dos (2) horas reloj semanales a un Especialista en Pedagogía y tres (3) horas reloj semanales a un Especialista en Didáctica de la Matemática

3er. AÑO

<table>
<tr><td colspan="2">ESPACIO DE LA FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA</td><td colspan="6">ESPACIO DE LA ORIENTACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">128 hs. reloj anuales</td><td colspan="6">544 hs. reloj anuales</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Filosófico-Pedagógico-Didáctica</td><td>Perspectiva Político-Institucional</td><td>Álgebra</td><td>Historia de la Matemática</td><td>Topología</td><td>Análisis Matemático II</td><td>Probabilidad y Estadística</td><td>Matemática y su Enseñanza III</td></tr>
<tr><td>64 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td><td>96 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td><td>160 hs. reloj anuales</td><td>96 hs. reloj anuales</td><td>64 hs. reloj anuales</td></tr>
<tr><td colspan="8">FORMACIÓN ÉTICA, CAMPO TECNOLÓGICO, MUNDO CONTEMPORÁNEO
Atraviesan todos los Espacios</td></tr>
<tr><td colspan="8">ESPACIO DE LA PRÁCTICA DOCENTE III
102 hs. reloj anuales*
Las semanas correspondientes a este espacio estarán divididas en tres grandes grupos:
- Veinticuatro (24) semanas de tres (3) horas reloj semanales de Pre-Residencia en EGB 3, en las que se realizarán tareas de observación e intervención docente en el grupo asignado alternándolas con la elaboración del Proyecto de Aula para la Residencia.
- Seis (6) semanas de cuatro (4) horas reloj semanales destinadas a la Residencia en EGB 3.
- Dos (2) semanas de tres (3) horas reloj semanales para el análisis y reflexión sobre la práctica, la autoevaluación, coevaluación y evaluación por parte del Equipo Docente.</td></tr>
</table>

TOTAL HORAS ANUALES: 774

* Al docente se le asignarán cuatro (4) horas reloj semanales durante todo el año, a los efectos del asesoramiento, seguimiento y evaluación de los alumnos practicante

4to. AÑO

ESPACIO DE LA ORIENTACIÓN					
672 hs. reloj anuales					
Computación	Fundamentos de la Matemática	Matemática Aplicada	Física	Geometría	Metodología de la Investigación Educativa en Matemática
64 hs. reloj anuales	96 hs. reloj anuales	128 hs. reloj anuales	160 hs. reloj anuales	160 hs. reloj anuales	64 hs. reloj anuales

FORMACIÓN ÉTICA, CAMPO TECNOLÓGICO, MUNDO CONTEMPORÁNEO

atraviesan todos los espacios

ESPACIO DE LA PRÁCTICA DOCENTE IV

102 hs. reloj anuales*

Las semanas correspondientes a este espacio estarán divididas en tres grandes grupos:

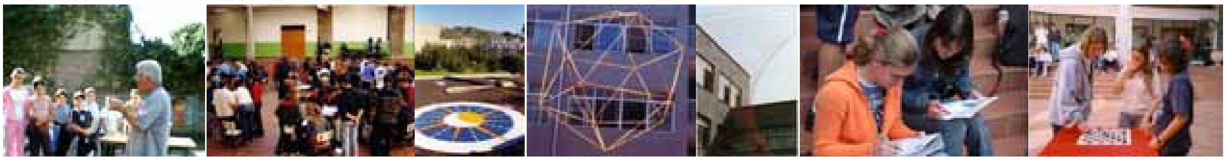
- Veinticuatro (24) semanas de tres (3) horas reloj semanales de Pre-Residencia en Educación Polimodal, en las que se realizarán tareas de observación e intervención docente en el grupo asignado alternándolas con la elaboración del Proyecto de Aula para la Residencia.
- Seis (6) semanas de cuatro (4) horas reloj semanales destinadas a la Residencia en Educación Polimodal.
- Dos (2) semanas de tres (3) horas reloj semanales para el análisis y reflexión sobre la práctica, coevaluación y evaluación por parte del Equipo Docente.

TOTAL HORAS ANUALES: 774

* Al docente se le asignarán cuatro (4) horas reloj semanales durante todo el año, a los efectos del asesoramiento, seguimiento y evaluación de los alumnos practicantes.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 105-123
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

IES Sierra Minera de La Unión
Murcia. (España)

Realización de una Semana Matemática

I. Salas, M. Peñalver, P. Sandín, A. Pérez-Nieto y Joaquín Comas

Resumen

El 2000 fue declarado por la UNESCO «Año mundial de las Matemáticas» y el I.E.S. Sierra Minera de La Unión (Murcia, España) quiso unirse a las celebraciones organizando una Semana de actividades en la que todos pudiéramos descubrir que las Matemáticas se encuentran en muchos lugares, además de estar en las pizarras y en los libros. La experiencia fue muy provechosa y se ha repetido en otras seis ocasiones. Presentamos un trabajo interdisciplinario que ha tenido como objetivo mejorar las actitudes y las capacidades de los alumnos en matemáticas.

Abstract

The year 2000 was declared "Mathematics World Year" by UNESCO and "Sierra Minera" High-school joined that event by organizing one Week with activities for everyone to find out that Maths are in many places, not only in classrooms and books. The experience was very useful and, before that date, it had been previously done six times. We presented an interdisciplinary study with the aim of improving students´ attitudes and capabilities for Maths.

Presentación

Coincidiendo con la declaración por la UNESCO del año 2000 como el «Año mundial de las Matemáticas» un grupo de profesores del Instituto de Ecuación Secundaria[1] Sierra Minera de La Unión (Murcia, España) no quisimos dejar pasar tan importante oportunidad para celebrarlo. Fuimos pensando distintas ideas que nos ayudasen a dinamizar las clases de matemáticas y la que más nos entusiasmó fue la de organizar una Semana Matemática en la que todos pudiéramos descubrir que las Matemáticas se encuentran en muchos otros lugares, además de estar en las pizarras y en los libros. Queríamos organizarlo bien, y para eso era indispensable la participación de profesores de diversas asignaturas para dar a las Matemáticas

[1] Un **Instituto de Ecuación Secundaria** abarca los niveles de Ecuación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Ciclos Formativos y Programas de Iniciación Profesional, con edades de los alumnos comprendidas entre 14 y 18 años.

una visión mucho más amplia de la usual. Los profesores implicados fueron muchos, lo que permitió hacer actividades muy variadas e interesantes.

La experiencia fue muy provechosa y se ha repetido en seis ocasiones más. La gran aceptación obtenida nos ha animado a mostrar el trabajo realizado por un grupo de profesores y alumnos que, a través de un trabajo interdisciplinar, ha tenido como objetivo mejorar las actitudes y las capacidades de los alumnos en matemáticas.

Como en cualquier experiencia nos hemos encontrado con inconvenientes, dificultades y algún que otro disgusto, aunque el esfuerzo realizado nos ha facilitado unas clases más dinámicas, motivadoras, y por que no, más divertidas a lo largo de cada curso, siendo la actividad que vamos a presentar una interesante herramienta para HACER matemáticas.

Pegatina Oficial de la VII Semana Temática

Cartel de la VII Semana Temática

Desarrollo de una Semana Matemática

Idea de la actividad

Como hemos comentado la celebración del «Año mundial de las Matemáticas» nos animó a realizar actividades para mejorar las actitudes y las capacidades de los alumnos en matemáticas a través de un trabajo interdisciplinario por lo que era necesaria la participación de profesores de diversas asignaturas para dar a las Matemáticas una visión mucho más amplia de la usual.

Antiguo Mercado Público

Vista del interior del Mercado Público

La Semana Matemática es una gran muestra en la que cada grupo de alumnos va pasando por una serie de aulas-taller con un orden previamente establecido, de forma que cada cierto tiempo van rotando los grupos por todas las aulas, sin coincidir dos grupos en una misma aula. Este evento se realiza durante varios días, agrupando a los alumnos por niveles educativos e invitando a participar a otros centros. Creemos importante destacar que son los propios alumnos que han realizado los trabajos durante el curso los que presentan y controlan las diferentes aulas, adquiriendo una mayor responsabilidad y entrega a la hora de realizar esta actividad.

Creemos importante destacar que son los alumnos que han trabajado durante el curso en las actividades, los que presentan y controlan las diferentes aulas, con lo que adquieren una mayor responsabilidad. Esto ayuda a motivarlos y a que su actitud sea la mejor a la hora de trabajar durante todo el proceso.

Tríptico de la VII Semana Temática

Miembros de la Organización

Tanto los alumnos que llevan las actividades como los profesores encargados son Miembros de la Organización y llevan un distintivo consistente en una tarjeta plastificada. Igualmente hay tarjetas para la Prensa y de Apoyo Logístico. En la última edición hemos diseñado camisetas con el logotipo de la pegatina oficial y los alumnos y profesores las han adquirido para llevarlas durante la Semana Matemática.

Monitores del día

Monitores explicando una actividad

Tarjeta de Grupo

Para darle un carácter más lúdico, cada grupo lleva el nombre de un matemático conocido y una tarjeta identificativa. Por el reverso de esta cada grupo debe escribir antes del comienzo de la actividad la clase a la que pertenece, el nombre los componentes del grupo y del alumno responsable. Esta tarjeta tiene una doble utilidad; por un lado sirve para llevar un control de los alumnos, por otro para anotar la puntuación de cada grupo en cada actividad, para al finalizar las actividades premiar al grupo con mas puntos con un premio. La puntuación en cada aula la determina uno de los alumnos responsables de la misma, de esta forma la calificación no es “impuesta” por profesores, lo que evita protestas de los alumnos con baja calificación, pues hemos comprobado que en general admiten mejor la puntuación dada por los compañeros responsables del aula. Al final del recorrido por todas las aulas el responsable del grupo entrega la tarjeta a la Mesa de Organización y posteriormente se hace entrega de los premios a los componentes de los grupos ganadores.

Alumnos provenientes de un mismo centro

Grupo ganador del día

Mesa de Información

Para resolver cualquier duda se monta una Mesa de Información. En ella varios alumnos resuelven las distintas dudas que puedan surgir: ubicación de un aula, horarios, bienvenida de centros invitados, información a visitantes...

Tarjeta de Votaciones

Dado que a lo largo del recorrido por las diferentes aulas los alumnos deben explorar los diversos trabajos realizados durante el curso por los miembros del aula, hemos diseñado una tarjeta para cada alumno participante donde debe ir eligiendo el elemento que más le ha gustado dentro de cada sección. Entre todas las papeletas recogidas se realiza un sorteo con premios para los ganadores. De esta manera los alumnos prestan mayor atención a la vertiente expositiva de la Semana Matemática.

Votación III Semana Matemática

NOMBRE: CURSO:

Elemento a votar	Nombre del elemento elegido
Mejor fotografía de Poliedros:	
Mejor obra de Escher:	
Mejor hora del Mundo:	
Mejor fotografía del Mercado:	
Mejor Escala:	

Tarjeta de Votación individual

Alumnos depositando la Tarjeta de Votación

La I Semana Matemática (curso 1999-2000) tuvo siete aulas temáticas: **Lengua**, **Ciencias Naturales**, **Enredos de Ingenio**, **Juegos Matemáticos**, **Idiomas**, **Taller de Matemáticas** y **Exposiciones**.

La II Semana Matemática (curso 2000-2001) tuvo siete aulas temáticas: **De Mates ...¿Ná?**, **Poliedros Gigantes**, **El Espejo Mágico de Escher**, **El Mercado Geométrico de La Unión**, **Juegos Matemáticos 1 y 2** , **El Mundo de las Teselaciones** e **Instrumentos de Medida.**

Alumnas construyendo poliedros

Vista del Gimnasio

La III Semana Matemática (curso 2001-2002) tuvo nueve aulas temáticas: **De Mates ...¿Ná?, La Torre de Babel, Matecultura, El Mundo de los Poliedros , Mapas del Mundo , Mategolf, ¿Dónde Estamos? , Relaciones Humanas y Miscelánea.**

En el curso 2002-2003 pensamos que podía ser interesante para el centro seguir con una actividad de este tipo, pero cambiando de temática. Se decidió cambiar el nombre de la actividad y se pasó a llamar “Semana Temática”, pues no queríamos perder el camino recorrido. Esta edición tuvo como eje motivador el 25 aniversario de la Constitución, y en este caso la colaboración del Departamento de Matemáticas estuvo relacionada con las matemáticas electorales.

En el curso 2003-2004 volvimos a tener como eje motivador las matemáticas, denominándose la actividad **V Semana Temática:** πKT X las Mates, y tuvo nueve aulas temáticas: **Orientándonos, Torre de Babel, Naturaleza Matemática, Administración Segura, Juegos Matemáticos, Matecultura, De Mates... ¿Ná?, Fractalmanía y Miscelánea.**

En el curso 2004-2005 se volvió a alternar la temática tenido como eje motivador el cuarto centenario de El Quijote, y en este caso la colaboración del Departamento de Matemáticas ha estado relacionada con instrumentos y medidas tradicionales.

Espectáculo de Magia Matemática

Inauguración de la V Semana Temática

Por razones de espacio y a modo de ejemplo nos vamos a limitar a desarrollar las actividades que se realizaron para la VII Semana Temática, pero si se desea conocer alguna actividad de otro curso puede visitarse la página web **De Mates... ¿Ná?**[2] .

Realización de la VII Semana Temática

El lema de la presente edición ha sido ***Re π KT X las Mates***. Este eslogan es el sucesor del de la V Semana Temática y recoge el objetivo que nos habíamos marcado: RE-picar a todos los chicos y chicas a redescubrir las matemáticas de una forma divertida.

[2] ***De Mates… ¿Ná?*** es una página web elaborada por alumnos de matemáticas tanto de ESO como de Bachillerato de nuestro centro dada su utilidad como elemento motivador y dinamizador de las clases. En ella presentamos algunos de los trabajos realizados en las clases de matemáticas, las actividades desarrolladas en nuestro Instituto relacionadas con las Matemáticas, noticias e investigaciones matemáticas en general. La presentación se realiza mediante diferentes secciones, cada una de ellas en torno un tema de interés: presentación de la página, curiosidades, fotografía matemática, noticias, enlaces a otras páginas... Estas secciones son: **¿Quiénes Somos? ¿Sabías qué...?, Ojo Matemático , Matenoticias, Otras páginas**, **Viaje a través de los Genios** y **Exposiciones.** Esta participación se presenta a los alumnos de los diversos cursos y consiste en realizar trabajos que encajen dentro de alguna sección de la web, que por lo general son presentados y sugeridos por nosotros. Creemos importante poder visitar todas las aportaciones de cursos anteriores y esto se puede realizar mediante hipervínculos a las páginas realizadas en otros cursos situados en la parte superior derecha de la página principal.

La actividad se realizó en el antiguo Mercado Público de La Unión[3], del 16 al 23 de abril de 2008. Esta edición tuvo una gran asistencia de centros invitados y cada día tuvimos unos 250 chicos y chicas participando (lo que hace un total de 30 centros participantes y más de 1500 alumnos). El día de la inauguración contamos con la presencia de Claudi Alsina que nos ofreció una conferencia sobre las Matemáticas a lo largo de la Historia.

Conferencia inaugural de Claudi Alsina

También realizamos un "experimento" denominado "Arte cinemático" en el que todos los presentes debían ponerse por grupos y realizar unos mosaicos con distintos colores pero al ritmo de la música. A partir de un ritmo y del movimiento se creaban figuras geométricas, en este caso cuadrados concéntricos, utilizando dos técnicas plásticas distintas, el dibujo (ceras) y el color (témperas aplicadas con esponja).

Arte Cinemático

[3] El **Antiguo Mercado Público** de La Unión (Murcia, España) es una obra de estilo modernista del arquitecto Víctor Beltrí. Fue concebido como plaza de abastos del pueblo de La Unión, que, a principios del siglo XX vivía un momento de extraordinaria pujanza económica debido al auge de las minas de plomo y plata. El edificio se apoya sobre una serie de columnas de hierro que soportan todo el peso de la estructura. Para conseguir la mejor iluminación posible del interior diáfano, casi todos los huecos se cubrieron con cristal. Sólo se construyó de obra los muros de las crujías y la fachada principal. Algunos elementos decorativos típicos del modernismo como flores y pináculos, realizados en piedra artificial, adornan la fachada. El edificio está restaurado y es la sede actual del Festival Internacional del Cante de las Minas.

Entre los nuevos retos que nos habíamos marcado para este año destaca la realización de una espiral aurea, espiral de Durero, de más de diez metros de altura con papel continuo sobre el escenario del Mercado Público.


Gran Espiral de Durero o Espiral Áurea

Otro reto que nos propusimos fue el de recrear un Cementerio Matemático. Esta actividad la realizamos los departamentos de Inglés, Plástica y Matemáticas para Halloween y se trataba de la construcción de un cementerio con sus tumbas y la peculiaridad de que los difuntos eran matemáticos y matemáticas famosos. En cada tumba se podía leer el nombre, fecha de nacimiento, fecha de muerte y un epitafio (en una placa), todo ello en inglés. Los alumnos visitaban el cementerio y debían rellenar un cuestionario para saber quién era quién. La actividad nos pareció muy interesante y la ampliamos durante la Semana Temática tratando de realizar un cementerio más "real" con mejores decorados, efectos sonoros y luminosos. Cabe resaltar que el Cementerio Matemático fue el tema de un programa radiofónico por parte de Nieves Concostrina en su programa "Polvo eres" de Radio Nacional de España, Radio 5 todo noticias.

Alumnos en el Cementerio Matemático

Vista del Cementerio Matemático

También fue una alegría y una responsabilidad el que las VI Jornadas Regionales de Educación Matemática de Murcia se inauguraran en el Mercado Público con motivo de visitar nuestra Semana. Después de la inauguración el profesor Luis Balbuena realizó una conferencia y seguidamente se realizó una visita a la Semana por parte de los asistentes. Éstos, como si fueran alumnos, en grupos y con su tarjeta correspondiente iban pasando por todas las aulas y los monitores les explicaban las actividades de igual forma que lo hacían con los alumnos de otros centros. Para todos nosotros, y especialmente para los monitores, fue una experiencia muy gratificante el ser por un día ellos los profesores de matemáticas y los profesores los alumnos.

Inauguración de las VI Jornadas Regionales de Educación Matemática de Murcia

Profesor siguiendo las explicaciones de los monitores

A continuación describimos brevemente en que consistía cada aula de esta edición:

Estratecno

En esta aula los visitantes tenían que buscar estrategias en varios juegos relacionados con las matemáticas, todos ellos realizados en el centro. Cabe destacar la realización a tres escalas (normal, miniatura y gigante) de un juego de estrategia denominado “Atascos” y de las Torres de Hanoi. También se manejaron Máquinas de Galton para experimentar con combinatoria y el azar, y por último se podía ver el proceso de diseño y realización de unas gigantescas Cometas tetraédricas.

Aula Estratecno: Torres de Hanoi

Aula Estratecno: Atascos

Sociomática

Se presentaron actividades en el que se relacionaban las Matemáticas con el Arte, la Filosofía, las Religiones y la Numerología. Se realizaba un recorrido por el aula observando los diferentes paneles y contestando unos cuestionarios. Por otra parte se realizaba un trabajo Demográfico de campo, pues los alumnos debían rellenar una ficha sobre datos familiares para que los monitores los introdujeran en el ordenador con el objeto de ir confeccionando una pirámide de población. Además cada alumno indicaba al monitor encargado de los mapas “Nuestros Orígenes” con el fin de señalar en ellos la procedencia familiar.

Aula Sociomática: Alumnos realizando actividades

La Torre de Babel

En esta aula nos encontrábamos con actividades en español, inglés y francés. Se debían responder preguntas con la información de los paneles en los que se relacionaban las Matemáticas con sellos, curiosidades, poesía, humor matemático y realizaban sopas de letras. Posteriormente jugaban al Matebingo en el que los monitores “cantaban” elementos matemáticos en inglés y francés. Otra parte del aula era la del Cementerio Matemático; consistía en averiguar el nombre de los matemáticos de las lápidas que se habían realizado en la fiesta de Halloween. Había una hoja donde ponía pistas en español y en las lápidas lo ponía en inglés. Para finalizar, cada visitante dejaba su opinión por escrito en un libro de firmas, con su testimonio e impresiones acerca de la Semana.

Aula La torre de Babel: Bingo Matemático

Aula La torre de Babel: Exposición de Sellos Matemáticos

El Canto de un duro

Esta aula constaba de dos partes diferenciadas que relacionaban las Matemáticas con la música por un lado y con la bolsa por otro. En la actividad sobre música los monitores enseñaban a los alumnos a manejar las principales funciones del programa para la composición de música fractal mediante el programa de ordenador Gingerbread, concluyendo la actividad con el almacenamiento, en el disco duro de los ordenadores, de las obras compuestas por los alumnos participantes. También se podía ver un Monocordio Tonométrico realizado en el centro y el panel informativo sobre el mismo.

En la siguiente actividad se pretendía introducir a los alumnos en el mundo de las divisas, los tipos de cambio y los países a los que pertenecen. Los alumnos de los Ciclos de Administrativo de nuestro centro diseñaron un juego en el que los alumnos invertían en divisas 4.000 euros. Podían elegir libremente la cantidad a invertir sin que se superase el anterior límite, escogiendo para ello cuatro monedas diferentes que podían ser reales brasileños, dirham marroquíes, dólares USA, libras egipcias, libras esterlinas o rublos rusos. Finalizada la Semana Temática se cotejaron "las inversiones realizadas" con los nuevos tipos de cambio a fecha de 25 de abril y el alumno que obtuvo mayor plusvalía con la compra de sus divisas recibió un premio.

Aula El canto de un duro: Alumnos realizando actividades

El Laberinto

En esta aula se trataba de participar en una carrera de orientación por equipos con seis estaciones por todo el Mercado Público. Cada equipo tenía un mapa del Mercado para buscar las estaciones, y una planilla de respuestas donde se iba apuntando las soluciones de cada una de las pruebas planteadas en dichas estaciones. Se debía completar la planilla de respuestas correctamente en el menor tiempo posible. Al equipo ganador se le premiaba con un “gorro matemático” hecho con globos (con forma de tetraedro o con forma de flor con una simetría de orden cuatro).

Aula El laberinto: alumnas buscando pruebas

Aula El laberinto: Gorro tetraédrico hecho con globos

Plásmate

En esta aula la actividad estaba basada en la obra de M.C. Escher, artista plástico que supo combinar la geometría y la plástica en su obra. Se intentaba recrear una obra suya utilizando para ello el collage. Una gran parte de la obra de Escher se basa en las redes modulares, es decir la repetición de un elemento geométrico en el plano o el espacio, por ello los alumnos trabajaron en el plano utilizando para ello las figuras geométricas que se pueden repetir sobre este sin que sobre ningún espacio, es decir, el triángulo y el cuadrado. Estas repeticiones no tendrían ningún interés plástico fuera de lo común si no es por la aportación, que utilizando la simetría, giros, áreas, …diseña unos módulos que al repetirse generan imágenes. El proceso consistía en que partir de las fotocopias de los módulos triangulares y cuadrados, se recortaban con cuidado de respetar la forma y el dibujo, se ensamblaban los módulos sobre la cartulina negra para comprobar que encajaban, se elegían los colores a utilizar, se aplicaba el color y se pegaba el resultado. También se visitaba una exposición de cuadros y figuras imposibles realizados por los alumnos del centro inspirados en las obras de Escher.

Aula Plásmate: alumnos realizando mosaicos

Aula Plásmate: Exposición sobre la partición periódica del plano

Eureka

El visitante se encontraba en esta Aula con una serie de experimentos similares a los del programa televisivo "El Hormiguero". En primer lugar los monitores presentaban experimentos relacionados con Física y Química que luego explicaban y debatían con los alumnos. Trataban entro otros los siguientes temas: el Arco iris, Ácidos y Bases, Vasos mágicos, la Bolsa extrafuerte y Experimentos sobre g. Otras actividades estaban relacionadas con las Ciencias Naturales; se trabajaba con la presencia de las Matemáticas en la Naturaleza, especialmente del Número Áureo y de los Fractales. Cabe destacar la actividad en la que todos los visitantes debían comprobar si su cuerpo "era Áureo", dividiendo la altura total de la persona y la altura hasta el ombligo y se comprobaba que el resultado era aproximadamente el

Número Áureo. Todas las medidas se anotaron en una base de datos y la media de las mediciones dio como resultado una aproximación del Número Áureo con tres decimales exactos.

Aula Eureka: experimento “La bolsa extrafuerte”

Aula Eureka: fractales en la naturaleza

¿Qué dices?

En esta aula se pretendía usar las matemáticas para darnos cuenta de los peligros que corremos todos con la multitud de ruidos presentes en nuestras vidas. Para ello se hacía uso de unos paneles explicativos y de un sonómetro con distintas mediciones para que nos diéramos cuenta ayudándonos de gráficas que los decibelios actúan con una escala logarítmica. Otra actividad era descubrir la Geometría presente en las señalizaciones de seguridad, como por ejemplo viendo que el Triángulo es una advertencia o peligro y que el Círculo representa una obligación (azules) o prohibición (rojas).

Después, por parejas se le daba a uno una tarjeta con alguna figura geométrica o una operación de cálculo y debía explicarlo por teléfono a su compañero que estaba en otro recinto. Posteriormente se presentaba la Espiral de Durero realizada con bombillas por alumnos del Ciclo de Electricidad y se podían contemplar los concursos realizados a lo largo del curso en el centro sobre Fotografía Matemática, la Tarjeta Matemática de Año Nuevo y la Pegatina “oficial” de la VII Semana Temática.

Aula ¿Qué dices?: mediciones con el sonómetro   Aula ¿Qué dices?: alumnos realizando actividades

Galimates

Al entrar en esta aula, el grupo se subdividía en dos diferentes. Un grupo realizaba la actividad sobre una Casa Ecológica en colaboración con Cruz Roja que consistía en un juego de tablero gigante en el cual los alumnos eran las propias fichas, los monitores encargados hacían preguntas sobre la aplicación de las Matemáticas a la ecología y según fuera la respuesta se avanzaba o retrocedía.

El otro grupo al mismo tiempo realizaba una actividad que consistente en resolver operaciones y acertijos matemáticos con respuesta numérica. La respuesta debían darla en braille, polaco, árabe o lenguaje de signos. Por último todos los alumnos participaban en un concurso que consistía en un bote lleno de habichuelas en el que los alumnos daban una estimación del número aproximado de habichuelas que había; se anotaba en una base de datos el número junto con los datos del alumno y al finalizar la Semana se entregó un premio al alumno que más se aproximó al número exacto de habichuelas.

Aula Galimates: la Casa Ecológica   Aula Galimates: respuesta de acertijos en braille

Miscelánea

A lo largo de la visita los alumnos también podían visitar diversas exposiciones realizadas en anteriores ediciones como las exposiciones sobre Figuras Imposibles, Obas de Escher o sobre fotografía matemática presente en el propio Mercado Público. Al desplazarse por el Mercado Público podían ver los Poliedros Gigantes de un metro de arista, un Omnipoliedro (todos ellos realizados por alumnos del centro) y comprobar el *"Teorema de Euler"*. Ya en el centro del Mercado Público podían observar el crecimiento armónico en la planta llamada vulgarmente "pita" o "arcibarón" y contemplar el Teorema de Thales tumbándose en una camilla y mirando el techo del Edificio.

Omnipoliedro

Contemplación del Teorema de Thales
en el techo del Mercado Público

Conclusiones

La realización de las Semanas Matemáticas han supuesto a nuestro entender un importante acercamiento de los alumnos al mundo de las Matemáticas y han sido elementos motivadores de las asignaturas de Matemáticas, sirviéndonos de plataforma para tratar de redescubrir las Matemáticas y siendo, en nuestra opinión, un medio idóneo para que nuestros alumnos hablen de Matemáticas mostrando las investigaciones y curiosidades que se realizan en clase. Ha sido un elemento dinamizador para realizar un verdadero trabajo a nivel de centro en el que todos nos hemos sentido partícipes del trabajo común y de las ganas de llevar a cabo proyectos que mejoren el nivel académico y las relaciones entre todos los miembros de la comunidad educativa

Creemos que se han alcanzando de forma progresiva los objetivos que nos habíamos propuesto y queremos destacar que posiblemente hemos conseguido formar un grupo de trabajo de profesores que a través de un trabajo interdisciplinar ha tenido como objetivo mejorar las actitudes y las capacidades de los alumnos en Matemáticas. Esperamos en años sucesivos seguir con esta labor para continuar un tratamiento interdisciplinario que favorezca el rendimiento académico de los alumnos y su visión hacia las Matemáticas.

Si se quiere obtener más información sobre las Semanas Matemáticas y otras actividades matemáticas realizadas en el Instituto Sierra Minera de La Unión recordamos que se puede visitar la página realizada por nuestros alumnos **"De Mates...¿Ná?"**: http://centros5.pntic.mec.es/ies.sierra.minera/dematesna, y en particular, lo concerniente a las Semanas Matemáticas:
http://centros5.pntic.mec.es/sierrami/dematesna/demates78/opciones/vii%20semana%20tematica/index%20vii%20st.htm

Bibliografía

- J. Comas, M. J. Herrera (2002): "Propuesta de Desarrollo: Semana Matemática", En *Interdisciplinaridad: Las Matemáticas en Plástica y Tecnología*, Centro de Profesores y Recursos de Cartagena- La Unión, Murcia.
- J. Comas, M. J. Herrera (2002): "Unidades Didácticas de Matemáticas", En *Interdisciplinaridad: Las Matemáticas en Plástica y Tecnología*, 117-170, Caja de Ahorros del Mediterráneo (CAM), Murcia.
- J. Comas, M. J. Herrera (2002):: "Una página web en el Taller de Matemáticas", *Educar en el 2000,*Revista de Formación del Profesorado, nº5,120-123.
- M. A, Baillo y otros (2003): "III Semana Matemática del IES Sierra Minera de La Unión", *Educar en el 2000,* Revista de Formación del Profesorado, nº6,106-110.
- J. Comas, M. J. Herrera (2005): "Una web por y para los alumnos de Matemáticas", *Suma,* Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas nº 50, 19-26.

Isabel Salas Vizcaíno, Licenciada en Matemáticas. Profesora de Matemáticas en el IES Sierra Minera de La Unión, Murcia (España). Ha impartido docencia en Estadística como profesor asociado en la Universidad Politécnica de Cartagena. Es miembro de la Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia. Su principal tema de trabajo es conseguir que los alumnos vean las Matemáticas en su vida cotidiana y sean conscientes de sus utilidades. Ha publicado libros, artículos en revistas y participado en diversas Jornadas de Educación Matemática. Es miembro desde sus comienzos del equipo de coordinación de la Semana Matemática.
e-mail: isv70@hotmail.com

Miguel Peñalver Sánchez, Maestro de Educación Primaria especializado en Pedagogía Terapéutica y Licenciado en Pedagogía. En la actualidad trabaja como profesor de Pedagogía Terapéutica en el IES Sierra Minera de La Unión, Murcia (España), colaborando en el apoyo a los alumnos/as con necesidades educativas especiales del centro, para lo cual se coordina con los distintos Departamentos didácticos, entre los cuales se encuentra el Departamento de Matemáticas precursor de esta iniciativa. Es miembro del equipo de coordinación de la Semana Matemática.
e-mail: miguelpesan@yahoo.es

Pedro Sandín Antúnez, Profesor Técnico de F.P. Especialidad en Procesos de Gestión administrativa, Diplomado en Ciencias Empresariales. Es profesor desde 1996 en el IES Sierra Minera de La Unión, Murcia (España), donde ha colaborado en varias ediciones de la Semana Matemática, coordinando los departamentos de Formación Profesional para la realización de la VII Semana Matemática.
e-mail: depadsierraminera@yahoo.es

Ana Pérez-Nieto Mercader, licenciada en Bellas Artes. Profesora de Educación Plástica y Visual y Dibujo Técnico en el IES Sierra Minera de la Unión, Murcia (España). Ha colaborado en distintas publicaciones e imparte cursos relacionados con la creatividad aplicada en el aula, dirigidos a profesores de Educación Primaria y Secundaria de todas las especialidades. Es miembro del equipo de coordinación de la Semana Matemática. Además esta artista plástica desarrolla su propio trabajo artístico en varias disciplinas, sobre todo en grabado.
e-mail: anapereznieto@hotmail.com

Joaquín Comas Roqueta, Licenciado en Matemáticas. Profesor de Matemáticas en el IES Sierra Minera de La Unión, Murcia (España). Es miembro de la Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia. Su principal tema de trabajo es la dinamización de las clases de Matemáticas. Ha publicado libros, artículos en revistas, participado en diversas Jornadas de Educación Matemática e imparte cursos y ponencias para profesores. Es el coordinador de la página web De Mates… ¿Ná? y desde sus comienzos de la Semana Matemática.
e-mail: joaquincomas@semrm.com

UNIÓN REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 125-137
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

O ensino de Matemática veiculado em livros didáticos publicados no Brasil: conjuntos numéricos e operações na coleção *moderna* de Osvaldo Sangiorgi

Maria Cristina Araújo de Oliveira [1]

Resumo

O artigo analisa a inserção de novos conteúdos, as alterações de tópicos e de propostas de ensino dos mesmos, nos livros didáticos produzidos pelo professor Osvaldo Sangiorgi a partir do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Esta coleção que teve grande penetração nas escolas brasileiras pode ser considerada uma referência importante para o estudo histórico do ensino de Matemática no período da Matemática moderna, a partir da década de 60. As análises revelam sobretudo a ênfase nas estruturas algébricas e as inovações metodológicas propostas na obra.

Abstract

The paper analise the introduction of new subjects, the changes of subjects and the proposal of their teaching, in textbooks written by professor Osvaldo Sangiorgi during the modern Mathematics movement in Brazil. This collection was well accepted in the Brazilian schools and became an important reference in the historic studies of Mathematics' teaching during the modern Mathematics period, in the 60's. The search shows above all the emphasis in the algebraic structures and the methodological innovations presented by the work.

Introdução

Este artigo tem como objetivo analisar a abordagem dada pelo professor Osvaldo Sangiorgi ao estudo de conjuntos numéricos e suas operações, nas séries iniciais do antigo ginásio brasileiro (alunos de 11 – 12 anos) em sua coleção didática *Matemática curso moderno*.

A partir do chamado Movimento da Matemática Moderna, que no Brasil teve início na década de 60, as propostas para o ensino de Matemática, bem como os diferentes conteúdos que compõem essa disciplina escolar sofreram profundas alterações.

[1] Doutora em Educação, professora do programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNIBAN, integra o Grupo de Pesquisas em História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT). Universidade Bandeirante de São Paulo UNIBAN/GHEMAT
mcrisoliveira6@gmail.com

Esse período, marcado por fortes transformações nas propostas de ensino da disciplina, determinou nas publicações – livros didáticos, revistas pedagógicas, etc e nas práticas docentes mudanças que, em alguma medida, deixaram heranças ainda presentes na cultura escolar de nossos dias.

Acreditamos que conhecer a história de como os conteúdos de ensino são introduzidos na escola, se estabelecem, se transformam, deve possibilitar uma compreensão mais abrangente e crítica sobre o processo de ensino, a prática docente e a própria cultura escolar.

Neste sentido, o presente texto fundamenta-se nos estudos históricos de autores como Michel de Certeau 1984 e Roger Chartier 1991 que tomam a história como produção do historiador e como objeto, as práticas culturais. Consideramos os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática como *práticas culturais*. A utilização do livro didático como fonte de pesquisa é uma das possibilidades para o estudo das práticas escolares presentes durante o período do Movimento da Matemática Moderna.

As idéias defendidas, pelo que estamos chamando de Movimento da Matemática Moderna, foram apropriadas pelo professor Osvaldo Sangiorgi e em sua coleção didática *Matemática curso moderno,* estão explícitas.

A noção de apropriação defendida por Chartier enfatiza a pluralidade de interpretações, de usos e a liberdade criadora dos sujeitos em contato com textos, leis e normas. Para Chartier o conceito de apropriação tem como objetivo a produção de uma história social dos usos e das interpretações, referidas a suas determinações fundamentais e inscritas nas práticas específicas que as produzem.

Nos baseamos em Choppin 2004 para defendermos a importância do livro didático nas apropriações dos professores. Para esse autor, o livro didático não é simplesmente um espelho, ele modifica a realidade para educar as novas gerações. O livro didático expressa as propostas de inovação, projetando-as para as alterações das práticas.

O Movimento da Matemática Moderna no Brasil: o papel de Osvaldo Sangiorgi

O chamado Movimento da Matemática Moderna, ao qual nos referimos, corresponde a propostas de mudanças divulgadas, sobretudo na década de 1960, e foi, de um modo geral, uma tentativa de modernizar o ensino de Matemática, modificando e atualizando os conteúdos e os métodos de ensino nos níveis escolares: primário e secundário. Um dos objetivos principais era o de aproximar os conteúdos estudados no ensino secundário dos conteúdos ensinados no ensino superior. Impulsionados pelos ventos dos avanços da pesquisa em Matemática, sobretudo no campo da Álgebra, alguns matemáticos renomados como Jean Dieudonné e Andre Lichnerowicz participaram das discussões e proposições acerca da modernização do ensino de Matemática.

Esse movimento ocorreu em vários países do ocidente (Estados Unidos, países da Europa e América latina, entre outros) e do oriente (alguns países árabes). No Brasil, o professor Osvaldo Sangiorgi foi um dos principais defensores e divulgadores desse movimento, ele atuou como professor nos diferentes níveis de ensino – secundário, superior e foi um dos principais autores de livros didáticos das décadas 50 a 70 do século passado, no Brasil. Sangiorgi esteve na Universidade de Kansas onde freqüentou o curso de verão de 1960. Teve aulas com o professor George Springer, que posteriormente esteve no Brasil ministrando cursos no GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática), grupo fundado por Osvaldo Sangiorgi em São Paulo, em 1961.

O GEEM teve como objetivos além de incentivar o estudo da Matemática Moderna, promover cursos de aperfeiçoamento para professores de Matemática das escolas secundárias. Fizeram parte do GEEM autores de livros didáticos, matemáticos, professores secundários, primários e universitários. Osvaldo Sangiorgi era o presidente e porta-voz do grupo, manteve com a imprensa uma relação estreita, deu inúmeros depoimentos e escreveu diversos artigos nos principais jornais de São Paulo. Nessas entrevistas e artigos, Osvaldo Sangiorgi divulgava a Matemática Moderna e as iniciativas do GEEM.

A Matemática Moderna no Brasil e os livros didáticos de Osvaldo Sangiorgi

Em 1963, Sangiorgi publica, no Brasil, o primeiro livro didático de Matemática Moderna intitulado *Matemática curso moderno*. Nesse ano foi publicado o primeiro volume para a 1ª série do ginásio (que corresponde na seriação atual ao 6º ano do ensino fundamental) que começou a circular a partir de 1964; no prefácio o autor exalta as possibilidades criadas pelo estudo da Matemática *moderna* apresentada em seu livro.

Os livros didáticos do professor Sangiorgi, em especial a coleção *Matemática curso moderno,* espalharam-se por todo o país levando a diferentes localidades a proposta de ensino de Matemática *moderna* defendida por Sangiorgi. O levantamento quantitativo do número de exemplares vendidos dessa coleção, realizado por Villela 2008, aponta *Matemática curso moderno* como o livro de maior vendagem no período de 1964 a 1973 pela Companhia Editora Nacional, uma das principais editoras de livros didáticos do país nesse período.

Vários trabalhos sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil como os de D'Ambrosio (1987) e Búrigo (1989) destacam a importância do livro didático como instrumento de divulgação das propostas de ensino de Matemática. Para além dos cinco Congressos Nacionais do Ensino de Matemática, realizados no Brasil entre 1955 e 1966, e dos cursos de formação continuada para professores oferecidos, sobretudo pelo GEEM, os livros didáticos estiveram presentes no dia-a-dia de professores e alunos dando suporte para a implementação da nova proposta para o ensino de Matemátca.

Vários fatores contribuíram para que o livro do professor Osvaldo Sangiorgi se tornasse um *best-seller*, como o classifica Valente (in press), entre eles destacamos o bom relacionamento de Sangiorgi com entidades e órgãos oficiais da Educação, a visibilidade que tinha na mídia, notícias constantes nos principais jornais de São Paulo, o fato do professor já ser um autor de livros didáticos bem sucedido.

As relações de Sangiorgi com as propostas modernizadoras para o ensino de Matemática

O objeto de estudo desse artigo é a análise das apropriações feitas pelo professor Sangiorgi das propostas modernizadoras para o ensino de Matemática que foram veiculadas em seus livros didáticos *Matemática curso moderno.* Restringiremos as análises ao estudo dos conjuntos numéricos e das operações nas séries iniciais do ginásio. Focalizaremos, além dos conteúdos, as propostas metodológicas apresentadas nesses manuais didáticos.

Para discutirmos as apropriações de Sangiorgi sobre as propostas modernizadoras vamos estabelecer um conjunto de referências defendidas em alguns documentos ou livros que caracterizaram o ideário desse Movimento e com as quais o professor teve contato.

O primeiro deles é o livro "L´enseignement des mathématiques", que reúne textos do epistemólogo Jean Piaget, dos matemáticos Jean Dieudonné, Andre Lichnerowicz, Gustave Choquet entre outros professores e pesquisadores de projeção internacional, publicado em 1955.

O professor Osvaldo Sangiorgi conhecia esse livro como podemos constatar pelo seu texto publicado nos Anais do II Congresso Nacional de Ensino da Matemática, realizado em Porto Alegre, em 1957. Neste texto o professor faz referência ao livro *L´enseignement des mathématiques* quando argumenta que Matemática (clássica ou moderna) deve integrar os programas do ensino secundário.

O seminário de Royaumont que se realizou no final de 1959, na França, e reuniu em torno de 50 representantes de 18 países e é considerado um marco para o Movimento da Matemática Moderna. Deste seminário e do encontro de Dubrovnik, realizado em 1960, emergem orientações sobre o ensino de Matemática no secundário tanto com relação a conteúdos matemáticos como aos métodos de ensino de tais conteúdos. (Guimarães 2007)

Tais orientações foram sistematizadas no livro *Un programme moderne de mathématiques por l'enseignement sécondaires,* publicado pela OECE em 1961, traduzido para o português pelo professo Jacy Monteiro (diretor de publicações do GEEM) e editado pelo GEEM, em 1965.

As novas propostas para o ensino de Matemática apresentam um programa influenciado por idéias estruturalistas dominantes na época, que com relação aos conteúdos Matemáticos revelam a influência da concepção bourbakista[2] e quanto aos métodos, os estudos de Jean Piaget.

De forma bastante sintética, podemos dizer que quanto aos conteúdos curriculares destacam-se duas orientações: dar ênfase à unidade da Matemática, introduzir novos tópicos considerados *modernos.*

Quanto aos métodos as orientações se aproximam do processo de ensino e de aprendizagem, do papel do professor e do aluno. Entre as recomendações estão as valorizações: da compreensão em detrimento à mecanização, da aprendizagem por descoberta, da intuição como algo que deve preceder ao ensino dedutivo. Também se destaca a importância dada ao trabalho experimental como uma etapa anterior à abstração.

A coleção *Matemática curso moderno* contém além dos livros para os estudantes, guias para os professores que trazem recomendações sobre como ensinar os diferentes assuntos. Há recomendações para cada um dos capítulos e ao final, Sangiorgi apresenta as referências bibliográficas utilizadas. Analisando tais guias observamos que as referências bibliográficas são praticamente francesas e americanas, sobretudo com obras do SMSG (School Mathematics Study Group).

As apropriações de Sangiorgi sobre as propostas do MMM: Matemática curso moderno

O livro *Matemática curso moderno 1* está organizado em 4 capítulos sendo os 3 primeiros sobre números e operações e o último sobre geometria. Nos capítulos

---

[2] Grupo de matemáticos criado em 1934, na frança, que sob o pseudônimo de Nicolas Bourbaki publicou inúmeros livros de Matemática. Entre os integrantes desse grupo estiveram matemáticos tais como Jean Dieudonné, André Weil, Henri Cartan, entre outros.

iniciais são abordados os conjuntos numéricos dos naturais e dos racionais positivos. Pode-se dizer que o estudo desses conjuntos numéricos consiste na essência dos conteúdos a serem trabalhados nessa série.

O primeiro capítulo do livro, que se divide em 3 partes, dedica a primeira delas à Noção de conjunto. Na coleção anterior de autoria do professor Sangiorgi, editada na década de 50, este tópico não era tratado. É pela comparação entre conjuntos que o autor introduz a primeira idéia de número e exemplifica uma correspondência biunívoca.

2. *Primeira idéia de número natural*

O que ocorre de importante entre *conjuntos eqüipotentes?*

A mente humana, pondo de lado a *qualidade* (carteiras, alunos, nomes, . . .) dos elementos que figuram nos *conjuntos eqüipotentes* e apoiando-se tão-sòmente na *correspondência biunívoca* existente entre os seus elementos, destaca a permanência de uma propriedade comum: a *quantidade* ou o *número de elementos*, também chamado **número natural** (*).

Assim, por exemplo, os conjuntos *eqüipotentes* (fig. 18):

Propriedade comum: *número um*

Fig. 18

têm a seguinte *propriedade comum:* o mesmo número de elementos ou o mesmo *número natural*, denominado *um* (em português) e representado pelo símbolo (indo-arábico): 1.

Imagem da página 35 do livro Matemática curso moderno, volume 1, de Osvaldo Sangiorgi.

Na coleção anterior ao MMM a idéia de número é introduzida associando-o ao processo de contagem, a operação de contar objetos de uma coleção ou indivíduos de um grupo, dá origem aos números. O autor já mostra a preocupação em distinguir os símbolos das idéias, quando indica e representa de formas distintas os números (escritos por extenso) e os símbolos (os algarismos).

Um dos itens da primeira parte da coleção moderna traz a distinção entre número e numeral. Para marcar a diferença entre esses conceitos, o autor apresenta com exemplos, que a mesma operação (transformação) aplicada a números ou a numerais produz resultados absolutamente distintos.

CURIOSIDADES ACÊRCA DE NUMERAIS

Vamos agora, para melhor destacar o conceito de *numeral*, trabalhar *sòmente* com *símbolos* que não envolvam, de nenhuma maneira, as idéias (número) que êsses símbolos, possam representar:

1. Mostre que a "metade" de **8** é **3**.

   É muito fácil: basta "dividir" ao meio (por uma vertical) o primeiro símbolo . . .

   Assim, de **8** resulta **3**

   E, se a "divisão" ao meio fôsse por uma horizontal, qual seria a "metade" de **8** ? Resolva você êste caso.

2. Mostre que a "metade" de **XII** é **VII**

   Basta traçar a horizontal pelo meio e . . . .

3. Mostre que, "tirando" **3** de **32**, resulta **2**.

Imagem da página 44 do livro Matemática curso moderno, volume 1, de Osvaldo Sangiorgi.

Embora tais exemplos sejam bastante ilustrativos da distinção apresentada sobre números e numerais, deixam a impressão de dar destaque a fatos menos importantes para alunos iniciantes no ginásio.

O tema da distinção entre números e numerais foi tratado também em cursos de formação para professores de Matemática ministrados pelo GEEM, como aponta documento pertencente ao arquivo pessoal Osvaldo Sangiorgi[3] (APOS), que indica o próprio professor Sangiorgi como responsável pelo módulo denominado número e numeral.

São apresentadas aos alunos as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva e seu domínio de validade nas relações de igualdade e desigualdade. Enfatizando a diferença entre os símbolos (os numerais) e as idéias (os números), as propriedades são informadas. Não há exemplos de aplicação ou de possibilidades de uso de tais propriedades. Nos exercícios as propriedades são exploradas especialmente na verificação se uma relação é de equivalência. As relações exploradas tratam de situações do dia-a-dia, por exemplo, a relação ter a mesma mãe é de equivalência para o caso de 3 alunos que são irmãos.

A estrutura de ordem do conjunto dos naturais é abordada pelo trabalho com a reta numerada que é explorada com o objetivo de possibilitar ver intuitivamente tal estrutura.

Na coleção anterior ao MMM somente algumas propriedades são apresentadas aos alunos como, por exemplo, para o conjunto dos naturais, em relação à adição, a comutatividade e a associatividade; para a multiplicação, a comutatividade e a distributividade em relação à soma e à diferença.

São apresentados aos alunos alguns sistemas de numeração egípcio, babilônio, romano, comparando-os com o sistema de numeração decimal e discutindo algumas limitações dos sistemas antigos. Sangiorgi incentiva os alunos a iniciarem um laboratório de Matemática a partir da experiência com a contagem em bases diferentes da decimal. Descreve como proceder para realizar essa experiência, dando sugestões de como montar uma caixa para representar as diferentes classes do sistema de numeração.

[3] O APOS foi organizado pelo GHEMAT (Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil), coordenado pelo Professor Wagner Rodrigues Valente, já encontra-se aberto para a consulta.

Com relação a *Sistemas de Numeração* é útil mostrar aos jovens alunos da 1.ª Série Ginasial a possibilidade de "construir" sistemas diferentes do *Decimal*. A finalidade é propiciar um contacto "concreto" com as idéias de *conjunto* e de *relações*, que constituem matéria importante para o desenvolvimento da **Matemática Moderna**.

A iniciação de um *Laboratório de Matemática*, que seria o local onde se concentrariam as atividades práticas, traria — sem dúvida — um nôvo interêsse pelo conhecimento "de perto" de certas partes da Matemática, a começar pela *contagem* dos elementos de um conjunto.

Essa contagem, em *qualquer base*, já foi feita através de "desenhos", reunindo-se em grupos os pontos de um conjunto. Agora, nossa "experiência" pode ser concretizada com uma *caixinha* (de papelão, de madeira, ou mesmo uma série de caixas de fósforos ligadas entre si) que tenha repartições iguais (conforme fig. 35) e que chamaremos de "casas", na seguinte ordem, da direita para a esquerda: 1.ª casa, 2.ª casa, 3.ª casa, . . .

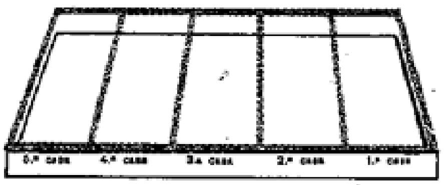


FIG. 35

Vamos supor que você tenha um conjunto de feijões e que queira contá-los usando o Sistema de Numeração de *base quatro*. Que é necessário você lembrar, antes de começar a contagem? O seguinte:

1.°) usar *sòmente* os *quatro algarismos:* 0, 1, 2 e 3, para escrever qualquer número na base quatro;

2.°) usar o *Princípio da Posição* para a *base quatro:* todo algarismo escrito à esquerda de outro representa unidades *quatro vêzes maiores* que as dêsse outro.

Agora, podemos começar a *contagem:*

Coloquemos os feijões, um a um, na 1.ª casa da caixinha até o máximo de quatro; ao colocarmos o quarto feijão na 1.ª casa, retiramos todos de uma vez e colocamos *apenas um feijão* na "casa" imediatamente à esquerda (2.ª casa). Para não fazer confusão, é preferível colocar um grão maior na 2.ª casa (um grão de milho, por exemplo) a fim de caracterizar melhor que agora são unidades de segunda ordem.

Imagem da página 75 do livro Matemática curso moderno, volume 1, de Osvaldo Sangiorgi.

O livro inclui também fotografias de alunos fazendo a experiência da mudança de base em duas escolas de São Paulo. Essa abordagem de sistemas de numeração não decimais é uma novidade em relação à coleção anterior.

Os números fracionários são apresentados numa perspectiva de ampliação dos naturais com a existência do elemento inverso para a multiplicação para os números diferentes de zero.

A apresentação dos conjuntos numéricos enfatiza o estudo das propriedades estruturais válidas para as operações: adição - subtração, multiplicação - divisão, potenciação - radiciação. Essas operações são tratadas como inversas e se discute a validade das propriedades de fechamento, comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro ou inverso para cada uma delas.

A abordagem estrutural estende-se ao estudo de conteúdos como máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Para cada uma dessas operações são discutidas as propriedades estruturais pertinentes.

Os problemas de aplicação constituem itens isolados dentro dos capítulos que apresentam os dois conjuntos numéricos estudados nesse primeiro volume.

O livro da 6ª série (alunos de 12 anos), 2ª série ginasial, *Matemática curso moderno*, retoma o estudo dos racionais positivos, chamados simplesmente de racionais, as operações com os conjuntos e a reta numerada é explorada para a localização dos racionais. São apresentadas novamente as propriedades estruturais dos racionais com as operações de adição e multiplicação.

No estudo das razões explora-se situações geométricas: unidades de um segmento, razões entre áreas, volumes e ângulos. Nesse item são tratadas algumas razões especiais como velocidade, densidade demográfica.

Números e grandezas proporcionais são estudados simultaneamente com a introdução de problemas relacionados. Também são estudados nesse volume juros simples, regra de 3, desconto e câmbio.

Ainda em relação aos números são estudados separadamente os inteiros relativos e os racionais relativos com as respectivas propriedades estruturais.

Percebe-se nesse volume uma tentativa de estabelecer mais relações entre a Matemática e outras ciências, bem como apresentar aplicações dos conteúdos estudados.

No livro do mesmo autor, destinado à mesma série, porém anterior à Matemática moderna, a ênfase está nas operações como a potenciação e a radiciação, que são apresentadas para os conjuntos numéricos já estudados na série anterior. O cálculo das raízes quadrada e cúbica é apresentado incluindo técnicas para o cálculo aproximado. Os números irracionais são introduzidos nessa série, relacionando-os com grandezas incomensuráveis.

Ainda nessa mesma obra, o cálculo literal, o estudo dos polinômios e as frações algébricas também são abordados. O último capítulo contém equações e inequações do primeiro grau e sistemas lineares com duas incógnitas. No apêndice consta o método dos determinantes para a resolução de sistemas lineares com até três equações e três incógnitas. Os problemas ficam praticamente restritos ao capítulo de equações.

Pudemos verificar que na coleção moderna há uma significativa alteração da distribuição dos conteúdos ao longo das séries, por exemplo, o estudo dos polinômios e das frações algébricas vai para a 7ª série (3ª série ginasial), os números irracionais passam para a 8ª série (4ª série ginasial). Estas são mudanças que permanecem até os dias de hoje. Cabe ressaltar que os problemas também passam a integrar os exercícios de diferentes conteúdos anteriormente não explorados.

Algumas Considerações

Em 1962, o GEEM em cooperação com o IBECC (Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura – UNESCO), produziu um livro intitulado – *Matemática Moderna para o ensino secundário*. Esse livro reúne vários artigos de professores brasileiros e estrangeiros que discutem o ensino de Matemática Moderna no secundário.

O primeiro artigo do livro é de autoria de Osvaldo Sangiorgi – *Introdução da Matemática Moderna no ensino secundário*. Nesse artigo podemos identificar alguns aspectos sobre a reforma do ensino de Matemática que são importantes para o professor Sangiorgi. Nos chama a atenção a importância dada por ele à questão da linguagem. Em vários trechos do artigo ele anuncia e reitera que há uma necessidade urgente de se introduzir uma modernização da linguagem nos assuntos fundamentais da Matemática. Essa modernização da linguagem diz respeito à introdução do conceito de conjunto e à utilização dos símbolos da lógica que respondem pela precisão indispensável à Matemática.

Identificamos na ênfase dada por Sangiorgi à importância da linguagem e ao estudo das propriedades estruturais dos conjuntos numéricos uma forma sua de *apropriação* das propostas de reforma para o ensino de Matemática discutidas na época.

Sangiorgi construiu suas representações das propostas veiculadas sobre o ensino de Matemática, que juntamente com sua experiência como professor e autor de livros didáticos de Matemática se constituem em elementos para sua *apropriação* sobre tais propostas que é explicitada nos textos que escreve, nas entrevistas que dá aos jornais, nos livros didáticos que publica, na maneira como conduz a divulgação do Movimento no Brasil.

Em termos da teoria que sustenta as propostas apresentadas por Sangiorgi há referências explícitas a Piaget e Boole no artigo sobre a introdução da Matemática moderna no secundário. A teoria de Piaget que mostra a correspondência existente entre as estruturas algébricas e os sistemas operatórios de inteligência das crianças. E a existência de uma álgebra do pensamento que, sob a forma de estruturas, se exprime pela língua e se revela pela gramática descrita pelo matemático Boole.

Destacam-se como apropriações do MMM pelo professor Osvaldo Sangiorgi a preocupação em apresentar para cada conjunto numérico estudado as respectivas propriedades estruturais válidas, os problemas de aplicação, embora situados em alguns capítulos específicos, pretendem relacionar a Matemática com outras ciências como é o caso, por exemplo, dos problemas envolvendo velocidade ou densidade demográfica.

A apresentação do texto também merece destaque. Diferentemente da coleção anterior os livros da coleção Matemática curso moderno procuram estabelecer um diálogo com estudante. Ao longo dos capítulos existem várias figuras, diagramas, fotos, lembretes para os alunos sinalizando os principais pontos.

Esta coleção inovadora para o contexto escolar brasileiro certamente marcou uma época, sobretudo pelo alcance que teve em todo o país.

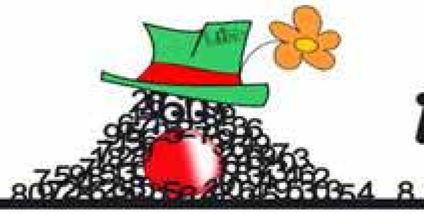
Referências Bibliográficas

- Alain Choppin (2004): "História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte". *Educação e Pesquisa* v.30, n.3: 549-566.
- ANAIS DO II CONGRESSO NACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA (1959). Gráfica da Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Beatriz D'Ambrosio (1987): *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education.* Tese (Doutorado em Educação), Indiana University, Estados Unidos.
- Elisabete Z. Búrigo (1989): *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60.* Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- G.E.E.M (1962): *Matemática Moderna para o ensino secundário.* Editora Universitária– USP, São Paulo.

- Henrique GUIMARÃES (2007): "Por uma Matemática nova nas escolas secundárias – perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna". In: J. M. MATOS;
- W. R. VALENTE (Org.) *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos,* 21 – 45. Da Vinci, São Paulo.
- Jean Piaget et. al (1955): *L´enseignement des mathématiques.* Delachaux & Niestlé S. A., Suisse.
- Lúcia M. A. Villela (2008): "Os livros didáticos de Matemática de maior vendagem, na Companhia Editora Nacional, no período de 1964 a 1980." Anais do V Seminário Temático do Projeto A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: estudos históricos comparativos. CD-ROM.
- Michel de Certeau (1982): *A escrita da história***.** Trad. Maria de Lourdes Menezes. Forense Universitária, Rio de Janeiro.
- OECE (Organização Europeia para a Cooperação Económica) (1961): *Mathématiques Nouvelles*. OECE, Paris.
- OECE (Organização Europeia para a Cooperação Económica) (1961): *Un programme modernede mathématiques pour l'enseignment secondaire*. OECE, Paris.
- Osvaldo Sangiorgi (1963): *Matemática – curso moderno – volumes 1 e 2.* Companhia Editora Nacional, São Paulo.
- Roger Chartier (1991): "O mundo como representação". *Estudos avançados*, 11(5), 173-191.
- Wagner Rodrigues Valente org. (in press). *Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno*. Annablume/CNPq, São Paulo.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 139-146
ISSN: 1815-0640



¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santonja

El asombroso mundo de las falacias matemáticas

Entre las personas que no tienen una estrecha relación con las matemáticas se suele tener la idea de que esta materia es la representación más clara de la exactitud. Incluso muchos matemáticos obtuvimos, al acabar la carrera, nuestro título de Licenciado en Ciencias Exactas. Hay personas que para indicar que algo es preciso dicen que es matemático o para aseverar que algo esta correcto dicen que es como “dos y dos, cuatro”, aunque los que tenemos más relación con esta disciplina sabemos que lo anterior depende de lo que se esté hablando y que, además, es cierto según sea la base con la que estemos operando. En muchos medios de comunicación o incluso cuando se presentan informaciones en empresas o en otras situaciones de la vida, siempre se acompañan con fórmulas o gráficas si queremos dar sensación de ser rigurosos, como queriendo reforzar lo que se pretende presentar. Esto es algo llamativo en la publicidad, donde se utilizan las matemáticas sin sentido, lo que puede apreciarse en la siguiente imagen.

Por todo lo anterior, las matemáticas están consideradas como algo sin posibilidad de manipulación, aunque todos sabemos las variadas interpretaciones que pueden tener los datos según quien haga el estudio (no hay más que pensar en que después de cada elección democrática, siempre resultan ganadores todos los partidos). Por ello, resulta muy chocante para el público en general, que se realicen demostraciones matemáticas donde al final se contradicen los resultados exactos que se han aprendido en la escuela. A estas demostraciones falsas, que llamaremos falacias matemáticas, son a las que vamos a dedicar esta sección hoy.

En general, en este tipo de falacias lo que se hace es demostrar una igualdad imposible utilizando, bien definiciones o partes de la teoría que se aplican mal, teoremas en contextos donde no se cumplen las condiciones básicas para poder aplicarlos, algoritmos y procedimientos de cálculo usados erróneamente o incluso interpretaciones equivocadas, o con un doble sentido de algunas definiciones que no es el adecuado.

La creación de muchas de estas demostraciones se pierde en la noche de los tiempos. Seguro que muchos recordamos algún profesor que, cuando éramos estudiantes, ya nos hizo alguna de estas falsas demostraciones con intención de asombrarnos. Por eso, muchas de las que vamos a recoger aquí serán muy conocidas y además se pueden encontrar en multitud de lugares en Internet. Incluso la wikipedia posee una entrada con el título *demostraciones inválidas* donde están algunas de las que vamos a recoger en estas páginas. Lo que hemos hecho es hacer un vaciado de todo lo que hemos podido encontrar en Internet y agruparlas un poco según el tipo de elementos que se utilizan en su desarrollo.

El primer bloque serán aquellas en las que se aplican, erróneamente en algún momento, las reglas básicas del álgebra y las operaciones con expresiones algebraicas.

Demostración de que 2=1

Vamos a comenzar por la que quizás sea la demostración más conocida de las que se incluyen dentro de las falacias matemáticas.

Partimos de una igualdad	$\mathbf{a = b}$
Multiplicamos por a	$a^2 = a \cdot b$
Restamos b^2	$a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2$
Descomponemos en producto de factores los dos miembros	$(a+b)\cdot(a-b) = (a-b)\cdot b$
Dividimos por el factor común $a - b$	$a+b = b$
Pero al ser $a = b$ de partida	$2 \cdot b = b$
Y tras dividir por b llegamos a la igualdad	$\mathbf{2 = 1}$

Una variación de esta demostración la he encontrado en la siguiente dirección de Internet. Es una página en inglés en la que aparecen varias falacias y paradojas con variaciones interesantes a otras ya encontradas, o algunas que no he localizado en ningún otro sitio. No todas las que aparecen en la página las vamos a recoger aquí por lo que si alguien está interesado en estos temas les aconsejo visitar la página.

http://www.math.toronto.edu/mathnet/falseProofs/fallacies.html

Partimos de una igualdad	$\mathbf{a = b}$
Multiplicamos por a	$a^2 = a \cdot b$
Sumamos a^2	$a^2 + a^2 = a^2 + a \cdot b$
Reducimos términos semejantes	$2 \cdot a^2 = a^2 + a \cdot b$
Restamos el producto $2 \cdot a \cdot b$	$2 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b = a^2 + a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b$
Reducimos términos	$2 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b = a^2 - a \cdot b$
Extraemos factor común el 2 en el primer término	$2 \cdot (a^2 - a \cdot b) = 1 \cdot (a^2 - a \cdot b)$
Dividimos ahora por el factor común $a^2 - a \cdot b$ y llegamos a la igualdad buscada.	$\mathbf{2 = 1}$

Demostración de que a=b siendo a≠b

Partimos del supuesto de que $a \neq b$ y por tanto podemos definir un número, distinto de cero, que es su diferencia.

Sea la igualdad	$\mathbf{a - b = c}$
Elevamos al cuadrado ambos miembros y desarrollamos el cuadrado de la diferencia	$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = c^2 \quad (A)$
Dado que $c = a - b$ tendremos que	$c^2 = (a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
Sustituimos el resultado anterior en la igualdad (A)	$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = a \cdot c - b \cdot c$
Reordenamos convenientemente los términos	$a^2 - a \cdot b - a \cdot c = a \cdot b - b^2 - b \cdot c$
Extraemos factor común	$a \cdot (a-b-c) = b \cdot (a-b-c)$
Y simplificando por el factor común	$\mathbf{a = b}$

He encontrado en inglés otra demostración cuyo resultado es el mismo que en este caso, pero con la aplicación de otro paso erróneo, común a otras demostraciones.

Queremos demostrar que todos los números son el mismo. Para ello tomamos dos números cualquiera a y b y realizamos los siguientes pasos:

Construimos un nuevo valor.	**a + b = t**
Multiplicamos ambos miembros por $a - b$	$(a+b)\cdot(a-b) = t\cdot(a-b)$
Desarrollamos	$a^2 - b^2 = ta - tb$
Trasponemos términos	$a^2 - ta = b^2 - tb$
Añadimos $\frac{t^2}{4}$ a ambos miembros	$a^2 - ta + \frac{t^2}{4} = b^2 - tb + \frac{t^2}{4}$
Ambos miembros son cuadrados de un binomio	$\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{t}{2}\right)^2$
Extraemos la raíz cuadrada	$a - \frac{t}{2} = b - \frac{t}{2}$
Y por último eliminamos términos comunes	**a = b**

Demostración de que 10 = 5

Supongamos inicialmente que	**x = 5**
Multiplicamos ambos miembros por x	$x^2 = 5\cdot x$
Restamos 25	$x^2 - 25 = 5\cdot x - 25$
Descomponemos ambos miembros en producto de factores	$(x+5)\cdot(x-5) = 5\cdot(x-5)$
Dividimos ambos miembros por el factor común $x - 5$	$x + 5 = 5$
Y dado que partimos del supuesto de que x era igual a 5	**10 = 5**

Demostración de que 3 = 2

Consideremos la igualdad siguiente	$\mathbf{x = y}$
Sumamos **2·x** en ambos miembros y reducimos términos	$2\cdot x + x = 2\cdot x + y$ $3\cdot x = 2\cdot x + y$
Restamos **3·y** a ambos miembros y reducimos términos quedándonos	$3\cdot x - 3\cdot y = 2\cdot x + y - 3\cdot y$ $3\cdot x - 3\cdot y = 2\cdot x - 2\cdot y$
Sacamos factor común el 2 y el 3	$3\cdot(x-y) = 2\cdot(x-y)$
Y por último simplificamos el factor común	$\mathbf{3 = 2}$

Demostración de que 1 = 0

Partimos de una igualdad notable	$\mathbf{(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1}$
Pasamos parte del 2º miembro al primero	$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$
Restamos el producto **n·(2n+1)**	$(n+1)^2 - (2n+1) - n\cdot(2n+1) = n^2 - n\cdot(2n+1)$
Extraemos factor común en el primer miembro	$(n+1)^2 - (n+1)\cdot(2n+1) = n^2 - n\cdot(2n+1)$
Sumamos $\frac{(2n+1)^2}{4}$	$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$
Ambos miembros son desarrollos del cuadrado de una diferencia	$\left[(n+1) - \frac{2n+1}{2}\right]^2 = \left[n - \frac{2n+1}{2}\right]^2$
Extraemos la raíz cuadrada	$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}$
Simplificamos la fracción	$n+1 = n$
Con lo que queda	$\mathbf{1 = 0}$

Veamos ahora un par de falacias en las que no se utiliza álgebra pero en donde se aplican propiedades numéricas erróneas.

Demostración de que 4 = 2

Partimos de una identidad	**4 = 4**
Restamos 4 a ambos miembros	$4 - 4 = 4 - 4$
Expresamos los dos miembros como producto pero con distinta propiedad	$(2 - 2)\cdot(2 + 2) = 2\cdot(2 - 2)$
Si ahora dividimos por el factor común	$2 + 2 = 2$
Y llegamos a la igualdad	**4 = 2**

Demostración de que 2 = 6

Este proceso es parecido al anterior e incluso partimos de la misma igualdad.

Partimos de la identidad	**4 = 4**
Escribimos ambos miembros como restas	$20 - 16 = 52 - 48$
Aún podemos descomponer más	$4 + 16 - 16 = 36 + 16 - 48$
Ambos son el desarrollo del cuadrado de un binomio	$(2 - 4)^2 = (6 - 4)^2$
Extrayendo la raíz cuadrada	$2 - 4 = 6 - 4$
Y eliminando el valor común	**2 = 6**

Demostración de que 4 = 5

Partimos de una identidad	**– 20 = – 20**
Expresamos como restas los valores	$16 - 36 = 25 - 45$
Añadimos a ambos miembros $\frac{81}{4}$	$16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$
Ambos miembros son el desarrollo de cuadrados de un binomio	$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$
Extrayendo ahora la raíz cuadrada	$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$
Y sumando $\frac{9}{2}$ a ambos miembros	**4 = 5**

José Muñoz Santonja

Quienes sean aficionados a leer esta sección, sabemos que alguno hay, sabrán que aunque los contenidos se nutren de los que hay e Internet o en bibliografía adecuada, siempre me gusta meter algún elemento personal que no haya aparecido hasta entonces en ningún otro lugar. Hoy voy a terminar las demostraciones con una con la que me encontré el primer año que di clase. Recién acabada la carrera me quedé como profesor ayudante en la Universidad y, vigilando con otro compañero un examen, de pronto un alumno nos enseñó una resolución de un problema en donde obtenía algo sin sentido. Debo reconocer que en ese momento me quedé en blanco puesto que nunca había visto ese desarrollo y tardamos unos minutos en reaccionar. Desde entonces, cada vez que explico las integrales en segundo de bachillerato suelo ver este caso como ejemplo de que no siempre se pueden utilizar varios métodos para resolver el mismo problema.

En este cado no estamos ante una falacia, ya que la demostración es correcta en todos sus pasos, lo único llamativo es el resultado final.

Demostración de que 0=1

Intentamos calcular la $\int \frac{1}{x \cdot Lx} dx$ (*L* representa el logaritmo neperiano).

Vamos a hacerla utilizando el método de integración por partes.

Tomamos $u = \frac{1}{Lx}$ y $dv = \frac{1}{x} dx$.

Por tanto $du = \frac{-1/x}{(Lx)^2} dx = -\frac{1}{x \cdot (Lx)^2} dx$ y además $v = \int dv = \int \frac{1}{x} dx = Lx$.

Aplicando la fórmula de integración por partes, $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ nos queda

$$\int \frac{1}{x \cdot Lx} dx = \frac{1}{Lx} \cdot Lx - \int Lx \cdot \frac{-1}{x \cdot (Lx)^2} dx = 1 + \int \frac{1}{x \cdot Lx} dx$$

de donde, si eliminamos la integral, quedaría 0 = 1.

Bueno y hasta aquí hemos llegado en este número. Hay muchas más demostraciones erróneas, pero las vamos a dejar para una nueva entrega. En particular hemos dejado para la segunda parte aquellas en que se utilizan elementos no tan corrientes como el álgebra y así nos vamos a encontrar con la unidad imaginaria, sucesiones, logaritmos, desigualdades, etc…

Como habrán apreciado, en ningún momento hemos comentado en qué paso se cometía el fallo matemático. La razón es porque suponemos que en todos los casos es evidente, pero si algún lector quiere alguna aclaración más precisa, no dude en escribir y resolveremos cualquier duda.

Como guinda para cerrar estas páginas me gustaría añadir una paradoja que se atribuye al filósofo y matemático Bertrand Russell. No era mi intención incorporar a este bloque paradojas lógicas, aunque no lo descarto para otra ocasión; sin embargo, este caso se asemeja a alguno de los razonamientos que hemos visto y por eso creo que viene a cuento.

Russell defendía que una proposición falsa puede implicar cualquier cosa y entonces otro filósofo le preguntó que si significaba que si 2+2=5 entonces él sería el Papa. A lo que Russell contestó:

"Si suponemos que 2 + 2 = 5, entonces seguramente estará usted de acuerdo en que si restamos 2 de cada lado de la ecuación, nos da 2 = 3. Invirtiendo los términos, tenemos que 3 = 2 y restando 1 de cada lado, nos da 2 = 1. De modo, que como el Papa y yo somos dos personas, y 2 = 1, entonces el Papa y yo somos uno. Luego, yo soy el Papa".

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 147-153
ISSN: 1815-0640

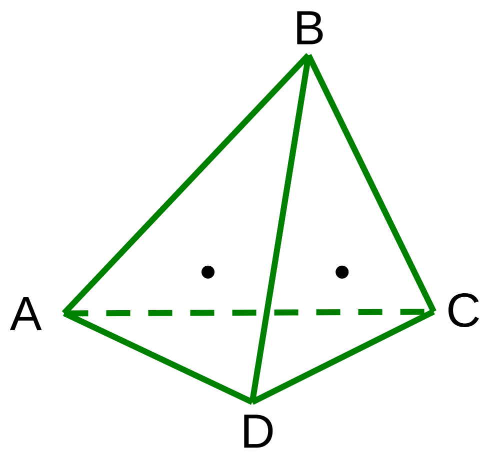
El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Dado un tetraedro regular cuyas aristas miden k cm, hallar la longitud del camino más corto sobre su superficie, que une los centros de dos caras del tetraedro.



Este problema ha sido propuesto a estudiantes de secundaria, a universitarios de primer año de estudios de ingeniería, y a profesores de matemáticas de secundaria. Las dos formas de enfocar el problema, que acá comentamos, muestran aspectos interesantes de la geometría plana y del espacio, y de aproximaciones intuitivas a la determinación del camino más corto sobre una superficie no plana, cuyos extremos son dos puntos de ella.

Una manera de presentarlo, graduando dificultades para resolverlas individualmente y en grupo, es la siguiente:

Situación:

Una hormiga se encuentra en el centro de una de las caras de un tetraedro regular, cuyas aristas miden 12 cm, y avanza sobre la superficie del tetraedro hasta alcanzar una gota de miel que se encuentra en el centro de otra de las caras del tetraedro

Actividad individual

a. *Describe el camino de longitud más corta que podría seguir la hormiga.*
b. *Halla la longitud del camino descrito en la actividad anterior.*

Actividades grupales

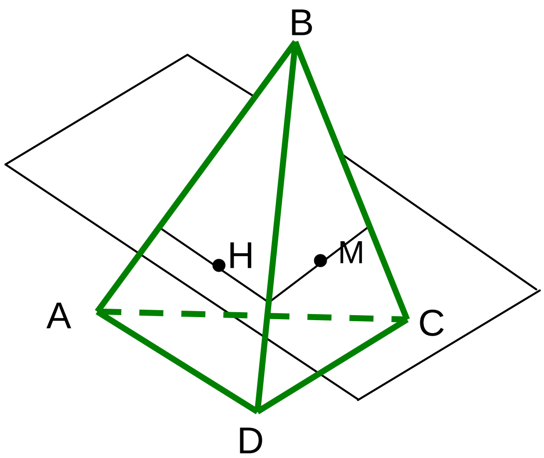
a. *Decir cuáles fueron las longitudes de los caminos obtenidos por los integrantes del grupo. Escribir sólo los números obtenidos en la parte de actividades individuales.*
b. *¿Cuál es la respuesta del grupo sobre el camino más corto que puede seguir la hormiga?*
- *Describirlo.*
- *Decir cuál es su longitud.*
- *Justificar e ilustrar por qué es el camino más corto.*

c. *¿Cuál sería la longitud del camino más corto que puede seguir la hormiga si las aristas del tetraedro miden k cm?*
d. *Proponer y resolver (o exponer cómo se resolvería) un problema similar al resuelto, considerando otro par de puntos del tetraedro.*
e. *Proponer y resolver (o exponer cómo se resolvería) un problema similar al resuelto, considerando otro cuerpo geométrico*

Comentarios

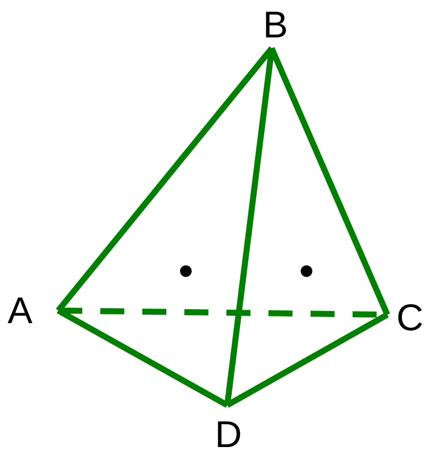
1. En las experiencias tenidas, básicamente hemos encontrado dos enfoques para resolver el problema (sin considerar las actividades grupales d y e):

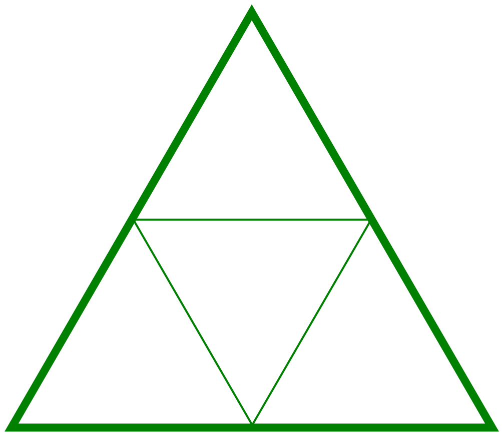
   I) Imaginando la intersección de un plano paralelo a la base, que pase por los dos puntos.



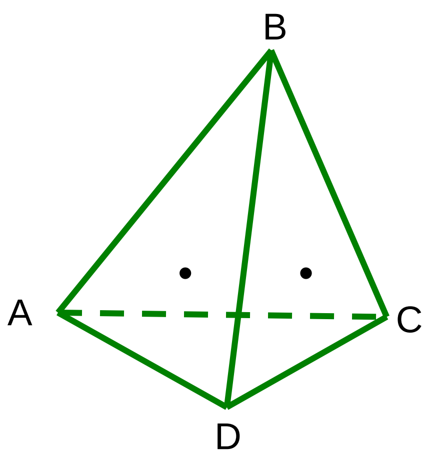
II) Examinando la situación en un desarrollo plano del tetraedro.

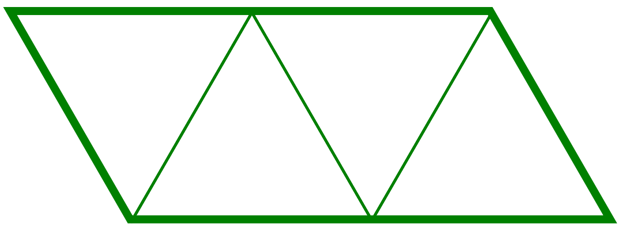
El desarrollo plano más "natural" del tetraedro es el que tiene forma de triángulo equilátero.





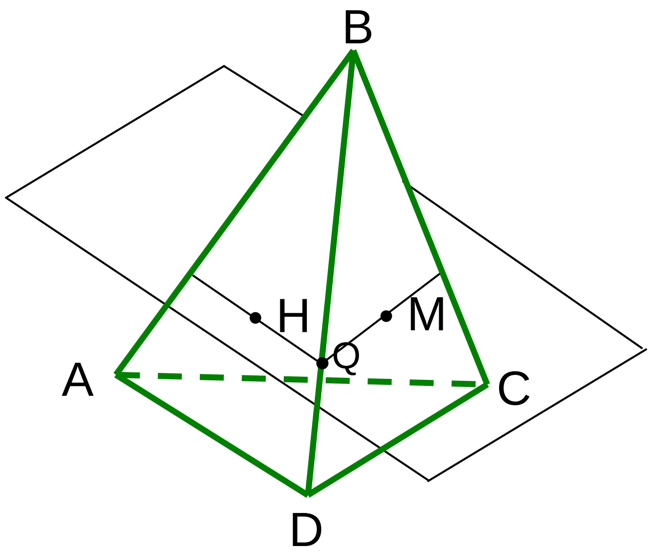
Otro desarrollo plano del tetraedro es el que tiene forma de paralelogramo.





2. Comentemos el primer enfoque:

Supone cierta experiencia en la visión espacial, para ubicar bien la intersección del plano con las caras del tetraedro. En particular, la ubicación del punto de intersección con la arista BD, que lo estamos llamando Q.

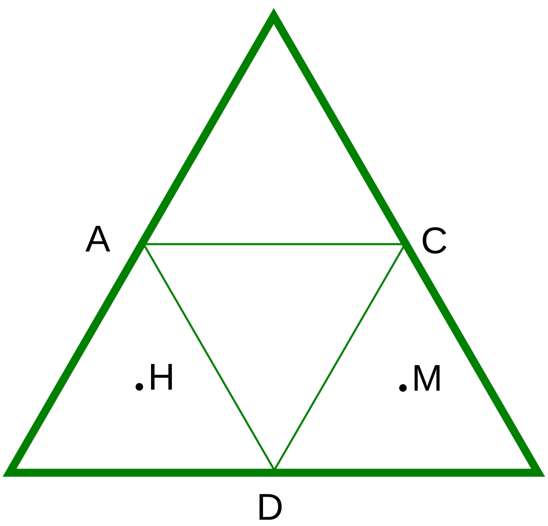


Aplicando teoremas básicos de la geometría del triángulo, se obtiene que la longitud del segmento HQ es 4 cm y por este resultado algunos participantes afirmaron que el camino más corto buscado tiene 8 cm de longitud, pues se obtiene recorriendo los segmentos HQ y QM, ambos de 4 cm de longitud.

3. Comentemos el segundo enfoque:

Consideremos el desarrollo plano que es un triángulo equilátero cuyos lados miden 24 cm.

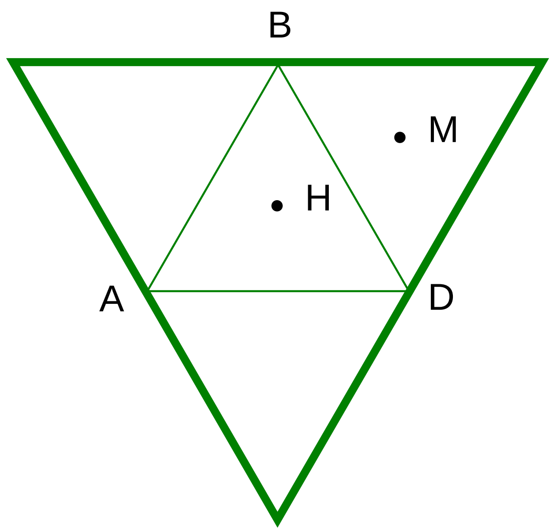
Una primera dificultad es la ubicación adecuada de los puntos del tetraedro en el desarrollo plano. Al obtener el triángulo equilátero "cortando" las aristas BA, BD y BC del tetraedro, obtenemos:



Es interesante notar las dudas que despierta el poner nombre a los vértices del triángulo mayor, al haber ocurrido que en el tetraedro eran el mismo vértice. Una decisión destacable es la que adoptó un grupo: llamarlos B' , B" y B'" , aludiendo a su origen común en el tetraedro y a su distinción en la figura plana.

Se ve fácilmente en la configuración presentada que el segmento HM tiene longitud 12 cm, al observar que el cuadrilátero HACM es un rectángulo. Siendo 12 cm la longitud de cada arista del tetraedro, surgió la duda de que el segmento HM sea el camino de longitud mínima. Hubo propuestas de descartar el camino y el método cuando uno de los integrantes del grupo explicó, con el enfoque antes visto, que para él, el camino más corto sería de longitud 8cm. También se observó, que tal segmento HM atraviesa el triángulo ACD que es el de la base del tetraedro y así correspondería a un camino en el tetraedro que se evidencia como uno que no es el de longitud mínima.

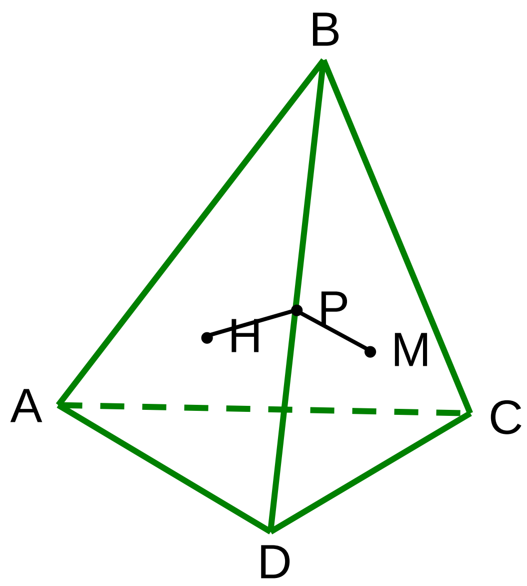
La pregunta del facilitador del taller sobre la posibilidad de encontrar soluciones coherentes razonando tanto en la figura tridimensional como en la correspondiente figura plana, llevó a concluir que para encontrar el camino más corto "abriendo" el tetraedro, no debería "cortarse" la arista común a las caras en las que se encuentran los puntos H y M, lo cual condujo al siguiente triángulo equilátero, con otra ubicación de los puntos correspondientes al tetraedro. (El tetraedro se "abre" "cortando" las aristas CA, CB y CD.)



Con esta configuración, suele obtenerse con relativa facilidad que la longitud del segmento de recta que une H y M es $4\sqrt{3}$ cm. Se tiene una situación para recordar axiomas de la geometría plana y aplicar los teoremas relacionados con las alturas de un triángulo y el punto de intersección de éstas. Es fácil obtener que la altura de cada triángulo equilátero que es cara del tetraedro, tiene una longitud de $6\sqrt{3}$ cm.

Es importante observar que como $4\sqrt{3}$ es menor que 8, queda claro que 8 no es la longitud del camino de longitud mínima, pero no se ha hecho una demostración formal que el camino más corto que une H y M es de longitud $4\sqrt{3}$ cm. Ante esta observación hay quienes tienen tal convencimiento de haber hallado ya el camino más corto, que no se animan a hacer una demostración (intuición optimizadora), y hay quienes se proponen hacerlo usando más refinadamente los teoremas sobre alturas de triángulos y perpendicularidad de segmentos.

Como se ve en la siguiente figura, el camino en el tetraedro, correspondiente al segmento HM, está conformado por los segmentos HP y PM, ambos de longitud $2\sqrt{3}$ cm, donde P es el punto de la arista BD en el cual los segmentos HP y PM son perpendiculares a BD. Notar que esto significa que la hormiga debe iniciar su camino óptimo hacia la gota de miel "subiendo" hacia el punto P (y no avanzando paralelamente al plano de la base)



Considerando el desarrollo plano que es un paralelogramo, también se obtiene un segmento de recta de longitud $4\sqrt{3}$ cm.

4. Luego de las discusiones en grupo con el caso concreto del tetraedro regular cuyas aristas miden 12 cm, resulta sencillo, pero ilustrativo, trabajar el caso general del tetraedro regular cuyas aristas tienen longitud *k* cm.

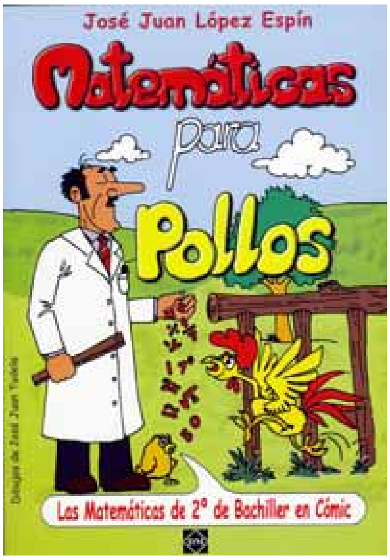
5. La actividad (*d*) permite evaluar lo aprendido en las actividades anteriores, con situaciones similares, pero que plantean dificultades específicas a partir de las propias ideas propuestas por los integrantes del grupo para ubicar los puntos H y M en el tetraedro. Resulta muy interesante llegar a expresiones adecuadas para precisar otras ubicaciones de los puntos H y M.

6. Vinculación con una *geometría no euclídea*

Para la actividad grupal (*e*) lo más frecuente es que se escoja un cubo; sin embargo, se dio una situación sumamente interesante cuando se le estimuló a buscar otros cuerpos geométricos y un grupo propuso ubicar los puntos H y M en una esfera. La gran novedad está en que no se puede "abrir" la esfera y tener un desarrollo plano de ella para encontrar la solución apoyándose en que la distancia más corta entre dos puntos del plano es la longitud del segmento de recta que los une. Resulta natural pensar en un arco de circunferencia que una los puntos H y M ¿cuál? La solución formal de este problema lleva a considerar la analogía entre las rectas en el plano y las circunferencias máximas en una esfera y así tomar contacto con la geometría de la esfera.

Cabe destacar una vez más la importancia de dar oportunidades de crear problemas a los alumnos y de que los profesores tengan una buena formación matemática para orientar adecuadamente las ideas que surjan entre los estudiantes, hacer sugerencias atinadas para los trabajos individuales y en grupo y ampliar la cultura matemática de los participantes.

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 155-157
ISSN: 1815-0640



Matemáticas para Pollos. Las Matemáticas de 2º de Bachiller en Cómic

Autor: José Juan López Espín

Edita: **Diego Marín Librero-Editor (DM)**

Año: 2006

162 páginas

ISBN: 978-84-8425-481-2

La Real Academia de la Lengua Española define un cómic como una *"serie o secuencia de viñetas con desarrollo narrativo"* o como un *"libro o revista que contiene estas viñetas"*. A su vez, presenta las siguientes definiciones para la palabra "viñeta":

- *Cada uno de los recuadros de una serie en la que con dibujos y texto se compone una historieta.*
- *Dibujo o escena impresa en un libro, periódico, etc., que suele tener carácter humorístico, y que a veces va acompañado de un texto o comentario.*
- *Dibujo o estampa que se pone para adorno en el principio o el fin de los libros y capítulos, y algunas veces en los contornos de las planas.*

El autor de este libro trata de conjugar estas dos definiciones con conceptos matemáticos propios del currículo de 2º de Bachillerato de la modalidad científico-tecnológica, presentando los mismos con un carácter algorítmico y directo. Como el propio autor reconoce, no es tarea fácil presentar las matemáticas en tono humorístico y, en cualquier caso, el resultado depende fuertemente del sentido del humor que presente el lector en cada momento.

El libro se divide en once "temas" en cada uno de los cuales se presenta una serie de conceptos y de fórmulas, acompañadas cada una por un ejemplo de cómo utilizarla. El autor prescinde de demostraciones, haciendo de este material un "formulario" para el trabajo con las matemáticas expuestas. El punto de humor se presenta, en la mayoría de los casos, como juegos de palabras en los que los términos matemáticos hacen también alusión a conceptos empleados en otros contextos (parábola, límite, fila, columna,...) o en los que el cambio de unas pocas letras juega ese papel (excentricidad - electricidad,...)

Los contenidos de la materia de Matemáticas de 2º de Bachillerato se dividen en tres grandes bloques denominados "Álgebra lineal", "Geometría" y "Análisis". En este libro se dedica una serie de capítulos al tratamiento de conceptos relacionados con cada uno de esos bloques, intercalando algunas pequeñas pinceladas históricas a través de la presentación de Matemáticos ilustres relacionados con los conceptos tratados.

Los tres primeros capítulos están dedicados al bloque de "Álgebra lineal", presentándose los conceptos de matrices, operaciones, determinantes, rango de una matriz y resolución de sistemas de ecuaciones lineales a través del estudio de matrices.

Los siguientes cuatro capítulos presentan conceptos propios del bloque de "Geometría" como las cónicas, su expresión analítica y sus elementos, los vectores en el espacio tridimensional y el espacio vectorial, los productos escalar, vectorial y mixto, así como la interpretación geométrica de estas operaciones. También se expone cómo obtener diferentes ecuaciones de rectas y planos y cómo obtener información relevante a partir de dichas ecuaciones. Se finaliza este bloque con la exposición de propiedades métricas como el ángulo entre dos rectas, dos planos o entre una recta y un plano, distancia entre puntos, rectas y planos, áreas y volúmenes.

Los últimos cuatro capítulos están dedicados a conceptos de Análisis. Este bloque tiene una naturaleza más extensa que los otros dos, en lo que al currículo de secundaria se refiere. En este libro se intenta abordar la mayoría de los contenidos propios de 2º de Bachiller, obviando los que se suponen adquiridos en cursos anteriores, si bien da la sensación de inconcluso. Hay un tema dedicado a las funciones, los límites y la continuidad, en el que se presentan los métodos empleados para la resolución de límites cuyo resultado son indeterminaciones y los tipos de discontinuidad que puede presentar una función, entre otras cosas. En el tema dedicado a las derivadas se expone, además de la definición de este concepto, su uso para el cálculo de la recta tangente a una curva en un punto y diversos teoremas como el de Rolle y el de Lagrange, así como la Regla de L'Hôpital para la resolución de límites y la relación del concepto de derivada con la monotonía de una función. En el tema 10 se especifican los puntos claves para la representación gráfica de una función. Se finaliza el libro con un tema dedicado a la integración en el que se muestran algunos métodos básicos para el cálculo de integrales indefinidas y la relación entre éstas y el cálculo de áreas.

Este libro ofrece diversas posibilidades para su uso en el aula como puede ser la animación a la lectura, a través de la presentación de una materia, que a los alumnos les suele resultar "áspera", por medio de un instrumento que para ellos es sinónimo de entretenimiento, la lectura de un cómic.

Por otra parte, se puede emplear como herramienta para fomentar el espíritu crítico del alumnado, así como su creatividad, a través de la comparación de cada capítulo del cómic con los temas presentados en el libro de texto empleado en el aula. El estudiante analizará de forma crítica la selección de contenidos hecha por el autor del cómic, proponiendo la inclusión o exclusión de determinados conceptos y creando su propio cómic con aquellos contenidos que considere necesarios.

Un uso más directo de este material sería la consideración del mismo como un formulario que debe estar al alcance del estudiante en cada momento para que éste pueda acceder de forma rápida a un determinado concepto.

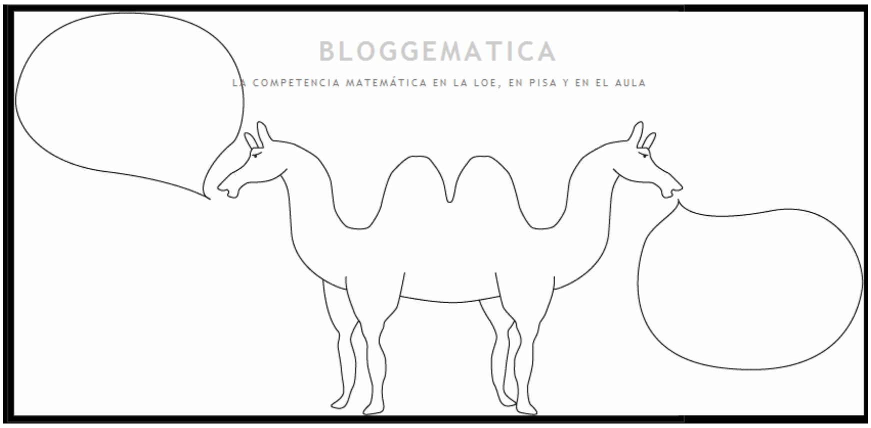
Es una manera poco usual de presentar los conceptos matemáticos, lo que puede atraer al alumnado e incluso animarlo a crear su propio cómic con un concepto matemático elegido.

Reseña: Josefa Perdomo Díaz
IES Adeje 2
Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 159-164
ISSN: 1815-0640

Matemátic@s en l@ red



Bloggematica. Competencia Matemática

Autor de la Página: *Jacinto Quevedo*

Dirección: http://ccbb-mat.blogspot.com/

Un blog es un sitio Web periódicamente actualizado que recopila cronológicamente textos o artículos de uno o varios autores, párrafos de opinión, información, diario personal, fotografías, vídeos, etc. Fundamentalmente, sirve para exponer e intercambiar ideas.

Un aspecto importante de los blogs es su interactividad, especialmente en comparación a páginas Web tradicionales. Dado que se actualizan frecuentemente y permiten a los visitantes responder a las entradas, los blogs funcionan a menudo como herramientas sociales, para conocer a personas que se dedican a temas similares; con lo cual en muchas ocasiones llegan a ser considerados como una comunidad.

Tanto la educación como los blogs son, por su propia naturaleza, procesos de comunicación, de socialización y de construcción de conocimiento. Las características propias de los blogs hacen de esta herramienta un instrumento de gran valor para su uso educativo dentro de un modelo constructivista. Actualmente, son muchos los profesores que están utilizando los blogs como un espacio donde enlazar recursos y referencias, para conducir las discusiones de clase a través de los comentarios y para asignar tareas a los estudiantes. Es decir, que los blogs se han unido a la lista de servicios de Internet disponibles para apoyar la enseñanza (en este caso se les denomina *Edublog* y su principal objetivo es apoyar un proceso de enseñanza-aprendizaje en un contexto educativo).

Los blogs son utilizados en las aulas desde diferentes situaciones de enseñanza-aprendizaje, como:

- Blog de aula, materia o asignatura (complemento a las clases presenciales, con información adicional y propuestas de actividades complementarias)

- Blog personal del alumnado (a modo de diario individual, sobre sus intereses e inquietudes, aficiones, actividades…, y como medio de participación en las bitácoras de compañeros, comentando sus artículos y haciendo aportaciones, propuestas, etc.)

- Taller creativo multimedia (individual o colectivo, sobre argumentos sugeridos o libres)

- Gestión de proyectos de grupo (como bitácora colectiva, ya sea para profesorado, alumnado, o trabajos de colaboración entre ambos, donde el profesor o profesores de distintas materias o centros asesoran al grupo en la realización de trabajos de investigación)

- Publicación electrónica multimedia (periódico escolar, revista digital, monografías sobre diversos temas… Al potencial multimedia se le unen las posibilidades de participación, que enriquecen el contenido con aportaciones y comentarios de otros usuarios).

- Guía de navegación (donde se comentan sitios de interés, noticias y aportaciones en forma de crítica o comentario de los mismos).

Sin embargo, los Blogs, como cualquier herramienta tecnológica, no garantizan una mayor eficacia educativa por su mera utilización. El resultado dependerá del enfoque, de los objetivos y de la metodología con que sean integrados en cada programa educativo.

En este documento, nos centramos en comentar **Bloggematica**, que fundamentalmente es una monografía sobre el *enfoque de la educación matemática por competencias, ligado a su concepción y su evaluación*.

Descripción del blog

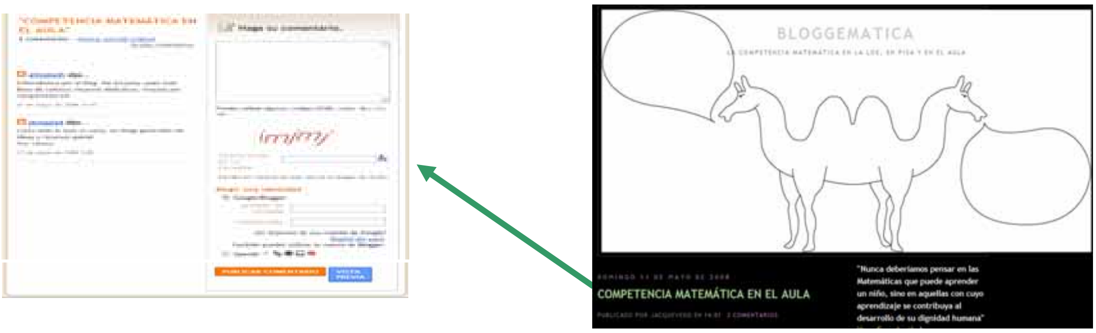
El tema central de BLOGGEMATICA es *la competencia matemática,* mostrando enlaces a numerosos recursos didácticos en formato Word, PowerPoint, PDF y HTML, además de enlaces a recursos matemáticos interactivos y temas de divulgación sobre matemáticas.

El diseño es una portada a dos columnas, a lo largo de las cuales encontramos los diferentes enlaces. Se observan tres grandes "secciones": *la competencia matemática en la LOE; la competencia matemática en PISA y la competencia matemática en el AULA,* además de otros enlaces destinados a *Comentarios* (apartado en el que los usuarios pueden expresar sus opiniones), *Recursos* (applets, reseñas de páginas interactivas de matemáticas, proyectos de matemáticas…) y *Divulgación* (sociedades, congresos, revistas, libros, problemas propuestos, historia, humor...).

A continuación se comentan los diferentes contenidos del blog, diferenciando las tres secciones ya mencionadas.

Comentarios

En este apartado los usuarios pueden publicar sus comentarios. Para ello, al pinchar con el ratón en *competencia matemática en el aula,* encontramos un enlace *Publicar un comentario en la entrada* que abre la ventana que lo permite.



La competencia matemática en la LOE

Dentro de esta gran sección encontramos diferentes apartados:

- **Elementos de normativa básica**
  En este apartado encontramos enlaces a documentos en PDF y a películas flash:
  - Competencias clave para un aprendizaje a lo largo de la vida (marco de referencia europeo).
  - LOE (ley orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de educación.).
  - Decreto 126/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación primaria en la comunidad autónoma de canarias.
  - Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la educación secundaria obligatoria en la comunidad autónoma de canarias.
  - Película Flash con información esquematizada sobre las competencias básicas.
- **Currículo de matemáticas de Primaria y ESO**
  Enlaces a documentos en PDF sobre:

- Difusión de los currículos de la materia de Matemáticas.
- Relación entre todos los elementos del currículo.
- Vinculación de las competencias básicas con los criterios de evaluación y los contenidos
- Contribución del área de matemáticas a la adquisición de las competencias básicas.
- Metodología, recursos y tareas para el desarrollo de competencias básicas y matemáticas.
- Detalles de los nuevos currículos con información sobre el concepto de competencia, los aspectos de qué es lo que cambia de la Logse a la Loe; otros conceptos relacionados con competencia, ejemplos de objetivos redactados como competencia…

- **EDUCASTUR**

  Extenso documento en PDF editado por la Consejería de Educación y Ciencia del Principado de Asturias, que es una guía de referencia sobre lo que representa el enfoque de la educación por competencias, ligado a su concepción y su evaluación. Está estructurado en cinco capítulos en los que se explica:
  - el porqué de la incorporación del enfoque de competencias básicas en nuestros currículos y en nuestro sistema escolar,
  - el modo en que se incorporan las competencias básicas en el currículo,
  - la integración en el conjunto del centro de la perspectiva derivada de las competencias básicas, particularizando las necesarias repercusiones de las competencias en el Proyecto educativo,
  - la relación entre competencias básicas y su evaluación, con especial atención en la evaluación de diagnóstico.
- **Artículos sobre enseñanza de las matemáticas y competencia matemática**

La competencia matemática en PISA

Dentro de esta sección encontramos diferentes documentos sobre la competencia matemática e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003:

- **PISA para docentes**. Documento del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE).
- **Preguntas planteadas en PISA 2000 Lectura, Matemáticas y Ciencias**
- **PISA 2003: Preguntas liberadas Matemáticas y Solución de problemas**
- **PISA 2003 y la educación Tecnológica.** Documento elaborado por La Plataforma Estatal de Asociaciones del Profesorado de Tecnología en el que se analizan los aspectos que se han valorado en estas pruebas, y la aportación del área de Tecnología a estas competencias, con el fin de

resaltar la necesidad de la mejora de todas las materias en el Sistema Educativo.

- **Prueba interactiva PISA** que permite comprender cómo son las pruebas tipo PISA y cómo se relacionan con la evaluación por Competencias.
- **La Competencia Matemática en PISA**. Documento de Luis Rico Romero, en el que describe las principales componentes del marco teórico del proyecto PISA/OCDE analizando la noción de alfabetización matemática, las diferentes variables que componen el dominio, las variables que organizan los instrumentos de evaluación, y los diferentes significados del término competencia.
- **PISA y la evaluación de las matemáticas**. Documento de Tomás Recio Muñiz de la Universidad de Cantabria, en el que hace un análisis del papel del «realismo» en el contexto de las pruebas PISA.
- **Evaluación de las Matemáticas en el Informe PISA. PROFES.NET**. Monográfico en el que se pueden consultar ejemplos de ejercicios de las cuatro subáreas matemáticas en las que la evaluación PISA midió el rendimiento de los alumnos: espacio y forma, cambio y relaciones, cantidad e incertidumbre.
- **Competencias básicas en educación matemática.** Documento de González Marí de la Universidad de Málaga.
- **Diferentes enlaces a pruebas de evaluación por competencias tipo PISA**.
- **Proyecto ASIPISA: Junta de Andalucía. Averroes**. El objetivo básico inicial del desarrollo de este proyecto se describe como la elaboración de una herramienta o colección temática, centrada en el área de conocimiento de Matemáticas del Proyecto PISA, que proporciona una ayuda sistemática interactiva para ese proyecto internacional, permitiendo el aprendizaje significativo de las competencias contempladas en él mediante el entrenamiento y adaptación a los contenidos, procedimientos y situaciones que allí se contemplan.
- **Resultados españoles de Matemáticas en el TIMSS**
- **Preguntas: TIMSS-matemáticas**

La competencia matemática en el AULA

Dentro de esta sección hay enlaces que proporcionan materiales para el aula sobre competencia matemática.

Recursos

A lo largo de **Bloggematica**, encontramos imágenes con enlaces a documentos y Webs con diferentes contenidos:

- Comentarios, desarrollos y reflexiones sobre obras de la literatura, pintura y música, relacionadas con matemáticas como: Alicia en el país de las maravillas; el hombre que calculaba; los embajadores; retrato de Luca Pacioli, obra del pintor Jacopo de'Barbari expuesta en el Museo di Capodimonte (Nápoles); el Quijote y las matemáticas; palíndromos de Gödel, Escher, Bach y... Mozart; Ilusiones ópticas y figuras imposibles…
- Matemáticas interactivas como Sudokus, Torres de Hanoi, La ruleta (juego del Instituto Canario de Estadística)…
- Listados de recursos con descripciones y descargas de software educativos como Geometría con Cabri-Geometri II, GeoGebra, Geometría dinámica, funciones y gráficas…

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 165-170
ISSN: 1815-0640

Matemáticas en la red

Construir la Geometría

Autor de la Página: *Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía*

Dirección: *http://www.juntadeandalucia.es/averroes/concurso2004/ver/02/indexflash.htm*

En este documento se comenta una colección de recursos educativos desarrollados por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, eminentemente interactivos, integrados en forma de página Web, con propuestas que posibilitan e ilustran cómo llevar a cabo procesos constructivistas en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría en la Etapa Primaria.

La página Web pone a disposición de los maestros de Primaria, un material donde, explícita o implícitamente, quedan plasmadas ilustraciones de la Didáctica de la Geometría concretadas en propuestas didácticas que aprovechan el atractivo de la simulación de situaciones reales permitido por las animaciones e interactividad logrado con Flash y la programación con ActionScript.

En la propuesta predomina la simulación virtual de materiales didácticos con los que se pueden realizar actividades con diferentes niveles de dificultad (geoplano, policubos, plantillas de ángulos fijos, compás, semicírculo, escuadra y cartabón virtual, polígono dinámico, etc.) sobre el desarrollo más o menos lineal de contenidos en forma de unidad didáctica para un nivel concreto de la Etapa Primaria.

Sin embargo, no hay que perder de vista que no se trata del desarrollo de unidades didácticas para un nivel o etapa determinados. Es, sobre todo, una colección de materiales didácticos virtuales para trabajar la Geometría, que en ocasiones sugieren la realización, por parte de los/as alumnos/as o de los propios profesores/as, de otros materiales manipulativos en soporte físico. Por lo tanto, han de ser los propios profesores los que determinen y escojan lo más apropiado para el nivel de sus alumnos/as de entre lo que se brinda aquí, teniendo siempre muy presente que los materiales didácticos no tienen virtualidad propia independientemente de su uso (dependerá mucho del correcto enfoque del mismo) y que un buen material didáctico debe ser un soporte adecuado que permita y facilite la intervención más o menos sistemática en el incremento de las habilidades típicamente constitutivas de la inteligencia, entendiendo como tales, en un sentido amplio, aquellas que son básicas para la adquisición de otras habilidades intelectuales más complejas y que pueden ser enseñables, susceptibles de desarrollo / mejora a través de la instrucción, aplicables en contextos diferentes.

Un aspecto interesante de estos materiales, es la disponibilidad de descargar cada una de las aplicaciones, ya que de esta manera, el profesorado podría hacer un sencillo menú con acceso a aquellos que seleccione, según su criterio, atendiendo a diversas variables. Para ello es necesario tener instalado en el ordenador el programa Save Flash versión 4.1 o superior.

Descripción general

El menú principal de la Web (menú-temas), dispone de un total de 46 aplicaciones, agrupadas en 7 bloques temáticos muy generales.

Cada opción del menú principal se despliega en un submenú informativo que permite tener una idea previa de la aplicación antes de descargarla (para lo que es necesario tener instalado el programa Save Flash) y facilitar la valoración y análisis de las mismas, así como el nivel educativo para el que ha sido creada.

- **Bloque: Elementos geométricos, polígonos y trazados…**

  Colección de 8 aplicaciones con ejercicios diversos para: profundizar en conceptos de paralelismo y perpendicularidad de rectas y segmentos; descubrir estrategias personales para la medida y estimación de amplitudes de ángulos; trazar figuras geométricas con utilización de escuadras, cartabones, etc. en una simulación de pizarra geométrica virtual; generar formas simétricas mediante líneas poligonales con número de segmentos variables; trabajar con geoplanos ortométricos e isométricos virtuales; etc.

  1. Estudio-segmentos
  2. Círculo graduado
  3. Poligonal-dinámica
  4. Pizarra trazados
  5. Geoplano-doble
  6. Mitades rectángulo
  7. Simetría I
  8. Simetría II

- **Bloque: Localización y orientación en el plano**

  Colección de 6 aplicaciones con ejercicios diversos que simulan naves espaciales, arañas, monigotes, etc., situados en diferentes laberintos, que permiten el trabajo con coordenadas numéricas y alfanuméricas; reforzar la idea de los múltiples caminos posibles que pueden ser trazados entre dos puntos; calcular mentalmente el número de tramos recorridos; trabajar el significado numérico ligado a nociones de arriba, abajo derecha e izquierda; trazar líneas poligonales que pueden ser descritas (codificadas) atendiendo a la direccionalidad y sentido de los tramos que las componen…

  9. Nave espacial
  10. Generador de laberintos
  11. Atrapar la araña
  12. Caminos-cuadrícula
  13. En el laberinto
  14. Puntos cardinales

- **Bloque: Polígonos: ángulos interiores, perímetro y área**

  Colección de 8 aplicaciones con elementos virtuales y dinámicos como escuadras, semicírculos graduados, reglas graduadas, etc., así como plantillas de cuadriláteros, triángulos equiláteros, que permiten realizar actividades para determinar el valor de cualquier ángulo interior de polígonos; comprobar la regularidad que presenta el valor de la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros haciendo uso de estrategias personales de medida de ángulos; realizar cálculos estratégicos de áreas y medidas de perímetros, etc.

  15. Plantillas-ángulos-fijos
  16. Suma-ángulos-interiores
  17. Áreas-figuras-estáticas
  18. Áreas-polígonos-Dinámicos(I)
  19. Áreas-polígonos-Dinámicos(II)
  20. Áreas-polígonos-Dinámicos(III)
  21. Perímetros de polígonos
  22. Longitud-circunferencia

- **Bloque: Polipolígonos**

  Colección de 6 aplicaciones en las que se manipulan virtualmente *Tangrams, generadores de formas, poliminós, polideltas o polidiamantes, etc.*

23. Tangram Chino
24. Polígonos cuadroescuadrotriángulos
25. Poliominós (Poliminós)
26. Generador de formas
27. Polideltas (Poliamantes)
28. Pizarras de diseño

- **Bloque: Embaldosados, teselaciones y mosaicos**

  Colección de 6 aplicaciones en las que se realizan embaldosados con diferentes tipos polígonos regulares, teselas isoperimétricas y figurativas.

29. Embaldosados
30. Familia-teselas-curvilíneas
31. Mosaicos—Polígonos-regulares
32. Mosaico con pájaros
33. Mosaicos-coloreando
34. Mosaicos de la Alhambra

- **Bloque: Percepción del espacio 3D. Iniciación al volumen**

  Colección de 4 aplicaciones que simulan *cubos apilables que permiten la formación de construcciones policúbicas, diseños artísticos, exploración libre, convertir a 3d diseños planos… así como ortoedros dinámicos para la cuantificación y comprobación del volumen del ortoedro, descubrimiento de los números "cubos perfectos"...*

35. Policubos (I)
36. Policubos (II)
37. Codificar policubos
38. Ortoedro dinámico

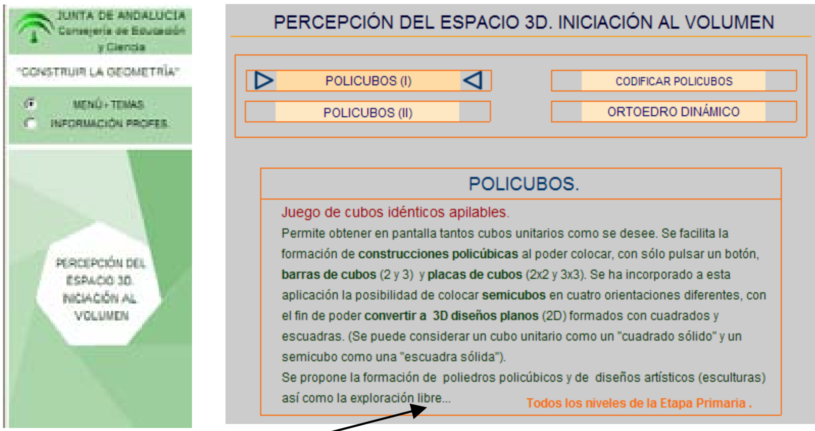
- **Bloque: Cuerpos geométricos. Poliedros, desarrollos y sesiones**

  Colección de 8 aplicaciones con ejercicios diversos que permiten reconocer polígonos regulares, independientemente de la perspectiva o punto de vista del observador, así como visualizar las diagonales y su número; descubrir poliedros y cuerpos redondos "por dentro"; visualizar de manera dinámica e interactiva diferentes desarrollos planos válidos de un mismo poliedro, sus desarrollos y sus movimientos en el espacio tridimensional; obtener y visualizar cuerpos redondos como cilindros, esfera y conos.

39. Polígonos regulares en 3D
40. Poliedros regulares
41. Tipos de poliedros básicos

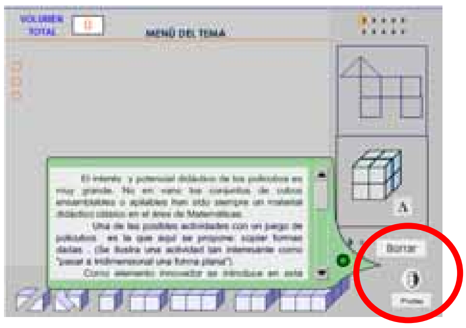
42. Visualización-poliedros-3D.
43. Desarrollos planos
44. Sólidos de revolución
45. Poliedros-Polígonos-regulares
46. Secciones de cuerpos geométricos

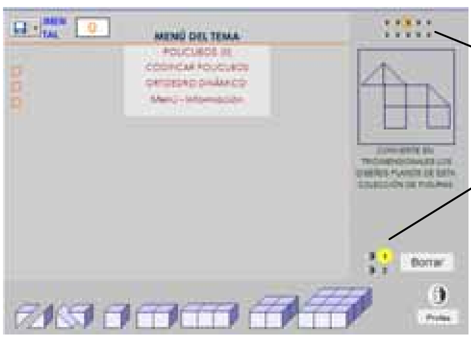
Las diferentes propuestas contienen pantallas de información contextualizadas tanto para el profesorado como para el alumnado. A continuación, se describen algunas de ellas, tomando como ejemplo la aplicación *Policubos (I)* del bloque: *Percepción del espacio 3D. Iniciación al volumen.*



Pantalla informativa que permite tener una idea previa de la aplicación, además de sugerir el nivel educativo al que está dirigido.

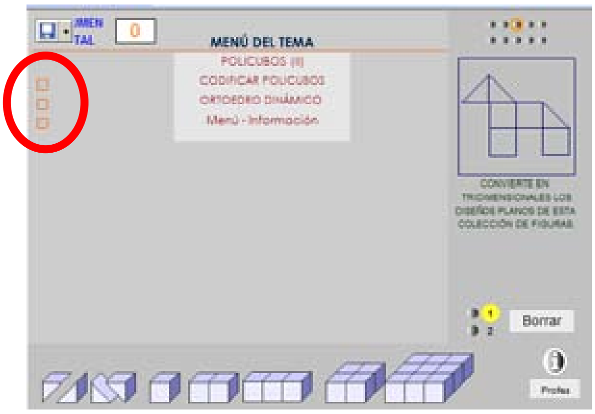
Botón-icono "profes", para ayudar a contextualizar la aplicación en relación con el interés didáctico de las mismas, los objetivos (en términos de habilidades y capacidades de naturaleza cognitiva y metacognitiva) concretos que se pretenden conseguir o consideraciones particulares de otra índole.



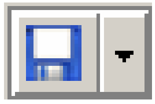


Tipos y número de actividades. En este caso concreto hay dos tipos: 1) *Convertir en* tridimensional *los diseños planos de las figuras que se muestran* (10 figuras diferentes); 2) *Forma cada uno de los policubos que se muestran* (10 policubos).

Explicaciones de las actividades e instrucciones de uso de los diferentes elementos de la pantalla como colocación, borrado…



Botón-icono descarga. Si se tiene instalado el programa Save Flash, al pasar el cursor por la parte superior izquierda de cualquier aplicación se activa el botón-icono que permite descargar y guardar la aplicación para su uso sin conexión a Internet.



UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 171-190
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Propuesta de actividades con calculadora gráfica para el tratamiento de operaciones matriciales en el aula

Ángel F. Tenorio Villalón

Resumen

En el presente trabajo presentamos una propuesta de contenidos y actividades para una Unidad Didáctica sobre las operaciones con matrices, que están incluidas en el bloque de Álgebra Lineal dentro de las asignaturas de Matemáticas tanto del Bachillerato como del primer curso de cualquier carrera científica o técnica. Debe tenerse en cuenta que las actividades propuestas en el presente documento están pensadas para ser trabajadas con calculadora gráfica por parte de nuestros alumnos y nuestras alumnas.

Abstract

This paper shows a proposal of contents and activities for a Teaching Unit about basic matrix operations. This unit would be included in the Linear Algebra curriculum in both High School and the first year in University (especially in any scientific or technical Bachelor's degree). We must take into consideration that these activities are planned to be worked with a graphic calculator by our students.

Introducción

Con la aprobación del Decreto 1125/2003, el cómputo de los créditos ECTS comienza a realizarse teniendo en cuenta el trabajo de nuestros alumnos y alumnas tanto de forma presencial en clase como de forma autónoma en su casa o en la sala de estudio. Esto conlleva un cambio en la práctica docente universitaria en España, de tal modo que tenemos que hacer a nuestros alumnos y alumnas los protagonistas activos de su propio aprendizaje. En consecuencia, el profesorado ha de replantearse contenidos, metodología y sistemas de evaluación para que cada actividad realizada por nuestros alumnos y alumnas quede reflejada en su calificación final (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2003).

Ante esta nueva situación, el profesorado debe reflexionar detenidamente sobre: cuáles serán las competencias a fomentar en los alumnos, qué contenidos se consideran básicos, cómo se estructurarán a lo largo del curso en sesiones teóricas y prácticas y, por último, cuáles serán los criterios de evaluación que se aplicarán. Para recoger toda esta información organizativa y ponerla a disposición del alumno, se realiza una detallada guía docente de cada asignatura. Debe tenerse en cuenta que para el año 2010 deben estar puestos en marcha los nuevos grados universitarios en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2003). En estos nuevos grados, debe plantearse el trabajar por competencias a nuestros alumnos y alumnas, priorizando estos en ocasiones sobre los propios contenidos. A este respecto, como profesor en las asignaturas de Matemáticas (llamadas “Fundamentos Matemáticos de la Informática” I y II) en la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión de la Universidad Pablo de Olavide, se nos planteó a todo el equipo docente de las asignaturas la posibilidad de planificar los contenidos de dichas asignaturas desde un punto de vista práctico, restándole importancia a la parte teórica de la materia. De este modo, tomamos la decisión en ambas asignaturas de priorizar la evaluación de la parte práctica y permitir el uso del software informático en la Universidad para que el alumnado tratase los problemas planteados por el profesorado y de este modo ver las competencias de nuestros alumnos y alumnas sin tener en cuenta posibles errores de cálculo que pudieran acontecer (Bermudo y Tenorio, 2007a y 2007b).

De este modo, las asignaturas están estructuradas para que alumnos y alumnas aprendan tanto un tratamiento clásico de los problemas como uno computacional. De hecho, algunos contenidos se tratan principalmente de manera computacional debido a la dificultad o complejidad de los cálculos que conllevan y que no son necesarios para la adquisición correcta de los contenidos ni para el desarrollo cognitivo y de abstracción que se persiguen con tales ejercicios.

En este sentido, para examinar a nuestros y nuestras estudiantes, preparamos un examen práctico en el que más de la mitad de la puntuación corresponde a la resolución de problemas realizados con software informático (más concretamente, con el paquete Mathematica). El preparar tal examen ha conllevado un cambio en la concepción de las preguntas para el examen, ya que deben ser preguntas cuya complejidad o dificultad no radique en los cálculos sino en la aplicación de los diversos razonamientos y procedimientos explicados en la asignatura.

Esta filosofía es trasladable a cualquier nivel educativo y no solo aplicable a la Universidad. Una clara exposición de este enfoque metodológico puede encontrarse en el artículo de Montero (2006). Pero el uso de esta filosofía no debe conllevar el realizar el estudio única y exclusivamente desde el punto de vista computacional, sino que debe seguirse con el tratamiento tradicional de los problemas. Las herramientas computacionales deben ser consideradas como un apoyo a las técnicas tradicionales que nos permiten realizar todas las operaciones con mayor facilidad y velocidad. Este pensamiento es el que se recoge en Cedillo (1998) y en del Puerto y Minnaud (2002) en los que se enfatiza el uso de la calculadora como recurso didáctico.

Siguiendo esta máxima, presentamos una propuesta de actividades basadas en el uso de la calculadora gráfica para el tratamiento por parte de nuestros alumnos y nuestras alumnas de las operaciones elementales con matrices, para lo que seguiremos a Fedriani et al. (2007). Tales actividades buscan, por un lado, mostrar estos conceptos al alumnado y, por otro, permitirle su asimilación y aprendizaje autónomo. Es decir, hacerles competentes en el uso y manejo de tales operaciones.

1. Ubicación académica de las actividades

La propuesta de actividades que aquí presentamos corresponde al bloque de Álgebra Lineal y, más concretamente, se centra en las operaciones elementales con matrices. Dichas actividades pueden trabajarse tanto en el nivel de 2º de Bachillerato[1] como en las asignaturas de Matemáticas de primer curso de las distintas titulaciones universitarias de corte técnico o científico que contienen el bloque de Teoría de Matrices.

Debe tenerse en cuenta que el uso de software informático o de calculadoras gráficas es un importante apoyo para la docencia de las Matemáticas (Bracho, 2007), ya que permiten a nuestro alumnado comprobar si lo que están haciendo es correcto y centrarse más en los procedimientos y razonamientos formales que en los cálculos propiamente dichos.

2. Objetivos de las actividades

Nuestra propuesta de actividades tiene como objetivo principal el adquirir las competencias relativas a las operaciones elementales con matrices. Siendo más concretos, pasamos a detallar las que creemos primordiales:

- Saber sumar y restar matrices, siendo consciente de cuando pueden realizarse ambas operaciones.
- Saber multiplicar un número real por una matriz.
- Saber multiplicar dos matrices, siendo consciente de cuando puede realizarse esta operación.
- Conocer las principales propiedades de las operaciones anteriormente indicadas.
- Aprender a calcular el determinante de una matriz cuadrada dada.
- Ser capaz de calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada, pudiendo determinar previamente si dicha matriz tiene inversa o no.

3. Contenidos trabajados en las actividades. Propuesta de presentación y exposición de los contenidos al alumnado

Seguidamente, presentamos los contenidos teóricos que nuestros alumnos y nuestras alumnas deben conocer previamente para trabajar las actividades que posteriormente serán indicadas. En la presente sección no solo exponemos los contenidos tratados, sino que damos una propuesta metodológica de cómo ir introduciendo y trabajando dichos conceptos de manera práctica y basándonos

[1] En el sistema educativo español, el curso 2º de Bachillerato (correspondiente a alumnos y alumnas de entre 17 y 18 años) es el previo a la entrada a la Universidad, que requiere una prueba de acceso a nivel de Comunidades Autónomas tras la finalización del citado curso.

siempre en la realización de ejemplos en clase tanto, en primera instancia, por parte del docente como, posteriormente, por los propios alumnos y alumnas.

Debe tenerse en cuenta que para la realización de todo este material hemos hecho uso de la ClassPAD 300, pudiendo verse varias aplicaciones más en otros bloques de contenidos en Carrillo (2007).

3.1. Suma de matrices

Definición: La *matriz suma* de dos matrices A y $B \in M_{m\times n}(\Re)$ es:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})\in M_{m\times n}(\Re),$$

Obsérvese que, para calcular la suma de dos matrices del mismo orden, lo que hacemos es sumarlas término a término. Veámoslo con un ejemplo, comprobando posteriormente el resultado con la calculadora:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -7 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & -2-4 & 0+4 \\ 5-7 & 1+1 & -4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora mandamos a realizar a nuestros alumnos y alumnas los siguientes ejemplos, pidiendo que vayan comprobando sus resultados con los devueltos por sus calculadoras. De este modo, pueden ir viendo si han realizado correctamente los cálculos o si, por el contrario, no los han llevado a cabo de manera adecuada. Previamente a la realización de los cálculos, deberíamos de indicarles que deben avisarnos si ocurre algo "raro" cuando intenten hacer las sumas:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -7 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -5 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

Con esta actividad, además de reforzar en nuestros alumnos y alumnas el algoritmo de la operación suma de matrices, les hacemos descubrir por sí mismos que dos matrices solo pueden sumarse si ambas tienen el mismo orden. En caso de que las matrices que quieran sumar sean de órdenes distintos, la suma no estará definida y la calculadora les dará un error. Esto ocurre con las sumas (b) y (d).

En caso de ser necesario, podríamos considerar algunas sumas de matrices adicionales a realizar en el aula para asimilar completamente esta operación.

3.2. Resta de matrices

Definición: La *matriz resta* de dos matrices A y $B \in M_{m\times n}(\Re)$ es:

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}) \in M_{m\times n}(\Re)$$

Al igual que ocurría con la suma de matrices, la operación resta entre dos matrices del mismo orden consiste en restarlas término a término. Consideramos el siguiente ejemplo, que comprobamos después con la calculadora:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -7 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -2-(-4) & 0-4 \\ 5-(-7) & 1-1 & -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Para esta operación, también debemos darles a nuestros alumnos y alumnas una serie de ejemplos para que practiquen esta operación (en nuestro caso, los ejemplos están basados en los usados para la suma de matrices). Es conveniente recordarles que deben usar la calculadora para comprobar los resultados que obtienen. A continuación, deberíamos preguntarles si, con la resta de dos matrices de orden distinto, se les ha presentado el mismo problema que aparecía al sumar matrices de distinto orden:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -5 & -2 & 7 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

Hemos de hacerles ver que, de manera análoga a lo que ocurre con la suma y la resta de números reales, restarle la matriz B a la matriz A consiste en sumarle la matriz B, con todos sus términos cambiados de signo, a la matriz A. Tras ese comentario, debemos pedirles a nuestros alumnos y alumnas que comprueben este hecho usando los ejemplos anteriores y con la ayuda de la calculadora.

Al igual que hicimos con la suma, podríamos considerar restas adicionales de matrices a realizar en el aula por nuestros alumnos y alumnas, si fuese necesario. Con ello se buscaría completar la asimilación del concepto por su parte.

3.3. Propiedades de la suma de matrices

A continuación, pasaríamos a tratar con nuestro alumnado las principales propiedades de la suma de matrices. Para ello, consideraremos cada propiedad acompañada de varios ejemplos que, con la ayuda de la calculadora, nuestros alumnos y alumnas irán realizando para detectar tales propiedades. De este modo, buscamos la asimilación de dichas propiedades, no mediante un procedimiento teórico, sino mediante un procedimiento práctico con el que podrán ver en varios ejemplos que se cumplen tales propiedades:

1. Propiedad conmutativa: $A+B=B+A$, $\forall A,B \in M_{m\times n}(\Re)$.

   Consideramos pares de matrices y pedimos a nuestros alumnos y alumnas que realicen la suma en los dos sentidos posibles. Por ejemplo, podemos darles las matrices:

   $$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

   y pedirles que calculen $A+B$ y $B+A$. Una vez hecho esto, deberán comprobar que el resultado obtenido es el mismo. Para terminar de trabajar con esta propiedad, les pediríamos a nuestros alumnos y alumnas que escriban dos matrices del mismo orden y las sumen de las dos formas, comprobando que ambas operaciones dan el mismo resultado. Posteriormente, se les pediría a algunos de los alumnos y alumnas que expusiesen sus ejemplos delante de sus compañeros.

2. Propiedad asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$, $\forall A,B,C \in M_{m\times n}(\Re)$.

   Podemos proceder con una metodología análoga a la empleada para la propiedad conmutativa.

3. Elemento neutro para la suma de matrices de orden $m\times n$: la matriz nula $\Theta_{m\times n}$, con todos sus términos iguales a 0.

   Una primera aproximación a esta propiedad podemos llevarla a cabo viendo que la matriz $\Theta_{m\times n}$ no modifica a una matriz dada cuando se le suma a derecha y/o a izquierda. De hecho, podemos fomentar la participación de nuestros alumnos y alumnas pidiéndoles ejemplos de matrices y viendo que la propiedad siempre se cumple. Una vez hecho esto, podríamos probar la propiedad considerando una matriz de orden $m\times n$ arbitraria y la matriz $\Theta_{m\times n}$ de ese orden (esto sería sumamente conveniente hacerlo en la docencia universitaria). De este modo, trabajaremos la capacidad abstracción y formalización de nuestros alumnos y alumnas.

   También podíamos razonar de manera general la propiedad que nos permite afirmar que la matriz $\Theta_{m\times n}$ es la única matriz de orden $m\times n$ verificando:

$$\Theta_{m\times n}+A=A+\Theta_{m\times n}=A,\ \forall A\in M_{m\times n}(\Re).$$

En esta ocasión, podríamos usar la calculadora para que los alumnos y alumnas intentasen hallar otra matriz, distinta a la nula, que verificase dicha propiedad y llegasen a la conclusión de que ello no es posible. Una vez hecho esto, podríamos proceder realizando un razonamiento general que justifique la unicidad de la matriz nula. Nuevamente estaríamos trabajando la abstracción y formalización con nuestros alumnos y alumnas.

4. Elemento opuesto para la suma de matrices de orden $m\times n$: esta propiedad ya ha sido trabajada por los alumnos y las alumnas implícitamente al considerar la operación resta de matrices.

   En cualquier caso, debiéramos insistir en esta propiedad, aunque sea solo para dar nombre a la misma y enfatizar el hecho de que restar una matriz equivale a sumarle su opuesto. Podría hacerse algún ejemplo más con la calculadora, buscando que sean los propios alumnos y alumnas quienes determinen que el resultado es el mismo. No obstante, no debemos detenernos en exceso en este concepto, ya trabajado previamente.

3.4. Producto de una matriz por un escalar

Definición: El *producto por el escalar* $k\in\Re$ de la matriz $A\in M_{m\times n}(\Re)$ es la siguiente matriz:

$$k\cdot A=(k\cdot a_{ij})\in M_{m\times n}(\Re).$$

Con lo que nos deberíamos centrar en que nuestros alumnos y alumnas tomen conciencia de que esta operación consiste en multiplicar todos los términos de la matriz A por el número real (escalar) k que se les indique.

Para que ellos y ellas vean cómo funciona esta operación, podríamos trabajar con algunos ejemplos concretos, como el que indicamos a continuación:

$$3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 6 & 1\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-2) & 3\cdot 6 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 4 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 18 & 3\\ 12 & -3 & 15\end{pmatrix}.$$

Tras dicho ejemplo, les podríamos pedir que multiplicasen la matriz de nuestro ejemplo por otros números reales. Sería conveniente que ellos propusiesen números por los que multiplicar, pero teniendo en cuenta que en esa colección de números tuviésemos números positivos, negativos, racionales e irracionales. De este modo, podrán ver el comportamiento con cada uno de ellos. Una posible serie de números reales podría ser la siguiente: -2, 5, -7, 1, $\frac{3}{5}$, $-\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$… Nótese que es de sumo interés que el 1 esté en la lista dada, ya que nos permitirá preparar el camino a la cuarta propiedad que se verá para esta operación en la siguiente sección.

Obviamente, todos estos cálculos pueden y deberían hacerse asistidos por la calculadora para comprobar y corregir los errores que se comentan al operar con números reales.

Pese a que el producto no es una operación difícil de entender y aplicar por parte de nuestros alumnos y alumnas, pudiera darse el caso en que fuese necesaria alguna tarea adicional. Bastaría considerar otra matriz distinta a la dada en nuestro ejemplo y realizar las multiplicaciones por los números reales que se indicaron y otros para que al alumno o alumna termine de asimilar el procedimiento.

3.5. Propiedades del producto por un escalar

Al igual que se hizo con la operación suma, se explicarán las principales propiedades de la operación producto por un escalar. Algunas de estas propiedades relacionarán esta operación con la operación suma de matrices.

1. Propiedad distributiva (respecto suma de escalares):

$$(r+s)\cdot A = r\cdot A + s\cdot A,\ \forall A \in M_{m\times n}(\Re),\ \forall r,s \in \Re\,.$$

   Para explicar esta propiedad, podemos utilizar un ejemplo dado por nosotros mismos o por alguno de nuestros alumnos y alumnas (bastaría con pedir dos números y una matriz):

$$(3+4)\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 7\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 7 & 21 \\ 7 & -14 & -35 \\ 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 9 \\ 3 & -6 & -15 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 4 & 12 \\ 4 & -8 & -20 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 7 & 21 \\ 7 & -14 & -35 \\ 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

   Tras hacer este ejemplo (los cálculos podrían hacerse con la calculadora), les pediríamos a los alumnos y alumnas que comprueben esta propiedad para los pares de números y matrices que se le indiquen. Para no ralentizar el ritmo de trabajo, sería conveniente no mandar más de 3 ejemplos adicionales.

2. Propiedad distributiva (respecto suma de matrices):

$$r\cdot(A+B) = r\cdot A + r\cdot B,\ \forall A,B \in M_{m\times n}(\Re),\ \forall r \in \Re$$

   Procederíamos de manera análoga a lo hecho con la propiedad anterior, ya que dicha metodología es muy útil para esta propiedad por su completa analogía. Los alumnos y alumnas podrán ver cómo funciona esta propiedad con ejemplos que ellos y ellas realicen autónomamente con ayuda de sus calculadoras.

3. Propiedad pseudoasociativa:

$$(r\cdot s)\cdot A = r\cdot(s\cdot A)\ ,\ \forall A \in M_{m\times n}(\Re),\ \forall r,s\in\Re\ .$$

Nuevamente daremos una explicación basada en el uso de ejemplos numéricos concretos, cuyos cálculos realizaremos con la ayuda de la calculadora. Así podrán comprobar que el resultado obtenido de ambas formas es realmente el mismo. En esta ocasión, no procede poner ejemplos previos por nuestra parte, sino que serán nuestros alumnos y alumnas quienes pensarán dos ejemplos y realizarán los cálculos. El profesorado irá por las bancas viendo el desarrollo de ellos y ellas, comprobando si los ejemplos que consideran se adecuan a la propiedad y si realizan correctamente la actividad.

4. $1\cdot A = A\ ,\ \forall A \in M_{m\times n}(\Re)$.

Esta propiedad es de gran simplicidad y no suele causar problemas. Además, ya habremos trabajado implícitamente esta propiedad en la sección anterior, por lo que solo estaríamos terminando de asentar este contenido y dándole un cierta relevancia.

3.6. Producto de dos matrices

Definición: Dadas dos matrices $A \in M_{m\times n}(\Re)$ y $B \in M_{n\times r}(\Re)$, la *matriz producto* $A\cdot B$ es la matriz $C \in M_{m\times r}(\Re)$ definida como:

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\cdot b_{hj}\ ,\ \forall i = 1,\ldots,m\ ,\ \forall j = 1,\ldots,r\ .$$

Por tanto, tendríamos que indicar a nuestros alumnos y alumnas que la forma de proceder sería la siguiente: el término c_{11} de la matriz resultante C se obtendrá multiplicando la fila 1 de la matriz A por la columna 1 de la matriz B; el término c_{12}, multiplicando la fila 1 de A por la columna 2 de B y así sucesivamente. Tras esta explicación pasaríamos a indicarles un ejemplo como el que sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 3+(-2)*2 & 1\cdot 0+(-2)\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 0 & 3\cdot 3+1\cdot 2 & 3\cdot 0+1\cdot 1 \\ 1\cdot(-1)+0\cdot 0 & 1\cdot 3+0\cdot 2 & 1\cdot 0+0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -3 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

El resultado del ejemplo debe comprobarse también con la calculadora, tras lo que pasaríamos a una actividad en clase: calcular algunos productos de matrices. Para esta actividad sería conveniente que los productos correspondiesen a matrices de orden bajo ($2\times2, 2\times3$ ó 3×2), con el fin de que alumnos y alumnas practiquen el cálculo directo, pero sin tener que ser una cantidad excesiva y puedan ver diversas situaciones y no solo un único producto de matrices. Además, podemos permitirles (y recomendarles) que hagan los productos con la calculadora para ver si se han equivocado y dónde ha ocurrido.

Sería interesante mandar posteriormente algunos productos con matrices de orden más elevado (3×3, 4×4, 4×3 ó 3×4), para los que directamente harán uso de la calculadora, obviando el cálculo manual.

Tras esta actividad para asentar el manejo de la operación, pasaríamos a trabajar la no conmutatividad del producto; propiedad que suele resultarles bastante extraña, ya que es la primera vez que se enfrentan a una operación no conmutativa.

La mejor manera de hacerles llegar por ellos y ellas mismas a la conclusión de que el producto no es conmutativo es trabajar los ejemplos realizados en la actividad anterior y realizar el producto en el sentido contrario para cada ejemplo. En unos casos, el producto no podrán realizarlo mientras que en otros lo podrán realizar pero dándoles un resultado distinto.

Es de suma importancia asentar en el pensamiento de nuestros alumnos y alumnas la posibilidad de que exista el producto $A\cdot B$ pero no el producto $B\cdot A$; es más, que, incluso existiendo ambos productos, estos podrían ser distintos. Debemos enfatizar ese hecho y erradicar cualquier concepción posible a que el producto de dos matrices no depende del orden en que se multipliquen.

Como es natural al tener en cuenta la filosofía del presente artículo, todos los cálculos realizados en la actividad sobre la no conmutatividad del producto de matrices se harían con la ayuda de una calculadora gráfica. En esta actividad, nuestro interés no está en la algorítmica del producto, sino en comparar los resultados de los productos $A\cdot B$ y $B\cdot A$.

Una vez que los alumnos y alumnas hayan reflexionado sobre lo que pasa con esas matrices, realizaríamos una puesta en común con toda la clase. De este modo, se abrirá el debate y serán ellos y ellas mismas quienes lleguen a la conclusión de que el orden de los factores sí altera el producto de dos matrices.

4. Actividades a realizar con el alumnado haciendo uso de calculadoras gráficas

A la hora de poner actividades para los conceptos anteriormente expuestos, hemos de hacer énfasis en el uso que alumnos y alumnas hacen de la calculadora gráfica para el tratamiento de los mismos.

De este modo, no podemos reducirnos al mero cálculo de operaciones (que las calculadoras gráficas hacen automáticamente), sino que hemos de preguntar de modo que podamos saber cómo alumnos y alumnas obtienen dichos resultados.

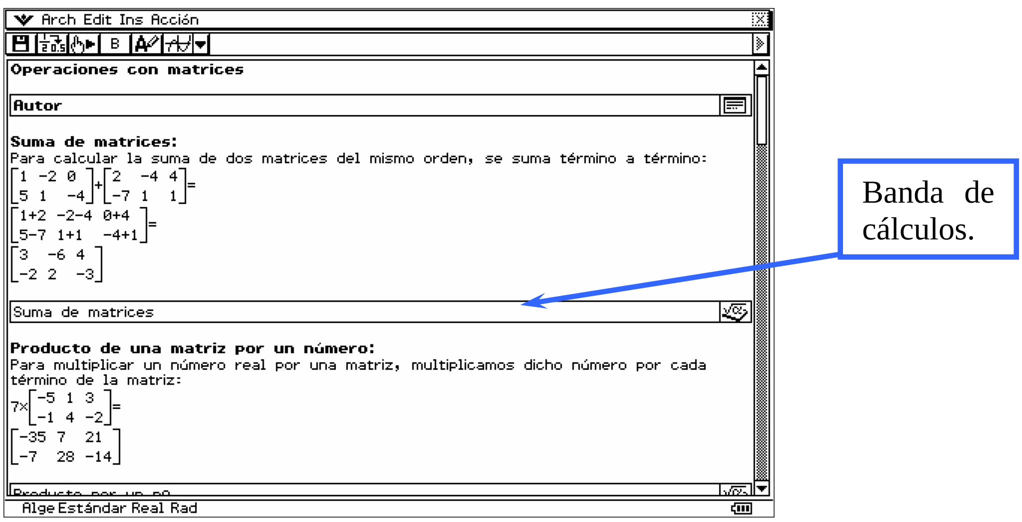
4.1. Ejemplo de e-activity

En este sentido, nos puede ser de utilidad el emplear e-activities realizadas con calculadoras gráficas con las que alumnos y alumnas puedan trabajar los conceptos indicados en este trabajo, tomando como punto de partida la filosofía de centrarnos en las competencias de nuestro alumnado en vez de en el cálculo algorítmico (véase Fukaya y Whitfield, 2007).

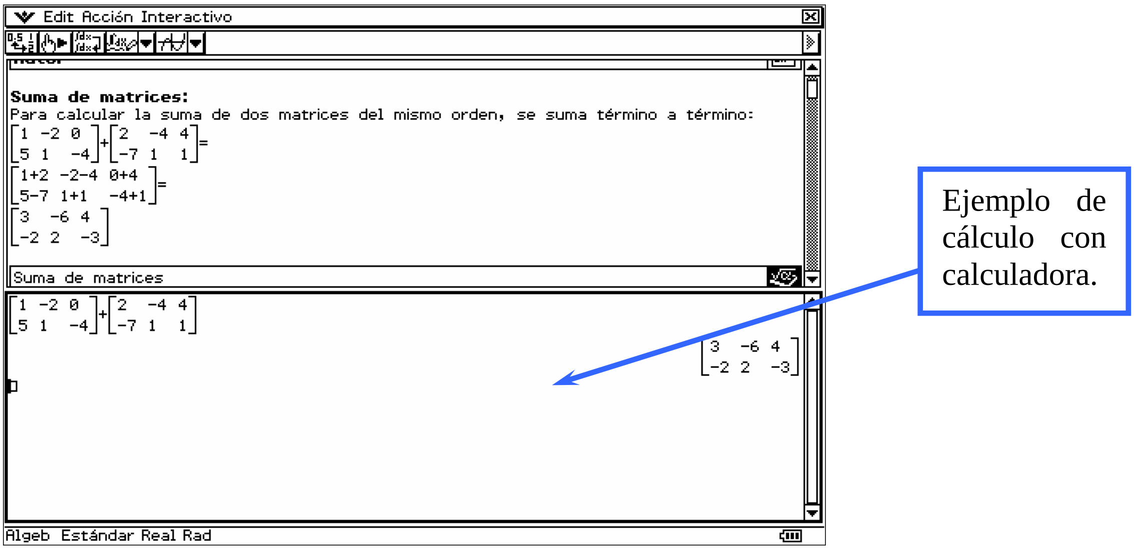
A continuación, expondremos un ejemplo de e-activity que trabaja las operaciones matriciales anteriormente indicadas, amén de añadir las operaciones determinante e inversa de una matriz. Aunque estas dos operaciones no han sido tratadas de manera teórica en los contenidos desarrollados, creemos que es interesante que alumnos y alumnas puedan profundizar en otros conceptos de manera autónoma, incluso aunque el profesorado vaya a trabajarlas personalmente más tarde. De este modo, podemos introducir ambas operaciones previamente para que vayan conociéndolas. En consecuencia, la e-activity no se limitaría exclusivamente a asentar lo ya visto, sino que los alumnos y alumnas podrían profundizar en los contenidos mediante estas dos operaciones nuevas.

En la e-activity mostrada en la presente sección, enfocamos nuestro interés no en la algorítmica del cálculo para las operaciones determinante e inversa de una matriz, sino cómo calcularlo con la calculadora y cómo pueden aplicarlo.

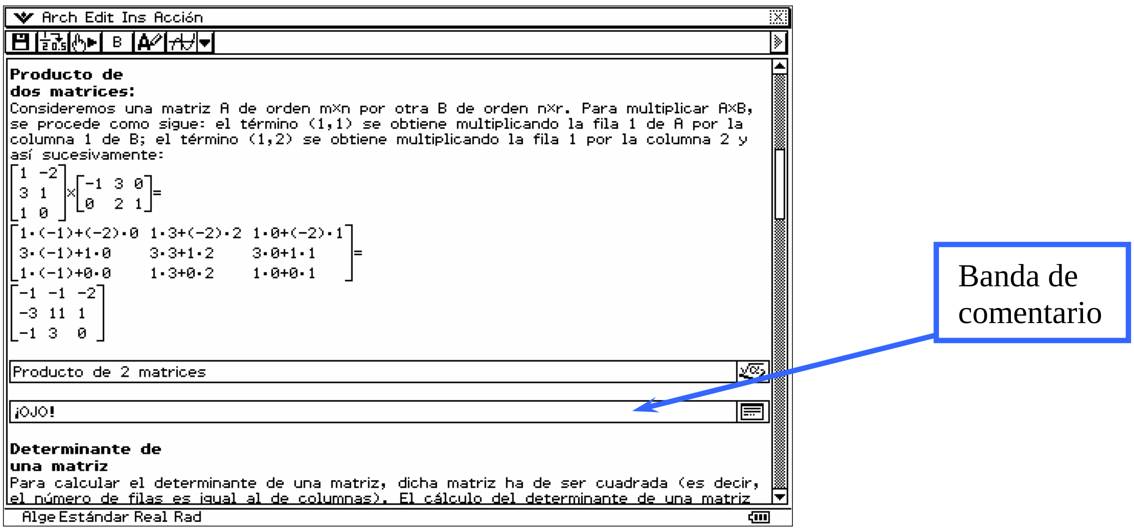
En primer lugar, procedemos a recordarles cómo se realizaban las operaciones elementales que serán motivo de la e-activity (suma de matrices, producto por un escalar y producto de matrices) y que previamente se han explicado en clase. Además, hemos optado por recordar la definición mediante un ejemplo de cálculo.



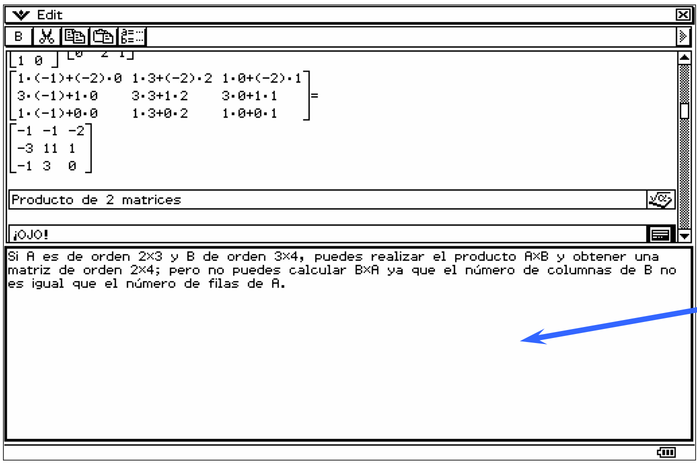
Además de recordar cómo hacer cada operación, introducimos una banda de cálculo para que nuestros alumnos y alumnas recuerden cómo se realizaba cómo se realizaría la correspondiente operación con la calculadora.



Pero no solo podemos incluir ejemplos de cálculos con calculadora, sino también comentarios para llamar la atención de nuestros alumnos y alumnas y dar mayor intensidad a una idea. Por ejemplo, a la hora de recordarles el producto de matrices, podemos incluir una banda de comentario con una nota llamativa y curiosa que les haga prestar especial atención:

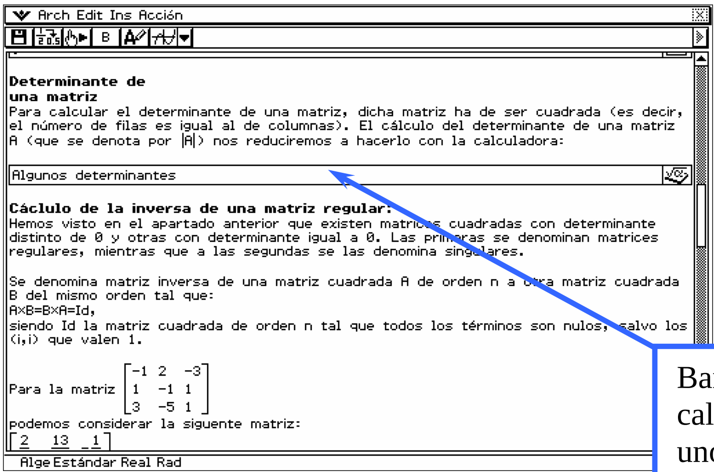


En nuestro caso, el comentario hace referencia a la no conmutatividad del producto de matrices. Como ya dijimos antes, este es un hecho que suele olvidárseles a nuestros alumnos y alumnas. Por tanto, hemos creído conveniente incluir la siguiente nota recordatoria:

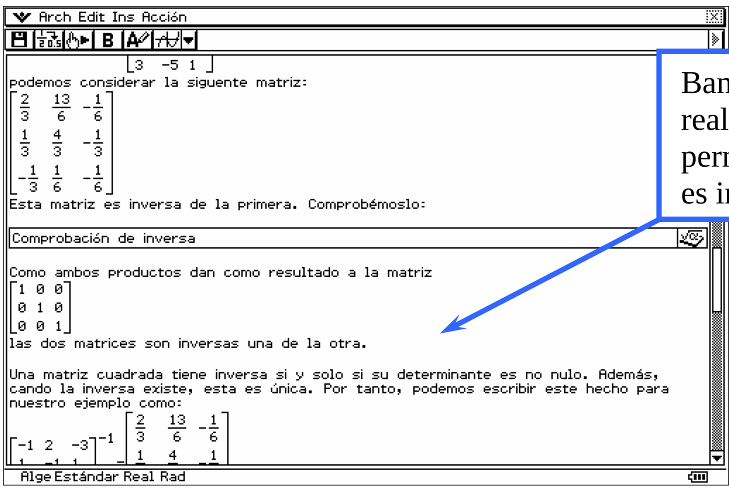


Recordatorio.

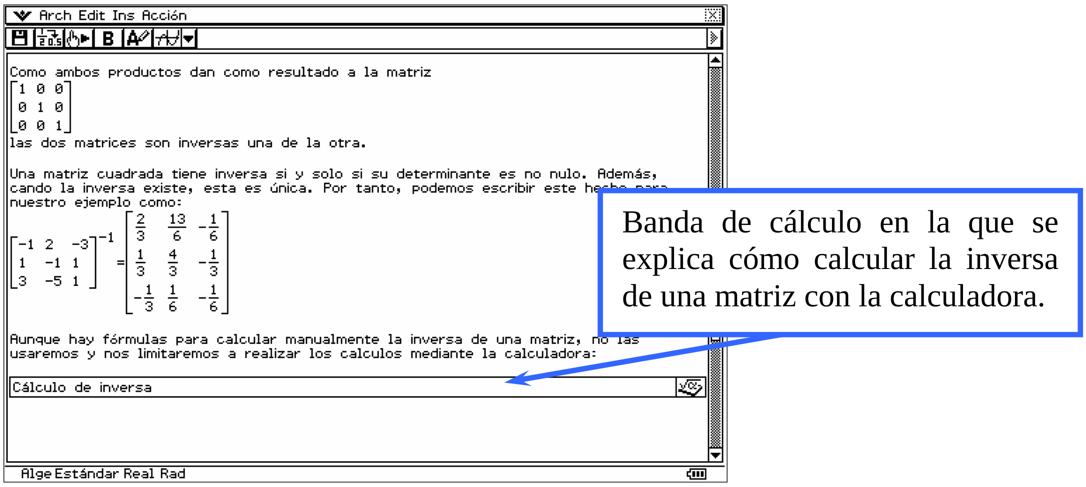
Como esta e-activity está planteada para ser también una ampliación y profundización de los contenidos trabajados en clase, se introducen las operaciones determinante e inversa de una matriz. Sin embargo, no hemos definido los correspondientes algoritmos de cálculo, sino que solo mostramos cómo calcularlas con la ayuda de su calculadora y cómo aplicarlas correctamente.

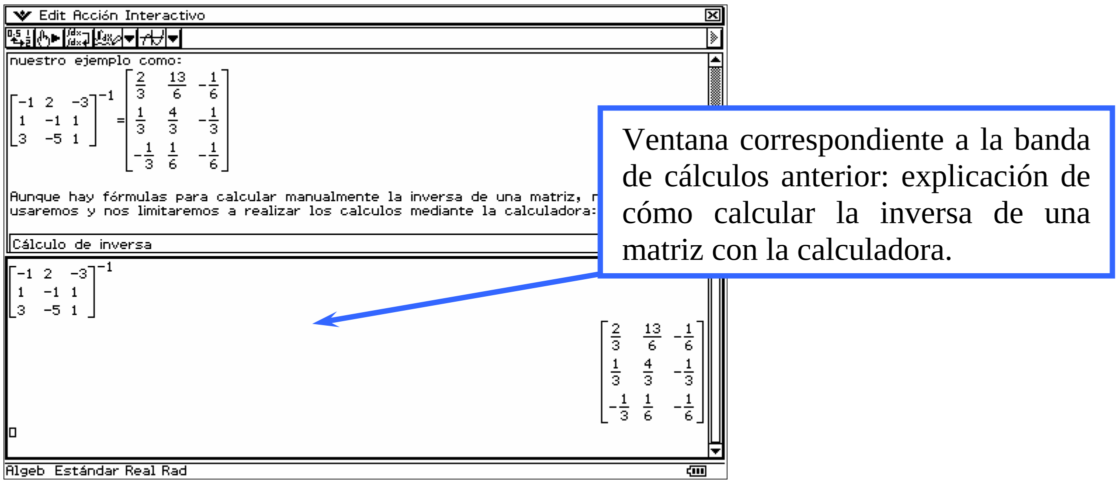


Banda de cálculos en la que se calculan un determinante positivo, uno nulo y otro negativo.

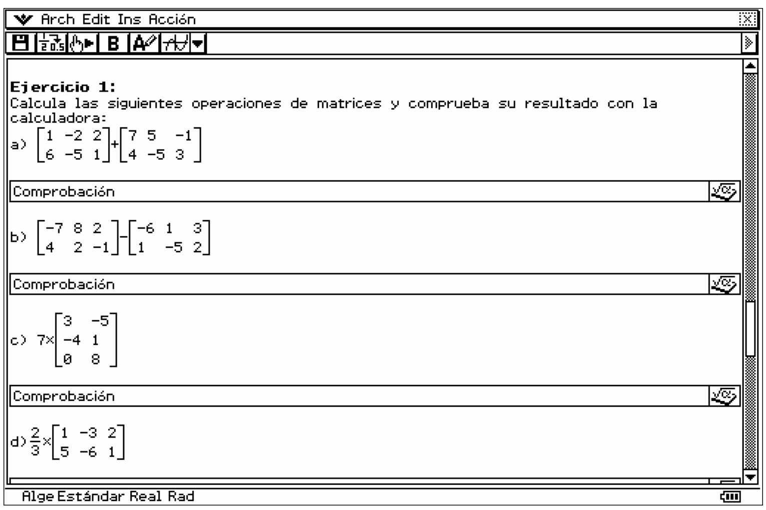


Banda de cálculos en la que se realizan los dos productos que permiten afirmar que una matriz es inversa de la otra.

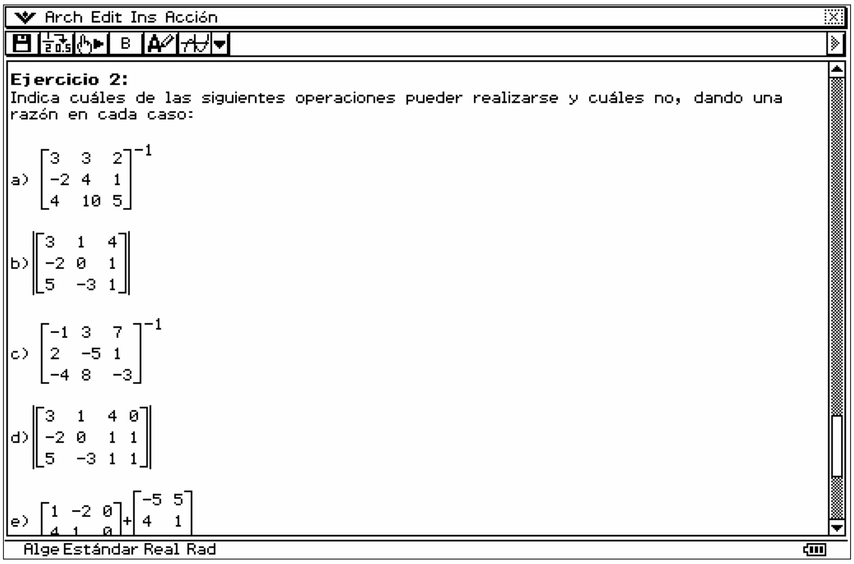




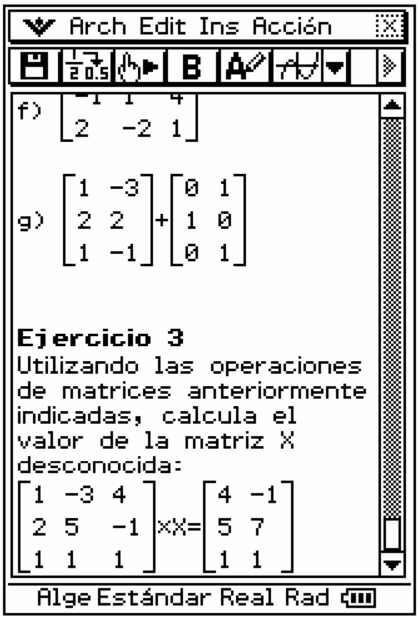
En cuanto a los ejercicios propuestos en la e-activity para que sean resueltos por nuestros alumnos y alumnas, en primer lugar se les pide calcular manualmente una serie de sumas y productos, cuyo resultado tendrán que comprobar con la calculadora (para lo que se les habilita una banda de cálculos).



El siguiente ejercicio sirve para determinar si ellos y ellas realmente saben cuándo pueden realizar dichas operaciones. Por tanto, se les indica una serie de operaciones, no todas ellas posibles, para determinen razonadamente cuáles pueden realizarse y cuáles no.



Finalmente, el tercer y último ejercicio de la e-activity busca ver si nuestros alumnos y alumnas son capaces de generalizar el procedimiento de resolución de las ecuaciones lineales con una incógnita numérica a las ecuaciones matriciales; es decir, considerando que tanto la incógnita como los coeficientes de la ecuación no son números sino matrices.



4.2. Ejemplos de otras actividades

Obviamente también podemos plantearles a nuestros alumnos y alumnas actividades que no requieran de una e-activity. Todo ello sin tener que abandonar nuestra filosofía del uso de la calculadora para realizar los cálculos, trabajar las operaciones y alcanzar cierta destreza en su cálculo. Seguidamente mostramos algunos ejemplos de tales actividades, siendo resueltas dos de ellas:

Actividad 1: Determina cuáles de las operaciones siguientes pueden realizarse. En caso de ser posible, realiza el cálculo y comprueba el resultado obtenido con la calculadora:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -8 \\ 6 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -8 \\ 6 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -8 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Actividad 2: Haciendo uso de la calculadora para realizar las operaciones que sean necesarias, resuelve las siguientes ecuaciones con matrices. Debes indicar cómo has despejado la matriz incógnita X y cuál ha sido la operación que realizaste en cada paso.

(a) $X + \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -8 \\ 6 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$

(b) $2 \cdot X - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

(c) $5 \cdot X - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 7 \cdot X.$

Actividad 3: Obtén un sistema de ecuaciones que corresponda a todas las matrices A de orden 2 que conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Una vez obtenido el sistema, resuélvelo. Tanto para la obtención de las ecuaciones del sistema como para su resolución, puedes hacer uso de la calculadora.

Actividad 4: Escribe la expresión de la propiedad distributiva del producto por un escalar respecto de la suma de matrices para los datos dados a continuación:

$$k = 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Realiza, con la ayuda de la calculadora, los cálculos necesarios para comprobar que se verifica la propiedad antes mencionada para estos datos.

A continuación, pasamos a dar una resolución con el uso de calculadora gráfica de las Actividades 3 y 4 planteadas anteriormente.

Resolución de la Actividad 3: Para obtener el sistema de ecuaciones, solo hemos de imponer la condición de conmutatividad al producto de una matriz genérica por la dada en el enunciado:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Esto podemos hacerlo con la calculadora tal y como se observa en la Figura 1, obteniendo la siguiente igualdad de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2x+y & 3x+y \\ 2z+t & 3z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}.$$

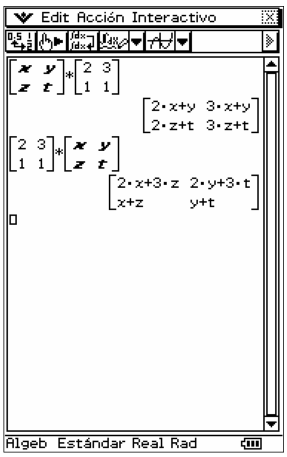


Figura 1: Cálculo de los dos términos de la ecuación matricial.

Por tanto, el sistema que obtenemos es:

$$\begin{cases} 2x+y=2x+3z \\ 3x+y=2y+3t \\ 2z+t=x+z \\ 3z+t=y+t \end{cases}$$

Para resolver el sistema, nuevamente podemos hacer uso de la calculadora como puede verse en la Figura 2. La solución que obtenemos para el sistema es:

$$\begin{cases} x=z+t \\ y=3z \end{cases}$$

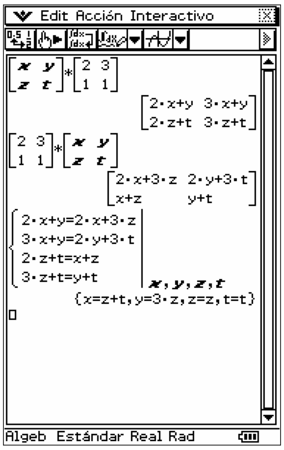


Figura 2: Resolución del sistema obtenido al igualar las matrices de la Figura 1:

Por tanto, las matrices que pedimos en nuestra actividad son las de la forma:

$$\begin{pmatrix} z+t & 3z \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Resolución de la Actividad 4: Lo primero que pide el ejercicio es la expresión de la propiedad distributiva del producto por escalar respecto de la suma de matrices. Esta cuestión quedaría resulta escribiendo:

$$2\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\right)=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

La conmutatividad de la suma permite la siguiente respuesta válida:

$$2\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\right)=2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 3 pueden observarse los cálculos que tendrían que realizar nuestros alumnos y alumnas para comprobar que esta igualdad se cumple.

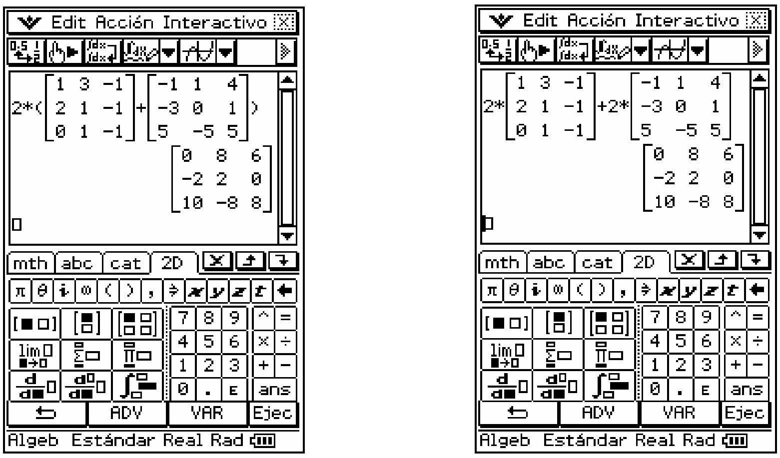


Figura 3: Cálculos para la resolución de la Actividad 4:

5. Criterios de evaluación

Concluimos el presente trabajo indicando cómo distribuiríamos la calificación para evaluar actividades como las indicadas en la sección anterior:

1. Uso correcto y apropiado de los contenidos computacionales para la resolución de la actividad (uso de la calculadora): 35%.
2. Expresión matemática apropiada, formal y rigurosa: 15%.
3. Interpretación del enunciado y adecuación de la respuesta al mismo: 20%.
4. Desarrollo correcto y justificado de los pasos empleados en la resolución del problema (razonamientos): 25%.
5. Buena presentación, estilo apropiado y uso correcto del lenguaje: 5%.

Bibliografía

- A. Carrillo de Albornoz (Coord.) (2007): "Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas". 1.ed. SAEM THALES y CASIO, Córdoba.
- S. Bermudo y A.F. Tenorio (2007a): "Guía docente 2007-2008: Asignatura Fundamentos Matemáticos de la Informática I". En VV.AA. (2007): "Guía docente ECTS. Primer y segundo curso. Ingeniería Técnica en Informática de Gestión. Curso 2007-2008". Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.
- S. Bermudo y A.F. Tenorio (2007b): "Guía docente 2007-2008: Asignatura Fundamentos Matemáticos de la Informática II". En VV.AA. (2007): "Guía docente ECTS. Primer y segundo curso. Ingeniería Técnica en Informática de Gestión. Curso 2007-2008". Universidad Pablo de Olavide, Sevilla.

- Boletín Oficial del Estado, 18 de septiembre de 2003, núm. 224 “Real Decreto 1125/2003, de 5 de septiembre, por el que se establece el sistema europeo de créditos y el sistema de calificaciones en las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional”, pp. 34355-34356.
- R. Bracho (2007): “Metamorfosis matemática de la aventura TIC andaluza”. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 9, pp. 41-71.
- T.E. Cedillo (1998): “Hacia un modelo didáctico para el uso de las calculadoras en el aula”. En F. Hitt, M.J. Sentíes, E. Pérez y C. Cortés (1998): “Memorias del IX Seminario Nacional de calculadoras y microcomputadores”. Escuela Nacional Superior de México, Ciudad de México.
- E.M. Fedriani, M.C. Melgar y A.F. Tenorio (2007): “Matemáticas para la Administración y Dirección de Empresas”. 1.ed. Ediciones Deauno Documenta.
- H.Fukaya y D. Whitfield (2007): “Using tha ClassPAD as a Dynamic Learning Environment to Teach Mathematics”. En D.K. Pugalee, A. Rogerson and A. Schinck (2007): “Proceedings of the Ninth International Conference Mathematics Education in a Global Community”. The University of North Carolina, Charlotte, pp. 225-231.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2003): “La integración del sistema universitario español en el Espacio Europeo de Enseñanza Superior. Documento-marco.
- L. Montero (2006): “Enseñanza de la Matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual”. En J.Segura (2006): “Actas digitales del I Encuentro de Enseñanza de la Matemática”. Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica.
- S. del Puerto y C. Minnard (2002): “La calculadora como recurso didáctico”. En C. Barceló (Ed.) (2002): “Homenatge al professor Lluis Santaló i Sors”. Universidad de Girona, pp. 165-175.

Ángel F. Tenorio Villalón, nacido el 7 de julio de 1977 en Sevilla. Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Sevilla (julio de 2000) y Doctor por esa misma universidad (diciembre de 2003). Actualmente es Profesor Ayudante Doctor en la Universidad Pablo de Olavide y Delegado Provincial de la S.A.E.M. THALES en Sevilla. Sus publicaciones, tanto en revistas como en congresos, son referentes a la Teoría de Lie, la Historia de las Matemáticas y la metodología ECTS en las universidades españolas.

Septiembre de 2008, Número 15, páginas 191 - 194
ISSN: 1815-0640

Por Santiago López Arca

BOECIO

Anicio Manlio Torcuato Severino Boecio (Roma, 480 – Pavia, 524) filósofo, teólogo y escritor. Fue cónsul del rey Teodorico alrededor del año 510 y destacó por su sinceridad y honradez hasta el punto de ser acusado de un delito imaginario que lo llevó a sufrir una muerte cruel y ser venerado como mártir desde el siglo VIII.

Debido a su exquisita educación, tradujo y comentó escritos lógicos de Aristóteles, la "*Isogoge*" de Porfidio y los *"Tópicos"* de Cicerón. Escribió tratados de Aritmética, Geometría, Astronomía y Música (las disciplinas del *quadrivium*, la parte científica de los estudios de la Edad Media) que fueron usados a modo de libros de texto y se utilizaron durante la Alta Edad Media como fuente casi única para conocer la ciencia griega. Su obra maestra, escrita en la cárcel y que inmortalizó su nombre, fue *"De consolatione philosophiae"*. Otras obras suyas son: *"De institutione arithméticae",* escrita en el año 520, "*De institutione musicae"*, una *Geometría* y una *Astronomía*...

Fue uno de los primeros propagadores de los *"ápices"*, caracteres ideados por los pitagóricos para representar los números.

Boecio distribuye los números en dos familias: los *pares* y los *impares*, siendo los primeros aquellos que se pueden repartir en dos partes iguales. A continuación considera únicamente los números pares y hace dos clasificaciones dentro de esta familia:

Clasificaciones de los números pares según Boecio

I	II
Pares paritariamente	Abundantes
Impares paritariamente	Deficientes
Pares imparitariamente	Perfectos

Se dice que un número es ***par paritariamente*** cuando puede dividirse en dos partes iguales, y cada una de ellas, a su vez, se puede dividir también en dos partes iguales hasta llegar a la unidad. Cumplen esta definición, los números que son potencia de 2, es decir, los de la forma 2^n para n>1, como: 4, 8, 16, 32...

Un número par es ***impar paritariamente*** cuando al dividirlo en dos partes iguales, el resultado es un número impar, es decir, aquel que cumple que n/2=impar. Por ejemplo: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30...

Un ***par imparitariamente*** es aquel que puede dividirse en dos partes iguales, y cada una de ellas se puede seguir dividiendo en otras dos partes iguales hasta un cierto punto, pero sin llegar a la unidad. Por ejemplo: 12, 20, 24, 28, 36...

Aclaremos los conceptos que intervienen en la segunda clasificación: un número es ***abundante*** si la suma de sus divisores es mayor que dicho número. A esta subfamilia pertenecen 12, 18, 20, 24, 30... Por ejemplo, los divisores de 18 (excluyendo el propio número) son 1, 2, 3, 6 y 9, cumpliéndose que 1+2+3+6+9 = 21>18.

Cuando la suma de los divisores del número, sin contar el propio número, es menor que dicho número, estamos ante un número ***deficiente***. Ejemplos: 2, 4, 8, 10, 14...

Cuando un número es ***perfecto***, la suma de sus divisores propios coincide con su valor. Ejemplo: 6, 28...

Pueden establecerse relaciones entre ambas clasificaciones**:**

Los números *pares paritariamente*, son todos *deficientes*.

Entre los números pares que son *impares paritariamente* hay un número *perfecto*, el 6, los hay *deficientes* (2, 10, 14…) y *abundantes*: 18, 30…

Entre los números *pares imparitariamente*, hay números *perfectos*: 28… y *abundantes*: 12, 20, 24…

Paula S. P.

Fuentes:
Fibonacci (El primer matemático medieval). Ricardo Moreno. Ed. Nivola
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

ROSETONES

Rosetón diédrico de orden 3, D_3

Rosetón cíclico de orden 9, C_9

¿Queda alguien que nunca se haya visto sorprendido por la belleza y la cantidad de geometría que desprende un rosetón?

Un ***rosetón*** es un adorno circular, frecuentemente observable en un gran número de templos, construido a partir de un motivo decorativo que se repite por aplicación de un giro.

El adorno básico central que se utiliza para la creación del rosetón se denomina, habitualmente, ***pétalo***. Los *pétalos* pueden ser o no *simétricos*. Decimos que un rosetón es ***diédrico*** cuando sus pétalos son simétricos. Un rosetón es ***cíclico*** si sus pétalos no son simétricos.

El número de pétalos de un rosetón determina su ***orden***: si un rosetón tiene tres pétalos será de *orden tres*; si tiene cuatro pétalos, de *orden cuatro*… etc. Por lo tanto, un rosetón con ***n pétalos*** será de ***orden n***.

En un rosetón de *orden n* puede apreciarse la siguiente propiedad matemática: *coincide consigo mismo cuando le aplicamos un giro de amplitud 360º/n que tenga centro de giro en el centro del rosetón*. Otro giro que tenga por amplitud la medida de un ángulo que sea múltiplo del anteriormente citado dejará, así mismo, al rosetón bajo el mismo punto de vista.

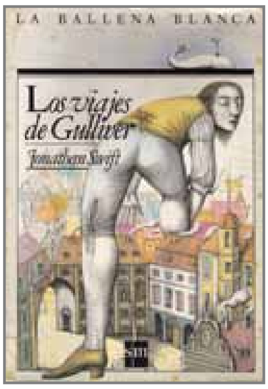
A continuación muestro algunas fotos de rosetones que puedo admirar cuando doy un paseo por el lugar en el que vivo. Busca los que se encuentren cerca de tu casa. ¿De qué tipo y de qué orden son los rosetones que mostramos?






Iria M. P.

LAS MATEMÁTICAS DE UN PÁRRAFO LITERARIO

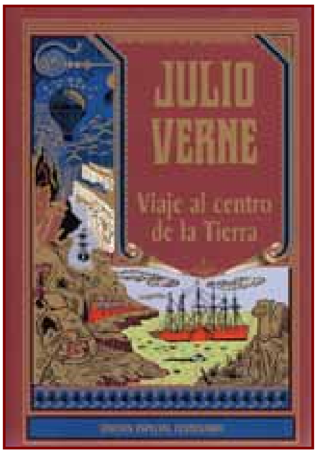


[…] Puesto que la estatura normal de los nativos es algo inferior a los quince centímetros, existe una proporción exacta con los demás animales, así como con las plantas y los árboles. Por ejemplo, los caballos y los bueyes de más alzada tienen una altura de diez o doce centímetros; las ovejas, cuatro, más o menos; los gansos abultan lo que un gorrión, y así las distintas especies, hasta llegar a las más pequeñas, que a mis ojos eran casi invisibles. […]

Los Viajes de Gulliver.
Jonathan Swift.

Propuesta para investigar: ¿Cómo podremos calcular razonadamente la constante de proporcionalidad que utiliza el autor? A partir de ese resultado, determina las medidas que tendrían en Liliput otros animales y objetos de la vida cotidiana.

Santiago López Arca



[…] Mi tío me dirigió una mirada de triunfo.

-¡Al cráter! -dijo.

El cráter del Sneffels representaba un cono tumbado. Su abertura tenía media legua de diámetro, aproximadamente, y su profundidad sería de unos 2.000 pies. ¡Si estaría imponente un recipiente semejante cuando se llenase de truenos y llamas! El fondo del embudo no mediría más allá de 500 pies de circunferencia, de suerte que sus pendientes, bastante suaves, permitían llegar fácilmente a su parte inferior. Involuntariamente comparaba este cráter a un trabuco de ancha boca, y la comparación me espantaba. […]

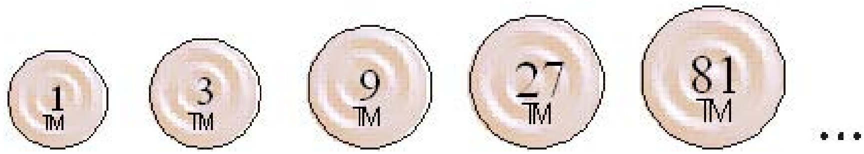
Viaje al centro de la Tierra.
Julio Verne.

Propuesta para investigar: Expresa en metros las medidas que se dan en el texto anterior. Calcula la superficie de la abertura, el radio de la circunferencia del fondo del embudo y el volumen del tronco de cono.

PENSAR ES DIVERTIDO

CURIOSIDADES DE TRIÓN

En una remota galaxia existe un singular planeta al que llaman ***Trión***. Sus extraños moradores tienen, sorprendentemente, tres brazos que acaban en tres manos de tres dedos cada una. La unidad del sistema monetario de este inaudito lugar se denomina, evidentemente, *Three-Money*, *TM*, y algunas de sus monedas son las siguientes:



Para efectuar los pagos, rige una curiosa norma que todos los habitantes están obligados a cumplir: *no se permite abonar ninguna cuenta utilizando tres o más monedas o billetes de igual valor*. ¡Ellos afirman que son capaces de pagar cualquier cantidad sin romper este precepto!

¿De qué valor crees que son las siguientes tres monedas o billetes que continúan la serie que mostramos en la figura? Da una justificación de tu respuesta.

¿Cómo efectuarías tú los pagos de las siguientes cantidades? 50 TM, 100 TM, 200 TM, 1000 TM y 5000 TM.

Al llegar a su mayoría de edad, cada habitante de Trión coloca tres anillos en cada uno de sus dedos, ¿Cuántos anillos necesita?

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

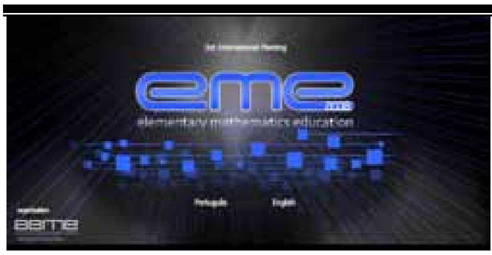
Septiembre de 2008, Número 15, páginas 195-196
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

AÑO 2008

IV Congreso Iberoamericano de Cabri (IBEROCABRI-2008)
Ciudad de Córdoba, Argentina
Universidad Nacional de Córdoba y Cabrilog
Fecha: 23 al 26 de Septiembre de 2008
http://www.iberocabri.org/

9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa
Universidad Popular del Cesar
Ciudad de Valledupar
Fecha: 16 al 18 de Octubre de 2008
www.asocolme.com



3[er] **Elementary Mathematics Education** meeting (EME 08)
Colegio de Diogo de Sousa
Braga (Portugal)
Fecha: 29 de Noviembre al 1 de Diciembre de 2008.
http://www.eme08.com/

AÑO 2009

VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática
Puerto Montt Universidad de Los Lagos de Chile
Fecha: 4 al 9 de Enero de 2009.
http://cibem6.ulagos.cl/

6ª Conference of European Research in Mathematical Education (CERME 6)
Lyon. Francia
Fecha: 28 de Enero al 1 de Febrero de 2009.
http://cerme6.univ-lyon1.fr/

10º Simposio de Educación Matemática
Chivilcoy, Argentina
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 4 al 7 de Mayo de 2009
www.edumat.org.ar

10ª International Conference Models in Developing Mathematics Education
Dresden, Alemania
"The Mathematics Education into the 21st Century Project" y University of Applied Sciences, Dresden
Fecha: 11 al 17 de Septiembre de 2009

AÑO 2010

8º International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Ljubljan, Eslovenia. Universidad Nacional de Luján
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
http://icots8.org/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2008, Número 15, página 197
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org