UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 14

Junio de 2008

Índice

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

Es recensionada en ***Mathematics Education Database*** y está incluida en el catálogo ***Latindex*.**

Colabora

Fundación Carolina

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, página 3
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Efim Zelmanov

Breve reseña

Efim Zelmanov nació en Novosibirsk (Rusia) en 1955. Realizó sus estudios de Matemáticas en la Universidad del Estado de Novosibirsk, en la que alcanzó el grado de doctor en 1980 con una tesis sobre álgebras de Jordan.

Fue investigador del Instituto de Matemáticas de su ciudad natal hasta 1991. A partir de entonces ha sido profesor de las universidades de Oxford, Wisconsin (Madison), Chicago y Yale, siéndolo ahora de la de California (San Diego).

El profesor Zelmanov es uno de los más destacados algebristas del siglo XX, siendo sus principales campos de actividad el estudio de las álgebras no asociativas y la teoría de grupos.

Resolvió el denominado “problema restringido de Burnside”, una antigua cuestión de teoría de grupos que había atraído la atención de numerosos especialistas a lo largo del siglo XX.

La solución al “problema restringido de Burnside” fue la razón por la que en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1994, celebrado en Zurich, se le concedió la Medalla Fields, el máximo galardón con el que se distingue a un matemático y que se suele equiparar a los premios Nobel.

El profesor Zelmanov mantiene una estrecha relación con los matemáticos de la Universidad de Oviedo (España). El pasado 28 de marzo de 2008 fue investido *doctor honoris causa* por esa Universidad. Reproducimos en nuestra sección de *firma invitada,* con su generosa autorización, el discurso que pronunció en tal solemne ocasión.

Desde *Unión* agradecemos muy vivamente la amabilidad de Efim Zelmanov de permitir la publicación en nuestras páginas de su interesante texto.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Junio de 2008, Número 14, páginas 5-9
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Matemáticas en el siglo XX: abstracción y utilidad [1]

Efim Zelmanov

Me siento muy feliz y emocionado por haber sido distinguido con el “Doctorado Honoris Causa” por la Universidad de Oviedo. He disfrutado, durante muchos años, de una profunda y fructífera colaboración científica con esta Universidad y una estrecha relación humana con algunos de sus miembros, que espero continúe del mismo modo.

Hoy tengo la ocasión de dirigirme a una audiencia no sólo matemática, por lo que compartiré algunos pensamientos, bastante generales, sobre la naturaleza de nuestra ciencia.

Desde la antigüedad, las matemáticas se han caracterizado por una doble vertiente, dos aspectos inseparables que se sostienen mutuamente. El primer aspecto ha sido su permanente voluntad de respuesta a los desafíos tecnológicos del momento. En un principio estos retos se reducían a medidas de terrenos, construcción, navegación, etc. Entonces las matemáticas sirvieron para suministrar un lenguaje adecuado para expresar las leyes de la naturaleza. Esta aplicación condujo al cálculo y al análisis. Las matemáticas han continuado aplicándose a un número siempre creciente de áreas: teoría de la comunicación (álgebra), imágenes médicas (análisis armónico) y finanzas (procesos estocásticos).

Pero existe otra vertiente: la demostración. Con un punto de humildad la he relegado al segundo lugar, aunque la demostración es el alma de las matemáticas.

En las ciencias experimentales el criterio de verdad se basa en la repetición del experimento. En matemáticas existe un concepto de demostración bien establecido, que se ha mantenido en su esencia durante los últimos dos mil (2000) años. Ha habido ajustes y discusiones sobre el concepto a lo largo de estos años, pero es sorprendente lo poco que ha variado.

Este aspecto es cercano a las artes. Es difícil ver ninguna utilidad práctica en el quinto postulado acerca de las rectas paralelas o en la búsqueda de soluciones por

[1] Discurso leído por el autor el 28 de marzo de 2008, con ocasión de su investidura como *doctor honoris causa* por la Universidad de Oviedo (España).

radicales en una ecuación polinómica de grado cinco. Los matemáticos lo hicieron fundamentalmente persiguiendo la belleza. Las matemáticas son un extraño arte, más elitista que la música o la escultura. Son también el arte mejor financiado, porque son inseparables de su utilidad, acerca de la que he hablado anteriormente.

En mi conferencia hablaré sobre dos encrucijadas que tuvieron lugar en el siglo veinte.

(i) Al comienzo del siglo, las matemáticas se hicieron más y más abstractas. Este hecho generó el sentimiento y la preocupación de que las matemáticas se habían encerrado en si mismas y estaban perdiendo sus lazos de apoyo al mundo real.

(ii) Después del importante papel desempeñado por las matemáticas en la Segunda Guerra Mundial y en la posterior carrera de “brazos y tecnología”, los gobiernos de los países desarrollados concluyeron que las matemáticas son, en efecto, útiles. Esta tendencia está siendo reforzada actualmente por la impactante eficiencia de los matemáticos en las tecnologías de la información y las finanzas. Como consecuencia, las matemáticas gozan de un nivel de apoyo público sin precedentes. Las universidades se han extendido de modo espectacular y los estudiantes son animados a seguir cursos de matemáticas. De hecho en Estados Unidos, las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas han llegado a ser “una producción de masas”

Hablemos de la primera encrucijada. Como hemos dicho, en la primera mitad del siglo veinte las matemáticas se volvieron abstractas. Nuevas estructuras algebraicas cristalizaron (grupos, anillos, etc.) seguidas por variedades, haces, homologías…, y toda la matemática se vio a través del prisma de estos conceptos. Además, estos conceptos (en palabras de Poincaré) se convirtieron en una gran fuerza unificadora: diferentes áreas empezaron a tener un aspecto similar, a no parecer tan diferentes. Áreas sintéticas como Geometría Algebraica o Topología Algebraica empezaron a florecer.

La exposición matemática pasó a ser axiomática. Significa que si alguien quiere estudiar un objeto, i) elige las propiedades importantes de este objeto en las que se quiere concentrar, ii) formula estas propiedades como axiomas, iii) estudia todos los objetos que satisfacen esos axiomas. De este modo, una vez que se ha ignorado todo lo que es irrelevante en ese momento, la exposición se hace directa y suave.

La comunidad matemática fue seducida. Algunas mentes pueden incluso haberse desorientado al creer que las matemáticas no son más que el estudio de varios axiomas. Grandes nombres de las matemáticas (por ejemplo Herman Weyl) expresaron su reserva y preocupación.

Con el tiempo se vio que el método axiomático es un gran modo de presentar el tema. Si se elige un sistema relevante de axiomas se puede terminar con grandes resultados. Si se eligen axiomas irrelevantes, se terminará con una teoría vacía.

El proceso de abstracción vino del interior de las matemáticas, no fue sugerido por ningún reto externo (los retos y aplicaciones que lo podían haber sugerido vinieron más tarde).

A comienzos del siglo veinte el volumen de investigación matemática creció y se diversificó. Einstein explicó en una ocasión las razones de su elección de física y no de matemáticas. En física podía sentir todo el tema bajo control, mientras una estrecha área de matemáticas podía consumir su vida entera.

Algo tenía que hacerse al respecto. Si la selva crece demasiado poblada, hay que mirar a las raíces y no a las hojas. El proceso de abstracción contribuyó a poner la casa en orden antes de seguir avanzando.

Es curioso que, puesto que estas nociones abstractas fueron diseñadas específicamente para tratar con sistemas complicados, encuentran aplicaciones cuando tenemos que trabajar con sistemas igualmente complicados, como los que vienen de Internet o de las Comunicaciones. Volveré luego sobre estas ideas.

Hablemos sobre el segundo punto crucial en la historia de las matemáticas, que ocurrió durante la Segunda Guerra Mundial.

Los esfuerzos criptológicos de los equipos de matemáticos, especialmente organizados al respecto, jugaron un papel esencial en el éxito aliado (ver “La segunda guerra mundial” de W. S. Churchill).

Los proyectos nucleares en USA y en la URSS también tuvieron importantes componentes computacionales y matemáticas.

Notemos que la práctica ausencia de ordenadores en este momento hizo que las matemáticas jugaran un papel aún más importante.

El cambio resultante de actitud por parte de los matemáticos se debió a una generación de matemáticos que incluyó, entre otros, a von Neumann, Turing y Kolgomorov.

Entre los ejemplos contemporáneos de este tipo mencionaré las llamadas “asesorías matemáticas de inversiones”, tales como “Tecnologías del Renacimiento” o la fundación D. E. Shaw, gigantes matemáticos IT (de Tecnologías de la Información) tales como Google y la contribución de los matemáticos a la seguridad.

El fundador de Tecnologías del Renacimiento, Jim Simons, es un notable geómetra diferencial, con credenciales académicas estelares. No hace ningún secreto del hecho de que sus decisiones financieras descansan en complejos modelos matemáticos. Lo mismo puede decirse acerca de David Shaw, licenciado en matemáticas por la universidad de San Diego y doctor en informática por Stanford.

Estas asesorías contratan fundamentalmente brillantes jóvenes doctores en matemáticas, informática o física, independientemente del área de su tesis. Durante los últimos años, éstas han sido las asesorías de inversiones con mejores resultados.

Todo aquel que usa la maquinaria Google de búsqueda (lo que hoy en día significa todo el mundo) obtiene muchas páginas de referencias web. El orden en que se listan estas referencias es crucial. Para una pequeña firma, la diferencia entre aparecer en la página dos o hacerlo en la página cincuenta es la diferencia entre prosperidad y muerte, pues nadie llega a la página cincuenta.

El método que se usa en Google para hacer este orden se basa en profundos teoremas matemáticos, en absoluto triviales.

Unas palabras acerca de la investigación en teoría de la comunicación, que se ha convertido en uno de los principales viveros de aplicaciones matemáticas. Cada vez que usamos el teléfono móvil, un CD o un DVD estamos usando códigos correctores de errores y cada vez que usamos una contraseña para entrar en el correo electrónico o en la cuenta bancaria, usamos álgebra y teoría de números. Hablando de seguridad de comunicaciones, la Agencia Nacional de Seguridad de los Estados Unidos, se ha convertido en el mayor contratador de especialistas en álgebra, Teoría de Números y Combinatoria.

Algunas conclusiones de estos ejemplos. La primera es que no existen áreas de las matemáticas intrínsecamente puras o aplicadas. Los métodos matemáticos más abstractos son útiles para tratar con sistemas que tienen un grado de complicación comparable, como son los que aparecen en la Investigación relacionada con Internet o con comunicaciones.

La separación entre matemática pura y aplicada, vigente durante buena parte del siglo veinte, está superada.

Otra observación. Debido al éxito de las generaciones previas de matemáticos y a los ejemplos mencionados, las matemáticas gozan de un gran prestigio en la sociedad. La gente tiende a creer lo que se supone ha sido confirmado matemáticamente. Para conservar este prestigio y nivel de apoyo, la comunidad matemática debe ser vigilante. El uso de las matemáticas para apoyar teorías especulativas no es tan inocente.

El resurgimiento de las matemáticas en la imagen pública coincidió con una expansión sin precedentes del sistema universitario. Parece que estamos en el camino de la educación universitaria universal. Y en Estados Unidos todos los estudiantes siguen cursos de cálculo (que por cierto es nuestro "pan y mantequilla").

A menudo escucho la pregunta: ¿Por qué son tan difíciles las matemáticas? Las matemáticas constituyen un tema antiguo, que ha sido enseñado durante dos mil años y siempre ha sido difícil. No existe ningún modo milagroso que no envuelva trabajo duro y ciertas habilidades. Ahora las matemáticas se enseñan a cientos de millones de estudiantes.

Imaginemos que se descubre que el violín puede ser útil y todo el mundo debe aprender a tocar el violín. Algunos lo harán y algunos lo harán hasta cierto punto.

Los esfuerzos por mejorar la enseñanza de las matemáticas y la investigación en educación matemática son ahora más importantes que nunca. ¡Pero no esperemos milagros! Siempre serán difíciles.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 11 - 23
ISSN: 1815-0640

Cuando la historia del ordenador condiciona el significado de vocablos de la vida cotidiana y de las Matemáticas

A. Taiana, C. Alarcón, G. Gagliano, R. Mainieri y M. A. Morelli

Resumen

Nos encontramos dedicadas a la tarea de construir una Didáctica Específica de la Algoritmia para la Programación, en pos de seleccionar trayectorias didácticas que mejoren el proceso instruccional dentro de esa área de la Informática. Presentamos los primeros resultados que nos han permitido descubrir las diferencias esenciales de significado que tienen, dentro del mundo de la programación, conceptos tan básicos como ***algoritmo***, ***dato*** y ***variable*** y qué obstáculos encuentran los alumnos durante el proceso de aprendizaje.

Abstract

We are devoted to the task of building a specific Didactics of Algorithm for Programming with the objective of selecting more effective didactic paths to improve the teaching process within the area of data processing. We offer the first results obtained that have led us to discover essential conceptual differences within the scope of programming; for example, such basic concepts as **algorithm, data** and **variable**. More over, we describe some of the difficulties students face during the learning process.

Introducción

Constituimos un grupo de investigación dedicado a la tarea de mejorar los procesos de enseñanza/aprendizaje de la Algoritmia para la Programación y nuestro objetivo es encontrar los recursos necesarios para lograrlo.

Nuestros objetos de estudio son los algoritmos y queremos favorecer la construcción de los mismos por parte de los alumnos.

Se trata de algoritmos que, traducidos a un lenguaje de Programación, puedan ser luego ejecutados por un procesador. Nos referimos a estos algoritmos como objetos sistémicos pues están constituidos por objetos simples que a su vez nos dedicamos a analizar.

Nuestra idea de investigar los procesos instruccionales de la Algoritmia para la Programación nace como consecuencia de los errores que detectamos, en nuestros alumnos de primer año de carreras de ingeniería, en la Universidad Nacional de

Rosario, en Argentina, durante nuestras experiencias áulicas, en los procesos de enseñanza aprendizaje de esa disciplina.

Consideramos que nuestro aporte de investigación también es de utilidad para alumnos de los últimos años de la Escuela Media ya que nuestro trabajo atañe a las nociones básicas de la algoritmia y, por lo tanto es apto para estos niveles.

Como bien sabemos las Ciencias de la Computación derivan de las Matemáticas y fueron creadas por matemáticos; además, construir un algoritmo es determinar los pasos a seguir para resolver un problema.

Siendo la Resolución de Problemas uno de los ejes esenciales de la Didáctica de las Matemáticas, elegimos para nuestra investigación, un marco teórico dentro de la Didáctica de las Matemáticas. Tal marco teórico es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de Juan Diaz Godino de la Universidad de Granada, España. La decisión de esta elección tiene que ver con la riqueza, completitud y flexibilidad de esta teoría que brinda potentes herramientas de análisis de registros, tanto de textos, trayectorias didácticas, protocolos de alumnos y otros. Estas herramientas nos permitieron determinar y profundizar las coincidencias y divergencias del significado de los vocablos dato y variable en Programación parangonándolas con sus significados en las Matemáticas y en la vida cotidiana. Además detectamos algunos conflictos didácticos de los textos específicos de la disciplina.

Volviendo al concepto de algoritmo, ya en el siglo IV AC. Euclides, matemático persa, describió un mecanismo para calcular el máximo común divisor entre dos números naturales. En el transcurso de la Edad Media los árabes transmitieron, desde España, sus conocimientos matemáticos y de ellos proviene el término algoritmo, de la palabra algoritmus, que es traducción al latín del apellido del matemático árabe Mohammed al-Khowarizmi, quien vivió en el siglo IX. Al-Khowarizmi alcanzó gran reputación por el enunciado de sus reglas paso a paso para sumar, restar, multiplicar y dividir números decimales.

Así es que, en su sentido más antiguo y original, el término algoritmo (en realidad algorismo) hace referencia al “proceso de hacer cálculos aritméticos usando números arábigos”. Paulatinamente el significado de la palabra fue modificándose y se generalizó su uso para referenciar a “una manera de hacer cálculo” (algoritmo infinitesimal) o a “un proceso para hallar un determinado resultado” (algoritmo algebraico).

Los especialistas en computación tomaron el término algoritmo concretando su significado a: “un método preciso para resolver automáticamente un problema”.

En la enseñanza de las Matemáticas se presentan algoritmos, ya tradicionales, para realizar determinadas acciones operativas, por ejemplo, la secuencia de operaciones que nos permiten calcular la raíz cuadrada de un número.

Consideramos de interés resaltar la diferencia que existe entre los algoritmos clásicos usados en las Matemáticas, más precisamente en la aritmética, y estos otros algoritmos, los que construimos para programar.

Según Fernández Bravo (2006), *"El hacer matemático no está en la aplicación del algoritmo sino en los mecanismos intelectuales que nos han permitido llegar a él"*.

Es en la Algoritmia para la Programación donde se deben poner en funcionamiento estos mecanismos intelectuales. El ordenador sólo ejecuta las instrucciones (órdenes) que aparecen en el algoritmo pero, el programador que diseñó el algoritmo, ha aunado todos sus recursos de creatividad y capacidad de abstracción para lograrlo.

En nuestra disciplina el ejecutor del algoritmo deja de ser el hombre, para pasar a serlo el ordenador. Debido a esto, con la aparición de los ordenadores a partir del siglo XX, el término algoritmo cobró una nueva dimensión.

Cuando hablamos de Informática y en particular de programar, que es la parte de la disciplina que estamos investigando, surgen dos elementos bien precisos a tener en cuenta:

- el algoritmo que nuestros alumnos deben aprender a diseñar y que resuelve el problema planteado, la situación-problema.
- el aporte y restricciones que genera la presencia del ordenador, al momento de la ejecución del mismo. Esto se ve reflejado en determinadas exigencias de sintaxis y, en algunos lenguajes de programación, en declaraciones específicas necesarias para la buena ejecución del programa. Estas especificidades deben necesariamente figurar previo al inicio del algoritmo y hacen a la buena ejecución del mismo.

Intentamos que nuestros alumnos logren diseñar con éxito la secuencia de pasos que constituye un algoritmo en Programación.

Esta tarea no es nada mecánica, en ella están fuertemente involucradas, como acabamos de mencionar, las exigencias de resolver un problema junto con las propias de hacerlo usando un ordenador como herramienta ejecutora.

Desde la Programación, desarrollar un algoritmo implica seleccionar la secuencia ordenada de pasos que llevan, si son correctos, una vez que el algoritmo ha sido ejecutado por el ordenador, a la determinación del resultado del problema.

Recordemos que el algoritmo, para ser ejecutado por el ordenador, debe haber sido codificado en lenguaje de programación (el programa).

La secuencia de pasos que constituye el algoritmo es creada por el alumno (incipiente programador o programador en formación) y la logrará a partir de:

- el conocimiento de los conceptos involucrados en el problema, al decir de Polya (1972) "*tenemos un plan cuando sabemos, al menos grosso a modo, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita*",
- las exigencias propias de resolverlo usando un ordenador como herramienta ejecutora para la determinación de esa solución.

Siguiendo los lineamientos establecidos en el enfoque de investigación semiótico-antropológico, en la primera etapa de nuestro trabajo mostramos los resultados de un análisis semiótico aplicado a textos de la disciplina; a dos conceptos básicos: dato y variable.

Al igual que el vocablo algoritmo, las dos entidades fundamentales para la formalización de un algoritmo, dato y variable, ya conceptualizados por nosotros, Taiana & Otros (2005), son nociones primitivas y, muchas veces, de carácter intuitivo en su aplicación.

A continuación precisamos algunos detalles de los lineamientos del EOS que hemos utilizado para nuestro análisis.

Marco teórico de referencia

Asumimos una perspectiva antropológica, que interpreta a los objetos de la algoritmia como entidades compuestas (sistémicas) y relativas a un contexto particular, es decir a una institución y a un tiempo. La comprensión y el conocimiento no se conciben solamente en su dimensión mental, sino también, entre otras, en sus dimensiones personales e institucionales a las cuales nos referiremos, involucrando los sistemas de prácticas operativas y discursivas, es decir, lo que el sujeto hace y lo que el sujeto expresa, ante cierto tipo de tareas problemáticas. En su modelo teórico de la cognición matemática Díaz Godino establece seis dimensiones a tener en cuenta: el lenguaje, las definiciones, los argumentos, las proposiciones, las situaciones y los procedimientos.

Según Díaz Godino podemos considerar dos tipos de significados: los personales y los institucionales. Los significados personales incluyen el significado global, el declarado, el logrado, el final y el inicial, mientras que los significados institucionales están constituidos por los referenciales, los pretendidos, los implementados y los evaluados.

El análisis semiótico es entonces, la indagación sistemática de los significados puestos en juego en un proceso de enseñanza-aprendizaje (significados pretendidos-implementados), pudiendo coincidir o no con los significados personales del alumno. En la medida que se logre una adaptación entre ambos, habremos logrado lo que Godino define como Idoneidad Didáctica.

Asumiendo por Significados de referencia, dentro de los Significados Institucionales, a los libros de texto, nos preguntamos si los Significados Pretendidos, en pos de una Idoneidad Didáctica, son satisfechos por los Significados de Referencia.

Si bien el actual marco teórico de Díaz Godino permite, como mencionáramos anteriormente, analizar las configuraciones didácticas hasta en seis dimensiones, restringimos nuestro estudio del significado de los objetos o conceptos a un triplete epistémico constituido por *praxis*, *logo* y *lenguaje*. Estas tres componentes constitutivas de un objeto, a semejanza del triplete establecido por Vergnaud, son suficientes para el análisis, por las características de los objetos puestos en juego en este artículo, dado que no poseen una concepción excesivamente compleja.

- La praxis, incluye las situaciones-problema vinculadas al objeto y las acciones relacionadas.
- El logos está integrado por conceptos, proposiciones y argumentaciones.
- El lenguaje describe todas las posibles formas de representar al concepto, tales como expresiones, notaciones y representaciones.

Sin duda, el grado de completitud y complejidad de estas tres componentes dependen del momento, espacio y circunstancia en donde esté situado el proceso instruccional.

Hemos investigado estos dos objetos esenciales, dato y variable, recurriendo también a su epistemología e historia dentro de la Programación, desde sus primeros paradigmas hasta los actuales.

Hemos realizado análisis semiótico de textos de enseñanza de la Programación y de descripciones de experiencias áulicas específicas que nos permitieron corroborar la utilidad de nuestras investigaciones.

Como resultado del análisis, a continuación mencionamos algunas diferencias de los dos conceptos, desde la Programación y desde las Matemáticas, trabajamos sobre un ejemplo sencillo y presentamos en forma tabulada los resultados del análisis semiótico, describiendo los elementos constitutivos del triplete de cada uno de los dos objetos.

Significado de dato y de variable según los contextos

Los vocablos dato y variable son dos palabras de la vida real en general y en particular de las Matemáticas, de uso cotidiano.

Al preguntarles a alumnos novatos en Informática, qué significado tiene para ellos la palabra dato, algunos responden con concepciones surgidas del uso del vocablo en la vida cotidiana, (*"me dieron el dato de un buen restaurante", "los datos del tiempo son…", "un dato relevante de la encuesta es la gran cantidad de* *indecisos"….*) pero, estas mismas preguntas realizadas a alumnos de niveles escolares superiores, producen respuestas muy variadas. Algunos no responden, otros dan respuestas más próximas a las "esperadas" por nosotros. Otros logran una mayor precisión en su expresión.

Frente a un problema matemático el alumno emplea esos vocablos en forma intuitiva.

A continuación presentamos un problema sencillo que analizaremos desde ambas disciplinas.

Veamos el siguiente problema: *Hallar el área de un círculo conociendo el radio del mismo.*

- Desde la Geometría identificamos el área del círculo con la fórmula:

$$\text{Área} = \pi \, . \, \text{radio}^2$$

- Desde el Análisis Matemático la expresión:

$$\text{Área (radio)} = \pi \, . \, \text{radio}^2, \text{ con radio} > 0$$

representa la ley de una función cuya expresión clásica es: $f(x) = \pi \, . \, x^2$, su dominio son todos los números reales. En el contexto geométrico restringimos el dominio a los reales positivos. La función Área es una variable que llamamos *dependiente* de la variable *independiente* radio.

En Matemáticas no nos preocupa si el número con el que estamos operando es un número entero (real con parte decimal nula) o un número real con parte decimal no nula.

En Programación el tipo de dato con que trabajemos nos interesa pues la presencia del ordenador nos obliga en algunos lenguajes a declarar al comienzo, previo al inicio del algoritmo, el tipo de las distintas variables que usaremos durante la ejecución el programa.

Es así que trabajando con datos numéricos debemos diferenciar entre tipo de dato entero y tipo de dato real o lo que en Programación llamamos aritmética de punto fijo y aritmética de punto flotante. Esos valores quedan así almacenados en variables que se caracterizan por satisfacer las necesidades de capacidad de almacenamiento de estos números, según el tipo de dato que les corresponda almacenar a cada una de ellas.

Analicemos qué información nos brinda este sencillo enunciado de problema desde las Matemáticas.

- Datos intervinientes en el problema:

El único dato presente explícitamente en el problema es el radio.

Existe otro dato implícito en el enunciado del problema que proviene de la fórmula del área del círculo. Se trata del número π.

- Datos del problema vistos desde el algoritmo para la Programación que construiremos.

El radio es un dato cuyo valor será información de entrada y como π elegimos, por ejemplo, el valor aproximado constante 3.14.

Pero..., ¿significan algo más en nuestro algoritmo?

La respuesta es afirmativa, el dato radio deberá corresponderse con un lugar de memoria, donde será almacenado, que puede asumir distintos valores numéricos, (todos los posibles valores de los radios de los círculos a los que queramos calcularles el área), se trata, para nuestro algoritmo, de una variable.

El número π, en cambio, en el algoritmo representa una constante, más precisamente el valor aproximado y bien determinado que hayamos elegido para aproximarlo en la operación.

Si contextualizamos el concepto de Variable en Programación, nos preguntamos:

¿Se trata de nuestras conocidas variables usadas en las Matemáticas?

Se hace difícil, en Programación, distinguir entre los contenidos específicos: dato y variable pues a ambos, dentro del algoritmo, cuando se refieren a una misma medida del mundo físico se los nota con un mismo nombre que los identifica.

Sin embargo, el primero individualiza la representación de un elemento con que opera el procesador, mientras que el segundo identifica el espacio de memoria donde va a almacenarse el valor identificado con dicho nombre.

Las variables en Programación tienen una diferencia fundamental de significado con las variables de las Matemáticas. Ese significado es inherente a su rol en la propia Programación. El significado está vinculado con el soporte físico donde es almacenado su valor, identifica la dirección de la memoria donde el dato se almacena.

Si nos remontamos a la epistemología del término variable en Informática, éste tiene que ver, históricamente, con un cambio de paradigma en la Programación que, en pos de facilitar la construcción de algoritmos, buscando que su redacción estuviera más próxima al lenguaje humano, individualizó a las direcciones de los lugares de memoria donde se almacena la información, con los nombres identificadores de los valores que dichos lugares almacenan.

Volviendo al problema presentado, si tenemos que calcular el área del círculo:

$$\textbf{Area} = \pi \; \textbf{. radio}^2$$

Planteamos algunas preguntas:

- ¿Qué rol juega el radio en este problema matemático? El radio es un dato del problema, pero, ¿para qué se usan los datos de un problema en Matemáticas?, es la información necesaria para poder resolver el problema.
- ¿Qué es ese mismo radio en Programación? Es el dato de entrada necesario para el cálculo del área y esta última: Área, será la respuesta al problema.

Area es entonces el dato resultado de la operación.

- ¿Qué es el Área en este problema matemático? El Área es el resultado del problema.
- ¿Qué es esa misma Área en Programación? En Programación el Área también es el resultado buscado y por lo tanto es un dato de salida.

¡Radio y Área son datos en Programación!

Si pensamos nuevamente en el significado matemático de variable como:

$$\text{Área (radio)} = \pi \,.\, \text{radio}^2, \qquad \text{radio} > 0$$

El radio es la variable independiente y el Área la variable dependiente, para la función Área (radio).

¿Son Radio y Área variables en Programación?

Dado que ambos identifican dos direcciones de memoria que almacenan los respectivos valores podemos afirmar que, en Programación, se trata de dos variables.

En la Fig. 1 presentamos un trozo de algoritmo que realiza las acciones ejecutables necesarias para este sencillo cálculo:

Pi ← 3.14
Leer (**radio**)
Area ← **Pi** * **radio** * **radio**
Mostrar (‘ El área es: ‘, **Area**)

Figura 1: Cálculo del área a partir del radio

Dato y variable en Programación se representan con un mismo nombre, se opera con ellos de igual forma, pero uno está individualizando la notación de un elemento con que opera el procesador, mientras que el otro identifica la dirección de memoria donde va a almacenarse el valor representado por dicho nombre.

A continuación retomamos la idea del triplete de Godino-Batanero.

Elementos constitutivos de un concepto: logos, praxis y lenguaje

- *En el caso del dato:*

Logos: consideramos que un elemento constitutivo del logos del dato es su definición, elegimos una definición de uno de los textos analizados: “El dato es la expresión general que describe los objetos con los cuales opera un computador” Braunstein y Gioia (1995)

Praxis: nos referimos a cómo manipulamos con ellos.

- los leemos (datos de entrada): Leer (**radio**);
- los mostramos (datos de salida), Mostrar (**Area**);
- operamos con ellos: Pi * **radio** **2

Lenguaje: **radio**, **Area** son ejemplos de nombres o identificadores de cómo podemos representarlos.

- *En el caso de la variable:*

Logos: Al igual que para el dato el logos de la variable es su definición, mencionamos una: “La variable es una posición con nombre en memoria donde se almacena un valor de un cierto tipo de dato”, (Joyanes Aguilar & otros 2001)

Praxis:

- Le asignamos valores, por ejemplo: **Area ← Pi*** **radio****2,
- Las usamos para construir expresiones.

Lenguaje: Al igual que en el caso del dato se lo identifica con un nombre. Ese nombre, además de estar representando un valor está determinando la dirección del lugar de memoria donde se va a almacenar el valor (la variable).

Las Fig.2 y Fig.3, muestran tablas, donde presentamos los elementos detectados como componentes de los respectivos tripletes, Taiana y cols (2005)

El Dato

PRAXIS
- Los leemos (datos de entrada)
- los transformamos, operamos con ellos (datos intermedios o de trabajo)
- Los mostramos (datos de salida)

LOGOS
- Es la expresión general que describe los objetos con los cuales opera un computador.

LENGUAJE
- Representación interna (0111000000010000 ,…)
- **radio**, **Area**

Fig. 2 Algunos elementos de las componentes del triplete del concepto Dato en Programación

La Variable

PRAXIS
- Les asignamos valores internamente
- Lectura o ingreso de la variable.
- Construimos expresiones algebraicas y lógicas
-Suma, resta, división. Operadores según el tipo de variable.

LOGOS
- Es una posición con nombre en memoria donde se almacena un valor de un cierto tipo de dato
- Su tipo define al conjunto de valores que puede asumir.
- Es una notación del dato e indica la posición de memoria donde está guardado

LENGUAJE
- Nombre o identificador
- Ejemplos:

radio, **Area**

Fig. 3 Algunos elementos de las componentes del triplete del concepto Variable en Programación

Volviendo al tema de los errores, en este específico proceso instruccional, en el transcurrir de nuestros años de docencia, hemos detectado diversos tipos de errores.

Tipos de errores detectados en nuestros alumnos pero, ¡también en los textos!

En la mayoría de los casos, los errores detectados, más allá de la existencia de obstáculos ontogenéticos[1], se trata de obstáculos epistemológicos[2] y didácticos[3].

Damos algunos ejemplos de errores de estos dos últimos tipos:

- ausencia de definición precisa de dato y de variable, que conlleva a que los alumnos permanezcan con la idea de que lo que identificamos como un dato o como una variable en Informática tiene el mismo significado que para la Matemática tradicional.
- confundir el concepto de constante numérica con el concepto de dato, por ejemplo:

En nuestro problema el valor elegido de

Los alumnos consideran que en Programación 3.14 o π es un dato, cuando en realidad se trata de una constante numérica dentro del algoritmo.

No hemos encontrado dos libros de programación que definan dato o variable en igual forma, es más, la mayoría de ellos no definen dato y pocos definen variable.

Conclusiones y reflexiones finales

En Programación dato y variable son dos vocablos que tienen características particulares que los identifican y esas particularidades están íntimamente involucradas, como ya lo expresáramos con la presencia del ordenador.

Los autores de libros de Programación no reparan y por lo tanto no precisan las diferencias de significado que hemos mencionado y que hacen que uno y otro concepto sean únicos. Esto produce errores de interpretación en nuestros alumnos, que podrían caracterizarse como obstáculos didácticos y epistemológicos, pues estas diferencias intrínsecas de los vocablos en uno u otro contexto, no están resueltas por los propios autores. A esto se suma la ausencia del proceso histórico epistemológico de los distintos paradigmas de la Algoritmia para la Programación.

Como mencionamos en la introducción del trabajo, el análisis presentado forma parte de una etapa preliminar en nuestra investigación, brindando elementos para el análisis epistémico a priori que nos proponemos desarrollar. Es evidente la necesidad de transitar diferentes focos de investigación. Si las cuestiones epistémicas resultan esenciales para caracterizar el objeto de enseñanza, los aspectos cognitivos y didácticos deberán ser abordados para trabajar el diseño de trayectorias didácticas y analizar en qué medida las mismas pueden favorecer el

[1] Los referidos a los procesos de maduración y de las estructuras de conocimiento que posea y pueda desarrollar el alumno
[2] Los inherentes al conocimiento propio en estudio y que se apropian al igual que los conceptos correctos
[3] Los que introducen los maestros y que no derivan de propiedades del objeto de estudio

aprendizaje significativo y la negociación de significados, sin que esto vaya en desmedro de la veracidad de los mismos.

Cabe destacar, sin embargo, que no hemos presentado de manera extensiva la totalidad del análisis. No se han incluido, por razones de espacio, aspectos que son relevantes y fundamentales para completar la caracterización de los significados de los otros conceptos ya analizados, entre ellos, los elementos constitutivos de las estructuras de control de la Programación, Taiana y otras(2006).

Queremos resaltar la potencialidad del enfoque teórico-metodológico desarrollado por Godino-Batanero que nos permite reconocer y caracterizar los elementos de significado de los objetos de la Algoritmia para la Programación desde una perspectiva antropológica y semiótica. Dicho enfoque nos proporciona un lenguaje de referencia que posibilita la clarificación del campo de la Didáctica de la Algortitmia para la Programación orientándonos a futuras investigaciones y que favorece nuestro propio esclarecimiento del tema.

Continuamos nuestro trabajo con el análisis de cada uno de los contenidos esenciales de esta disciplina que convoca a todas las integrantes del grupo como docentes de la misma desde hace muchos años.

Bibliografía

- S. Braunstein, A. Gioia (1995): Introducción a la programación y a las estructuras de datos. Eudeba, Buenos Aires.
- G. Brousseau (1983): Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques recherches en didactique des mathémàtiques Vol 7 Nro. 2, pp 33-115.
- J.A. Fernandez Bravo (2006): “Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas” - Revista UNION nº 4).
- J. D. Godino, C. Batanero (1994): “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos” Recherches en Didactique des Mathématiques,14 (3): 325-355.
- J. D.Godino (2002): “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática” Recherches en Didactique des Mathématiques, 22 (2/3): 237-284.
- J. D. Godino (2003): “Teoría de las Funciones Semióticas”. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino.
- J. D. Godino, D. Bencomo, V. Font, M.R. Wilhemi (2006): Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de estudio de las Matemáticas. Paradigma XXVII (2) 221-252.
- L. Joyanes Aguilar, I. Zahonero Martinez (2001): Programacion en C, Metodologia, Algoritmos y estructuras de Datos McGraw-Hill Madrid.
- G. Polya (1972): Cómo plantear y resolver problemas Ed. Trillas. México.
- A.Taiana, A. Alarcón, G. Gagliano, R. Mainieri, M.A.Morelli (2005) GIDMyA “Conceptualización de elementos esenciales de la algoritmia en la programación” Memorias VCAREM Buenos Aires.

▪G. Vergnaud (1990): La thèorie des champs conceptuels. Recherches en Didactiques des Mathématiques. 10 (2-3).133-170.

- Aída Taiana, Licenciada en Matemática - Master en Didáctica de las Matemáticas, Directora GIDMyA (Grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas y la Algoritmia)

Proyectos de investigación del grupo dependientes del Rectorado UNR

- 2005/2007 - Fundamentos de la Didáctica de la Matemática en el Proceso de Enseñanza / Aprendizaje de la Algoritmia
- 2007 continua - Hacia una Didáctica Especifica para la Algoritmia en Programación Integrantes GIDMyA:

- Cristina Alarcón, Ingeniera - Especialista en Docencia Universitaria
- Gracia Gagliano, Ingeniera - Especialista en Docencia Universitaria
- Rosanna Mainieri, Ingeniera - Especialista en Docencia Universitaria
- María Alicia Morelli, Ingeniera.

Todas las autoras son integrantes del GIDMyA y de los Proyectos antes mencionados y Profesoras de Informática I del Departamento de Matemática de la Escuela de Formación Básica de la FCEIA-UNR

A. Taiana, A. Alarcón, G. Gagliano, M.A. Morelli (2006): “Los Procesos Instruccionales en la Algoritmia para la Programación: Entidades simples y mixtas resultantes del Análisis Ontosemiótico-Epistémico de un ejemplo sencillo”. CACIC2006 XII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación San Luis-Argentina

A. Taiana, A. Alarcón, G. Gagliano, R. Mainieri, M.A.Morelli (2006): “Un Análisis Ontosemiótico de las Estructuras de Control de Repetición en la Modelización del Conocimiento de la Algoritmia”, (8vo. SEM) Seminario de Educación Matemática CD: Registro ISBN-10: 987-20239-4-8; ISBN-13:978-987-20239-4-2.C. C. Borges. Buenos Aires- Argentina

A. Taiana, R. Katz, N. Sgreccia (2008): “Una secuencia didáctica para vincular la probabilidad experimental y la teórica” En: El aula de Matemática: conocimiento +entretenimiento Material didáctico para la escuela media 17-24
UNR Editora Colección académica ISBN 978-950-673-626-2

A. Taiana, R. Katz, N. Sgreccia (2008): “Presentación, análisis y fundamentación de una propuesta didáctica de matemática para distintos niveles de escolaridad”
En: El aula de Matemática: conocimiento +entretenimiento Material didáctico para la escuela media 81-90 UNR Editora Colec acad ISBN 978-950-673-626-2

A. Taiana, R. Katz, N. Sgreccia (2008): “Actividades que propician aprendizajes significativos desde la diversidad de registros”.
En: El aula de Matemática: conocimiento +entretenimiento Material didáctico para la escuela media 91-116 UNR Editora Colec. Acad. ISBN 978-950-673-626-2

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 25 - 35
ISSN: 1815-0640

La proporción áurea en el arte, para alumnos de Educación Media

Alejandra Cañibano

Resumen

Un número irracional, el Número de Oro, puesto en relación con distintos conceptos de la geometría resulta en un entramado propio de la matemática y de otras ciencias también presentes en la educación secundaria. Actividades de este tipo favorecen a la formación del estudiante, contribuyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje y aportan a la formación cultural de los educandos para este nivel educativo.

Abstract

An irrational number, the "Gold Number", related with different concepts of the geometry results in a lattice characteristic of mathematics and another sciences, also present in the secondary education. Activities of this type favor the student's formation, contribute in the teaching-learning process and contribute to the cultural formation of the students for this educational level.

Introducción

En la Educación Media, generalmente, las disciplinas curriculares se imparten en forma independiente sin relación unas con otras. Una interrelación entre dichos contenidos contribuiría a la formación del estudiante, lo estimularían en el proceso de enseñanza y aprendizaje y les otorgaría una formación cultural generalista.

Los conocimientos geométricos se imparten desde una temprana edad escolar; la geometría aparece en distintas épocas históricas acompañada de los conceptos de armonía, belleza, proporción. Los números irracionales es otro de los temas que se incluyen obligatoriamente a la hora de clasificar los conjuntos numéricos. Sucede que al tratar esta temática el trabajo se reduce únicamente a clasificarlos como tales.

Definiendo el número de oro

El número de oro, Φ (FI), también conocido como la proporción áurea se obtiene cuando se busca definir una proporción dividiendo un segmento en dos partes. Es un número que comparte el grupo de los números metálicos y esta relacionado al denominado rectángulo de oro.

El valor numérico de Φ es de 1,618... , Φ es un número irracional.

Su definición es la siguiente: "Dos números A y B están en la proporción de oro si (A + B) es a A lo mismo que A es a B".

En símbolos: $\frac{(A+B)}{A}=\frac{A}{B}$

$B\cdot(A+B)=A^2$; $BA+B^2=A^2$; $A^2-AB-B^2=0$

Resolviendo para A: $A=\frac{B\pm\sqrt{B^2+4B^2}}{2}=\frac{B\pm\sqrt{5B^2}}{2}=\frac{B(1\pm\sqrt{5})}{2}$

Luego la solución positiva de la ecuación resulta en la proporción $\frac{A}{B}=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}=1{,}618033989$ dando por resultado el número Φ.

Una propiedad que posee este número es la siguiente: $\Phi - 1=\frac{1}{\Phi}=0{,}618033989$

El rectángulo áureo es un rectángulo cuyos lados están en una proporción igual a la razón o proporción de oro. Esto significa que dado un rectángulo de dimensiones L el lado mayor y W el lado menor, el cociente $\frac{L}{W}=\Phi$.

Una mirada hacia la historia y el arte

En las matemáticas pitagóricas y después medievales y renacentistas, determinadas constantes entre números y formas supieron erigirse en modelos de armonía y en cánones de belleza. En diversas épocas de la historia y revisando la bibliografía se encuentra que muchos edificios fueron construidos teniendo en cuenta la proporción áurea. Desde la época de los egipcios a la época de los romanos son las tres construcciones que se tratarán en este trabajo: la Pirámide de Keops, el Partenón Griego y la Tumba Rupestre de Mira.

Pirámide de Keops

La historia cuenta que desde su llegada al trono, hace más de 4500 años (año 2580 a. C.), *el faraón* Keops ordenó la construcción de una gigantesca pirámide que sería su tumba y que duraría para toda la eternidad. El lugar elegido fue la meseta de Gizeh, un sitio cercano al río Nilo, para que los bloques de piedra pudieran ser transportados en balsas.

El faraón llamó a su pirámide Aket Keops que significa el “Horizonte de Keops”, ya que esperaba ascender todos los días, como el Sol, desde su horizonte propio que era la Gran Pirámide.

Según las teorías arqueológicas, para construir esta obra maestra de la arquitectura egipcia, se tardaron unos 20 años y trabajaron más de cien mil hombres que no eran esclavos, sino obreros remunerados. En la construcción de la vía para transportar los enormes bloques de piedra calcárea desde la cantera, se tardaron más de diez años.

Se esculpen en las tumbas de los faraones un conjunto de fórmulas denominadas los Textos de las Pirámides destinadas a facilitar al difunto la ascensión.

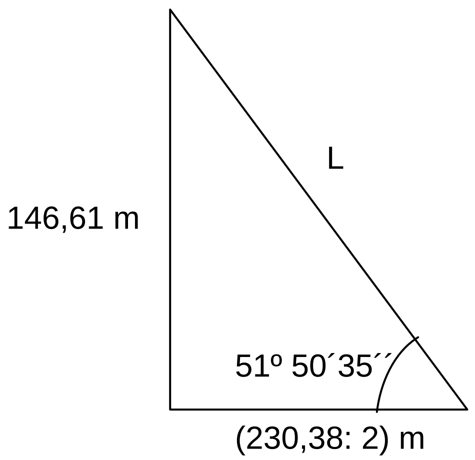
Matemáticamente el cociente entre la altura de alguno de los triángulos que forman la pirámide y el lado es 2Φ. Por su altura cercana a los 150 metros, y su base de más de cinco hectáreas, no es comparable a ningún edificio levantado por manos humanas.

Entre los datos que se detallan puede obtenerse el resultado indicado

Altura total inicial = 146,61 m Altura presente real = 136,86 m

Base 230,38 m × 230,38 m = 53.074,94 m^2 Ángulo: 51º 50' 35".

Haciendo los cálculos correspondientes se tiene:



$$L = \sqrt{(146{,}61)^2 + (230{,}38 \div 2)^2} = 186{,}45\mathrm{m}$$

$$\frac{186{,}45}{146{,}61} = 1{,}2717414$$

$$\frac{1{,}2717414}{2} = 0{,}6358706$$

Este resulta en un valor aproximado a 0,618033989, valor que surge de la propiedad de la que goza el número de oro respecto a su valor inverso.

El Partenón griego

El edificio más emblemático es El Partenón, construido entre el 447-438, y cuya obra escultórica se prolongó hasta el 432. En esta obra se contemplan las ideas estéticas del momento: los polos del pensamiento artístico, lo absoluto y lo relativo, en pos de lograr un extraordinario equilibrio.

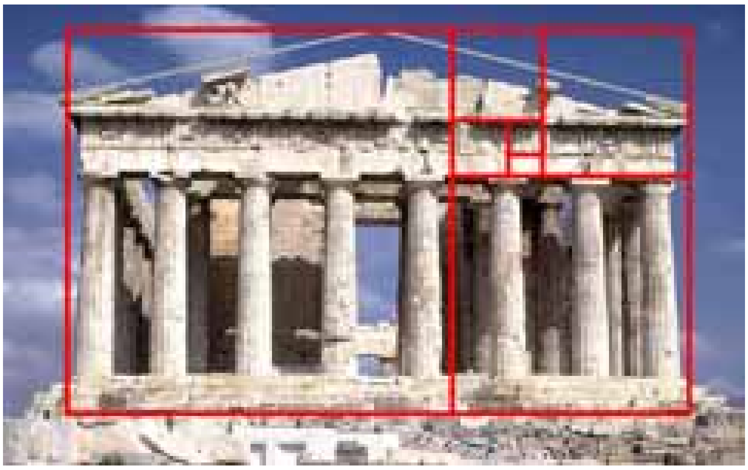
Su nombre en griego procede de párthenos que significa virgen, y hace referencia a Atenea Partenos, la diosa protectora de Atenas. Creado bajo la dirección de Fidias en 447-438 a.C. en el periodo de Pericles, su principal arquitecto fue Menesicles. Los griegos buscaban la belleza y la forma perfecta para expresarla y esto lo encontraban dando un realismo perfecto a sus esculturas.

El Partenón es un templo dórico períptero octóstilo lo que quiere decir que tiene ocho columnas en las dos fachadas más cortas y 17 columnas en las laterales.

Pitágoras afincado en el sur de la península itálica, estableció un sistema de proporciones que unía la arquitectura con las matemáticas, fijando los principios que debía tener un templo, basándose en valores numéricos, para determinar su simetría. En la práctica, estableció las dimensiones de los templos de acuerdo con el principio del "doble más uno"; es decir, que si una fachada tenía 4 columnas de ancho, debía tener 9 de largo. Esa norma caracterizó las dimensiones del Partenón de Atenas con 8 columnas de ancho por 17 columnas laterales.

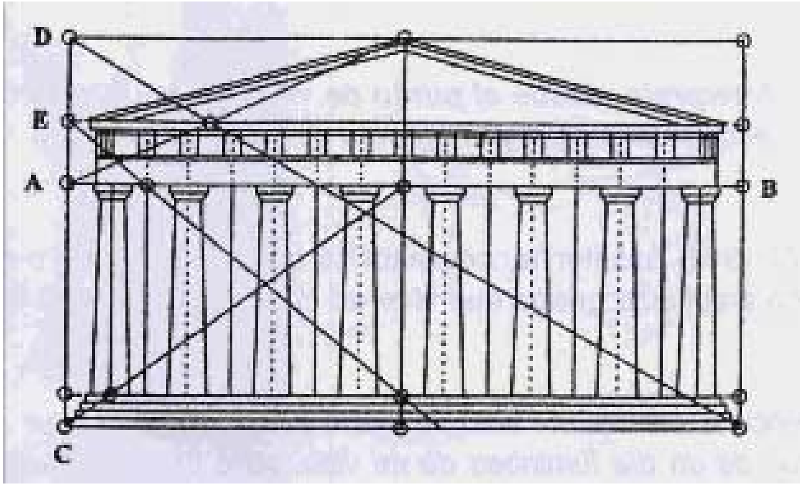
Su base mide 70 metros de largo por 31 metros de ancho y todo él está construido de mármol del monte Pentélico. No hay ninguna columna de igual altura, no hay líneas rectas, se hizo así para corregir la perfecta visión de la fachada.

La aplicabilidad de este rectángulo áureo fue utilizada antiguamente en arquitectura en el Partenón griego.



Partenón griego

http://www.elhistoriador.es/imagenes/numero%20partenon.jpg



En la figura se puede comprobar que $\frac{AB}{CD} = \Phi$. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: $\frac{AC}{AD} = \Phi$ y $\frac{CD}{CA} = \Phi$.

Entonces teniendo en cuenta las siguientes dimensiones:

Largo: 69 metros

Ancho: 30 metros (AB)

Altura: 18 metros (CD)

Por cálculos auxiliares se determina que las longitudes AC y AD son respectivamente 11metros y 6 metros aproximadamente.

$$AC + AD = 18\,\mathrm{m} = CD$$

$$\frac{AC}{AD} = \Phi = 1{,}6180339... \quad \therefore \quad \frac{18 - AD}{AD} = 1{,}6180339 \quad \Rightarrow 18 = (1{,}6180339 + 1)AD$$

$AD \cong 6{,}87\,\mathrm{m}$ y por lo tanto $AC \cong 11{,}13\mathrm{m}$

Ahora para probar las proporciones:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{30}{18} = 1{,}6666667... \qquad \frac{AC}{AD} = \frac{11{,}13}{6{,}87} = 1{,}6200873... \qquad \frac{CD}{CA} = \frac{18}{11{,}13} = 1{,}6172507...$$

resultando aproximaciones muy buenas al número áureo.

Tumba rupestre de Mira

Este monumento está citado en la mayoría de los trabajos matemáticos que tratan sobre la proporción áurea pero normalmente no se brindan detalles acerca de la época histórica, arquitectónica, social en la que fue construido.

Aunque algunos eruditos comparan a Myra (o Mira) con una ciudad Mira en Arzawa pero no hay prueba para eso.

Se sabe que actualmente es la ciudad de Demre, ahora una pequeña ciudad en Licia, Turquía. Está situada entre el río Myros, en el llano aluvial fértil entre el Alaca Dag, la gama de Massikytos y el Mar Egeo.

La actual ciudad turca de Demre se levanta sobre el emplazamiento de la antigua Myra, una de las poblaciones con más peso en la confederación licia, que existía al menos desde el siglo V a C.

Alcanzó gran fama, en la época bizantina, gracias a San Nicolás, nacido en la vecina ciudad de Patara que tras viajar por Palestina, regresó a Licia para ocupar la sede del obispado de Myra a principios del IV d. C. convirtiéndose a su muerte en una ciudad meta de peregrinación para toda gente de Europa y en el centro económico-político de Licia. Hoy se puede visitar en Demre la iglesia paleocristiana de San Nicolás, fundada en el IV, donde fue enterrado el obispo cuya legendaria vida inspiró en la imaginación popular el personaje de San Nicolás, (Papa Noel, Santa Claus de las navidades).

Graderío del teatro romano, con necrópolis rupestre licia en el monte del fondo.

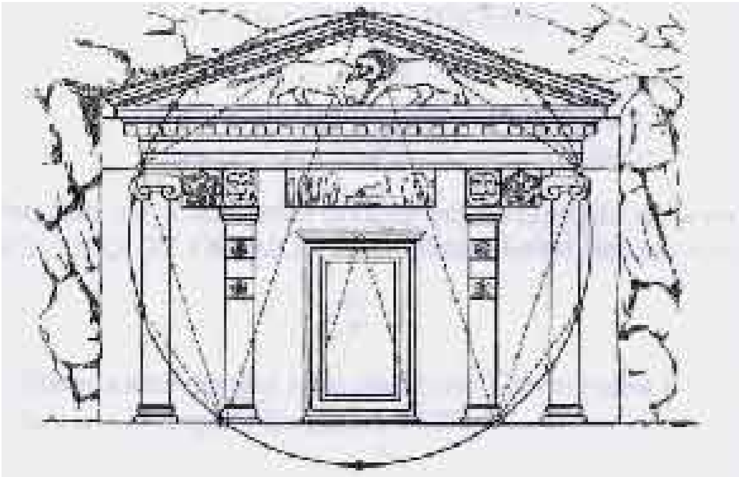
http://www.fotoaleph.com/Colecciones/TurquiaRupestre/TurquiaRupestre-foto32.html

La necrópolis rupestre licia, que normalmente es citada como la Tumba Rupestre de Mira, trepa por el escarpado monte que sirve de telón de fondo al teatro, y data del siglo V a. C. Una vez más, las tumbas esculpidas en la roca retoman en piedra una tipología arquitectónica que en su origen era de madera. Reproducen frontispicios de templos y viviendas. Alguna de las sepulturas, sin dejar de ser monolíticas y formar una unidad con la roca de la montaña, se asemejan a un sarcófago licio exento, es decir como monolitos independientes. Muchas de ellas están además decoradas con relieves de hombres o animales. Despunta una tumba sobre cuya arruinada cámara corre un friso con relieves de escenas protagonizadas por figuras humanas esculpidas con un extraordinario refinamiento y sentido de la proporción. Muestran episodios de la vida de un guerrero, que sería el difunto, a quien se le representa recostado asistiendo a un banquete funerario.

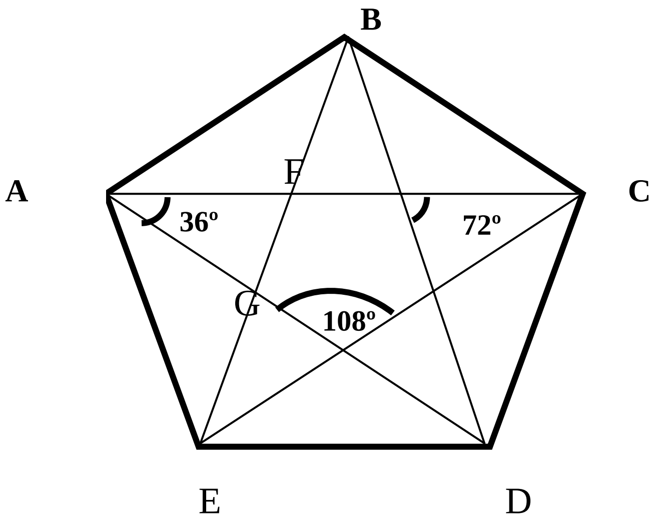
Tumba Rupestre de Mira.

http://www.fotoaleph.com/Colecciones/TurquiaRupestre/TurquiaRupestre-index3.html

El cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número de oro y en un pentágono regular está basada la construcción de la Tumba Rupestre de Mira en Asia Menor. Dicho de otra manera basa su construcción en un pentágono áureo, en el que el cociente de la diagonal y el lado de dicho pentágono es el número áureo.

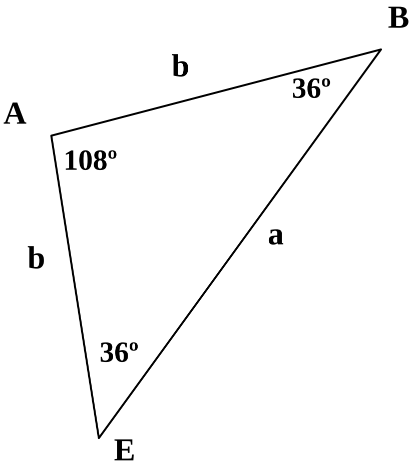


Como en la investigación no se han conseguido las dimensiones de este edificio bien vale la demostración matemática como fundamento de su construcción. Para ello se considera un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales. En esta figura sólo aparecen tres ángulos diferentes. Miden 36º, 72º y 108º. La relación entre estos ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36.



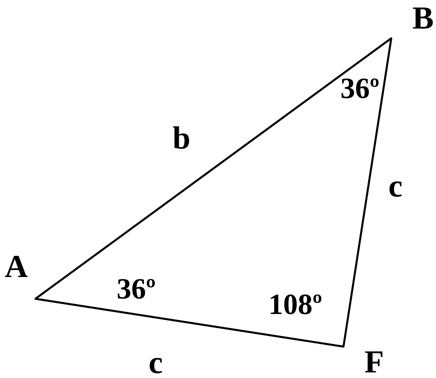
Hay varios tipos diferentes de triángulos isósceles, de los cuales se seleccionan tres: los triángulos $A\hat{B}E$, $A\hat{B}F$ y $A\hat{F}G$. El resto de triángulos son semejantes a alguno de estos y no aportan información adicional. Finalmente, hay cuatro segmentos diferentes en estos triángulos, denominados: BE = a, AB = AE = b, AF = BF = AG = c y GF = d. Las longitudes de estos segmentos cumplen: a>b>c>d.

Considerando cada uno de estos triángulos por separado y aplicando el Teorema del Seno.



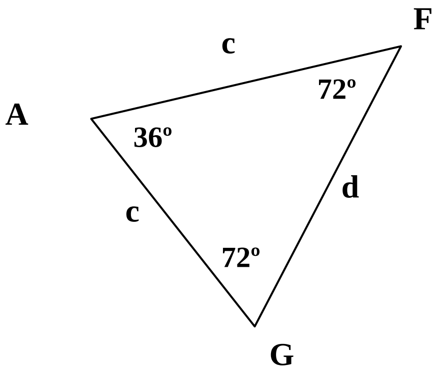
Triángulo $A\hat{B}E$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}108^\circ}=\frac{b}{\operatorname{sen}36^\circ}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\operatorname{sen}108^\circ}{\operatorname{sen}36^\circ}$$



Triángulo $A\hat{B}F$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}108^\circ}=\frac{c}{\operatorname{sen}36^\circ}\rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\operatorname{sen}108^\circ}{\operatorname{sen}36^\circ}$$



Triángulo $A\hat{F}G$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}72^\circ}=\frac{d}{\operatorname{sen}36^\circ}\rightarrow\frac{c}{d}=\frac{\operatorname{sen}72^\circ}{\operatorname{sen}36^\circ}=\frac{\operatorname{sen}108^\circ}{\operatorname{sen}36^\circ}$$

Como 72º =180º-108º, se verifica que sen72º = sen108º.

En consecuencia se pueden establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{\text{sen }108°}{\text{sen }36°}=1{,}618033988....$$

Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una de ellas y la siguiente es constante e igual a nuestro número de oro.

Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que $c=a-b$ y haciendo b = 1:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\rightarrow\frac{a}{1}=\frac{1}{a-1}\rightarrow a^2-a-1=0\rightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

Es decir, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea.

Como consecuencia, se verifica $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\text{sen }108°}{\text{sen }36°}$.

Conclusiones

Aprender investigando, Compiano y Giarrizo (1995) sostienen que la investigación enfrenta al alumno con nuevas situaciones, aumentando su acción y comprensión, al mismo tiempo que estimula el desarrollo de personalidades más creativas y con mayor dosis de autoconfianza. Esto entusiasma a los alumnos y los motiva, apasionándolos por justificar su verdad científica.

Si se parte de que la realidad es una sola y se la segmenta para poder comprenderla y abarcarla mejor, se debe pensar que el alumno deberá reorganizar sus conocimientos, no en función de las áreas en que las instituciones lo clasifican, generalmente vinculadas directamente con la currícula y la formación personal, para poder utilizarlos incidiendo sobre una realidad única. A la vez, la fragmentación de los conocimientos obstaculiza la capacidad de comprender fenómenos complejos (Anderè et al., 2003). La síntesis de conocimientos es probablemente una de las carencias más importante en la actual formación escolar, tanto a nivel de las actividades de enseñanza-aprendizaje como en las evaluaciones y ésta es probablemente una de las causas de fracaso más común entre alumnos con potencialidades destacadas. En el nivel medio se enseña matemática pretendiendo que el alumno domine las operaciones abstractas, poco se hace por enseñar matemática aplicada a la vida diaria y al conocimiento.

Bibliografía

- C. Anderè, A.E. Felipe, T. Domínguez (2003): La investigación dirigida por los alumnos como estrategia para el trabajo interdisciplinar en Ciencias Veterinarias. Revista Iberoamericana de Educación (Organización de Estados Iberoamericanos). Experiencias e Innovaciones
- B. Compiano, A. Giarrizzo (1995): Investiguemos para aprender. Una estrategia no convencional en matemática. Serie Temas y Problemas, Cuaderno Nº 2. A-Z Editora, Buenos Aires, Argentina.
- J. Glancey (2001): Historia de la Arquitectura. Editorial La Isla
- G. Davis, J. Fortey, C. Kondeatis (2000): Historia Mundial Ilustrada. Editorial Konemann.
- B. Lugan B (2003): Los Egipcios. De los Orígenes hasta Nuestros Días. Editorial Ariel. Colección Pueblos
- J. Rey Pastor, J. Babini (2000): Historia de la Matemática 1. Editorial Gedisa S.A.
- J. Sellier (2002): Atlas de los Pueblos del Asia Meridional y Oriental. Editorial Paidos. Colección Orígenes.
- H. Stierlin (2001): Grecia de Micenas al Partenón. Editorial Taschen.
- H. Stierlin (1999): Turquía. Editorial Taschen.
- D. Ware, B. Beatty (1998): Diccionario Manual Ilustrado de Arquitectura. Editorial Riverside Agency.
- D. Wildung (2001): Egipto. De la Prehistoria a los Romanos. Editorial Taschen.

Alejandra Cañibano, nació en Azul (Argentina) el 13 de julio de 1963. Es Agrimensora y posee una maestría en Metodología de la Investigación Biológica Aplicada a las Ciencias Agropecuarias. Es docente de matemática en distintos niveles educativos. Ha escrito diversos trabajos con la finalidad de mostrar las bondades de la matemática aplicada. acanibano@speedy.com.ar

Junio de 2008, Número 14, páginas 37 - 48
ISSN: 1815-0640

Resolução de desigualdades com uma incógnita: uma análise de erros

Tânia M. M. Campos y Vera Helena Giusti de Souza

Resumen

Pedimos, a um grupo de ingressantes de um curso de Matemática-Licenciatura, que resolvessem algumas desigualdades algébricas, deixando registrados os passos da resolução. Analisamos as respostas, buscando identificar se dominavam aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, conforme Fischbein (1993). Nenhum deles mostrou conhecer os aspectos formais; mais de 50% não dominava os aspectos algorítmicos e usava apenas os intuitivos. Entendemos que uma abordagem funcional gráfica, portanto não estritamente algébrica, pode auxiliar a aprendizagem da resolução algébrica de desigualdades.

Abstract

We asked a group of sophomore students, from a course for future Mathematics teachers, to solve some algebraic inequalities with one real unknown, leaving behind the steps of their resolutions. In their answers we tried identifying formal, intuitive and algorithmic aspects as recommends Fischbein (1993). None seems knowing formal aspects; more than 50% don't master algorithmic aspects as well and uses just intuitive ones. We understand that a functional graphic approach, then not strictly algebraic, can help inequalities algebraic resolution learning process.

Introdução

Muitas pesquisas e experiências mostram que estudantes em geral não sabem resolver desigualdades com uma incógnita real. Usam técnicas algébricas próprias para resolver equações (TSAMIR; BAZZINI, 2003; KIERAN, 2004) ou usam regras sem significado (LINCHEVSKI; SFARD, 1991). De qualquer forma, a literatura indica dificuldade nessa aprendizagem (BAZZINI; TSAMIR, 2003; DE SOUZA; CAMPOS, 2005).

Ao trabalhar com uma turma de 21 alunos do primeiro ano de um Curso de Matemática para futuros professores, percebemos que os mesmos tinham dificuldades em resolver desigualdades. Assim, elaboramos e aplicamos um instrumento diagnóstico com seis desigualdades, solicitando que ao resolverem as inequações deixassem os passos da resolução.

Para análise dos protocolos, inspiramo-nos nas argumentações de Fischbein (1993) de que numa atividade matemática estão presentes aspectos formais, algorítmicos e intuitivos e que é preciso interagir e inter-relacionar estes aspectos para que a aprendizagem ocorra. Assim, tentamos identificar tais aspectos nas resoluções constantes nos protocolos.

Vale a pena destacar que nossa principal motivação era ter um diagnóstico dos conhecimentos prévios destes alunos, visando uma posterior elaboração e aplicação de uma seqüência didática para discutir uma abordagem funcional gráfica para o ensino de desigualdades com uma incógnita, como uma alternativa para a abordagem estritamente algébrica.

Os aspectos de Fischbein

Concordamos com Fischbein (1993) que precisamos apresentar a Matemática, aos alunos, como uma atividade inventada por seres humanos, como um processo criativo, que tem momentos de iluminação, de hesitação, de aceitação e de refutação. No nosso entender, a Matemática precisa ser mostrada, não só como um encadeamento lógico de definições, axiomas, proposições e teoremas, mas principalmente como um processo de tentativas, erros, correções, refinamentos, com espaço para produzir conjecturas, elaborar justificativas e avaliar formalmente e intuitivamente uma afirmação.

A partir dessa premissa, Fischbein faz uma argumentação, com exemplos históricos e de aplicação, para expor a teoria de que na análise de uma atividade matemática, devemos considerar três aspectos básicos: o formal, o algorítmico e o intuitivo.

O *aspecto formal* diz respeito a axiomas, definições, teoremas e demonstrações. As componentes formais precisam estar bem entendidas e ativas, para que seja desenvolvido um processo de raciocínio. Elas precisam ser inventadas ou aprendidas, organizadas, confrontadas e ativamente usadas pelo sujeito: entender o significado do rigor; desenvolver o sentimento de coerência e consistência; caprichar no pensamento encadeado, na presença ou não de restrições. Acreditamos que as componentes formais fazem parte natural das potencialidades de todo ser humano, mas precisam ser lapidadas, por meio de um processo educacional adequado.

O *aspecto algorítmico* é o que está ligado às técnicas de resolução e às estratégias do tipo padrão.

É ilusório pensar que o conhecimento dos aspectos formais é suficiente para que um sujeito saiba aplicá-los à resolução de um problema. A recíproca também é verdadeira, pois um sujeito que só conhece os aspectos algorítmicos será, após algum tempo ou até mesmo imediatamente, incapaz de aplicar o algoritmo em uma situação não usual. Precisamos desenvolver tanto as habilidades como o entendimento dos porquês e isto só é possível se aplicarmos intensivamente os algoritmos aprendidos, sempre baseados nos aspectos formais.

Citamos um exemplo, ligado às equações, vivenciado por nós. Para resolver $(x-1)^2 = -1$, vários alunos não conseguem ver, de início, que não existe solução em IR. Desenvolvem o binômio, de forma "decorada", erram e conseguem alguma solução. E não voltam à equação original, para ver que esta não pode ser verdadeira.

Podemos citar ainda Tsamir e Bazzini (2001) que mostram que 46% dos alunos pesquisados (15-16 anos) não aceitam que x=0 seja solução da inequação $5x^4 \leq 0$, evidenciando uma não inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos. Bastaria uma análise da estrutura da inequação para determinar as soluções.

O *aspecto intuitivo* pode ser caracterizado por uma cognição intuitiva, um entendimento intuitivo ou uma solução intuitiva. Diz respeito à aceitação direta de uma noção, de um teorema ou de uma solução, sem necessidade de qualquer demonstração. No caso das inequações, quando os alunos "multiplicam em cruz" para deixar a incógnita no numerador, por exemplo, estão deixando que o aspecto intuitivo se sobreponha aos aspectos formais e algorítmicos: é preciso "isolar" a incógnita, para chegar à solução.

Às vezes, as componentes formais, intuitivas e algorítmicas interagem, mas usualmente, no processo de aprendizagem ou no entendimento e na resolução de um problema, interações conflitantes podem aparecer: um esquema de solução é aplicado inadequadamente, em detrimento de restrições formais; um esquema de resolução é aplicado erroneamente, apesar de um entendimento intuitivo e potencialmente correto. Mas usualmente, segundo Fischbein, é a interpretação intuitiva, baseada numa experiência individual primitiva e limitada, porém fortemente enraizada, que anula o controle formal ou os pressupostos da resolução algorítmica e assim distorce ou mesmo bloqueia a reação matemática correta. Conseqüentemente, as intuições podem trazer dificuldades para a aprendizagem.

O pesquisador conclui a argumentação, afirmando que as interações e os conflitos entre as componentes formais, algorítmicas e intuitivas de uma atividade matemática são muito complexos e precisam ser identificados e entendidos.

O grupo de estudantes

Os sujeitos eram alunos de licenciatura em Matemática e não estavam ainda envolvidos com salas de aula e com livros didáticos.

O perfil dos sujeitos: (1) a média de idade é 25 anos, com dois alunos de 45 anos. Não contando estes dois, a média cai para 22,8 anos. Estamos, portanto, trabalhando com um grupo de alunos mais velhos do que o esperado no primeiro ano do Ensino Superior (18-19 anos); (2) pelo menos 17 deles cursaram o Ensino Básico (11-18 anos) na cidade de São Paulo; (3) 17 fizeram Ensino Fundamental

(11-14 anos) em escola pública; dois, em escola particular; e um passou da escola pública para a particular na 5a série (11 anos); (4) 17 alunos fizeram Ensino Médio (15-18 anos) em escola pública e 3, em particular. (5) 8 alunos não utilizaram livro didático; 6, só de 5a a 8a séries; e 6, sempre utilizaram. Como 14 dos 20 alunos não utilizou livro didático no Ensino Médio (15-18 anos), onde a abordagem funcional das inequações deveria ocorrer, consideramos que o conhecimento que tinham deste assunto não estava influenciado pelo uso de um livro didático; (6) 17 alunos fizeram cursinho pré-vestibular (18-20 anos) e 3 não. Particularmente, acreditamos que as abordagens adotadas nestes cursinhos não são as mais indicadas para uma aprendizagem efetiva, porque são, em geral, calcadas nos procedimentos algébricos.

A questão aplicada

Resolva as inequações abaixo, explicitando qual é a incógnita. Deixe os passos de sua resolução.

(a) $-3x < 6$ (b) $\frac{t}{-2} > 4$ (c) $|v| < 3$

(d) $y^2 \leq 25$ (e) $\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$ (f) $10 > 5x$

Objetivo da questão

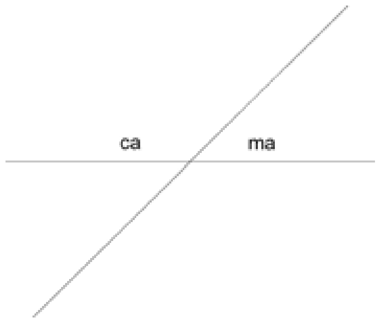
Identificar os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos, segundo Fischbein (1993), presentes na resolução de desigualdades algébricas com uma incógnita real.

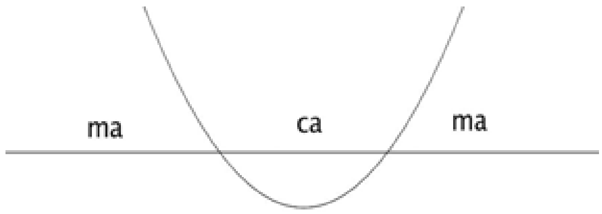
Análise didática

Este trabalho foi realizado depois que os alunos já haviam estudado funções e gráficos na disciplina Cálculo 1, usualmente do primeiro ano de cursos da área de Ciências Exatas. Esperávamos que já houvessem trabalhado tanto o tratamento dos registros gráfico e algébrico como as conversões entre esses registros, pelo menos do registro algébrico para o gráfico (Duval, 2000), no caso do objeto função. Apesar disto, percebemos que os alunos demonstravam dificuldades para entender uma abordagem funcional gráfica para a resolução de desigualdades com uma incógnita.

Professores de Matemática do Ensino Básico (11-18 anos), com os quais temos tido contato e livros didáticos de Matemática que já analisamos trabalham o assunto inequação com ênfase em procedimentos e ainda em casos separados, associando-os ao “Estudo do sinal da função”: primeiro esgotando o assunto para as desigualdades polinomiais de primeira ordem, depois para as polinomiais de segunda ordem e finalmente trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Os procedimentos, nos dois primeiros casos, são enfatizados por esquemas do tipo





onde *ca* significa “sinal contrário de *a*”, *ma*, “mesmo sinal de *a*” e *a* é o coeficiente do termo de maior grau. Para as desigualdades envolvendo produto ou quociente, o esquema utilizado é o conhecido como “varal”.

De qualquer forma, apesar de aparecerem as palavras função, gráfico de função e, em alguns livros, resolução funcional, parece-nos que a abordagem usualmente adotada causa dificuldades para o entendimento até do que seja uma resolução algébrica de desigualdades.

A questão foi resolvida individualmente pelos alunos, sem a interferência do professor. Não havia pressão de tempo, de nota e nem mesmo de “certo ou errado”. Os estudantes sabiam que queríamos saber o conhecimento prévio deles, para desenvolver, posteriormente, situações de ensino e de aprendizagem sobre a resolução funcional gráfica de desigualdades com uma incógnita.

A questão foi constituída de seis desigualdades com uma incógnita real e pedido que deixassem, nos protocolos, os passos da resolução. Queríamos identificar aspectos formais, intuitivos e algorítmicos presentes em cada resolução dada.

Com os itens (a) e (b), pretendíamos verificar se os estudantes realmente multiplicam uma desigualdade por um valor negativo sem inverter o sinal de desigualdade: aspecto intuitivo, provavelmente ligado aos procedimentos para resolução de equações.

Com o item (e), se os alunos praticam o que muitos deles chamam de “multiplicar em cruz”, quando a incógnita está no denominador e querem colocá-la no numerador: sabem o aspecto formal, mas não sabem aplicá-lo (aspecto algorítmico) ou aplicam as técnicas de resolução de equações (aspecto intuitivo).

Com o item (d), se os estudantes simplesmente "extraem a raiz quadrada" dos dois membros da desigualdade e não sabem que $\sqrt{x^2} = |x|$ ou que $\sqrt{25} = 5$ ou não sabem lidar com isto: aspecto intuitivo, provavelmente também ligado à resolução de equações e falta do aspecto formal na resolução do módulo ou da raiz quadrada.

Com o item (c), se os alunos mostram conhecimento da função módulo, quando esta aparece explicitamente (aspecto formal).

Com o item (f), se os estudantes dominam essencialmente os aspectos algorítmicos e não se atrapalham com o fato da incógnita estar à direita.

Esperávamos algumas categorias de erros, a saber: assumir que os valores da incógnita são positivos; multiplicar a sentença por um número negativo sem inverter o sinal de desigualdade; cometer algum erro aritmético.

Na primeira, está caracterizado o erro quando é necessário multiplicar a inequação pela incógnita e o sinal desta não é analisado.

Na segunda categoria, encontram-se os erros relativos à multiplicação da sentença por um número negativo. Quando uma inequação é multiplicada por um escalar negativo, o sinal da mesma deveria ser invertido, entretanto isso não aparece.

A terceira é formada por todos os erros relativos às operações aritméticas: divisão, multiplicação e operação inversa.

Análise dos protocolos

Foram analisados os protocolos dos 21 alunos e procurou-se identificar os aspectos envolvidos nas resoluções.

Como já justificamos na análise didática, classificamos diversas categorias de erros: assumir que os valores da incógnita são positivos; multiplicar a sentença por número negativo sem inversão do sinal de desigualdade; cometer erro aritmético.

Na inequação (a) $-3x < 6$ apenas 2 alunos não souberam responder, sendo que um deles não respondeu nenhum item. Os erros mais comuns foram: multiplicar a inequação por (-1) em apenas um membro, mas alterando o sinal da desigualdade (19%); multiplicar a inequação por um fator negativo sem alterar o sinal de desigualdade (42,9%). Para exemplificar, transcrevemos duas resoluções.

(1) $-3x < 6$

$x > \frac{6}{3}$ → a multiplicação por (-1) não é explicitada.

x>2

(2) $-3x < 6$

$x < \frac{6}{-3}$ → Não inverteu o sinal de desigualdade.

x<-2

O erro foi não inverter o sinal de desigualdade quando esta foi multiplicada por (-1). Apenas 38,1% dos alunos acertaram esta questão.

Um item semelhante a este foi o item (f), cuja inequação é $10 > 5x$.

O índice de acertos nesta questão é praticamente o dobro do do item (a), alcançando 71,4% dos alunos. Os erros que ocorreram foram os devidos ao posicionamento da letra x e erros aritméticos. Uma solução que vale a pena transcrever é

$10 > 5x$

$-x > 5 - 10$

$-x > -5$

Nesta solução, fica evidente que as passagens referentes às operações inversas não estão claras para o aluno.

A única solução cujo erro está na posição da incógnita é:

$10 > 5x$

$\frac{10}{5} > x$

$x > 2$

Ao ler a resposta, o aluno parece ter confundido o símbolo de desigualdade. Talvez a prática corrente em trabalhar com a incógnita somente do lado esquerdo do símbolo de comparação e os processos mecânicos de resolução contribuam para este tipo de erro.

Apenas três alunos não responderam e um deles parece ter esquecido, pois é o único item sem resposta.

O item em que os alunos cometeram mais erros foi o (b), da inequação $\frac{t}{-2} > 4$, em que o número negativo está no denominador. 66,7% dos alunos não trocou o sinal de desigualdade quando realizaram a multiplicação, mas todos apresentaram uma solução.

$$\frac{t}{-2} > 4$$

$$t > 4(-2)$$

$$t > -8$$

Apenas 19% dos alunos acertou este item.

A análise da inequação (e) pode ser exemplificada pela seguinte solução.

$$\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$$

$$\frac{10}{2u} < \frac{5u}{2u}$$

$$5u > 10$$

$$\frac{5u}{5} > \frac{10}{5}$$

$$u > 2$$

Os alunos não se preocuparam em avaliar o sinal de u e parte da solução fica perdida, neste caso u<0.

Muitos alunos deixaram de responder o item (c). Dos 9 que responderam, 7 apresentaram solução correta. As soluções incorretas que apareceram foram:

$$|v| < 3 \rightarrow v < -3$$

e

$$|x| < 3$$

v<3

v>3

Nestes erros, percebemos que o maior problema está no entendimento de módulo.

No item (d) apenas 3 alunos resolveram corretamente e 12 (57,1%) apresentaram as soluções:

$y^2 \leq 25$

$y \leq 25^{\frac{1}{2}}$

$y \leq 5$

ou

$y^2 \leq 25$

$\left(y^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 25^{\frac{1}{2}}$

$y \leq \pm 5$

$y \leq 5$ ou $y \leq -5$

A distinção entre as duas soluções parece estar ligada à notação. Muitos alunos parecem confundir as soluções de $x^2 = 25$ com as notações $\sqrt{25}$ e $25^{\frac{1}{2}}$ e respondem que estas representam ± 5, quando na verdade não, pois significam só o +5. Outra interpretação envolve o significado de ± 5. Esta notação parece confundir os alunos que decoram os procedimentos e faz com que não percebam que $y \leq \pm 5$ não faz sentido em Matemática, embora o faça em $y = \pm 5$.

Da análise das resoluções, podemos identificar alguns tipos de conflitos entre as componentes intuitivas, formais e algorítmicas: (1) para a inequação $y^2 \leq 25$, mais de 50% dos alunos "extrai a raiz" dos dois lados e chega a $y \leq \pm 5$ (aspecto intuitivo, procedimento próprio para equações e falta do aspecto formal, porque não sabem que $\sqrt{y^2} = |y|$ ou que $\sqrt{25} = 5$ ou ainda que $y \leq \pm 5$ não tem significado matemático); (2) para a inequação $-3x < 6$, alguns alunos "passam o -3 para o outro lado trocando o sinal", obtendo x<2 (ausência do aspecto formal); (3) para a resolução da inequação $\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$, ou os alunos simplesmente multiplicam a inequação "em cruz" (aspectos intuitivos e algorítmicos) ou conhecem os aspectos formais (sabem que quando multiplicamos uma desigualdade por uma quantia negativa é preciso inverter o sinal), mas não sabem como aplicar isto (ausência do aspecto algorítmico) e utilizam os aspectos intuitivos que mandam que a incógnita tem que ir para o numerador; (4) na resolução da inequação $\frac{t}{-2} > 4$, a maioria dos alunos mostrou conhecer os aspectos algorítmicos (é preciso multiplicar a desigualdade por -2 ou “multiplicar em cruz”), mas não o aspecto formal (ao multiplicar a desigualdade por uma quantia negativa, é preciso inverter o sinal de desigualdade); (5) na resolução da inequação $|v| < 3$, a maioria dos alunos aplica um algoritmo do tipo $|v| = \pm v$ ou $|v| = v$, em conflito com os aspectos formais (no caso, principalmente a definição de módulo).

Conclusões

Dos conflitos que destacamos, podemos tirar algumas conclusões.

Uma delas, talvez a mais marcante, é que nenhum desses alunos mostrou conhecer os aspectos formais ligados à resolução algébrica de desigualdades com uma incógnita.

Outra conclusão é que mais de 50% deles não domina nem mesmo os aspectos algorítmicos e usou apenas os aspectos intuitivos para resolver, algebricamente, as desigualdades dadas, principalmente baseando-se nos procedimentos de resolução de equações. Esta conclusão nos preocupa ainda mais que a anterior pois, como já observamos, o ensino deste assunto, no Ensino Básico, tem se apoiado nos procedimentos algébricos e nem mesmo estes estão permanecendo.

Com isto, podemos afirmar que nenhum dos alunos consegue interagir e inter-relacionar os três aspectos, conforme seria desejável para garantir a aprendizagem.

Pudemos observar ainda que nenhum dos alunos tentou qualquer outro tipo de resolução, como por exemplo a gráfica, a funcional ou ainda a aritmética, que seria determinar as soluções pela análise aritmética da expressão dada. Esta última constatação, de certa forma, confirma que a idéia da resolução algébrica está fortemente enraizada nestes alunos, eliminando muito do que poderíamos chamar de solução intuitiva.

Nossa análise das resoluções apresentadas, para esta amostra, parece indicar que não estamos conseguindo apresentar a Matemática, aos alunos, pelo menos como a entendem Courant; Robbins (1996), com quem concordamos.

> “A Matemática, como uma expressão da mente humana, reflete uma vontade ativa, uma razão contemplativa e uma ânsia pela perfeição estética. Seus elementos básicos são lógica e intuição, análise e construção, generalidade e individualidade. Embora tradições diferentes possam enfatizar aspectos diferentes, é somente a inter-relação dessas forças antagônicas e a luta pelas

> suas sínteses que constitui a vida e a plena utilização e valor supremo da ciência matemática."[1] (COURANT; ROBBINS, 1996, introdução, tradução nossa).

E como gostaríamos que os estudantes a entendessem.

A continuidade deste trabalho foi a elaboração e a aplicação de uma seqüência didática para discutir uma abordagem funcional gráfica para a resolução de desigualdades com uma incógnita, explorando fortemente os registros algébrico, gráfico e da língua natural (Duval, 2000). Com isto esperamos ajudar estes futuros professores de Matemática a auxiliarem seus futuros alunos a inter-relacionarem os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos presentes na resolução algébrica de uma desigualdade com uma incógnita visando uma aprendizagem efetiva dos tópicos matemáticos a serem ensinados.

Bibliografía

- F. Capra (1994): "A teia da vida". 9. ed. Cultrix, São Paulo.
- R. Courant, H. Robbins, I. Stewart (revisor) (1996): "What is Mathematics?: An elementary approach to ideas and methods". 2. ed. Oxford University Press, Oxford.
- V. H. G. De Souza, T. M. M. Campos (2005): "Sobre a resolução da inequação $x^2 \leq 25$". In: Caderno de Resumos: IX EBRAPEM, 1.40. Faculdade de Educação da USP, São Paulo.
- R. Duval (2000): "Basic issues for research in Mathematics Education". In: PME: Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 55-69. Hiroshima University, Hiroshima.
- E. Fischbein (1994): "The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity". In: R. Biehler et al. (Org.) Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, 231-245. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- C. Kieran (2004): "The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations". In: PME, 28: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 1, 143-147. PME, Bergen.
- L. Linchevski, A. Sfard (1991): "Rules without reasons as processes without objects–The case of equations and inequalities. In: PME, 15: Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v.2, 317-324. PME, Assisi.
- P. Tsamir, L. Bazzini (2001): "Can x=3 be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students". In: PME, 25: Proceedings of the 25th Conference of

[1] "Mathematics as an expression of the human mind reflects the active will, the contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection. Its basic elements are logic and intuition, analysis and construction, generality and individuality. Though different traditions may emphasize different aspects, it is only the interplay of these antithetic forces and the struggle for their synthesis that constitute the life, the usefulness and supreme value of mathematical science." (COURANT; ROBBINS, 1978, introdução).

the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 4, 303-310. PME, Utrecht.

- P. Tsamir, L. Bazzini (2002): "Student's algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities". In: ICTM, 2: Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics. ICTM 2: Crete.

Tânia M. M. Campos: nascida em Salvador, Bahia, Brasil, Bacharel e Doutor em Matemática pela PUC/SP, atualmente como bolsista de estágio pós-doutoral da CAPES, na Universidade de Oxford, processo BEX 3458/06-7. Trabalhou na PUC/SP e agora está vinculada à Pós-graduação da UNIBAN/SP como coordenadora do grupo de Pós-graduação em Educação Matemática. Tem vários trabalhos publicados, principalmente relacionados às estruturas multiplicativas de Gerard Vergnaud. taniammcampos@hotmail.com,

Vera Helena Giusti de Souza: nascida em São Paulo, SP, Brasil, licenciada e mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo, atualmente terminando tese de Doutorado em Educação Matemática pela PUC/SP. Trabalhou no IMEUSP e na PUC/SP e agora está vinculada à Pós-graduação da UNIBAN/SP. Tem vários trabalhos publicados, principalmente relacionados aos assuntos função e resolução de desigualdades. verahgs@hotmail.com

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 49 - 60
ISSN: 1815-0640

Rasgos de la práctica docente sobresaliente en los cursos de Matemáticas para ingeniería

David González Chávez

Resumen

Este trabajo pretende ser una contribución a la comprensión de la práctica docente exitosa en el área de los cursos de Matemáticas que se imparten en las ingenierías en los cursos de nivel superior. Se basa en los hallazgos obtenidos en una investigación de corte cualitativo realizada en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores y de Occidente (ITESO) en Guadalajara, México, sobre la práctica docente de cuatro profesores sobresalientes que imparten clases actualmente en el Departamento de Físico Matemáticas de dicha universidad. Se presentan los rasgos que caracterizan la práctica docente del primer profesor investigado que, aunque en este momento parten del análisis de un solo caso, ilustran la práctica de la docencia exitosa en general.

Abstract

This work intends to be a contribution to the comprehension of successful teacher's practice in the area of Mathematics as is taught in engineering careers. It is based on the findings obtained from a quality-focused research developed at the Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente (ITESO) in Guadalajara, Mexico, on the teaching practice of four outstanding professors who currently teach at the Department of Physics and Mathematics of that university. It exposes the features that characterize the educative practices of the first professor subject to research, which, although in this moment are derived from a single case analysis, they enlighten the practices of general successful teaching.

1. La práctica docente del profesor de Matemáticas para las carreras de ingeniería como objeto de estudio

El aprendizaje de las Matemáticas por parte de los alumnos que estudian ingenierías es fundamental dado el aporte que les proporciona para que éstos sean competentes en el modelaje de las situaciones problemáticas que enfrentarán en los diferentes campos disciplinarios a lo largo de las distintas materias que cursen durante su formación y en su vida profesional.

Para que un alumno de ingenierías logre este cometido necesita un proceso de formación en el cual están considerados determinado número de cursos de Matemáticas los cuales son conducidos por profesores universitarios. Ya que son los profesores los que finalmente le dan forma y contenido a las propuestas educativas, la práctica docente cobra especial importancia para ser considerada como un objeto de investigación del campo educativo.

En este sentido Artigue (2003) indica que la investigación educativa se ha estado ocupando del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza en el nivel universitario por más de 20 años y Moreno (2005) señala que cada vez son más numerosas las investigaciones que centran su interés en el papel de la didáctica en la enseñanza de las Matemáticas que se imparten a nivel superior.

En el área de Matemáticas para ingeniería generalmente se imparten los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Multivariable, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra Lineal, entre otros. El proceso enseñanza-aprendizaje en estas asignaturas resulta problemático ya que frecuentemente se logran competencias algorítmicas y algebraicas pero se queda lejos de una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las Matemáticas tal y como señala Moreno (2005) refiriéndose específicamente al Cálculo. De esta forma se presenta un círculo vicioso en donde “para obtener niveles aceptables de éxito se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, convirtiendo lo evaluado en lo esencial para los estudiantes” (Artigue, 1995 citado en Moreno, 2005, p.82).

Otro riesgo que se presenta es que se propicia que los contenidos matemáticos queden desvinculados de la problemática que se aborda en las diferentes ingenierías, lo cual, “tiene consecuencias negativas cuando los que aprenden son estudiantes que en el ejercicio de su profesión requieren de conocimientos y habilidades que les permitan resolver problemas de verdad” (Zúñiga, 2007, p.147).

Ante esta situación es importante reflexionar sobre el papel que tiene el docente como un mediador de una interacción educativa capaz de propiciar en el estudiante el desarrollo de las habilidades y actitudes que les permitan utilizar los conocimientos matemáticos para el análisis requerido en las diferentes disciplinas de las ingenierías.

2. La práctica docente sobresaliente

El estilo tradicional de ejercer la enseñanza, que se caracteriza por utilizar el método expositivo casi exclusivamente, fue cuestionado ampliamente en diferentes ponencias en la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática realizada en la ciudad de Querétaro, México del 15 al 18 de julio de 2007. Si el estilo tradicional presenta inconvenientes tales como la poca involucración del alumno en su actividad de aprendizaje, desmotivación por el papel pasivo del mismo durante las sesiones, por mencionar algunos, ¿qué otras alternativas existen para conducir los cursos de Matemáticas?, ¿estas alternativas generan aprendizajes más significativos y contextuados? Una manera de dar una respuesta a estas preguntas es investigar la práctica docente sobresaliente. Si se examina esta manera de practicar la enseñanza es posible encontrar respuestas enriquecedoras para la educación matemática de los futuros ingenieros.

Los profesores son sometidos constantemente a un proceso de evaluación por parte de tres agentes: los alumnos, la institución (representada por el jefe inmediato y el jefe del departamento) y los mismos pares. Existen docentes que sobresalen porque son reconocidos por estos agentes dado que exhiben diferentes cualidades que los distinguen de otros colegas. Este trabajo de investigación se enfocó en la práctica docente de cuatro profesores que sobresalían en la evaluación que hacían de ellos al menos dos de los tres agentes mencionados anteriormente.

3. Selección de casos

El lugar donde se está llevando a cabo la investigación es el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Occidente (ITESO), en el Departamento de Físico-Matemáticas durante los semestres otoño 2006 y otoño 2007. Se eligieron cuatro profesores que presentaban características sobresalientes que resultaron interesantes para el investigador y relevantes para la investigación. La selección de los casos siguió la siguiente secuencia:

1. Obtención de la lista de los profesores que actualmente imparten clases en el Departamento de Físico Matemáticas del ITESO.
2. Consulta de los Instrumentos de Apreciación Estudiantil (IAE) desde Primavera del 2001 hasta verano del 2006.
3. Consulta al jefe del departamento (agente I1) y al jefe de la Unidad Académica Básica (agente I2) sobre a quiénes consideraban entre muy buenos y excelentes profesores.
4. Consulta a dos pares (agente P1 y P2) que se distinguen por tener varios años trabajando en el departamento y conocer a profundidad a los profesores que imparten las clases y laboran dentro de él.
5. Selección de los casos.

El número de docentes que impartió clases de Matemáticas para ingenierías en el semestre otoño de 2006 fue de 26. En este número se incluyen tanto maestros con planta fija en el departamento como de asignatura. Un primer requisito considerado para la selección de los casos fue elegir profesores que en el lapso primavera 2001-verano 2006 hayan obtenido un promedio de 90 puntos sobre 100 en el IAE en el cincuenta por ciento o más de las evaluaciones hechas por los alumnos. En la primera fila de la figura 1 que se presenta en la siguiente página aparecen estos profesores señalados con un asterisco. De los 26 profesores 16 reunieron esta característica. Con un recuadro amarillo se indican aquellos que además obtuvieron en más del cincuenta por ciento de sus evaluaciones un porcentaje mayor o igual al 50% de participación. En la segunda y tercera fila aparecen señalados los profesores que además de estar en la primera fila fueron mencionados por la institución, es decir, por los agentes I1 e I2. En la cuarta y quinta fila aparecen señalados aquellos profesores que además de aparecer en la primera fila son mencionados por los agentes P1 y P2.

	Profesor 1			Profesor 2		Profesor 3										Profesor 4
Docente / Agente Consultado	1	2	7	8	9	10	11	12	13	16	17	20	21	23	25	26
IAE	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
I1	*			*		*										*
I2	*			*				*	*	*						*
P1				*				*								*
P2				*					*							*

Figura 1: Resultado de las consultas para la selección de casos. El símbolo * significa que fueron mencionados por los agentes consultados.

Considerando los resultados de la tabla se procedió a la elección de los casos cuyo resultado fueron cuatro profesores seleccionados. Los aspectos sobresalientes de cada profesor son:

Profesor 1

Se distingue debido a que es uno de los tres profesores que en más del cincuenta por ciento de los instrumentos de apreciación estudiantil ha obtenido un puntaje igual o mayor a 90 sobre 100 y además en más del cincuenta por ciento de estas evaluaciones ha tenido una participación mayor al cincuenta por ciento. Además es un profesor que fue mencionado en la lista de docentes que proporcionaron tanto el jefe del departamento como el jefe de la Unidad Académica Básica.

Profesor 2

Se distingue por obtener más del cincuenta por ciento de sus evaluaciones con un puntaje de mayor o igual a 90 sobre 100. No cumple con la condición de tener una participación mayor al cincuenta por ciento en el cincuenta por ciento o más de sus evaluaciones. Sin embargo, este profesor sobresale por ser mencionado por todos los agentes consultados.

Profesor 3

Se distingue porque cumple con los requisitos para estar en la primera fila de la figura 1, es mencionado por el agente I1, pero además es el docente con más años transcurridos en el Departamento de Físico-Matemáticas. Un aspecto relevante en este profesor es que imparte clases no sólo en el área de Matemáticas, sino también en Física.

Profesor 4

Presenta las mismas características del profesor 2.

Estos cuatro profesores son la selección desde la que se llevó a cabo el acercamiento hacia la comprensión de la práctica docente sobresaliente en el área de la enseñanza de las Matemáticas para ingeniería con el objeto de abonar al conocimiento sobre algunos aspectos del proceso enseñanza-aprendizaje propio de estos cursos.

4. El marco de referencia para el estudio de la práctica docente: la relación pedagógica

Fierro, Fortoul y Rosas (1999) señalan que el trabajo del docente se ubica situado en el punto en el que se encuentra el sistema escolar (con una oferta curricular y organizada) y los grupos sociales particulares a los que se dirige la empresa educativa, por lo que la función del profesor es mediar el encuentro entre el proyecto educativo, estructurado como oferta educativa, y sus destinatarios, en una labor que se realiza cara a cara. Entonces el quehacer del docente se perfila como una compleja trama de relaciones de diversa naturaleza y con múltiples características que acontecen en este proceso de mediación:

a) Entre personas: alumnos, maestros, autoridades, comunidad.
b) Con el conocimiento, presentado como un saber colectivo culturalmente organizado.
c) Con la institución.
d) Con todos los aspectos de la vida humana que van conformando la marcha de la sociedad.
e) Con un conjunto de valores personales e institucionales.

En consecuencia, Fierro et al. (1999) proponen que para abordar la práctica docente conviene un análisis en el que se reconozcan todos los elementos que se reflejan en ella, desagregándolos, pero sin perder la noción de su totalidad, reconociendo los que provienen del entorno y los propios del aula. De esta forma presentan un modelo de la práctica docente en el que organizan en seis dimensiones las relaciones que se dan en ella con el objeto de analizarla. Dichas dimensiones caracterizan específicamente la práctica educativa de cada maestro y son:

1) Dimensión personal.
2) Dimensión institucional.
3) Dimensión interpersonal.
4) Dimensión social.
5) Dimensión didáctica.
6) Dimensión valoral.

La forma en que estas dimensiones se expresan de una manera conjunta se denomina ***la relación pedagógica*** en la cual se ***evidencia la forma en la que el maestro vive su función como educador en el marco de una determinada institución escolar*** desde una visión relacional, social y constructivista. De la manera en que el profesor logre integrar y armonizar las dimensiones anteriores dependerá que su práctica educativa tienda a una relación facilitadora de aprendizajes y formadora de personas. Por esta razón es fundamental examinar la práctica docente prestando especial atención a *la relación pedagógica*, ya que es la parte culminante del análisis de todas las dimensiones.

El objetivo de esta investigación es caracterizar la práctica docente de profesores sobresalientes en el área de Matemáticas para ingenierías. *La relación pedagógica* presentada en los párrafos anteriores es un modelo útil para el acercamiento y exploración de dicha práctica porque ofrece la posibilidad de determinar sus atributos peculiares desde diferentes perspectivas ofrecidas por las diferentes dimensiones que se abordan, permitiendo entender la influencia y relación entre ellas de tal manera que coadyuva a lograr una comprensión más congruente del quehacer docente. Si sólo se examinara la práctica docente desde una sola dimensión se correría el riesgo de llegar a un entendimiento parcial de la misma. Por ejemplo, si sólo se estudiara la práctica docente considerando únicamente la dimensión didáctica esto podría llevar a considerar solamente aspectos operacionales. Sin embargo, al considerar otras dimensiones se puede entender porqué el profesor utiliza esa didáctica y no otra. La dimensión valoral permitiría conocer qué valores busca al utilizar tal didáctica. Podría encontrarse que la dimensión institucional sea el factor más fuerte para el profesor y entonces la práctica docente más bien está regida por esta dimensión que por la dimensión didáctica. Así, al analizar todas las dimensiones en conjunto, la descripción del quehacer del profesor lograría tener un sentido claro y coherente. Otra posibilidad que ofrece el modelo de *la relación pedagógica* es que permite tener una guía para la recolección y una pauta de análisis de los datos obtenidos en el trabajo de campo.

Cabe señalar que en este modelo de *la relación pedagógica* no se considera la especificidad propia del conocimiento matemático. Es pertinente, como señala Brousseau (1999), considerar que la hipótesis de que la construcción de todo conocimiento debe seguir procesos idénticos es algo cuestionable. Hay algo propio y específico en el proceso enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Por lo tanto, con el objetivo de completar la caracterización de la práctica docente, es pertinente enriquecer el análisis del proceso enseñanza-aprendizaje efectivo de los profesores sobresalientes de Matemáticas para ingeniería considerando las perspectivas que ofrece la Didáctica de las Matemáticas (Godino, 2003) como disciplina científica. En esta investigación primeramente se ha recurrido a *la relación pedagógica* para acercarse y explorar la práctica docente. En un segundo momento se llevará a cabo el análisis y discusión de los hallazgos considerando la perspectiva propia de la Didáctica Matemática lo cual se presentará en trabajos posteriores.

5. Elección del método de estudio de casos con orientación cualitativa

Para alcanzar el objetivo de esta investigación se elaboró un diseño utilizando el método de estudio de casos con orientación cualitativa. El diseño de estudio de casos ha sido utilizado para explorar, describir y explicar situaciones relacionadas con un fenómeno bajo estudio así como también para desarrollar, construir o refutar teorías. Se ha utilizado en psicología, sociología y en educación (Stake 1995) en donde se ha considerado al individuo como la unidad de análisis y el estudio de caso como herramienta para interpretar a profundidad el comportamiento que es el objeto de la investigación.

Sosa (2006) enfatiza que los fenómenos con creciente complejidad requieren de una investigación de carácter *exploratorio* y *comprensivo* más que una búsqueda de explicaciones causales, y para ello los estudios de casos con orientación cualitativa pueden ser el método de investigación más apropiado.

Dado que el interés de esta investigación es conocer y comprender la forma como las relaciones características de las diferentes dimensiones de la práctica docente se expresan de manera conjunta en el quehacer de profesores sobresalientes en la evaluación hecha por los diferentes agentes universitarios (pares, alumnos e institución) para describir, interpretar y generar una explicación, el método de estudio de casos con orientación cualitativa es una estrategia idónea para esta investigación tal y como lo sugiere Merriam (1998) para este tipo de trabajos.

También de acuerdo con los criterios que señala Yin (2002), se encontró que el método de estudio de casos es pertinente porque el interés es *explicar* la práctica docente en el sentido de mostrar cómo se evidencia concretamente *la relación pedagógica* en cada caso de estudio. Así mismo este fenómeno es un asunto contemporáneo ya que se desarrolla en la actualidad y se quiere conocer tal y como se presenta, no buscando influir en algunas variables para determinar la dependencia de éstas con respecto a otras variables.

6. Reporte del trabajo de campo (Entrevistas, observaciones y documentos)

Se realizaron cinco entrevistas estructuradas al profesor 1, nueve al profesor 2, siete entrevistas al profesor 3 y seis entrevistas al profesor 4, para sumar un total de veintisiete entrevistas. Para los cuatro casos se abarcaron el total de preguntas diseñadas para la exploración de las seis dimensiones. Dieciséis preguntas para la dimensión personal, veintisiete preguntas para la dimensión didáctica, ocho preguntas para la dimensión valoral, nueve preguntas para la dimensión social, y siete para la dimensión interpersonal. El tiempo de duración de cada entrevista osciló entre 40 y 90 minutos dependiendo de la extensión en las respuestas de cada entrevistado.

Se realizaron cuatro observaciones no participantes a cada profesor que fueron filmadas, además se hicieron notas de campo en cada sesión. Aunque la duración de cada clase fue de alrededor de 100 minutos, la filmación comenzó unos minutos antes y terminó aproximadamente 10 minutos después con el fin de captar las interacciones de los alumnos que al final de las sesiones se acercaban con el profesor.

Para la exploración de la dimensión institucional se entregó a los profesores una encuesta donde se les pidió que llenaran una serie de frases incompletas y además que contestaran un cuestionario.

7. La relación pedagógica del profesor 1

A continuación se presenta una propuesta de 12 rasgos que caracterizan la práctica docente del profesor 1 desde la perspectiva de *la relación pedagógica* y que son el resultado de las dimensiones exploradas en el análisis de los datos recabados. En los siguientes rasgos se manifiestan de manera conjunta las relaciones que el docente establece con los diferentes agentes que influyen en su quehacer como educador matemático. Debido al avance actual de la investigación este es el caso que puede presentarse en este artículo. En trabajos posteriores se reportarán los hallazgos correspondientes a los demás profesores.

Rasgos resultados del análisis de *la relación pedagógica*:

a) Gradualidad de la intervención docente

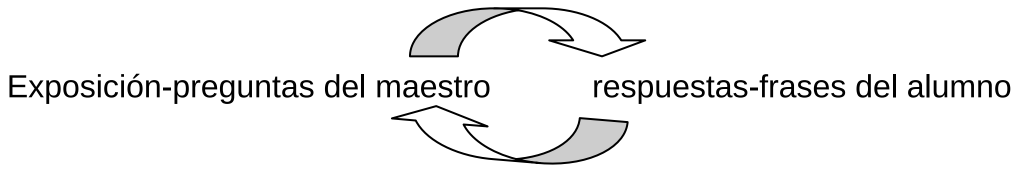
Al presentar contenidos nuevos este docente en un primer momento muestra un alto nivel de intervención en la resolución de los problemas y posteriormente su nivel de intervención desciende para permitir que el alumno se enfrente al nuevo conocimiento y realice el aprendizaje. Esto se observa tanto en el desarrollo de la clase en que se busca exponer un tema nuevo como en la resolución de un problema específico.

b) Problematización contextualizada

Para lograr la adquisición de conocimientos significativos este docente busca presentar problemas contextualizados con respecto a situaciones geométricas o del área de la ingeniería y de la física. Busca también señalar el para qué les va a servir este conocimiento en el contexto de su campo profesional.

c) Modelo expositivo interactivo

No se encontró una sesión en donde sólo el docente hablara, sino que durante todas las exposiciones hubo un intercambio frecuente por medio de preguntas y afirmaciones con los alumnos en relación al tema o al problema que se estaba resolviendo.

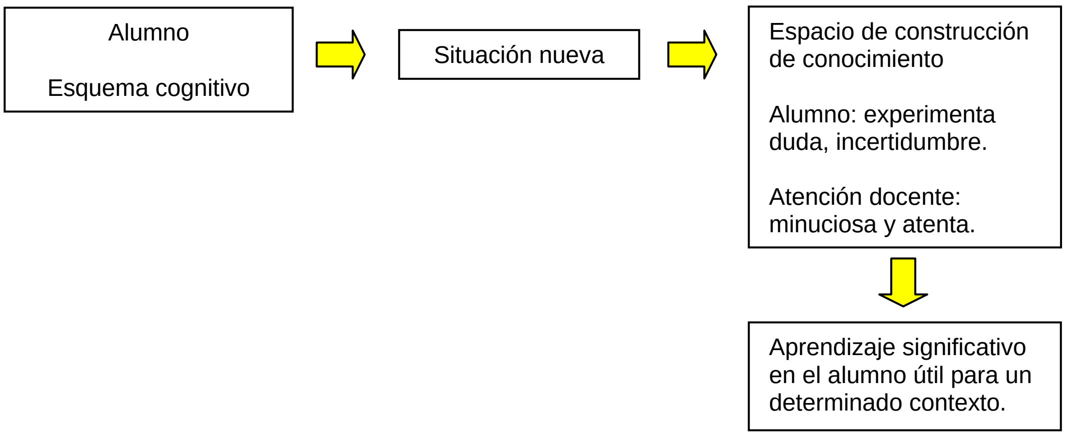


d) Contención psicoafectiva

Este docente busca generar un clima de seguridad psicológica en el salón de clases en donde el alumno se experimente libre de amenazas y pueda encontrar y explorar el nuevo conocimiento de tal manera que logre una sensación de confianza y de libertad para hacer preguntas, exponer inquietudes y hacer participaciones. Igualmente manda mensajes de alianza con ellos con la intención de hacerles saber que el curso saldrá adelante porque *trabajaran juntos (docente y alumnos)* para tal efecto.

e) Espacio de construcción del conocimiento

La creencia sobre lo que debe ser el proceso enseñanza aprendizaje en este docente genera una forma de conducción de las sesiones que se caracteriza por la búsqueda de un espacio de construcción del conocimiento. El alumno tiene un esquema cognitivo previo y se enfrenta a situaciones nuevas diseñadas intencionalmente por el docente, en este momento el alumno entra a un espacio de construcción del conocimiento donde al principio experimenta situaciones de duda e incertidumbre y ahí recibe atención por parte del docente hasta que se logra un aprendizaje significativo útil para un determinado contexto.



f) Resolución guiada

La resolución de los problemas no es una actividad en la que el profesor solamente explica los procedimientos, más bien va guiando las acciones de los alumnos mediante exposiciones breves en el pizarrón, realizando preguntas al grupo en general, permitiendo la participación, atendiendo individualmente, haciendo ilustraciones en el pizarrón y monitoreando las actividades que los diferentes alumnos van realizando.

g) La actitud como centro de preocupación

El interés por generar una actitud de apertura al conocimiento para vencer los obstáculos epistemofílicos es permanente en esta práctica docente. La interacción interpersonal caracterizada por un trato respetuoso, así como los continuos mensajes de que el profesor está de parte de los alumnos, junto con la insistencia de que está ahí para resolver todas las dudas que se presenten, revelan el interés por generar una cierta predisposición favorable en el alumno. Inclusive, más que el deseo de que el alumno adquiera mayores conocimientos, está el deseo de que el alumno genere una *actitud* favorable al aprendizaje de las Matemáticas y a la resolución de problemas.

h) Influencia histórica

La experiencia del docente explorada en la dimensión personal fue cotejada con las otras dimensiones encontrando que existe una influencia de la historia del docente en su práctica actual. Los valores vivenciados, las experiencias negativas del docente en la facultad y las positivas mientras cursó su maestría van tejiendo una forma de ser docente que privilegia la actitud, el acompañamiento cercano, el evitar la frustración en cuanto a la disciplina, el presentar los conocimientos y la resolución de los problemas de una manera guiada al alumno

i) Conducta subordinada con espacios de autonomía

En relación a las directrices institucionales, este docente presenta una conducta subordinada pero salvaguardando los espacios de autonomía que la misma institución permite. Asume los acuerdos que se toman en las academias y al mismo tiempo expresa sus opiniones personales y sus desacuerdos. En el espacio del aula aplica las innovaciones que considera pertinentes para el logro de los objetivos de aprendizaje de manera autónoma sin necesidad de consultar a los jefes.

j) Repercusión social

La preocupación por la repercusión de su actividad docente en la vida de los alumnos aparece como un tema central. La manifestación de esta inquietud es la búsqueda por la contextualización de los contenidos para que capacite a los alumnos en algo útil para la vida profesional que tendrán los alumnos después de su estancia en la universidad. El facilitar aprendizajes útiles para la vida real de los estudiantes marca satisfacciones y frustraciones en este docente al considerar la pertinencia de su práctica docente.

k) Esquema relacional respetuoso

Lo que caracteriza las relaciones con los pares, los alumnos y la institución es el respeto, el cumplimiento y la colaboración. El valor de la formalidad aparece como un eje que regula las interacciones con la institución y con los alumnos lo cual se manifiesta en la puntualidad a la asistencia de las sesiones, en la entrega de los exámenes debidamente corregidos y en la exigencia hacia sus alumnos que cumplan con las directrices que se les han dictado. Con los pares el valor de la colaboración marca el estilo de relación que se establece con ellos.

l) El esquema constructivista del aprendizaje

El esquema constructivista del aprendizaje basado en la teoría de Ausubel aparece como un eje rector de esta práctica. La elaboración de las notas, los mapas conceptuales, la conducción guiada del alumno en su proceso de adquisición del nuevo conocimiento y la clasificación de los tipos de aprendizaje son consonantes con las propuestas que se encuentran en esta rama de la psicología educativa (Palomino, 1997). En su práctica docente considera el esquema cognitivo previo que el alumno ya posee, reconoce la estructuración de los conocimientos (correlativo, subordinado, supraordinado) y la búsqueda de los aprendizajes significativos.

8. Reflexión final

La práctica docente es una interacción humana que involucra distintos aspectos simultáneamente. El espacio educativo que se logra cuando se combina un cuidado de la dimensión interpersonal junto con un desempeño de la dimensión didáctica centrada en la construcción del aprendizaje significativo contextuado, todo esto enmarcado en una dimensión valoral que tiene énfasis en el cuidado de la actitud, genera un tipo de práctica docente sumamente apreciada por los alumnos y por la institución.

Es un reto educativo pasar de solamente ser un expositor elocuente de conocimientos matemáticos a asumir la identidad de *educador matemático*. Revisar nuestra práctica a la luz de *la relación pedagógica* de las prácticas exitosas contribuirá al logro de tal propósito.

Bibliografía

- Artigue, Michele. (2003) *¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario?* Boletín de la asociación matemática venezolana, Vol. X. No. 2003, pp.117-134.
- Brousseau, Guy. (1999) *Educación y didáctica de las matemáticas.* Educación Matemática, Vol.12 No.1 abril 2000, pp. 5-38
- Fierro, Fortoul y Rosas, Lesvia. (1999) *Transformando la práctica docente. Una propuesta basada en la investigación-acción.* Ed. Paidós, México.
- Godino, Juan D. (2003) *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica.* Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Trabajo accesible a texto completo en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_fundamentos
- Merriam, Sharam. (1998). Qualitative research and *case study applications in education.* (2nd. Ed.) San Francisco: Jossey Bass, USA.
- Moreno, María del Mar. (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros.* En A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Córdoba, España, Universidad de Córdoba, pp. 81-96
- Palomino, W (1997). *Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.* Trabajo accesible a texto completo en: http://www.monografías.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml
- Sosa, Silvia (2006) *La génesis y el desarrollo del cambio estratégico: un enfoque dinámico basado en el momentum organizativo.* Tesis doctoral accesible a texto completo en http://www.eumed.net/tesis/2006/ssc.
- Stake, Robert. E. (1995). *The art of case study research.* Thousands Oaks, CA: Sage Publications.
- Yin, Robert. K. (2002). *Case study research: Design and methods* (3rd. Ed.). Newbury Park, CA: Sage Publications.
- Zuñiga, Leonardo. (2007) *El Cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo*. Revista Latinoamericana de Investigación Educativa, marzo, 2007, vol 10, número 001. pp. 145-175.

David González Chávez, es Profesor de Asignatura en el Departamento de Físico Matemáticas en el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores y de Occidente (ITESO) en Guadalajara Jalisco. Profesor en las licenciaturas de Ingeniería Cibernética y en Sistemas Computacionales y en Ingeniería Industrial y Sistemas Organizacionales en la Universidad Marista de Guadalajara (UMG). En ambas universidades desde hace 15 años imparte los cursos de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Multivariable, Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos. Licenciado en Ingeniería Química Administrativa por el ITESO. Maestría en Desarrollo Humano y Facilitación de Grupos por el Centro Humanista del Ser (CEHUS) y actualmente está en la etapa final del Doctorado en Educación por la UMG. Nació el 10 de mayo de 1966 en la Cd. De México.
dglez@cybercable.net.mx

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 61 - 75
ISSN: 1815-0640

Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema

Mequè Edo, Mírian Baeza, Jordi Deulofeu y Edelmira Badillo

Resumen

El presente trabajo es un acercamiento a la investigación en la utilización de los juegos de estrategia como herramienta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas. En concreto, este estudio se centra en el uso de un juego de estrategia como herramienta metodológica para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas. Nuestro objetivo es describir y analizar las fases de la heurística que alumnos de quinto de primaria (10-11 años) desarrollan para descubrir las estrategias ganadoras en el juego “Cerrar quince” realizando un posible paralelo entre estas fases y la de la resolución de un problema matemático.

Antecedentes

El presente estudio es de carácter exploratorio, siendo un primer acercamiento a un trabajo de investigación más amplio. Se basa en el potencial de los juegos en el aula de matemáticas (Edo, 2002). En este caso seleccionamos juegos de estrategia para desarrollar habilidades de resolución de problemas en quinto de primaria (10-11 años). La pregunta de investigación surge de la relación entre la heurística del descubrimiento de estrategias ganadoras en el juego “Cerrar quince” y el posible paralelismo entre este proceso y el de resolución de un problema matemático (Pólya, 1979).

En este estudio pretendemos buscar evidencias que nos permitan abordar las preguntas de investigación ¿Cómo llevan a cabo los alumnos[1] de primaria el proceso de descubrimiento de las estrategias ganadoras del juego “Cerrar quince”? y ¿Existe relación entre las fases de la heurística desarrollada en un juego de estrategia y la heurística desarrollada en la resolución de un problema matemático?

A continuación presentaremos brevemente los antecedentes teóricos que sientan la base de nuestro estudio.

Desde tempranas edades, el mayor cúmulo de aprendizajes de los niños se desarrolla en un entorno de juego. Vygotski (1979) afirma que “el juego crea una

[1] En este estudio, se utiliza la palabra alumnos, niños, etc. incluyendo los dos géneros, con el objetivo de hacer más fluida la lectura y escritura, no con el objetivo de resaltar un género más que el otro.

zona de desarrollo próximo en el niño" (p.156) que es generador de nuevos aprendizajes. Este autor concibe el juego como una actividad esencial para el desarrollo humano, recalcando que "El juego no es un rasgo predominante de la infancia, sino un factor básico en el desarrollo" (op. cit. p.154). Siguiendo al mismo autor sabemos que cualquier juego contiene reglas, algunas más implícitas y otras más explícitas, y que a medida que el niño se va desarrollando cambia sus intereses desde los juegos de simulación hacia los juegos más reglados, siendo cada vez más consciente del propósito que encierra cada juego. Vygotski añade que durante la edad escolar "el juego no desaparece, sino que se introduce en la actitud que el niño adopta frente a la realidad. Tiene su propia continuidad interna en la instrucción escolar y en el trabajo" (p.158). En síntesis, concordamos con Vygotski que el juego proporciona beneficios cognitivos, sociales y morales que, no sólo no debe coartarse en ninguna etapa del desarrollo del niño, ni posteriormente de adulto, sino que debe potenciarse.

El uso del juego en el aula, especialmente el juego colectivo, es una actividad que permite el desarrollo de diversas áreas: social, política (normas y reglas), moral, emocional y cognitiva (Kamii & DeVries, 1980). Las autoras señalan, a partir de los resultados de sus estudios, que el valor de los juegos colectivos en la enseñanza tiene estrecha relación con la tendencia natural de los niños a participar en este tipo de actividades, "La capacidad en ciernes de participar en juegos colectivos es un importante logro cognoscitivo y social de los niños de cinco años que debe estimularse antes de los cinco años de edad y reforzarse aún más después de esta edad" (Kamii & DeVries, 1980, p.44). Dentro de las ventajas de los juegos colectivos en la enseñanza está la posibilidad de los jugadores de recibir la corrección por parte de otro jugador y no del propio profesor, lo que conduce al desarrollo de su autonomía, así también se sienten motivados a supervisar las acciones de sus compañeros y reciben una retroalimentación mutua e inmediata. Por otro lado, los alumnos se encuentran más activos mentalmente cuando están jugando que cuando trabajan en hojas de ejercicios, lo que confirma la fuerza motivadora del mismo como instrumento metodológico de enseñanza.

En este punto es necesario definir que entendemos por **juego matemático** en nuestra investigación. El juego matemático es una actividad colectiva basada en reglas fijas, sencillas, comprensibles y asumidas por todos los participantes. Las reglas establecerán no sólo los objetivos para el conjunto de jugadores, sino también los objetivos específicos de cada uno de los participantes que deberán buscar las estrategias para bloquear y/o ganar al resto de los participantes.

Concordamos con Corbalán (1994) que los juegos en el contexto escolar precisan también del uso de material concreto como tableros y fichas o simplemente lápiz y papel, materiales que permitan registrar los procesos de resolución del problema matemático implicado en el juego.

Dependiendo del objetivo del juego planteado para las clases de matemáticas planificadas por el profesor, el juego presenta diversas potencialidades. En la actualidad disponemos de resultados positivos en relación a: el aumento de la habilidad de cálculo mental (Edo, 1998), el desarrollo de la capacidad de clasificación, seriación, comprensión del número, comprensión y ubicación espacial y la comprensión de la relación temporal (Kamii & Kato, 2005); el aumento de la autoestima, de la cooperación entre compañeros y del desarrollo del lenguaje matemático (Topping y otros, 2003).

El uso de juegos en el marco escolar, como hemos visto, puede tener distintas finalidades. Corbalán y Deulofeu, (1996) distinguen ente dos grandes categorías de juegos a utilizar en el marco escolar. De una parte los juegos que persiguen la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas matemáticas, llamados juegos de conocimiento, y de otra parte, los juegos que se centran en la adquisición de métodos de resolución de problemas, llamados juegos de estrategia.

Los juegos de estrategia son aquellos en los que existen estrategias (entendidas como formas de jugar) para ganar siempre o para no perder (Corbalán & Deulofeu, 1996). En estos juegos todas las decisiones están en manos de los jugadores (no hay azar) y se trata de que estos lleguen a descubrir la existencia de una estrategia ganadora, es decir, una forma de jugar que permita ganar siempre, o que el otro jugador no gane nunca, dependiendo de si el jugador es el primero o el segundo en realizar sus jugadas (Edo, Deulofeu y Badillo, 2006).

A continuación se presentan algunos aspectos vinculados con la potencialidad que buscamos observar y describir en nuestro estudio, es decir, el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.

En el campo de la didáctica de las matemáticas existe, desde hace años, un interés especial por la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, interés que en ocasiones se vincula con el hecho de utilizar juegos en el aula. Esta importancia radica en el énfasis que en los actuales currícula de matemáticas se pone en la resolución de problemas, como una de las competencia principales que conforman la competencia matemática, "lo que ha llevado a considerar los juegos de estrategia como elementos claves en este proceso y a usarlos, no sólo para introducir contenidos, sino también, y muy especialmente, para favorecer distintos aspectos (procesos, fases…) de la resolución de problemas, así pues constituyen un instrumento metodológico importante para su enseñanza" (Gómez-Chacón, 1992. p.7).

La relación entre los juegos de estrategia y la resolución de problemas radica en el hecho que, potencialmente, ambos comparten el mismo proceso heurístico, es decir, que las fases de resolución de uno y otro coinciden y que el tipo de acciones a realizar tienen una gran coincidencia. A la hora de relacionar las fases de la heurística de la resolución de problemas de un juego de estrategia y de un problema matemático, debemos recordar a Polya para quien el objetivo de la heurística es "comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular *las operaciones mentales típicamente útiles* en este proceso" (Pólya, 1979, p.103). Estas operaciones son las que pretendemos analizar en el presente estudio.

Estas operaciones mentales implican, entre otras, la indagación, la exploración y el descubrimiento, algo que está en estrecha relación con nuestra idea del uso de los juegos de estrategia en grupos colectivos para el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas en las clases de matemáticas.

Gómez-Chacón (1992) considera que "Las heurísticas de los juegos de estrategia requieren el mismo cuidado y análisis que la resolución de problemas, pues esencialmente coinciden. La semejanza de esta estructura permite comenzar a ejercitar en unos y en otra las mismas herramientas, idénticos procesos de pensamiento que son útiles en los desarrollos matemáticos" (p.18)

Para estudiar el posible paralelismo entre el proceso de resolución de un problema matemático y el de descubrimiento de la estrategia ganadora de un juego de estrategia partimos (cuadro 1) del paralelismo observado (Edo, 2002) entre las fases de la resolución de un problema matemático en el ámbito de la educación primaria y las fases de resolución de un juego de sociedad.

Fases de resolución de problemas en primaria (Pólya)	**Fases de resolución de un juego**
I. Comprensión del problema.	*a)* Comprensión de los objetivos del juego y de las normas a seguir.
II. Diseño y ejecución de un plan general o de planes parciales sucesivos.	*b)* Desarrollo de partida: experimentación, realización de conjeturas, diseño de planes parciales, planificación de una estrategia
III. Verificación de la solución obtenida.	*c)* Validación o refutación de la estrategia y análisis de lo que ha pasado

Cuadro 1: Relación entre las fases de resolución de un problema y las fases de resolución de un juego.

En el estudio de Edo (2002), se aportan resultados en relación a los procesos de conocimiento y apropiación de un nuevo juego en el que se observa la aparición de fases o momentos claves que presenta un paralelismo con las fases de resolución de un problema. En el estudio de Edo se utilizaron juegos con alguna estrategia parcial, pero no juegos de estrategia según definición de Corbalán y Deulofeu, (1996). Nuestra intención es analizar el proceso de descubrimiento de estrategias ganadoras de un juego de estrategia viendo si se reconocen, o no, las fases señaladas.

Entendemos que los juegos matemáticos pueden permitir desarrollar habilidades de resolución de problemas, siempre y cuando sean trabajados con un objetivo claro y dentro de un ambiente de resolución de problemas, en donde se estimule el pensar matemáticamente para generar situaciones problemas que pertenezcan al dominio de objetivos matemáticos más generales (Abrantes, 1996). Este entorno debe, por lo tanto, permitir que los alumnos exploren, verbalicen, discutan y compartan diversos caminos para la resolución del juego.

Objetivo de nuestro estudio

El objetivo general de esta investigación es identificar evidencias que nos permitan describir los procesos heurísticos del descubrimiento de estrategias ganadoras y el posible paralelismo con las fases de resolución de problemas (Pólya, 1979).

Los objetivos específicos del presente estudio son los siguientes:

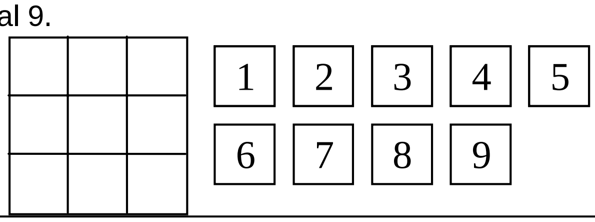
- Describir el proceso de resolución de estrategias ganadoras del juego de estrategia “Cerrar quince”.
- Comparar las fases de la heurística que los alumnos desarrollan en la resolución del juego de estrategia “Cerrar quince” en comparación a las fases de la heurística de un problema matemático.

Material y métodos

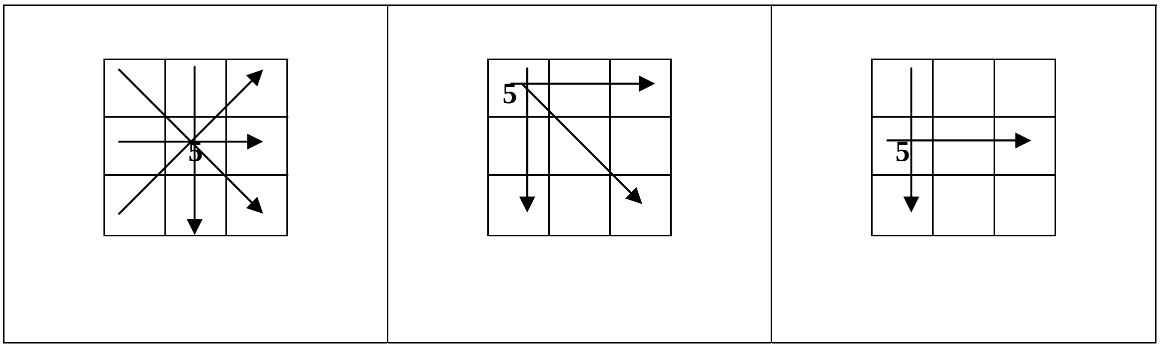
El juego de estrategia seleccionado para desarrollar el presente trabajo de innovación e investigación es el juego “Cerrar quince”. Este juego para dos jugadores consta de un tablero cuadrado formado por nueve casillas y nueve fichas (con los números del 1 al 9). El juego consiste en colocar tres fichas que sumen 15, ya sea siguiendo una fila, una columna o una de las dos diagonales. Los alumnos deben buscar algunas de las estrategias ganadoras.

El presente juego de estrategia, se seleccionó porque es un juego rico en posibilidades para explorar y pertinente para generar un ambiente de resolución de problemas.

El juego: *Cerrar quince*

Nivel:	Quinto, sexto de primaria. (10 a 12 años)
Material:	Un tablero de 3 x 3, y un juego de 9 cartones con cifras del 1 al 9. 
Número de jugadores:	2 jugadores (aunque en esta experiencia participan 4 alumnos que juegan en equipos de dos).
Normas:	Se colocan todos los cartones boca arriba, cada jugador (o equipo) escoge, por turno, un número y lo coloca encima del tablero, donde quiera. El primer jugador (o equipo) que al colocar su número consigan sumar "15" ya sea de manera vertical, horizontal o diagonal, gana el juego.

Estrategia ganadora: El juego presentado, un juego sin intervención del azar, debe ser analizado para descubrir una estrategia ganadora. Si el primer jugador coloca el 5 en cualquiera posición del tablero puede hallar una estrategia para ganar. Si el jugador coloca el 5 en la casilla central del tablero puede ganar a la siguiente jugada, ya que el cinco en esta posición ocupa todas las direcciones del tablero para realizar sus jugadas (horizontal, vertical y dos diagonales) y además permite que todas las fichas restantes (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9) formen parejas que suman 10. Otra estrategia para que el primer jugador halle una solución favorable al juego consiste en colocar el 5 en uno de los vértices, posición que ocupa tres direcciones y que le permitiría ganar a la tercera jugada; otra es situar el 5 en el centro de un lado del tablero, lo que le permitiría ganar a la cuarta jugada.



Existe también la posibilidad de hallar una estrategia ganadora, para el primer jugador, colocando una ficha en el centro distinta del cinco. En efecto, si colocamos, por ejemplo, el 4 en el centro, quedan emparejadas las fichas: 9-2, 8-3, 6-5 (que suman 11 y con el 4 hacen 15), y quedan sin aparejar sólo el 1 y el 7. El segundo jugador debe jugar uno de estos dos números, si no quiere perder inmediatamente, y el primero puede jugar el otro, cerrando una línea que no suma 15, pero obligando al segundo jugador a poner uno de los números restantes, con lo cual el primero ganará la partida jugando el otro número del par. Lo mismo sucede para cualquier otro número distinto de 5, por lo que es posible asegurar que este juego admite diversas estrategias ganadoras para el primer jugador, ya sea iniciando el juego con un 5 en cualquier casilla, o bien jugando cualquier otro número en la casilla central.

Contexto de la experiencia

En el presente estudio participaron alumnos del Colegio “Mare de Déu de la Mercè”, ubicado en Badalona, ciudad de Barcelona (Cataluña, España). Colegio de tipo concertado que atiende a una población de nivel socio-económico medio bajo y con un alto porcentaje de alumnos inmigrantes, especialmente en el aula implicada en la investigación, el curso está compuesto por 27 alumnos, 11 niños y 16 niñas de entre 10 y 11 años de edad.

Las sesiones de juego forman parte de los contenidos matemáticos planificados anualmente por la profesora, siendo estas la última unidad a estudiar en el presente período académico, a su vez forma parte de un proyecto de cálculo mental llevado a cabo en el centro. La profesora es experta en didáctica de las matemáticas y su experiencia en primaria es de 3 años.

La unidad didáctica de juegos tuvo una duración de tres semanas, la primera sesión tuvo una duración de 15 minutos y en ella se presentó el juego al curso y se realizaron un par de partidas para conocer y comprender las reglas y objetivos del juego. La segunda sesión tuvo una duración total de 45 minutos, siendo la sesión seleccionada para el análisis por lo que se detallará más adelante. La tercera y última sesión tuvo una duración de 45 minutos, en ella se revisaron las estrategias ganadoras encontradas por los grupos formados en la clase y se revisó la tarea que la profesora había pedido al final de la segunda sesión, la que consistía en buscar todas las formas posibles de generar el cuadrado mágico con las nueve fichas del tablero.

Participantes

El grupo de estudio estuvo conformado por un grupo de cuatro alumnos de quinto de primaria, que desarrollaron el juego en parejas formadas por un niño y una niña. Con este tipo de agrupación por parejas mixtas, evitamos la discriminación de género. Los alumnos fueron seleccionados por su habilidad lingüística de esta manera nos aseguramos obtener, por parte de los alumnos participantes, la interacción verbal suficiente para conseguir suficientes datos observables y analizables.

Recolección de datos e Instrumentos de análisis

Para la recogida de datos se utilizó una grabadora de audio digital y una cámara de vídeo. Se grabaron tres sesiones, la primera de 15 minutos y las dos siguientes de 45 minutos, para el presente trabajo se seleccionó la segunda sesión ya que la primera sesión fue muy breve y la tercera sesión fue destinada principalmente a analizar colectivamente los resultados del juego de la sesión anterior.

Para el análisis de los datos se procedió a la transcripción de los datos audiovisuales. Para ello se numeraron las intervenciones con el fin de hacer más fluida la lectura y la búsqueda de episodios, sub-episodios y segmentos para el análisis. Se realizaron las puntuaciones pertinentes que permitan comprender las pausas y resaltar los gestos de los participantes. Se utilizó la letra cursiva para destacar el diálogo y la letra normal dentro de corchetes para aclarar los gestos, silencios e interrupciones de los alumnos. En la transcripción se agregó a medida que se avanzaba en las jugadas, cuadros de 3x3 casillas para mostrar de una manera visual y clara las jugadas que se iban realizando en el tablero del juego "Cerrar 15", también se utilizaron abreviaturas para indicar a los sujetos que intervenían en las interacciones.

Las abreviaturas destinadas a los participantes del estudio fueron las siguientes:

- P1: Pareja 1
- P2: Pareja 2
- P: Profesora
- 1a y 1b: Alumnos que conforman la pareja 1
- 2a y 2b: Alumnos que conforman la pareja 2
- EG: Estrategia ganadora

Análisis de datos

Para el análisis se partió del modelo utilizado por Schoenfeld (1999) "Models of the Teaching Process". En este modelo una clase es analizada dividiéndose en episodios que a su vez son subdivididos en sub-episodios.

En nuestro caso, se partió de la transcripción de la sesión de manera íntegra, el análisis se centró en la búsqueda de aquellos sub-episodios del diálogo que se identificaron con las fases de la resolución del juego mencionadas en el Cuadro 1. El modelo de análisis usado en nuestro estudio se presenta en el cuadro 2

EPISODIOS **LÍNEAS DE TRANSCRIPCIÓN** Primer nivel de análisis	**SUB-EPISODIOS** **FASES DE LA RESOLUCIÓN DE JUEGO DE ESTRATEGIA** Segundo nivel de análisis	**SEGMENTOS** Cada jugada

Cuadro 2: Sistema de análisis de la sesión en episodios, sub-espisodios y segmentos.
A partir de Schoenfeld, (1999)

En el primer nivel de análisis se han identificado cinco episodios:

I. Inicio de la sesión,
II. Desarrollo de partida: primera partida
III. Desarrollo de partida: segunda partida
IV. Desarrollo de partida: tercera partida
V. Cierre de la sesión.

En el segundo nivel de análisis centrado sólo en los episodios de *desarrollo de partida*, se identificaron los tres sub-episodios correspondientes a las fases de resolución de un problema (ver Cuadro 1). Cada sub-episodio consta de varios segmentos, cada segmento equivale a una jugada. A continuación se describe y ejemplifican los tres sub-episodios identificados.

a. ***Comprensión de los objetivos del juego y de las normas que se deben seguir.*** Esta fase se refiere a toda duda relacionada con el uso del tablero, las fichas y las reglas del juego, como por ejemplo, las direcciones en las que se puede jugar, las posiciones del tablero en las que se puede o no colocar las fichas, etc.

Ejemplo 1: En este segmento el alumno **1b** presenta dudas en relación al lugar donde se pueden colocar las piezas. Cree que se debe colocar el número a continuación de otro número ya colocado. Esto tiene que ver con la falta de comprensión de las normas del juego, en las que cada jugador puede colocar los números en cualquier posición del tablero, sin que sea necesario continuar una alineación ya iniciada.

200.	**2a:**	[Dirigiéndose a 1a] *Lo ponemos* [aquí] *para evitar que ellos ganen después*
201.	**P :**	*Para evitar que ellos ganen.*
202.	**1b:**	*Sí, pero para ponerlo aquí, aquí tendrías que hacer* [primero] *esta línea o aquí…*
203.	**2a:**	[Dirigiéndose a 1b] *No, porque si no quiero…*
204.	**1b:**	*Entonces, ¿cómo lo harías?*
205.	**2a:**	*¡Pero lo puedo poner aquí!*
206.	**P :**	*Claro, ella lo puede poner.*

b. ***Desarrollo de partida:*** Esta fase se refiere a todo proceso de experimentación, realización de conjeturas, diseño de planes parciales, o planificación de una estrategia. En el análisis, cada jugada de un número por parte de una pareja, y la correspondiente verbalización pertenece al desarrollo de partida. Excepto cuando se refieren a la comprensión de las normas u objetivos y cuando validan una estrategia que creen que han encontrado.

Ejemplo 2: En el sub-episodio de desarrollo de partida los alumnos van realizando sus jugadas (cada jugada es un segmento de este sub-episodio). En el segmento del ejemplo un alumno discute con su pareja los movimientos que pueden realizar para evitar que la otra pareja gane. El ejemplo 2 se centra en una jugada que se inicia cuando **2a** decide colocar el número 1 en la posición que impida al contrincante sumar 15.

<table>
<tr><td>138.</td><td>2b:</td><td>[Dirigiéndose a 2a] ¿Pero si lo ponemos [refiriéndose al número 1] en el centro?</td></tr>
<tr><td>139.</td><td>2a:</td><td>No [colocando el 1 en la línea inferior], 7 más 1 da 8, tienen que tener un 7 para 15 y ya está [ya está colocado el 7 en el tablero].
<table><tr><td>8</td><td>7</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>140.</td><td>2b:</td><td>¡Ah!, vale.</td></tr>
</table>

c. ***Validación de la estrategia y análisis de lo que ha pasado.*** Esta fase se refiere a los momentos en que los alumnos intentan explicar y argumentar el porqué una estrategia es, o no es, ganadora. También puede contener varios segmentos que corresponden a cada una de las tiradas.

Ejemplo 3: En este sub-episodio los alumnos argumentan por qué ellos creen que han encontrado la estrategia ganadora. La maestra, **P,** se acerca al grupo y pide a **2a** que explique la estrategia ganadora. **2a** argumenta que el 5 en el centro es la estrategia ganadora porque con todos los números restantes pueden formarse parejas que sumen 10, entonces teniendo el 5 en el centro, siempre tendrá la posibilidad de sumar 15.

<table>
<tr><td>41.</td><td>P :</td><td>[Dirigiéndose a 2a] A ver, espera un momento, ¿por qué dices que has ganado?</td></tr>
<tr><td>42.</td><td>2a:</td><td>Porque pusimos el 5 en el centro que gana siempre, porque con un número como el 9, lo ponemos aquí y luego el 1 y ganamos.<table><tr><td>9</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>5</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>43.</td><td>P :</td><td>¿Y si pusiera un 2?</td></tr>
<tr><td>44.</td><td>1b:</td><td>También.</td></tr>
<tr><td>45.</td><td>P :</td><td>¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>46.</td><td>1b:</td><td>[Mostrando el 2] porque si pones el 2 y el 5 son 7 y con el 8 haces 15.</td></tr>
<tr><td>47.</td><td>P :</td><td>¿Y el 3? [Saca el 2 del tablero y coloca el 3].</td></tr>
<tr><td>48.</td><td>1a:</td><td>Pones el 7</td></tr>
<tr><td>50.</td><td>P :</td><td>¿Y da 10 no?</td></tr>
<tr><td>51.</td><td>2a:</td><td>¿Y el 8? [Busca el 2].</td></tr>
<tr><td>52.</td><td>P :</td><td>Con el 2.</td></tr>
<tr><td>53.</td><td>1b:</td><td>Es verdad.</td></tr>
<tr><td>54.</td><td>P :</td><td>¿Tú crees que han ganado? [Dirigiéndose a 1b].</td></tr>
<tr><td>55.</td><td>1b:</td><td>Sí, sí.</td></tr>
<tr><td>56.</td><td>P :</td><td>¿Y tú piensas que ganan siempre con el 5? [Dirigiéndose a 1b].</td></tr>
<tr><td>57.</td><td>1b:</td><td>Sí.</td></tr>
</table>

Algunos datos del análisis

A continuación se muestran los episodios y los sub-episodios identificados en el análisis de una sesión de juegos, concretamente la segunda sesión. En ella participan cuatro alumnos, y en ocasiones la maestra. El tiempo total es de alrededor de 45 minutos.

Episodios

I. Inicio de la sesión: 5 minutos y 40 segundos
II. Desarrollo de partida: primera partida: 7 minutos y 40 segundos.
III. Desarrollo de partida: segunda partida: 8 minutos y 3 segundos.
IV. Desarrollo de partida: tercera partida: 18 minutos y 20 segundos.
V. Cierre de la sesión: 3 minutos y 23 segundos.

Sub-episodios

- **a)** Comprensión de los objetivos del juego y de las normas que se deben seguir
- **b)** Desarrollo de partida: experimentación, diseño y aplicación de planes parciales.
- **c)** Validación o refutación estrategia y análisis de lo que ha pasado.

Episodios		**Sub-episodios**, en desarrollo de partida	
I. Inicio de la sesión:	5’40’’		
II. primera partida	7’40’’	**b** experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**2’**
		c validación o refutación estrategia y análisis de lo que ha pasado,	**5’ 40’’**
III. segunda partida	8’40’’	**b** experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**1’49’’**
		a comprensión de los objetivos del juego y de las normas que se deben seguir,	**39’’**
		b experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**4’ 30’’**
		c validación o refutación estrategia y análisis de lo que ha pasado,	**1’5’’**
IV. tercera partida	18’20’’	**b** experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**3’ 3’’**
		a comprensión de los objetivos del juego y de las normas que se deben seguir,	**22’’**
		b experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**12’’**
		a comprensión de los objetivos del juego y de las normas que se deben seguir,	**27’’**
		b experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**16’’**
		a comprensión de los objetivos del juego y de las normas que se deben seguir,	**31’’**
		b experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**1’ 6’’**
		c validación o refutación estrategia y análisis de lo que ha pasado	**39’’**
		b experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**4’ 47’’**
		c validación o refutación estrategia y análisis de lo que ha pasado	**51’’**
		b experimentación, diseño y aplicación de planes parciales,	**5’ 6’’**
V. Cierre de la sesión	3’23’’		

Cuadro 3: Episodios y sub-episodios, en desarrollo de partida, identificados en una sesión

Resultados

El objetivo trazado para nuestro estudio era identificar las evidencias que nos permitan describir los procesos heurísticos del descubrimiento de estrategias ganadoras y el posible paralelismo con las fases de resolución de problemas mencionadas por Pólya (1979). Recordamos también los objetivos específicos de este estudio:

- Analizar el proceso de resolución de estrategias ganadoras del juego de estrategia "Cerrar quince".
- Describir las fases de la heurística que los alumnos desarrollan en la resolución del juego de estrategia en comparación a las fases de la heurística de un problema matemático.

A partir del análisis de los datos de nuestro estudio exploratorio encontramos los siguientes resultados:

- En la ejecución del juego, aparecen las fases de resolución de problemas presentadas en el Cuadro 1.
- Las fases identificadas en la resolución del juego, se repiten a lo largo del desarrollo del mismo sin un orden lineal estricto.
- Sin embargo, a partir de este primer análisis, podemos describir el proceso realizado por el grupo estudiado. Al inicio de la sesión encontramos tres sub-episodios en los que los alumnos, experimentan y aplican (b), analizan y validan (c) y experimentan y aplican (b). Sigue un momento en que aparece una duda relacionada con la comprensión de objetivos o normas (a). Los tres sub-episodios siguientes siguen la misma pauta inicial, es decir, los alumnos experimentan y aplican (b), analizan y validan (c) y experimentan y aplican (b). Cuando reaparece la duda (a) se centran en ella en los seis sub-episodios siguientes; alternando uno de comprensión de objetivos y normas (a) con uno de experimentación y aplicación (b). En el momento que el grupo comparte realmente los objetivos y normas de la tarea, el sub-episodio (a) desaparece y se centran de nuevo y alternativamente en, experimentación y aplicación (b) seguido de análisis y validación (c).

Conclusiones y limitaciones

Los resultados anteriormente mencionados nos llevan a concluir que:

- Tenemos indicios de que el juego "Cerrar quince" es un juego de estrategia apropiado para generar un entorno de resolución de problemas, dado que en su ejecución aparecen las fases de resolución de problemas presentadas en el cuadro 1.
- En este momento necesitamos estudiar la misma situación con más grupos de alumnos. Estamos definiendo mejor el papel del adulto que interviene.

Generando una pauta didáctica que guíe el desarrollo de la sesión. Y, estamos estudiando cómo definir mejor las distintas unidades de análisis del siguiente estudio.

Aportaciones didácticas

Los incipientes resultados aportados avalan las numerosas recomendaciones didácticas relacionadas con la pertinencia de la utilización de este tipo de juegos en el aula. Nuestra observación directa y el análisis de los registros en video nos permiten afirmar que no cabe duda de que el juego utilizado genera motivación: el juego en sí no causa tedio y los alumnos se encuentran concentrados, activos y participativos en el desarrollo del mismo. Los alumnos se sintieron motivados a analizar junto con su compañero/a los movimientos necesarios para ganar o no dejar ganar al oponente y buscar en conjunto la estrategia ganadora, desarrollando estas fases como si fueran un problema matemático.

Aprovechamos esta oportunidad para instar a la comunidad de profesores de matemáticas que apliquen en sus aulas este juego y otros parecidos como herramienta metodológica para el desarrollo de habilidades de resolución de problemas y a estudiar y profundizar en esta relación.

Perspectivas de investigación

Del presente estudio surgen nuevos interrogantes que son un aliciente para la siguiente investigación centrada en el juego como entorno de resolución de problemas dentro del aula. Deseamos recolectar y analizar más datos que nos permitan describir de manera más exhaustiva la heurística de la resolución de un juego de estrategia en otros grupos de alumnos. Para el siguiente análisis estamos estudiando basarnos en los episodios presentados por Schoenfeld, (1985), 1. Episodio de lectura; 2. Episodio de análisis; 3. Episodio de exploración; 4. Episodio de planificación; 5. Episodio de implementación; 6. Episodio de verificación o valoración; y 7. Episodio de transición. Nuestra intención es llegar a estudiar y comparar un mismo grupo de alumnos durante el proceso de resolución de un juego de estrategia y durante el de resolución colectiva de un problema típicamente matemático, estableciendo así, a partir de datos empíricos, una explicación más detallada y profunda de las relaciones (semejanzas y diferencias) entre estos dos procesos.

Bibliografía

- Abrantes, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *Uno, revista de Didáctica de las matemáticas, 8,* 7-18.
- Corbalan, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Corbalán, F.; Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *Uno, revista de Didáctica de las matemáticas*, *7,* 71-80.
- Edo, M. (1998). Juegos y matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de primaria. *Uno, revista de Didáctica de las matemáticas, 18,* 21-37.
- Edo, M. (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Edo, M.; Deulofeu, J.; Badillo, E. (2007). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. *Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Granada. Julio, 2007
- Gómez Chacón, I. (1992). Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas. *Apuntes I.E.P.S, 55.* Madrid: Narcea ediciones.
- Kamii, C.; DeVries, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza: implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.
- Kamii, C. & Kato, Y. (2005). Fostering the Development of Logico-Mathematical Thinking in a Card Game at Ages 5-6. *Early Education & Development 16 (3),* 367-383.
- Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.
- Shoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, E.E.U.U: Academic Press, Inc.
- Shoenfeld, A.H. (1999). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior, 18 (3),* 243-261
- Topping, K.; Campbell, J.; Douglas, W.; Smith, A. (2003). Cross-age peer tutoring in mathematics with seven- and 11-year olds: influence on mathematical vocabulary, strategic dialogue and self-concept. *Educational Research, 45 (3),* 287-308.
- Vygotski, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores Lev S. Vygotski: edición al cuidado de Michael Cole.* Barcelona.

Edo Basté, Mequè. Doctora en Didáctica de las Matemáticas, Licenciada en Filosofía y Ciencias de la Educación, Diplomada en Profesorado de Educación General Básica. Profesora investigadora de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona. Miembro del Grupo de Investigación PREMAT (Resolución de Problemas y Educación Matemática). Líneas de investigación: Resolución de Problemas, juego y matemáticas. Buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil. Matemáticas, interacción y contextos. Meque.Edo@uab.cat
Algunos trabajos disponibles en: http://dewey.uab.es/medob/

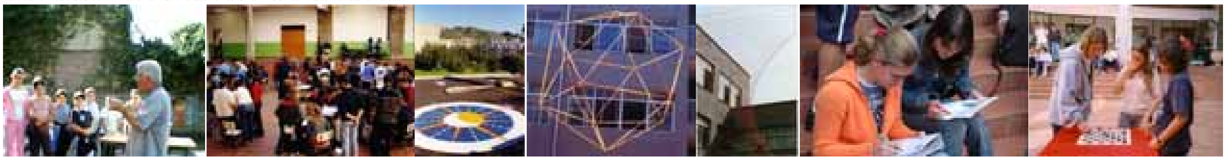
Deulofeu Piquet, Jordi. Licenciado en Matemáticas y Doctor en Ciencias de la Educación. Profesor titular de didáctica de las matemáticas. Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Universitat Autònoma de Barcelona. Coordinador de PREMAT (Resolución de Problemas y Educación Matemática) grupo de investigación de la UAB. Líneas de investigación: Resolución de problemas, juego y matemáticas. Competencia matemática. Formación del profesorado. Divulgación de las matemáticas. jordi.deulofeu@uab.cat

Edelmira Badillo Jiménez. Doctora en Didáctica de las matemáticas, Licenciada en Educación con especialidad en Matemáticas, Diplomada en Profesorado de Educación General Básica y estudiante de Psicopedagogía en la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Formadora permanente de maestros y profesores de matemáticas y Docente de cálculo mental y geometría a nivel de infantil y primaria. Miembro del Grupo de Investigación PREMAT (Resolución de Problemas y Educación Matemática) Líneas de investigación: El pensamiento matemático avanzado y Resolución de Problemas, juego y matemáticas. Edelmira_badillo@yahoo.es

Baeza Toro, Mirian. Profesora de Educación General Básica, Licenciada en Educación, Estudiante de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Barcelona. Miembro del Grupo de Investigación PREMAT (Resolución de Problemas y Educación Matemática). Actual línea de investigación: Resolución de Problemas, juego y matemáticas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 77-84
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

C.E.P. Salesiano "Santa Rosa" y C.E.P. San Francisco
Huancayo - Perú

Taps hexagonal en el desarrollo del Pensamiento Lógico

Ivan Roberth Rojas Marticorena y Rosa Rubio Reyes

Resumen

El juego consiste en armar los taps hexagonal con números y usar los signos matemáticos de las operaciones básicas, intermedias y avanzadas según el nivel de que se encuentre. El alumno debe tratar de formar 5 a más ecuaciones en poco tiempo con los taps hexagonales. En el presente proyecto hemos elegido los hexagonales que se adaptan mejor a nuestros intereses y abarcar los ámbitos de las matemáticas ya que hay trabajos que no se dedican a los niveles de transferencia y las dimensiones sociales.

Abstract

The game consists of arming the taps hex numbers and using mathematical signs of the core operations, intermediate and advanced levels as it is. The student must try to form 5 to more equations in a short time with taps hexagonal. In this project we chose the hexagonal that are better suited to our interests and cover the fields of mathematics as there are jobs that are not dedicated to the levels of transfer and the social dimensions.

Introducción

Los taps hexagonal son instrumentos de juegos muy utilizados hoy en día y son de preferencia en juegos grupales de alumnos, en los recreos o juegos de amigos en el barrio.

El juego consiste en armar los taps hexagonal con números y usar los signos matemáticos de las operaciones básicas, intermedias y avanzadas según el nivel de que se encuentre. El niño debe tratar de formar 5 a más ecuaciones en poco tiempo con los taps hexagonales.

Los taps los hay circulares, hexagonal, triangulares en el presente trabajo hemos elegido los hexagonales que se adaptan mejor a nuestros intereses y abarcar los **ámbitos de las matemáticas** ya que hay trabajos que no se dedican a los **niveles de transferencia y las dimensiones sociales.**

En este sentido, la escuela, tiene como obligación crear las condiciones para el desarrollo del niño. Y esas, se hallan plasmadas cuando, la escuela selecciona el contenido de la actividad (entendiendo como contenido las condiciones de vida material) y la forma (la conciencia social), ejercitar y practicar constantemente las acciones que el docente le asigna para lograr su consolidación, reforzar los aprendizajes adquiridos, formar hábitos, cumplir las tareas asignadas, desarrollar la educación general de la comunidad y dar nuevas exigencias a los alumnos, hasta que finalmente sepa transformar su realidad.

Justificación

Se pretende dar a conocer los taps hexagonal como materiales de tipo manipulativo, con los que se puede trabajar la mayoría de los contenidos correspondientes a los diferentes ámbitos de la matemática para alumnos en edades comprendidas entre 7 a más años.

Estos materiales se han elaborado teniendo en cuenta algunas partes de unas estructuras hexagonales tomadas de los panales de las abejas como base y que son muy adecuados para el uso en aula la precisión al momento de unirlos. Se proponen unos modelos de actividades a desarrollar con estos materiales, que pueden servir de ejemplo para crear otras similares.[1]

Y para solucionar este problema, el presente estudio, tiene como propósito alcanzar a los alumnos del nivel primario una propuesta de cómo los taps hexagonal a partir del adecuado uso en los diferentes ámbitos de la matemática (aritmética, geometría, algebra); lo cual permitirá desarrollar el pensamiento lógico de los alumnos del colegio mediante el juego.

Metodología

Como método general se utilizará el Método Científico que permitirá la observación y formulación del problema de la influencia de los taps hexagonal en el desarrollo del pensamiento lógico.

Luego de ello, ayudará a la construcción de la hipótesis como respuesta a la interrogante de investigación, la operacionalización teórica de las variables, la confrontación y análisis estadístico de los resultados y la prueba de hipótesis.

En todo este método también se aplicarán métodos lógicos como la inducción y la deducción cuyo principio en el primero será a partir de observaciones aisladas y de la abstracción cuando se trata de la segunda.

[1] Santiago, L. y Gonzalo, T. (2006). "Abejas y geometría"

Estrategias para la aplicación, Recolección y Procesamiento de los datos obtenidos

- Evaluación de entrada a los alumnos.
- Clasificación y diseño de los alumnos en grupos homogéneos y heterogéneos.
- Aplicación de los taps hexagonal para formar ecuaciones.
- Evaluación después del experimento.

Materiales y Equipos de Investigación

Taps hexagonal: 60 – 100
1 tijera
Plumón (negro – rojo - azul)
Lápices de colores
Cartulina o papel bond de 80 grs. 4 hojas
Papel bond de 80 grs. (80 hojas)
Cinta de embalaje – masking tape.
Recipiente de plástico con tapa 04
Cámara fotográfica.

Procedimiento

1. Se cortan las cartulinas en forma de hexágonos (taps) de lo contrario se tienen los taps normales (circulares) y se procede a cortar los extremos formando hexágonos.
2. Se escriben los números en los taps hexagonal ya formados.
3. Los taps deben estar en orden número formando grupos de 10 unidades cada uno es decir: del 0 al 10; 11 al 20,… de manera que facilite su ubicación.
4. Forrarlos con la cita masking tape para no deteriorarlos.

Figura 1. Materiales para elaborar taps

Reglas del Juego

1. El juego es entre dos o más participantes, el objetivo del juego es obtener la mayoría de puntos.
2. A cada jugador se le reparte una tarjeta de puntaje.
3. Para obtener puntos tienes que hacer ecuaciones matemáticas válidas.
4. Para cada ecuación que se crea cada pieza vale un punto, ejemplo: $5+3=8$, la ecuación vale 5 puntos, porque se usan 5 piezas.

Taps hexagonal
Tarjeta de puntaje

Nombre: ____________________

Ecuación	**Puntos**
$3+4=7$	**5**

Figura 2. Tarjeta de puntaje

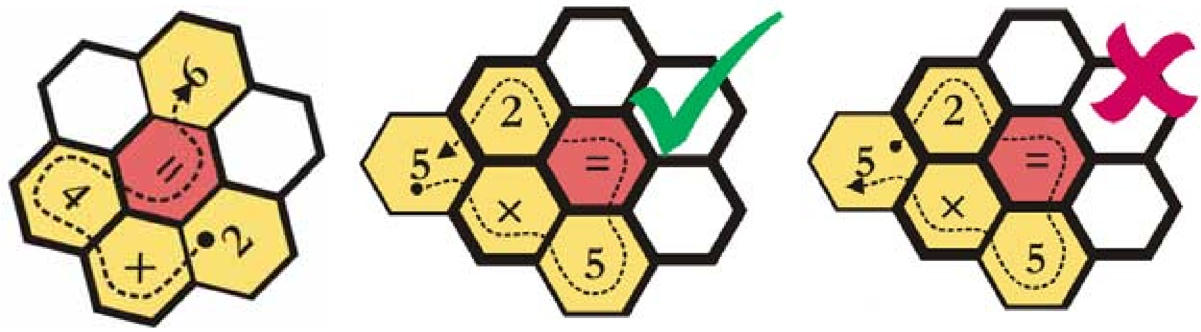
Inicio del juego

1. Encontrar la pieza “roja” y ubicarla en el cuadro del tablero (tales como una mesa) esparcir las piezas de los taps hexagonal volteadas a la pieza $"="$.
2. El jugador con el mayor número empieza usando los signos matemáticos $+,-,\times,\div$. Ubica las piezas al revés, en el grupo de las piezas volteadas; el juego continúa en dirección horario u antihorario.
3. Cada jugador escoge una pieza de los demás jugadores. En su turno el jugador pone la pieza, la pieza al menos debe tocar a otra pieza en juego.
4. Cada pieza usada en las ecuaciones vale un punto. Escribe la ecuación en la tarjeta de de puntajes de los taps hexagonal, incluyendo el puntaje total para cada ecuación. El jugador tiene 3 minutos para completar su turno.
5. El juego termina después de que no existe piezas en las manos de los jugadores.
6. El jugador con el puntaje más alto gana.

Figura 3. Alumnos escuchando las indicaciones del juego

Ejemplos de juego

$2+4=6$	$5\times5=25$	$52=5\times5$
Total de puntos: 5	Total de puntos: 6	Total de puntos: 0



(**1**) (**2**) (**3**)

Figura 4. Seguimos las líneas curvas entrecortadas y daremos con el resultado adecuado en el ejercicio Nº 1, 2; mientras en el ejercicio Nº 3 no se observa la igualdad esto significa que esta mal orientado el punto de inicio y fin

Indicadores

Analiza los taps hexagonal y los caracteriza.
Seleccionar el o los criterios de ordenamiento (lógicos, cronológicos, etc).
Clasificar y **ordenar** estos rasgos.
Determinar los objetivos de la observación.
Operar y **resuelve** ejercicios mentalmente.
Identificar las habilidades del pensamiento durante el juego.

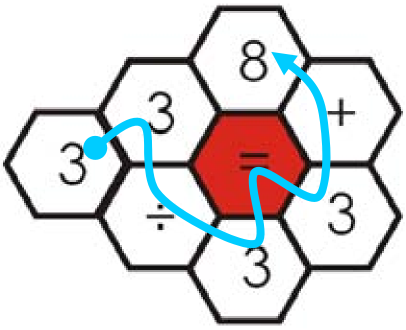
Figura 5. Ecuación creada por el alumno Christian Zárate Porras
$68 \div 2 + 3 = 8 \times 4 + 5$, número de puntos es 12.

Figura 6. Alumnos del quinto grado trabajando en equipo los taps hexagonales

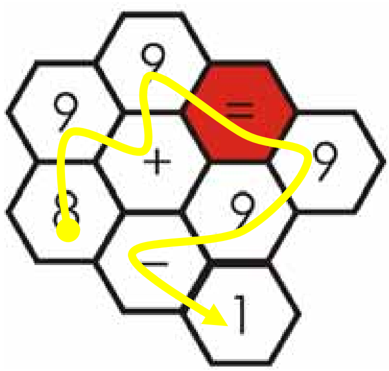
Habilidades del desarrollo del pensamiento lógico

Observar
Identificar
Clasificar
Ordenar y
Generalizar

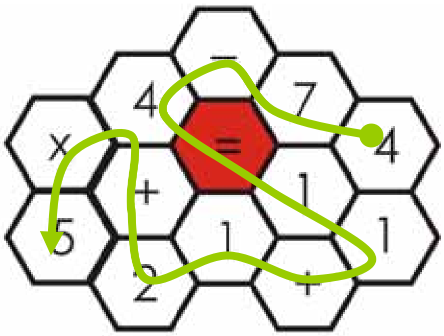
Ecuaciones creadas por los alumnos



$89+9=99-1$



$33 \div 3=3+8$



$47-4=11+12+4 \times 5$

Conclusiones

Al concluir la experimentación de los taps hexagonal en el desarrollo del pensamiento lógico en los alumnos del quinto fueron los siguientes:

En forma general los taps hexagonal sistemáticamente diseñados y aplicados, influyen en contribuir a la solución de problema de ecuaciones en forma de juegos desarrollando la habilidad del pensamiento lógico identifica, clasificar, ordenar, generalizar y observar.

En forma particular, los taps hexagonales en todos los resultados finales han influido significativamente en el desarrollo del pensamiento lógico en los alumnos del quinto grado "C" a comparación del quinto grado "B" con notas aprobatorias de "A", con más de un 85%.

Bibliografía

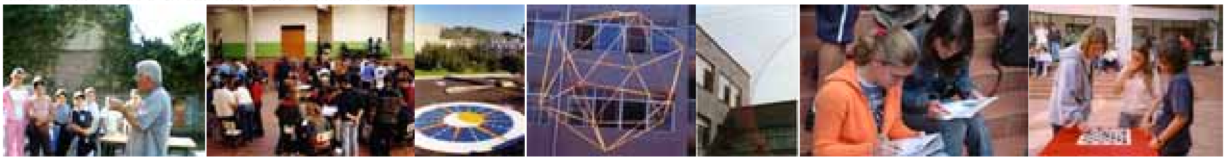
- Barahona, F. "Metodología de trabajos científicos" Editorial IPLER Bogotá.
- Garcia, J. La enseñanza Primario en el umbral del Siglo XIII. 1963 UNESCO 1988, pág. 120 a 229.
- Morales, M. (2006). "Las fracciones según los pescantes". Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 3 - 19.
- Ministerio de Educación, (2005) "Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular, 122 a 129.
- Piaget, J. (1974). Estructuralismo. Orbis.
- Santiago, L. y Gonzalo, T. (2006). "Abejas y geometría". Revista Iberoamericana de Educación Matemática. 139 – 142.

Ivan Roberth Rojas Marticorena, Licenciado en Educación. Actualmente Profesor del C.E.P. Salesiano "Santa Rosa" – Huancayo, cursa el programa de Maestría en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Ha publicado artículos en diferentes revistas de educación matemática y trabajos de investigación en educación. Es miembro de la Federación Peruana de Juegos de Ingenio.
e-mail: irojasm5@hotmail.com y vanslife9@yahoo.es

Rosa Rubio Reyes, Licenciada en Educación. Directora del C.E.P. San Francisco – Huancayo

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 85-89
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

IES Cristobal de Monroy e IES Profesor Tierno Galván en Alcalá de Guadaira
IES López de Arenas de Marchena
Sevilla - España

Jugando con papel y tijeras

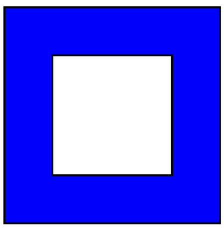
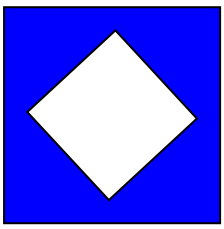
Todos sabemos, y lo hemos hecho alguna vez, que doblando una servilleta de papel varias veces y haciéndole varios cortes, se pueden obtener verdaderas monerías al abrirlas, o que, doblando una tira de papel varias veces y realizando algunos cortes podemos asimismo obtener guirnaldas muy atractivas.

Esta fue la idea originaria de la actividad que vamos a desarrollar en este artículo.

Si le damos a los alumnos y alumnas un cuadrado de papel y les pedimos que hagan una servilleta decorada, quedaremos asombrados de la gran variedad de decoraciones distintas que se pueden obtener pero no deja de ser ésta una actividad con poco sentido, aunque sí hay que reconocer que es muy entretenida, a la vez que económica, ya que el único material necesario son tacos de papel cuadrado para notas y tijeras.

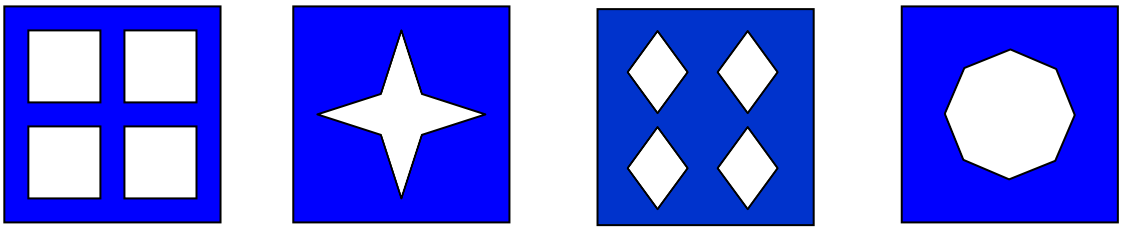
Por eso se nos ocurrió la idea de que nuestros alumnos y alumnas no sólo utilizaran la imaginación para construir mil y una servilletas decorativas sino que utilizaran la lógica y la visión espacial para construir las más sencillas formas geométricas, poniéndoles como cortapisas el hecho de que debían conseguirlas con un solo corte recto de tijeras en el interior del cuadrado de papel.

Para ello comenzamos a hacer algunas pruebas de las más sencillas, pidiéndoles que doblaran dos veces un papel y obtuvieran, de un sólo corte, un cuadrado o un rombo.

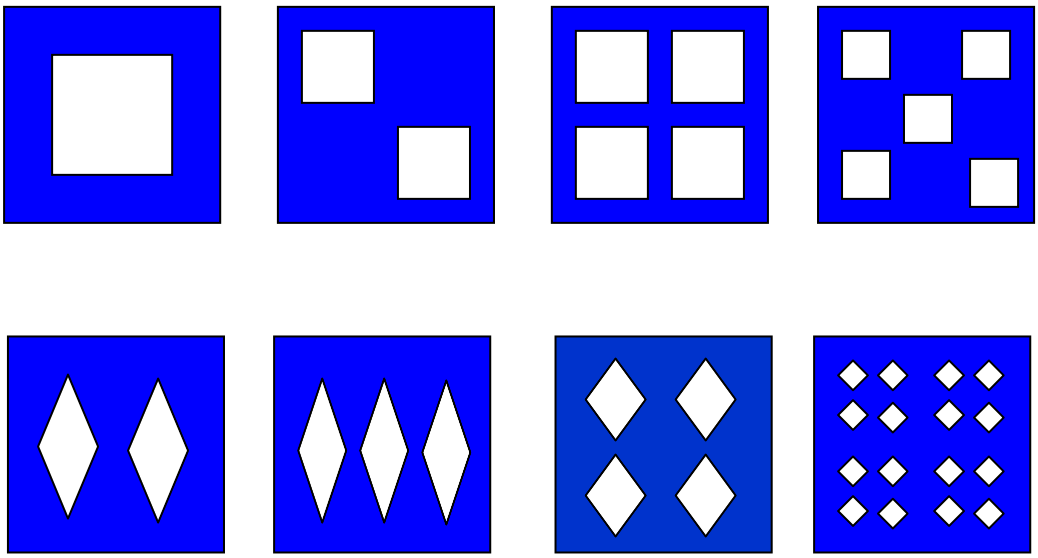
Hasta aquí la actividad les resultó bastante fácil y motivadora. Algunos descubrieron, a la primera, que la diferencia entre ambas figuras estaba en la forma en que dobláramos el papel, superponiendo los lados paralelos o bien doblando por las esquinas.

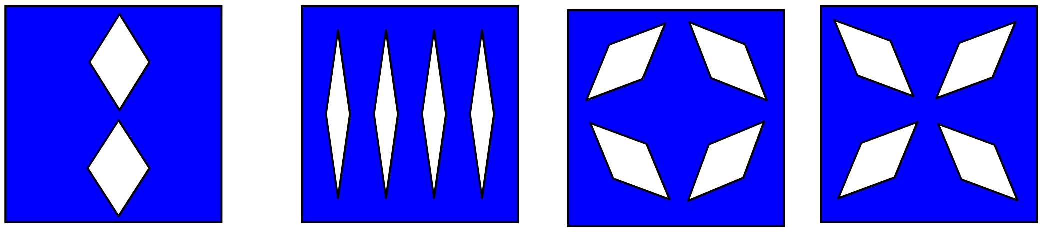
Posteriormente se les invitó a que investigaran para ver cuáles y cuántas figuras eran capaces de obtener. Así estuvieron un buen rato haciendo dobleces y cortes, obteniendo las diferentes formas cerradas pedidas. Algunas se les repetían a pesar de haber doblado de forma distinta el papel, otras veces salían formas abiertas no pedidas. Unos a otros se iban explicando la manera de obtener las figuras que a unos les salían y a otros no.



Cuando llegaron a un punto de atasco, en el que ya no eran capaces de obtener nada distinto era la hora de hacerlos pensar y para ello se les hizo la siguiente propuesta:

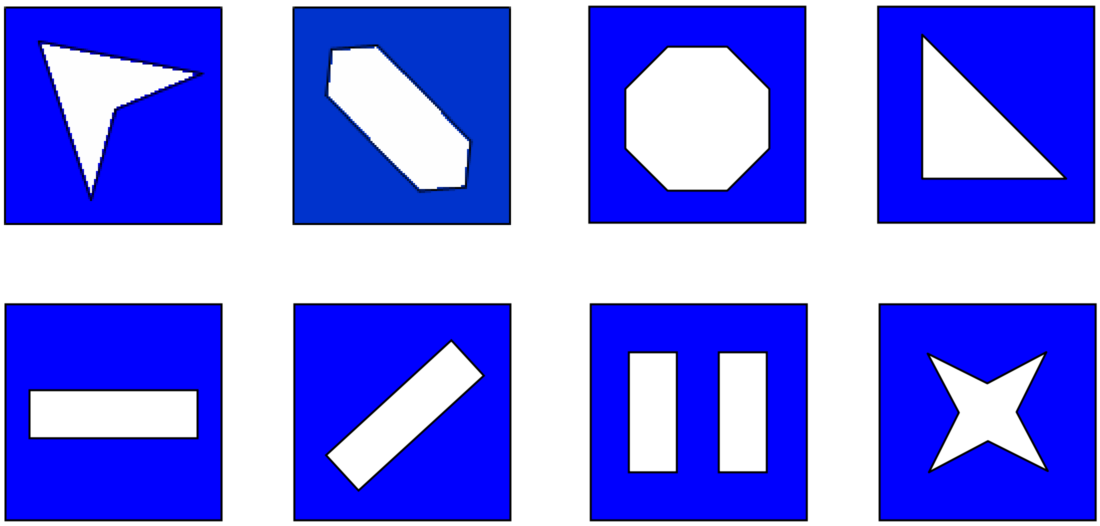
Que intentaran obtener las figuras analizando los ejes de simetría y pensando los lugares por los que debían doblar el papel para que, al realizar el corte oportuno, la figura se saliera repetida una, dos, tres, cuatro veces… También debían deducir de antemano la disposición en la que queríamos que aparecieran las figuras:





La tarea fue dura pero, entre unos y otros, lograron conseguir prácticamente todos los dibujos que están arriba representados.

Y la última propuesta que se les hizo fue la de obtener una figura concreta y tenían que buscar la forma de obtenerla.



Los más avispados se buscaron la estrategia de recortar primero la figura y posteriormente ensayaron la manera de doblar el papel hasta conseguir obtenerla.

Toda la actividad estuvo amenizada y ayudada en todo momento por una presentación proyectada en la que todos los alumnos y alumnas podían ir siguiendo con facilidad los pasos necesarios para conseguir las distintas figuras, evitando así posibles atascos prolongados y el consiguiente desánimo de los alumnos.

http://i-matematicas.com/feria2007/papel/index.htm

Hay que resaltar que la actividad les gustó bastante y en ningún momento se sintieron desfallecer sino todo lo contrario, en todo momento se mostraron motivados y totalmente entusiasmados por conseguir cada uno de los objetivos que se les marcaban lo más rápido posible, con lo cual también había un poco de competitividad sana.

Puesta en escena de la actividad.

Dado el rotundo éxito de la actividad y el grado de satisfacción expresado tanto por los alumnos y alumnas como por el profesorado, unido todo al escaso coste económico que conllevaba su desarrollo, se decidió llevarlo a la práctica en la V Feria de la Ciencia de Sevilla.

En este proyecto educativo y cultural, el principal objetivo es la divulgación de la Ciencia fundamentalmente por parte de los alumnos de los distintos centros educativos de la provincia, extensible a toda Andalucía. Se pretende favorecer el intercambio de experiencias y la formación de los ciudadanos en relación a las enseñanzas de las Ciencias y su divulgación.

En nuestro stand, llamado “Matemáticas interactivas y manipulativas”, las matemáticas con tijeras y papel era una de las actividades que explicaban nuestros alumnos a mayores y a pequeños. Dicha feria dura 3 días completos y pasan por ella miles de personas, tanto alumnos y profesores de distintos centros educativos como padres y demás ciudadanos.

Colaboramos conjuntamente profesores y profesoras, alumnos y alumnas de tres centros educativos: IES Profesor Tierno Galván e IES Cristóbal de Monroy, ambos de Alcalá de Guadaíra, y el IES López de Arenas de Marchena, los tres de la provincia de Sevilla.

http://www.youtube.com/watch?v=IFeudHlhqks

http://www.youtube.com/watch?v=sKvI_t_Rxog

Y hay que destacar que esta actividad que en su momento enganchó a nuestros alumnos y alumnas, también logró enganchar a gran cantidad de público, tanto infantil como adulto, es decir, es una actividad apta para todos los públicos.

Inmaculada Ordóñez Ríos, Elena Jiménez Jiménez y Joaquín García Mollá

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Historia Historia Historia Historia
Junio de 2008, Número 14, páginas 91-106
ISSN: 1815-0640
Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

O movimento da matemática moderna nas séries iniciais e o primeiro livro didático

Denise Medina[1]

Resumo

O objetivo do artigo é investigar as rupturas provocadas em relação às inovações editoriais, curriculares e metodológicas com a publicação do livro *Curso moderno de Matemática*, de autoria de Manhucia Liberman, Lucília Bechara e Anna Franchi. Lançado em 1967, podemos considerá-lo como inovador se compararmos com todos os outros livros do gênero que circulavam nas escolas da época. O texto considera o livro como o primeiro impresso didático elaborado por matemáticos, durante o Movimento da Matemática Moderna – MMM, para as séries iniciais. As autoras, apoiadas pela editora, seguem a proposta estruturalista do MMM, privilegiando o método intuitivo, sem preocupações de sistematização e nomenclatura. Nossa investigação aponta considerações sobre a maneira como o livro foi publicado e veiculado, como uma proposta renovadora, diferenciada pela diagramação e estilo, com folhas soltas, desenhos coloridos e nova distribuição de conteúdos, carregando pretensões de ser caracterizado como moderno, seguindo proposta metodológica de bases científicas. As autoras definem o livro como produto de experiências, abalizadas nas idéias de Jean Piaget, justificando o uso de cores, de quadrinhos e do diálogo com o aluno pela evolução tecnológica e da psicologia, sendo considerado como o primeiro livro consumível.

Algumas considerações sobre a análise do livro didático

Como sabemos a partir dos anos de 1970 opera-se uma mudança de perspectiva na análise de livros didáticos, com a introdução da idéia de que apenas a análise de conteúdos, não dá conta de responder coerentemente às novas questões, sendo necessário abranger toda a trajetória do livro, desde sua concepção pelo autor até seu descarte pelo professor, incluindo sua conservação.

Hoje o livro didático é um objeto de muitas pesquisas científicas em razão da multiplicidade de suas funções, da diversidade de agentes que ele envolve e da complexidade e coexistência com outros suportes educativos.

De acordo com Carvalho (2007), todo livro didático é produto de uma estratégia editorial dotada de características que lhe são específicas, com contornos variáveis, adequando-se a condições impostas pelo mercado editorial, e a objetivos historicamente variáveis, de natureza econômica, cultural e política. Nesse enfoque, as análises iniciais revelaram a urgente necessidade de instrumentos conceituais, na perspectiva de uma história cultural do livro, e de seus usos, procurando vestígios

[1] GHEMAT–SP. E-mail: denise.medina@uol.com.br

que ajudem a entender os dispositivos mobilizados, investigando suas intenções em sua constituição, isto é, construindo novos significados. Trata-se de uma reflexão crítica com base em sua produção, circulação e usos, como produto de estratégia governamental em complexa correspondência com estratégias políticas e pedagógicas determinadas.

Dentre os autores contemporâneos utilizados por historiadores, que mais contemplam nosso estudo, optamos por Michel de Certeau e Roger Chartier para auxiliarem a compreender o grande sucesso editorial do livro e suas relações com a introdução do ideário[2] do MMM na escola primária entre 1960 e 1980, período de expansão da escola pública.

Além disso, o estudo do livro demonstrou a necessidade de compreendermos os processos de modificação, organização e expansão do Ensino Primário[3] no país, a fim de entendermos a dinâmica das reformas educacionais e relacioná-las com as reorganizações curriculares que levaram em conta o ideário do MMM, e a ampliação das publicações didáticas.

Também consideramos a construção do panorama de expansão dos sistemas de ensino, para subsidiar nossa reflexão sobre a escola primária proposta, a fim de encontrarmos relações do Movimento com a legislação educacional, e as repercussões dessa legislação no sucesso editorial do *Curso Moderno de Matemática*, analisando as apropriações do ideário do MMM, no decorrer do processo.

Avaliamos que o conceito de apropriação[4] de Roger Chartier foi fundamental para compreendermos o caminhar escolhido por matemáticos para a oficialização do MMM no Ensino Primário, relacionando-o com os conceitos de tática[5] e estratégia[6] de De Certeau. Só assim compreendemos as possibilidades de consumo de um mesmo ideário, no caso o MMM, nos livros didáticos.

---

[2] Estaremos caracterizando como ideário um conjunto de idéias que norteiam um Movimento.

[3] Estaremos chamando de Ensino Primário, o que hoje corresponde às quatro primeiras séries do ensino fundamental.

[4] Apropriação, a nosso ver, visa uma história social dos usos e das interpretações, referida a suas determinações fundamentais e escrita nas práticas específicas que a produzem. Assim, voltar à atenção para as condições e os processos que, muito concretamente, sustentam as operações de produção do sentido (na relação de leitura, mas em tantos outros também) é reconhecer, contra a antiga história intelectual, que nem as inteligências nem as idéias são desencarnadas, e, contra os pensamentos do universal, que as categorias dadas como invariantes, sejam elas filosóficas ou fenomenológicas, devem ser construídas na descontinuidade das trajetórias históricas. (CHARTIER, 1991, p. 180).

[5] Um cálculo que não pode contar com um próprio, nem portanto com uma fronteira que distingue o outro como totalidade visível. A tática só tem por lugar o do outro. Ela aí se insinua, fragmentariamente, sem apreendê-lo por inteiro, sem poder retê-lo à distância, cf. De Certeau, 2003, p. 46.

[6] Estratégia é "o cálculo (ou a manipulação) das relações de forças que se torna possível a partir do momento em que um sujeito de querer e poder (uma empresa, um exército, uma cidade, uma instituição científica) pode ser isolado". A estratégia postula um lugar suscetível de ser circunscrito como algo próprio e ser a base de onde se podem gerir as relações com uma exterioridade de alvos ou ameaças, cf. Certeau, 2002, p. 99.

Só assim, podemos inferir sobre as relações entre a publicação e divulgação do livro, determinando os lugares de poder onde foi produzido: o da editora, visando à ampliação do mercado editorial, e do governo visando à implantação e circulação de uma reforma curricular.

De Certeau considera que as *estratégias* são capazes de produzir e impor. Desta forma, podemos problematizar como o livro didático, foi produzido a partir de um lugar de poder (editora/editor), um lugar de previsão e antecipação, para fazer circular os novos livros didáticos com o ideário do MMM.

Segundo Chartier:

> Não existe texto fora de suporte que o dá a ler e que não há compreensão de um escrito, qualquer que ele seja que não dependa das formas através das quais ele chega a seu leitor (1991, p. 127).

É um procedimento no qual não se pode dispensar a análise da configuração do material impresso como forma produtora de sentido, como papel, capas, diagramação, figuras, disposição do texto, tipografia, tiragem, etc.

O MMM no Brasil

As transformações na sociedade decorrentes da Revolução Francesa e da Revolução Industrial já sinalizavam a carência de adaptações em todos os campos da ciência, exigindo transformações também na escola. O direito ao acesso a essas novas descobertas obrigava pesquisadores e professores a refletirem sobre o ensino de matemática numa dimensão mais utilitária, com a possibilidade da compreensão da disciplina matemática por um maior número de cidadãos, para o ingresso no novo mercado de trabalho.

Para tentar compreender a produção, distribuição e circulação do livro estudado, precisamos percorrer, desde sua elaboração, até a adoção em sala de aula, e analisar como funcionava a escola primária de 4 anos, buscando determinar os níveis de controle estatal sobre o processo de validação dos livros didáticos.

É necessário, contudo, buscar reflexões sobre quais mudanças estruturais, de organicidade no Ensino Primário foram significativas e provocaram mudanças na redistribuição curricular de matemática, nas Leis de Diretrizes e Bases de 1961 e a de 1971, e quais estratégias foram utilizadas para fazer circular as reformas pretendidas no ensino de matemática.

A aceleração no ritmo do crescimento econômico, e na demanda social de educação após 1950, agravou a crise do sistema educacional que há muito tempo já vinha deficiente, justificando os vários acordos de colaboração técnica e financeira entre o MEC e a Agency for International Development (AID). Esses acordos objetivavam diagnosticar e solucionar problemas da educação brasileira, pois o governo precisava colocar todos na escola, para formar mão-de-obra com alguma educação e treinamento, ao mesmo tempo, muito produtiva e barata.

Nesse contexto, as mudanças no ensino defendidas pelo MMM eram as mais adequadas a esse novo contexto sociopolítico-econômico, pois prometia uma matemática mais adequada aos novos tempos, acesso aos novos avanços da disciplina, permitindo participação numa nova sociedade tecnológica e mais científica.

Era preciso limitar as funções conferidas à escola e, assim, viabilizar a entrada de um enorme contingente de crianças, contando com os mesmos instrumentais disponibilizados até então, e o ideário propagado pelo MMM adequava-se perfeitamente com a política econômica adotada pelo país, propiciando a divulgação dessas idéias nas publicações oficiais destinadas a professores nesse período.

O estado São Paulo, centro de aglutinação das idéias de reformas defendidas pelo MMM, foi o primeiro a expandir seu sistema de ensino fornecendo, modelos e mão-de-obra especializada, por meio de assessoria ou cursos de capacitação, em outros estados, tais como Espírito Santo, Goiás, Mato Grosso, Paraná, Pernambuco, Piauí e Santa Catarina.

Nesse contexto de expansão, podemos dizer que a divulgação do ideário do MMM, em todos os documentos oficiais destinados a professores, especialmente em São Paulo, foi um dos mecanismos utilizados pelo Estado, para divulgar e fazer circular as novas propostas de ensino e implementar as novas diretivas para o ensino de matemática.

Sobre as reformulações nas séries iniciais

No cenário montado, percebemos as transformações ocorridas na escola primária entre 1961 e 1980. Vários fatores são considerados em nossa análise para tentar explicar como as reformulações no ensino impactaram a reestruturação curricular de matemática e como equipes foram formadas para articular as reformas educacionais impregnadas com o ideário do MMM, que defendia uma matemática acessível e agradável a todos.

Após a realização de um curso[7], na Universidade Mackenzie, envolvendo tópicos relacionados à Matemática Moderna para professores paulistas, promovido

[7] Articulado e planejado pelo professor Sangiorgi, o curso foi financiado pela CADES (Campanha de aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário) e teve como professores George Springer, Jacy Monteiro e o próprio Sangiorgi. Realizado em ago./set. de 1961.

por Sangiorgi, foi fundado o GEEM[8], um grupo cuja atuação foi de extrema importância para a implantação e divulgação do MMM no Brasil.

O referido curso impulsionou a formação de grupos de estudos sobre as novas idéias difundidas pelo MMM, deu oportunidade a outros profissionais de se aglutinarem em todos os outros segmentos de ensino e possibilitou novas experiências e metodologias no ensino de matemática.

A exemplo disso, duas professoras participantes do *curso do Mackenzie*, Manhúcia P. Liberman e Lucília Bechara, ambas do GEEM, e autoras do livro *Curso Moderno de Matemática* que nos propomos a problematizar, iniciaram sua parceria a nas produções para o Ensino Primário. (MEDINA, 2007)

A importância do GEEM para a difusão das idéias modernistas foi ressaltada em 1963, quando o grupo foi declarado um órgão de serviço público, e assim, podendo contar com apoio oficial para seus projetos. Desta maneira, aos professores estaduais era concedida dispensa de ponto para freqüentar os seus cursos.

Além disso, seus componentes tinham a facilidade de freqüentar cursos nacionais e internacionais com bolsa de estudos e contavam com financiamentos oficiais para cursos de capacitação de professores, o que aumentava o prestígio do Grupo em todo o Brasil.

Concomitantemente a esses cursos, ocorriam os cursos nos Ginásios Vocacionais[9]. Em ambiente agradável, reunia-se uma elite de professores de matemática competentes, com grande potencial criativo e empenhado em realizar um trabalho de reformulação curricular no qual acreditavam, desejando mudanças no ensino de matemática.

A convivência nesses espaços uniu as professoras Liberman, Bechara e Franchi[10] nos estudos sobre a aprendizagem infantil e, a partir de 1963, elas passaram a organizar e ministrar cursos[11] em todo o país, como representantes do GEEM.

[8] Grupo de Estudos do Ensino da Matemática.
[9] Os Ginásios Vocacionais foram escolas pioneiras na rede pública de São Paulo nos anos de 1960. Continham uma proposta pedagógica revolucionária, que possibilitaram a implementação de uma série de inovações em relação à escola tradicional, com experiências na metodologia, e desenvolvimento de novos métodos, processos de avaliação do aluno, currículo e vínculo da comunidade com a escola. Foram extintos pelo governo militar em 1969.
[10] Franchi trabalhava como professora primária no Experimental da Lapa, aplicando em sua classe as atividades criadas nos grupos de estudo. Mais tarde licenciada em matemática pela USP, foi designada como Supervisora de Matemática do Grupo Experimental Dr. Edmundo de Carvalho.
[11] O primeiro curso organizado pelo GEEM, ministrado pelas professoras Liberman, Bechara e Franchi, destinado a professores primários, aconteceu em São Paulo em de fevereiro de 1963, e contou com a participação de 300 professores. (Folha de São Paulo, 06/02/1963, apud NAKASHIMA, 2007).

Nas evidências apontadas no exame realizado nas atividades patrocinadas pelo GEEM, a partir de 1963, percebe-se o caráter predominantemente formador de professores primários nos novos conteúdos, nos cursos organizados pelo Grupo. Os cursos objetivavam instrumentalizar os professores para as reformas pretendidas.

Podemos supor, então, que com a introdução da matemática moderna em todas as discussões referentes à educação, a procura por formação pelos professores primários determinou a organização de cursos e publicações que dissipassem a insegurança desses professores, já que estes não tinham formação para os novos conteúdos.

Essa pluralidade de fatores impulsionava a criação de cursos de capacitação e o aumento significativo da participação de professores primários em várias partes do país. O estado São Paulo foi o primeiro a expandir seu sistema de ensino, e a partir daí, fornecendo modelos e mão-de-obra especializada, por meio de assessoria ou cursos em outros estados, tais como Espírito Santo, Goiás, Mato Grosso, Paraná, Pernambuco, Piauí e Santa Catarina.

Nesse contexto de expansão, verificamos a aceleração do desenvolvimento do mercado de livros escolares. A introdução do MMM no Brasil possibilitou o aumento do consumo de livros didáticos representando um marco no acesso à educação elementar.

Podemos dizer que a ação do GEEM, em São Paulo, foi um dos mecanismos utilizados pelo Estado, para divulgar e fazer circular as novas propostas de ensino bem como para implementar as novas diretivas para o ensino de matemática.

Curso Moderno de Matemática para a escola elementar: dados sobre as autoras, produção e circulação

Na década de 1960, os livros didáticos também começam a introduzir as novas propostas para o ensino de matemática. Com o sucesso do livro de Sangiorgi em 1963, pela Companhia Editora Nacional, baseado no ideário do MMM, com modelo estruturalista, ênfase na linguagem de conjuntos e com projeto editorial inovador, a editora convida Liberman para escrever um livro direcionado ao ensino primário.

> Eu não quis fazer sozinha. Primeiro porque eu não era professora primária, então convidei a Lucília e a Anna. No primário não tinha nem um livro feito por matemático. (LIBERMAN, depoimento oral, 2007).

Nessa época, as autoras começam a discutir a elaboração do livro e são apoiadas pela editora, quando decidem seguir a proposta estruturalista defendida pelo MMM, porém com adaptações relevantes em conseqüência da faixa etária para a qual o livro seria destinado.

> Manhúcia me chamou dizendo que tinha uma proposta para fazer um livro para o Ensino Primário. Então comecei a dedicar mais estudos, ao Ensino Primário. (BECHARA, depoimento oral, 2007).

As autoras selecionadas pela editora, para implementar o projeto de ampliação de mercado editorial escolar, eram personagens respeitadas pelo professorado e consideradas como referência em relação às modernizações do ensino nas séries iniciais, visto que pertenciam a instituições reconhecidas nacionalmente, o que legitimava a publicação. Assim, para entrar no mercado paulista, era necessário que as editoras publicassem autores conhecidos do magistério, que estivessem presentes no local onde o produto era gerado, validado e consumido.

Para melhor compreensão podemos analisar a tabela 1, elaborada a partir das considerações de Medina (2007) com uma visão geral do papel exercido pelas autoras no cenário educacional.

	Lucília Bechara	**Manhucia Liberman**
Licenciada em matemática-	UNICAMP-1956	UFRJ[12]- 1947
Ingresso no magistério público de São Paulo	1957	1949
Funções exercidas	Professora em Conchas e Tanabi até 1961	Professora em São José dos Campos até 1950. Depois designada para trabalhar no Serviço de Medidas e Pesquisas Educacionais com dois professores da USP[13].
Em 1961	Participaram do curso patrocinado pela SEE, com Sangiorgi e Springer. Fundadoras do GEEM. Participantes dos Cursos dos Ginásios Vocacionais	
	Assumiu a supervisão geral dos Ginásios Vocacionais de São Paulo	
	Publicado o primeiro livro de Bechara e Liberman: "Introdução da Matemática Moderna na Escola Primária" destinado à capacitação dos professores, na linguagem da teoria de conjuntos.	
		Assume coordenação do grupo responsável pela reestruturação do ensino no estado de São Paulo.

Tabela 1-Funções exercidas pelas autoras

No momento em que foram chamadas para elaborar o livro, já eram pessoas que exerciam uma posição de liderança e prestígio, ocupando posições e postos-chaves na condução dos processos de reforma curricular, podendo interferir, mesmo que indiretamente na escolha do livro didático pelas professoras.

É certo que o formato do livro *Curso Moderno* pode ter sofrido influências de Dienes[14] em cujas publicações para crianças, apresentavam cores fortes em forma de fichas de trabalho, com folhas soltas.

[12] Antes chamada de Faculdade Nacional de Filosofia do Rio de Janeiro.
[13] O trabalho consistia apenas em formular e corrigir as provas de admissão ao ginásio, o que lhe valia o conhecimento sobre os conteúdos abordados na escola primária e com os professores da rede.

Assim, apostando nesse segmento de ensino e em autoras prestigiadas, a Companhia Editora Nacional editando livros de uso escolar, estaria colaborando para o sucesso das reformas educacionais e para a modernização da sociedade.

Lembramos que o maior dos objetivos das reformas educacionais do período era a mudança de concepção de escola primária. Para isso uma nova metodologia para o ensino de matemática deveria ser adotada. A matemática seria um instrumento para o desenvolvimento da capacidade de pensar do estudante, dando-lhe subsídios para entendimento da nova linguagem tecnológica. O momento de valorização da educação escolar faz com que as editoras vendam a idéia de vanguarda, viabilizando a circulação de livros que continham o ideário de reformas e a educação como possibilidade de acesso à nova sociedade em modernização.

Com a democratização do ensino, nesse período, e a possibilidade de ampliação de mercado editorial, com a inserção de novos leitores, as editoras passam a adequar sua mercadoria ao objetivo educacional específico, propondo a divulgar as novas diretivas governamentais para o ensino primário.

Analisando a tabela 2, a seguir, podemos verificar que a primeira edição do *Curso Moderno*, superou as vendagens do *best-seller* de Osvaldo Sangiorgi, posto que, para a primeira série do ensino primário eram destinados os volumes I e II, perfazendo um total de 102.849 exemplares.

Mapa de vendas de livros de matemática da Cia. Editora Nacional				
Data	**Título**	**Edição**	**Nº de Exemplares**	**Autor**
jan./67	Matemática Moderna - 3	2ª ed.	80.590	O. Sangiorgi
fev./67	**Curso Moderno– V. 1**	**1ª ed.**	**51.849**	**Liberman e outras**
abr./67	Matemática Moderna - 4	1ª ed.	98.992	O. Sangiorgi
abr./67	Matemática Moderna - 2	4ª ed.	49.915	O. Sangiorgi
abr./67	Matemática Moderna - 1	9ª ed.	49.790	O. Sangiorgi
abr./67	Matemática Moderna - 3	3ª ed.	100.280	O. Sangiorgi
jul./67	**Curso Moderno - 2**	**1ª ed.**	**51.000**	**Liberman e outras**
ago./67	Matemática moderna - 2	5ª ed.	162.288	O. Sangiorgi

Tabela 2-Tabela baseada nas primeiras coletas de Villela, 2007.

Os maiores best-sellers didáticos, segundo o número de exemplares produzidos, são os livros de matemática para as séries do ensino fundamental II, com os novos conteúdos propostos, de Osvaldo Sangiorgi, publicados a partir de 1963. Podemos supor que o sucesso do livro esteja atrelado à expansão da escola

[14] Matemático húngaro, doutor em matemática e psicologia. Dedicou-se principalmente a pesquisa da aprendizagem, desenvolvendo uma nova metodologia, e defendia uma renovação do ensino de matemática logo nas primeiras séries, adequando a aprendizagem às estruturas psicológicas de cada idade. Acreditava que, para as crianças, a axiomatização deveria ser atingida gradativamente por meio de atividades com materiais concretos.

pública primária no estado de São Paulo e a reformulação curricular proposta pelos defensores do ideário do MMM.

Assim configurado o ano de 1967, revela o poder de circulação alcançado pelo livro didático nas séries iniciais. Convém ainda notar que para autoras iniciantes, era fato inédito, tamanha receptividade na adoção do livro, apesar de sabermos da enorme estratégia de divulgação da editora em todos os estados brasileiros.

A grande influência exercida pelas autoras em razão da rede de sociabilidade montada entre os participantes do GEEM e as funções de destaque que ocupavam no governo faz-nos considerar e compreender, as facilidades de penetração das autoras na rede oficial de ensino.

Ressaltamos ainda, que a publicação vinha ao encontro das propostas de democratização do ensino da época, além de trazer uma proposta metodológica mais coerente, a fim de atender uma nova clientela heterogênea, tanto de alunos como de professores inseridos na rede de ensino em expansão.

Desse modo, é possível observar a demanda por novas edições, chegando a 3ª edição em apenas 12 meses, além do lançamento do II e III volumes com tiragens maiores que aos da 1ª edição.

Em 1970, as autoras já suplantavam as publicações de Osvaldo Sangiorgi, e são convidadas pela editora a estenderem sua coleção para o ginásio, competindo com as publicações do maior autor de livros didáticos para o ensino secundário.

O livro *Curso Moderno de Matemática* foi lançado pela Companhia Editora Nacional em fevereiro de 1967, com uma tiragem inicial de 51.849, e grande campanha de divulgação em todos os estados do Brasil.

O livro é uma publicação, com 114 páginas, trazendo inovações tanto na diagramação como no estilo, carregando uma nova concepção de editoração, diferenciando a publicação de todos os livros da época: folhas soltas, desenhos coloridos e nova distribuição de conteúdos que, mais tarde, seria oficializada pelo Programa da Escola Primária, de 1969, e pelos Guias Curriculares, de 1975.

A Companhia Editora Nacional apostou na renovação das formas, com cores chamativas e desenhos modernos. A capa com um formato maior e muitos desenhos, rompia com o clássico.

Apesar de identificarmos no impresso, o tipo de papel de baixa qualidade, observamos cuidados com as novas formas de impressão tipográfica, desenhos variados, com gravuras feitas especialmente para o livro pelo ilustrador Aluízio Neves.

O livro pode ser considerado como diferente de todos os livros que circulavam nas escolas primárias da época. As autoras contam que não havia nessa época, livro de matemática para o Ensino Primário, escrito por matemático. Geralmente, usava-se um livro único elaborado por professores primários ou pedagogos.

O impresso carregava grandes pretensões de ser caracterizado como moderno, prático, agradável no manuseio, com uma proposta metodológica de bases científicas.

Podemos observar que a criação da escola única de oito anos pela Lei 5692/71, expandindo a gratuidade e obrigatoriedade para 8 anos, impulsionou as vendas, em razão da nova clientela inserida na escola pública, após 1971. Nesse quadro político de expansão e pressão da sociedade por aumento de vagas, foi-se traçando um cenário propício a reformulações e estruturação do sistema público de ensino e ampliação de mercados de livros didáticos para as séries iniciais.

Uma reflexão sobre as questões eminentes de expansão, aliadas a necessidade de modernização do ensino de matemática, capaz de atender ao novo perfil de aluno, leva-nos a entender as possíveis razões do sucesso editorial do *Curso Moderno*.

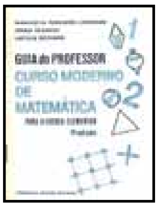
As estratégias impostas com a introdução dos novos conteúdos matemáticos nas séries iniciais exigiam do professor uma implementação rápida e eficaz, gerando inseguranças e demanda de livros com orientações para a aplicação das novas metodologias sugeridas.

Havia na contra capa um breve currículo das autoras com os lugares de inserção profissional, e a divulgação do ilustrador- Aluízio Neves- fato inusitado na época.

O texto do Prefácio inicia um diálogo com os professores, anunciando concepções sobre o ensino de matemática adotada no livro, identificando-o como atual e pertinente aos novos tempos. O texto, procura dar conta de explicar a reforma pretendida para o currículo de matemática, afirmando que o momento de mudanças levou educadores a repensarem o ensino, impulsionando as transformações de métodos, técnicas e objetivos educacionais.

Também acrescentam agradecimentos a professoras que se propuseram a testar as experiências metodológicas sugeridas no livro, validando com autoridade as atividades propostas.

A publicação também trazia um manual para o professor, esclarecendo e justificando as alterações, com textos que serviam para indicar os critérios de organização dos conteúdos e sugestões de atividades.



O manual era constituído de prescrições sobre usos, para os professores, para os conteúdos propostos, mostrando a forma que as atividades deveriam ser entendidas e manipuladas pelo professor.

As atividades foram agrupadas por objetivos, com o vocabulário específico necessário e as orientações de como conduzir as atividades de modo a obter resultados satisfatórios, conforme a tendência tecnicista[15] da educação brasileira da época.

Podemos supor que a editora tenha planejado sugerir atividades no manual para atingir um maior número de professores ansiosos em apreender as novas formas de introduzir os novos conteúdos matemáticos.

Podemos dizer que foi o primeiro livro de matemática consumível. A idéia era fazer um livro que facilitasse a vida do professor, numa proposta estruturalista, aplicada aos algoritmos das operações fundamentais. Dentro dessa idéia de estrutura, através de alguns fatos fundamentais conhecidos, construíam novos fatos, utilizando a propriedade distributiva.

Em relação à listagem de conteúdos verificamos grandes modificações. O volume I encarrega-se de preparar as crianças para os conceitos matemáticos que serão abordados no volume seguinte.

Analisando a listagem de conteúdos proposta no livro com o programa oficial do Estado de São Paulo, datado de 1949, percebemos grandes diferenças. Para melhor compreendermos as diferenças entre o Programa Oficial e o Programa proposto no Livro *Curso Moderno*, podemos observar a tabela 3:

Considerações Comparativas sobre os Programas

1949	Livro
O professor executa o Programa. Graduação rigorosa de dificuldades, abrangendo tanto a seriação, como a repetição.	Professor executor de técnicas apropriadas de ensino propiciando uma aprendizagem rápida e eficaz ao aluno.
O ensino de operações por intenso treinamento. Ênfase a aritmética e conhecimento da tabuada.	Ensino por meio de fatos matemáticos. Ênfase as propriedades estruturais das operações.
Memorização mecânica	Privilegia a compreensão
Caráter lógico na distribuição dos conteúdos	Preocupação com o desenvolvimento psicológico na distribuição de conteúdos.
Apresenta orientação metodológica.	Apresenta sugestões de atividades.
Não prevê continuidade	Procura dar um caráter de continuidade.

Tabela 3 - Quadro comparativo entre os Programas da Escola Primária Paulista de 1949 e do Livro.

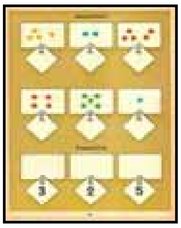
[15] Tecnicismo se baseia em princípios de racionalidade, eficiência e produtividade. Os professores tornam executores de medidas tomadas por especialistas, reorganizando o trabalho educativo de maneira a torná-lo objetivo e operacional. (Saviani, 1995, p. 23).

Análise do contexto empresarial da democratização do ensino nos permite inferir que o enxugamento dos conteúdos da primeira série em relação aos didáticos anteriores deve-se a estratégia editorial de aumento de mercado, visando atingir uma clientela heterogênea, menos elitizada.

Porém, é percebida a influência do avanço da psicologia e da aprendizagem, pois apresenta fundamentação na Teoria Psicogenética de Jean Piaget, justificando algumas inovações na metodologia e na estruturação e distribuição dos conteúdos. Assim é oferecido um mínimo de conteúdos, com sugestões de ampliação conforme as diferenças individuais.

A ênfase está na compreensão e aplicação das propriedades estruturais em lugar do treinamento dos algoritmos das operações.

Os objetivos são construídos de maneira operacionalizada, com atividades que desenvolvem habilidades cognitivas como discriminação, percepção visual e auditiva, atendimento a ordens, etc.



As autoras privilegiaram o método intuitivo[16], concretizadas nas atividades que dão ênfase a observação e a experiência, por meio das ilustrações e do desenho. Assim a imagem toma lugar tão importante quanto o texto.

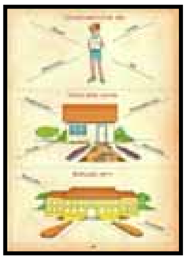
É dada, aos desenhos e símbolos, maior importância, com pouco texto induzindo a observação mais atenta das figuras.

Quanto à distribuição das atividades podemos considerar que pretendiam ser independentes. Cada página continha uma atividade, com começo, meio e fim, como influencia da psicologia da aprendizagem.

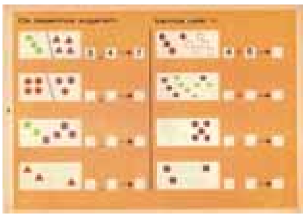
Ainda podemos diferenciar, observando as margens que se reduziram em relação aos outros livros didáticos, com as cores ocupando maior espaço. Podemos dizer que a pedagogia interferiu na disposição tipográfica.

Observando as gravuras, temos condições de verificar que as imagens são retiradas do universo infantil, sugerindo a proximidade com a realidade das crianças, demonstrando interferências da pedagogia.

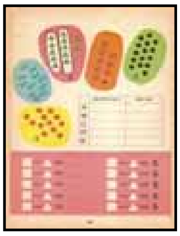
[16] Processo de aprendizagem onde é valorizado a observação das coisas, dos objetos, da natureza, dos fenômenos e para a necessidade da educação dos sentidos como momentos fundamentais do processo de instrução escolar" (Faria Filho, 2000: 143).

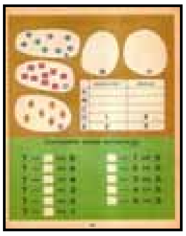


O primeiro volume era totalmente focado em fatos matemáticos, sem grandes referências ao uso de materiais concretos. As operações eram apresentadas como Relações, com introdução de conceitos abstratos desde as primeiras séries.



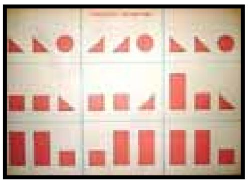
Conforme o ideário do MMM, a Matemática foi tratada, no livro como "um sistema fechado", descontextualizada com ênfase nas estruturas matemáticas e priorizando as propriedades das operações.





Podemos observar apropriações do ideário do MMM, na utilização de novos conteúdos como à mudança de base, congruência, desigualdades, lógica simbólica, antes fora dos currículos do ensino Primário.

Acreditamos ser importante observar as mudanças ocorridas nos enunciados das atividades. em relação aos livros anteriores, fica configurada na preocupação do uso de uma linguagem adequada á compreensão dos alunos.



Diante da necessidade de combinar diversas tendências tanto pedagógicas como gráficas, estabelece dependência do texto com as ilustrações, inexistindo isoladamente.

A maneira como foram dispostos os enunciados privilegiando as gravuras, desenvolveu uma nova maneira de redigir o texto das atividades, com ordens claras, curtas, induzindo a observação.

Da primeira a nona edição, verificamos grandes modificações: os conteúdos anteriormente previstos para os 2 volumes do primeiro ano, foram reduzidos e colocados em um único volume para a primeira serie. Tudo leva a crer que a introdução de novos usuários de livros didáticos , com menor renda, alavancou a mudança.Na nona edição observamos o enxugamento.

Uma mudança que se opera e altera em muito a proposta anterior é o abandono do projeto do livro com folhas soltas, nos volumes posteriores. As autoras alegam que procuraram atender a solicitação das professoras usuárias que, na prática, perceberam a dificuldade das crianças menores com a organização.

Porém podemos supor que além da facilidade de utilização pelos professores outra justificativa venha pelo barateamento do custo sob a forma de brochura em menor tamanho.

A coleção *Curso Moderno de Matemática* foi extinta em 1973, na 9ª edição, quando foi reformulada e lançada como GRUEMA (Grupo de Ensino de Matemática Atualizada), em 1974, com 8 volumes, para as oito séries do 1º Grau.

Podemos supor que as mudanças na coleção possam ter sido determinadas pelas reformas propostas na Lei 5.692/71, referentes à extensão do ensino obrigatório para oito anos, definindo a necessidade da redistribuição dos conteúdos e a reformulação da coleção, agora com oito volumes, destinada a todo 1º Grau.

Chama-nos a atenção a ausência de bibliografia, o que nos leva a supor a escassez, na época de publicações acessíveis com estudos mais aprofundados sobre a aplicabilidade dos conteúdos propostos para o ensino primário.

Quanto às mudanças curriculares, percebe-se a ampliação da concepção de currículo, que não significa mais apenas uma listagem de conteúdos, linearmente encadeados. O currículo é concebido conforme as orientações tecnicistas de autores como Bloom e Mager, com objetivos gerais e específicos escritos de maneira operacional, além de orientações metodológicas e sugestões de avaliação.

Os conteúdos saem de seu formato habitual, com abordagens não tradicionais e ênfase nas orientações metodológicas.

Algumas Considerações

Com as pressões sociais da população paulista pela extensão do maior número de anos de escolaridade, e as ações do governo para a essa expansão, incluindo a extinção do exame de admissão e o alargamento de vagas no ginásio, o Ensino Primário necessitava de mudanças para receber e preparar essa clientela nova e heterogênea.

A dinâmica de introdução das metas do MMM nas séries iniciais, de maneira geral, foi beneficiada pelo uso e ênfase dos materiais manipuláveis usados na introdução dos novos conteúdos. Auxiliaram também os já avançados estudos de Piaget sobre a aprendizagem infantil e as experiências bem-sucedidas de Dienes nas atividades com materiais concretos, priorizando a metodologia e descartando os excessos cometidos, até então, no ensino secundário. Tudo isso, possibilitou maior aceitação do ideário.

A nova metodologia sugerida no *Curso Moderno* motivou a utilização de novos recursos didáticos, desde os materiais concretos e manipuláveis, até o uso de ilustrações de objetos próximos a realidade infantil.

Cabe mencionar, a abordagem axiomática, apesar de todas as pressões ideológicas exercidas, talvez não tenha proliferado no livro *Curso Moderno de Matemática*, pois sua operacionalização para crianças seria difícil e inapropriada, conforme as novas teorias da psicologia da aprendizagem. Foi o primeiro livro destinado às séries iniciais, utilizando a linguagem de conjuntos como elemento unificador, apresentando a Teoria de conjuntos sem ênfase ao rigor de linguagem e priorizando as relações entre conjuntos.

Podemos dizer que a estratégia editorial de formação de novos leitores estreita-se também pelos cursos de formação oferecidos, tanto pelos grupos de estudos existentes, como pelas Secretarias de Educação, numa tentativa de adequar de maneira a mais rápida e cômoda, os professores ingressantes na rede, complementando sua formação com as novas idéias sobre aprendizagem infantil e uso de materiais manipuláveis com destreza e eficiência.

Como o ideário do MMM era hegemônico na época, todas as diretrizes oficiais e os cursos oferecidos aos professores eram nele fundamentados, não parecendo haver alternativas. Consequentemente era esta matemática moderna cobrada nos concursos, nos livros didáticos e nas escolas.

Podemos concluir que uma das grandes conquistas do Movimento foi à modernização e consolidação do mercado editorial de livros didáticos para o Ensino Primário, tendo professores de matemática como autores. Pela primeira vez no Brasil, matemáticos dedicaram sua atenção à elaboração de livros didáticos para crianças, antes escritos por pedagogos ou professores ligados às séries iniciais.

A avalanche de informações sobre as mudanças propostas, a inserção de milhares de professores na rede em um curto intervalo de tempo e a nova clientela, antes elitista e agora heterogênea, pediam estratégias rápidas de divulgação e circulação das novas propostas, o que foi aproveitado pela Companhia Editora Nacional como momento propício de ampliação de mercado.

O movimento dos professores, insistentemente reivindicando sugestões e formação, originou muitos cursos de formação que eram ministrados pelas autoras do *Curso Moderno de Matemática*, ocasionando a aceitação e adoção do livro acriticamente , gerando seu enorme sucesso de vendas em todo o Brasil.

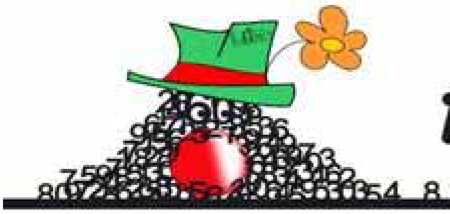
Referências Bibliográficas

- Biccas, M. Impresso pedagógico como objeto e fonte para a história da educação em Minas Gerais. In: Revista do Ensino (1925-1940). In: Morais, C., Portes, Écio, 2004.
- Carvalho, M.; Toledo, M. Biblioteca para professores e modelização das práticas de leitura: análise material das coleções Atualidades Pedagógicas e Biblioteca de Educação. IN: XXIV Simpósio Nacional de História, São Leopoldo, 2007.
- Certeau, M. A escrita da história. Trad. Maria de Lourdes Menezes. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

- Chartier, R. O mundo como representação. Estudos Avançados, São Paulo, 11 (5), 1991.
- Liberman, Manhucia. Entrevista concedida à Denise Medina em 18 de dez. 2006.
- ______________. Curso moderno de matemática para a escola elementar. São Paulo: Editora Nacional, 1967.
- Medina, Denise. A produção oficial do movimento da matemática moderna para o ensino primário do estado de São Paulo (1960-1980). Dissertação (Mestrado em Matemática). Departamento de Matemática, PUC-SP, 2007.
- Valente, W. R. A matemática na escola: um tema para a história da educação. IN: Moreira, D.; Matos, J. M. História do Ensino da Matemática em Portugal. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005. p. 21-32.
- Villela, L. Mapa de edições de livros didáticos de matemática - Cia. Editora Nacional, 1964-1978. São Paulo: GHEMAT-PUC, 2007 (mimeo).

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 107-111
ISSN: 1815-0640



¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santonja

Los irracionales van de fiesta

Hoy día esta claro que Internet es el gran almacén de información. Se puede encontrar de casi todo y en gran abundancia, pero a veces encontramos en cientos de páginas exactamente lo mismo. Para llenar tantas páginas distintas no queda más remedio que copiar ideas, conceptos, cuando no textos enteros, pues suele ser muy difícil ser original en nuestros días. Aunque como decía el gran Jorge LLopis, "ser original consiste en el arte de copiar sin que se note demasiado".

En esta sección intentamos ser lo más original posible y agradar a nuestros lectores. Al parecer no lo debemos hacer muy mal cuando ya podemos encontrar dibujos y textos hechos en exclusiva para estas páginas en alguna otra página web.

Nosotros, por supuesto, también copiamos de otros lugares, aunque siempre intentamos citar la fuente de que nos hemos nutrido, si la sabemos. Y eso es lo que hemos hecho en esta ocasión.

En Internet existen una gran cantidad de chistes gráficos de matemáticas, algunos sacados de los medios de comunicación, donde hay autores, como mi admirado Forges, que suelen incluir conceptos matemáticos en sus viñetas. Hay otros chistes que se repiten hasta la saciedad y que pueden encontrarse en muchas páginas, a veces en inglés y en español.

Entre todos los que se pueden localizar hay un grupo de ellos que no he visto muy a menudo, pero que a mi me encantaron desde el primer momento en que los localicé. En ellos los personajes en lugar de ser niños, adultos o incluso animales, son números irracionales que asisten a una fiesta. Así que quiero invitarles en este número de la revista a la:

$\sqrt[n]{}$ - ÉSIMA CONVENCIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES

Estos chistes están tomados de la página web del IES Ezequiel González de Segovia y pueden consultarse en su ubicación original en:

http://www.iesezequielgonzalez.com/matematicas/irracion.htm

José Muñoz Santonja

Lamento no saber el autor de las viñetas, ya que no aparece en la página. Desde aquí quiero invitar a los lectores a visitarla, pues tiene una gran variedad de material de divulgación matemática, historia, curiosidades, etc…

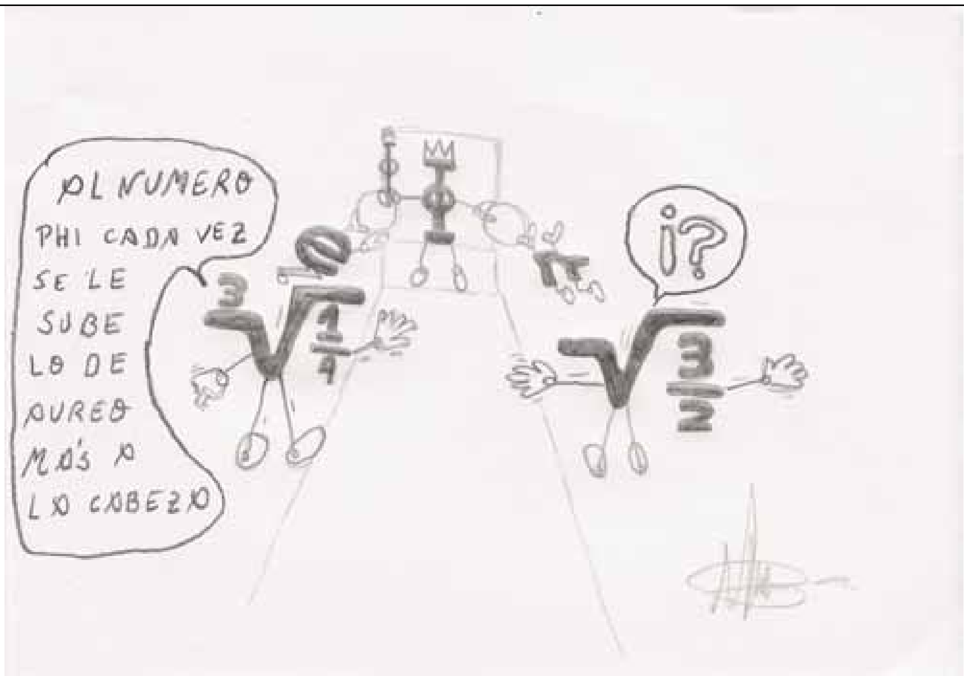
Incluimos sin más las viñetas de la fiesta de los números irracionales.


¿Sabes si vendrán los de la prensa?
¿Cómo quieres que vengan, si está prohibida la entrada a los periódicos?
¡Pues es verdad! No me había dado cuenta.
$\sqrt[4]{6}$
$\sqrt[3]{7}$


Acabo de echar al 2, que se había colado en la fiesta.
Pero, ¿cómo pudo entrar?
Se disfrazó de raíz cuadrada de 4 para engañar al portero, que es medio cegato.
¡Qué país...!
$\sqrt[5]{4}$
$\sqrt[3]{9}$

José Muñoz Santonja

Como ya hemos comentado antes, en esta página, aunque copiemos material que nos parece interesante de otros lugares, siempre nos gusta añadir nuestro granito de arena original. En esta ocasión, a partir de los chistes anteriores me pareció que la idea era muy graciosa y que podía dar más de sí, por lo que solicité la ayuda de uno de mis alumnos de 3º de E.S.O., **Antonio Javier García Teba**, quien me hizo una serie de dibujos en la misma línea sobre algunas situaciones que le propuse. Las incluyo a continuación:



Y por último, ya puestos, hasta yo mismo me animé a añadir la última idea.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 113-121
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

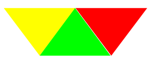
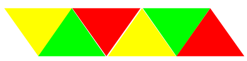
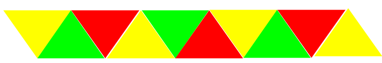
Problema

Proponer una actividad lúdica que ilustre que si la sucesión {f(n)}, es una progresión aritmética de segundo orden; es decir, una sucesión tal que las diferencias sucesivas

$d1= f(2) – f(1)$, $d2= f(3) – f(2)$, $d3= f(4) – f(3)$, … , $dn = f(n+1) - f(n)$, …

forman una progresión aritmética, entonces f es una función cuadrática.

Idea inicial[1]:

Figura 1			**Perímetro: 3**
Figura 2		Dos triángulos pegados entre sí, se pegan a la figura anterior	**Perímetro: 5**
Figura 3		Tres triángulos pegados entre sí, se pegan a la figura anterior	**Perímetro: 8**
Figura 4		Cuatro triángulos pegados entre sí, se pegan a la figura anterior	**Perímetro: 12**
Figura 5	**(Se omite por la extensión)**	Cinco triángulos pegados entre sí, se pegan a la figura anterior	**Perímetro: 17**

Se construye así una sucesión de figuras con los bloques triangulares de Cuisenaire, cuyos perímetros forman una progresión aritmética de segundo orden, pues la sucesión de las diferencias {2, 3, 4…} es una progresión aritmética de razón 1.

---

[1] El problema se lo propuso Guillermo Liu, profesor de matemáticas de secundaria, pensando en actividades para sus clases sobre progresiones aritméticas y funciones cuadráticas. La presente sistematización es fruto de la consulta que me hizo, llevando a mi oficina esta interesante idea de formar secuencias de figuras uniendo las piezas triangulares de los bloques de Cuisenaire, de modo que sus perímetros constituyen una progresión aritmética de segundo orden.

Sistematización

Para evitar confusiones o interpretaciones erradas, hacemos algunas precisiones previas:

1. Asumimos que en los bloques triangulares de Cuisenaire, los triángulos son equiláteros de lado 1.
2. "Pegar figuras" significa unirlas por alguno de sus lados, formando trapecios o paralelogramos, en una fila de bloques triangulares de Cuisenaire. (Una de sus alturas es igual a cualquiera de las alturas de los bloques triangulares de Cuisenaire que los conforman.)

La actividad que se propondrá tendrá como base construir una sucesión de figuras, usando solo los bloques triangulares de Cuisenaire (a los que –para simplificar– llamaremos triángulos) y siguiendo la siguiente definición:

Definición de la sucesión de figuras {Figura *n*}:

Figura 1:  (triángulo equilátero de lado 1)

Figura *n*: Paralelogramo o trapecio que resulta de pegar a la figura $n - 1$ el trapecio o paralelogramo formado pegando n triángulos, para todo número natural $n \geq 2$.

Observemos que la definición es inductiva y puede entenderse aplicándola para obtener las figuras 2, 3 y 4, del cuadro inicial y algunas siguientes.

Por ejemplo:

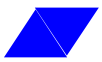
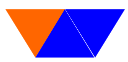
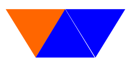
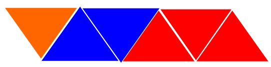
Figura 2: Se obtiene al pegar a la figura 1 () el paralelogramo formado por 2 triángulos (). Así resulta el trapecio: 

Figura 3: Se obtiene al pegar a la figura 2 () el trapecio formado por 3 triángulos (). Así resulta el paralelogramo: 

Perímetros

La secuencia de figuras y perímetros correspondientes se visualiza en la siguiente tabla:

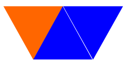
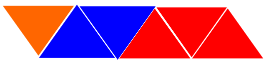
Término(n)	1	2	3	4
Figura *n*				
Perímetro P(*n*)	3	5	8	12

Tabla 1. Primeras figuras y perímetros de la sucesión {Figura *n*}

Podemos observar que la sucesión de perímetros de las figuras es tal que la sucesión de diferencias sucesivas $\{ d_n \}$ es una progresión aritmética:

P(n)   3   5   8   12   17   .   .   .

Diferencias (dn)   2   3   4   5   .   .   .

Para asegurar que esta propiedad se cumple siempre en la sucesión {P(n)} de perímetros, una primera tarea es caracterizar bien esta sucesión; es decir, encontrar la expresión general del término P(n), que es el perímetro de la Figura n.

Teniendo en cuenta la definición inductiva de la sucesión de figuras, podemos obtener una definición inductiva de la sucesión de perímetros, con razonamientos geométrico-algebraicos; es decir, expresar P(*n*) en función de P(*n*-1). Veamos:

Perímetro de la figura *n*:	P(*n*)
Perímetro de la figura anterior a la *n*; es decir, perímetro de la figura *n* -1, para $n \geq 2$:	P(*n*-1)
Al pegarse a la figura *n* - 1 el trapecio o paralelogramo formado pegando *n* triángulos, se considera inicialmente un perímetro adicional de *n* veces 3 (3 unidades por cada triángulo)	3*n*
En el perímetro del trapecio o paralelogramo formado pegando *n* triángulos, no debe considerarse los lados de las *n* -1 uniones. En cada unión se “pierden” dos lados.	- 2(*n*-1)
En el perímetro del paralelogramo o trapecio que se forma en la figura *n*, debe descontarse también los dos lados que se usan al pegar a la figura *n*-1 el trapecio o paralelogramo formado pegando *n* triángulos	- 2

En consecuencia: $P(n) = P(n-1) + 3n - 2(n-1) – 2$;

y así tenemos: $P(n) = P(n-1) + n$ para todo número natural $n \geq 2$.

En resumen:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(1) = 3 \\ P(n) = P(n-1) + n \quad \text{para todo número natural } n \geq 2. \end{array}}$$

Con esta definición inductiva de $P(n)$, es claro que

$$P(n + 1) = P(n) + (n + 1) \quad \text{para todo número natural } n \geq 1;$$

O sea: $P(n + 1) - P(n) = (n + 1)$ para todo número natural $n \geq 1$; **(*)**

Por otra parte, recordemos que las diferencias sucesivas d_n de la sucesión $\{P(n)\}$ son:

$$d_1 = P(2) - P(1)\ ,\ d_2 = P(3) - P(2),\ d_3 = P(4) - P(3),\ \ldots,\ d_n = P(n+1) - P(n),\ \ldots$$

y en consecuencia, teniendo en cuenta **(*)**, la sucesión de diferencias sucesivas de los términos de la sucesión $\{P(n)\}$ es

$$\{d_n\} = \{ P(n+1) - P(n)\} = \{n +1\} = \{2, 3, \ldots n, \ldots \},$$

que evidentemente es una progresión aritmética de razón 1 y confirmamos que la sucesión de perímetros $\{P(n)\}$ es una progresión aritmética de segundo orden.

Podemos verificar que con la definición inductiva de $P(n)$, se obtienen los valores que figuran en la Tabla 1; por ejemplo:

$$\begin{aligned} P(4) &= P(3) + 4 \\ &= P(2) + 3 + 4 \\ &= P(1) + 2 + 3 + 4 \\ &= 3 + 2 + 3 + 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Ciertamente, no resultaría cómodo obtener por este método, por ejemplo $P(20)$. Necesitamos obtener una expresión general para $P(n)$, que no dependa de $P(n-1)$. Formalmente, en la definición inductiva de $P(n)$ tenemos una ecuación en diferencias de primer orden, no homogénea, con coeficientes constantes y con condición inicial conocida. Hay métodos específicos para obtener la solución general de este tipo de ecuaciones, pero podemos recurrir a una forma “constructiva” de obtener la expresión general, explícita, de P(*n*). Veamos:

P(1) = 3
P(2) = P(1) + 2 = 3 + 2
P(3) = P(2) + 3 = 3 + 2 + 3
P(4) = P(3) + 4 = 3 + 2 + 3 + 4
…….

P(*n*) = 3 + 2 + 3 + 4 + ….. + *n*

$= 3 + \dfrac{(2+n)(n-1)}{2}$ (Observando que a partir del número 2 tenemos los términos de una progresión aritmética, cuyo primer término es 2 y el último es *n*, y aplicando la conocida fórmula de la suma de estos *n* – 1 términos).

Así, efectuando las operaciones indicadas y simplificando, obtenemos

$$\boxed{P(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 2 \quad \forall n \in Z^+}$$

Vemos, pues, que la función perímetro P, en este contexto, es la restricción de una función cuadrática al conjunto de los números enteros positivos.

Otra manera de obtener esta función, es asumir que con los términos encontrados de los perímetros de las figuras ya se tiene una progresión aritmética de segundo orden; asumir también conocida la proposición que en toda progresión aritmética de segundo orden su término general está dado por la restricción de una función cuadrática a los números enteros positivos[2] y encontrar los coeficientes correspondientes de esta función. Así:

La función cuadrática P, será de la forma

P(x) = a x2 + b x + c , con $a \neq 0$.

Como P(1)=3, P(2)=5 y P(3)=8, haciendo los reemplazos correspondientes tenemos un sistema de tres ecuaciones lineales con las incógnitas a, b y c:

[2] Una buena referencia para estudiar la vinculación entre progresiones aritméticas de segundo orden y funciones cuadráticas, es: Lages Lima, E. et al (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media*, Vol 1, pp. 137 - 141. Perú: IMCA

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ 9a + 3b + c &= 8 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$, con lo cual tenemos que

$$\boxed{P(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 2}$$

Es claro que este resultado es coherente con el obtenido anteriormente.

Comentarios y sugerencias

1. Al sistematizar las ideas ante el problema inicialmente planteado, encontramos una manera – y en un contexto lúdico – de usar definiciones inductivas, que son de gran importancia en la matemática.
2. Puede ser útil que antes de proponer el uso de la definición inductiva para construir la sucesión de figuras, se proponga una actividad con una definición inductiva en un contexto aritmético, como la siguiente:

El "marco" de un número natural *n* es también un número natural que se representa por el número *n* dentro de un pequeño rectángulo y se define de la siguiente manera:

$$\boxed{0} = 1$$

$$\boxed{n} = n \times \boxed{n-1} \qquad \text{para todo número natural } n \geq 1$$

Así, se establece que el marco de 0 es 1.

Según la definición dada, $\boxed{1} = 1\text{x} \boxed{0} = 1 \text{ x } 1 = 1$;

luego, el marco de 1 es también 1.

Según la definición dada, $\boxed{2} = 2\text{x} \boxed{1} = 2 \text{ x } 1 = 2$;

luego, el marco de 2 es 2.

Según la definición dada, $\boxed{3}$ = 3x $\boxed{2}$ = 3 x 2 = 6;

luego, el marco de 3 es 6.

Se puede verificar de esta manera, que el marco de 4 es 24, que el marco de 5 es 120, etc.

Ciertamente, estamos definiendo inductivamente el factorial de un número natural, pero deliberadamente no usamos la notación habitual, ni consideramos necesario mencionar la palabra “factorial”, pues el objetivo es usar una definición inductiva.

3. Una pregunta natural en el contexto de la sucesión de figuras formadas con triángulos, es *¿cuántos triángulos tiene la* Figura *n*?

Llamemos T(*n*) a tal número y explicitemos sus valores para los primeros términos de la sucesión, haciendo una tabla a partir de la Tabla 1:

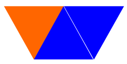
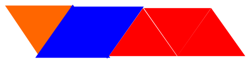
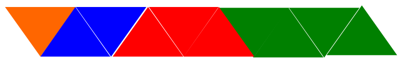
Término(*n*)	1	2	3	4
Figura *n*				
Número de triángulos: T(*n*)	1	3	6	10

Tabla 2. Primeros términos de las sucesiones {Figura *n*} y {T(*n*)}

Observando esta tabla 2 y teniendo en cuenta la definición de Figura *n* para construir la secuencia de figuras, concluimos que la función T(*n*) la podemos definir inductivamente:

$$\boxed{\begin{array}{l} T(1) = 1 \\ T(n) = T(n-1) + n \text{ , para todo número natural } n \geq 2. \end{array}}$$

Ahora podemos obtener explícitamente la función T(*n*):

$$\begin{array}{l} T(1) = 1 \\ T(2) = T(1) + 2 = 1 + 2 \\ T(3) = T(2) + 3 = 1 + 2 + 3 \\ T(4) = T(3) + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ \ldots\ldots. \\ T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots.. + n \\ T(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} \end{array}$$

En consecuencia:

$$\boxed{T(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \forall n \geq 1, n \in Z^+}$$

Siendo T la restricción a Z+ de una función cuadrática, la sucesión {T(n)} es una progresión aritmética de segundo orden, como es fácil verificar.

Puede ser más sencillo para los estudiantes trabajar con la sucesión {T(n)}, antes de trabajar con la sucesión {P(n)}.

4. A continuación sugerimos una posible secuencia de actividades que se proponga a los estudiantes o a profesores en cursos de capacitación docente. En verdad, deben tomarse como un conjunto de ideas para ser convertidas en actividades individuales, actividades en grupo, para ser modificadas, puestas en otra secuencia, etc. , según el nivel y las experiencias previas del grupo con el que se trabaje:

   a. Dada la definición y la notación de “marco” de un número natural, escribir los seis primeros términos de la sucesión de números naturales:

   $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, ….. , $\boxed{n}$, ….

   b. Dada la definición de la sucesión {Figura *n*}, (con las precisiones previas, anotadas al inicio de esta sistematización), construir una tabla como la Tabla 1, pero sólo con la primera y segunda filas.

   c. Examinar si las figuras 7, 10 y 20 son trapecios o paralelogramos. (Esto puede ser motivador para determinar el número de triángulos que tiene cada figura de la sucesión {Figura *n*}, pues seguramente descubrirán – o se inducirá a que lo descubran – que si la Figura *n* tiene un número par de triángulos es un paralelogramo y si tiene un número impar es un trapecio, salvo cuando *n* = 1).

   d. Llamar T(*n*) al número de triángulos que tiene la Figura *n* y construir una tabla como la Tabla 2.

   e. Examinar si las diferencias sucesivas de la sucesión {T(*n*)} son una progresión aritmética.

   f. Definir inductivamente T(*n*).

   Sugerencia: Observar la tabla construida en la actividad ***d*** y tener en cuenta la definición inductiva de Figura *n*.

   g. Hallar una expresión explícita de T(*n*) (que no dependa de T(*n*-1)). *Sugerencia*: Usar la definición inductiva de T(*n*) para encontrar las sumas que determinan los primeros términos de la sucesión {T(*n*)} y observar tales sumas.

h. Encontrar explícitamente T(*n*) asumiendo que T es una función cuadrática $T(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, con $a \neq 0$. Verificar que el resultado es coherente con el obtenido en la actividad ***g***.

Sugerencia: Resolver el sistema lineal de tres ecuaciones, cuyas incógnitas son *a, b* y *c*, obtenidas de tres valores conocidos de T(*n*) (Es cómodo trabajar con T(1), T(2) y T(3).)

i. Llamar P(*n*) al perímetro de la Figura *n* y completar una tabla similar a la Tabla 1, en la que se ha dejado algunos lugares vacíos en la segunda y tercera filas.

j. Examinar si las diferencias sucesivas de la sucesión {P(*n*)} son una progresión aritmética.

k. Definir inductivamente P(*n*).

Sugerencia: Observar la tabla similar a la Tabla 1, construida en la actividad ***i***, y recordar la definición inductiva de Figura *n*.

l. Definir explícitamente P(*n*).

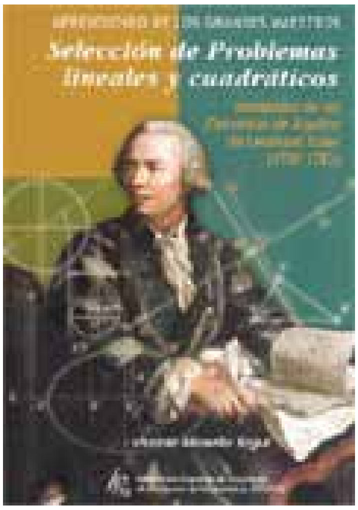
Sugerencia: Usar la definición inductiva de P(*n*) y proceder como en la actividad ***g***.

m. Encontrar explícitamente P(*n*) asumiendo que P es una función cuadrática, de manera similar a cómo se obtuvo T(*n*) en la actividad ***h***.

n. Encontrar razones geométricas que justifiquen una relación algebraica entre P(*n*) y T(*n*), que simplificada lleve a P(*n*) = T(*n*) + 2.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 123-125
ISSN: 1815-0640



Aprendiendo de los grandes maestros: Selección de Problemas lineales y cuadráticos rescatados de los *Elementos de Álgebra* de Leonhard Euler (1707-1783)

Autor: Vicente Meavilla Seguí

Edita: **Servicio de Publicaciones Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)**

Año: 2007

95 páginas

ISBN: 978-84-934488-4-4

En este libro, el autor toma como punto de partida una de las obras más conocidas y populares del siglo XVIII, y que forma parte, sin duda, de los textos matemáticos más difundidos de la historia. Nos referimos a los *Elementos de Álgebra*, del gran matemático suizo Leonhard Euler, y que fue publicado por primera vez en 1770 por la Real Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Euler es, sin duda, uno de los matemáticos más destacados de todos los tiempos. Ya desde joven descubrió su vocación por las matemáticas y a su estudio unió el de otras ramas como la astronomía, la física, la medicina, la teología y las lenguas orientales, recibiendo así una educación muy completa. Forma parte del grupo de científicos más productivos de la historia. Además, sus numerosos trabajos científicos abarcan casi todas las ramas tanto de la matemática pura como de la aplicada y en su legado podemos encontrar desde manuales escritos en un nivel más elemental y pensados para un público no matemático, hasta textos científicos avanzados. Con su obra *Elementos de Álgebra* pretendía convertir a cualquier principiante en un maestro de Álgebra considerándose por ello, un claro ejemplo de exposición didáctica.

El objetivo fundamental del libro que nos ocupa es acercar una parte del texto de Euler a todos los docentes y a los alumnos de Educación Secundaria y ofrecer así la oportunidad de aprender de un gran maestro, contar con material didáctico de primera mano y mostrar al alumno la evolución con el tiempo del lenguaje, los conceptos y los procedimientos matemáticos.

Concretamente, el autor se centra en la sección que Euler dedica a las ecuaciones algebraicas y su resolución (Primera parte-Cuarta sección de los *Elementos de Álgebra*); en particular, a las ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas.

El libro está organizado en seis capítulos, cada uno de ellos con su correspondiente listado de referencias bibliográficas y en algunos casos, de referencias online. A estos capítulos el autor añade tres apéndices con los enunciados y soluciones de algunos ejercicios de aplicación relativos a ecuaciones de primer y segundo grado y a sistemas de ecuaciones lineales, que aparecen en la versión inglesa de los *Elementos de Álgebra* de 1822 y que no se deben a Euler.

En el primer capítulo, *Euler y sus Elementos de Álgebra*, el autor nos describe algunos de los hechos más relevantes de la vida de Euler, de sus aportaciones matemáticas, en general, y de su obra *Elementos de Álgebra*, en particular. Completa el capítulo con una relación de algunos de los matemáticos, filósofos, médicos, músicos y pintores más prestigiosos de su época.

El segundo capítulo, *Aspectos teóricos relativos a ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas*, contiene la traducción de los epígrafes que Euler dedica a los aspectos generales y técnicas para resolver las ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales.

En los siguientes tres capítulos, *La resolución de problemas de primer grado con una incógnita*, *La resolución de problemas de primer grado con más de una incógnita* y *La resolución de problemas de segundo grado con una incógnita*, el autor traduce, respetando en lo posible el estilo del texto original, la colección de problemas planteados y resueltos por Euler concernientes a las ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado, respectivamente. Añade además algunos comentarios y ejemplos que muestran la existencia de problemas similares en la literatura matemática de épocas anteriores.

En el último capítulo, *Algunas consideraciones de carácter didáctico*, se sitúa en primer lugar el marco teórico, presentando las principales corrientes teóricas en torno a la resolución de problemas. El autor se centra en los aspectos relativos a la resolución de problemas de álgebra y a las interacciones que surgen en un grupo reducido de alumnos cuando resuelven este tipo de problemas. Analiza además el tamaño y la composición de los grupos mostrando cómo interactúan los miembros de los grupos de diferentes composiciones. Teniendo en cuenta las cuestiones teóricas indicadas en la primera parte y tomando como referencia ciertos ejemplos de la colección de problemas de Euler, se completa el capítulo con una propuesta de actuación didáctica. El autor apunta primero algunas recomendaciones y sugerencias acerca del trabajo en grupo y de la resolución de problemas tanto para los alumnos como para el profesor, y finaliza con una serie de actividades basadas en dos de los problemas planteados por Euler y en los que propone diversas estrategias de resolución. Se pretende con ello que los diferentes grupos resuelvan los mismos problemas de manera distinta, lo que conduce, sin duda, a un enriquecimiento en la posterior puesta en común.

Concluimos esta reseña haciéndonos eco de las siguientes palabras del autor que encontramos en la introducción…"En una época, en la que se admira más a un cantante de rock o a una top-model que a un científico o a una escultora, creemos que, desde un prisma educativo, sería recomendable y beneficioso presentar a nuestros alumnos los aspectos biográficos más relevantes y la producción intelectual más asequible de aquellos que, en su día, contribuyeron al progreso de la humanidad".

Reseña: Lourdes Rodríguez Mesa
Universidad de La Laguna
Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 127-133
ISSN: 1815-0640

M@tem@tic@s en l@ red

Recursos para la Enseñanza de las Matemáticas de Secundaria en el Portal Medusa

Autor de la Página: *Proyecto Medusa*

Dirección: *http://www.gobiernodecanarias.org/medusa*

El Proyecto Medusa es un proyecto de integración de las TIC en los centros educativos de la Comunidad Autónoma de Canarias (España), desarrollado por la Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes del Gobierno de dicha Comunidad.

Entre otros servicios, ofrece el Portal Medusa, donde podemos encontrar información relacionada con el Proyecto y múltiples recursos educativos para el profesorado, el alumnado y las familias. En este artículo nos centraremos en los recursos para el profesorado del área de matemáticas, en la etapa de secundaria (12 a 18 años), que podemos encontrar en el portal web del Proyecto Medusa (http://www.gobiernodecanarias.org/medusa).

Desde el área de Matemáticas del Proyecto se ha pretendido que la Web no sea únicamente un sitio donde descargar recursos didácticos, sino que además permita al profesorado compartir información, recursos y disponer de un espacio para el trabajo colaborativo.

En el menú que nos encontramos a la izquierda de la página, localizamos varios apartados, el tercero de los cuales corresponde al Profesorado. Pulsando en el símbolo [+] se muestra el contenido del mismo, donde aparecerá "Áreas temáticas". Si a su vez desplegamos éste, podremos acceder al nodo correspondiente al área de Matemáticas. Al hacer clic sobre el mismo veremos los distintos apartados que lo componen:

- Educación Matemática y TIC
- Recursos
- Software
- Taller de GeoGebra
- Formación
- Lista de Distribución
- Encuesta

A continuación nos centraremos en describir los contenidos del apartado Recursos.

Nodo de Matemáticas del Portal Medusa

Recursos

Esta sección constituye uno de los núcleos fundamentales del nodo de matemáticas. Se pretende ofrecer diferentes tipos de recursos para el área y un espacio donde compartir nuevos recursos e información de interés. Sus contenidos se organizan en cinco categorías: Actividades, Enlaces, Descartes, Tutoriales y Compartir recursos.

Contenido de Recursos

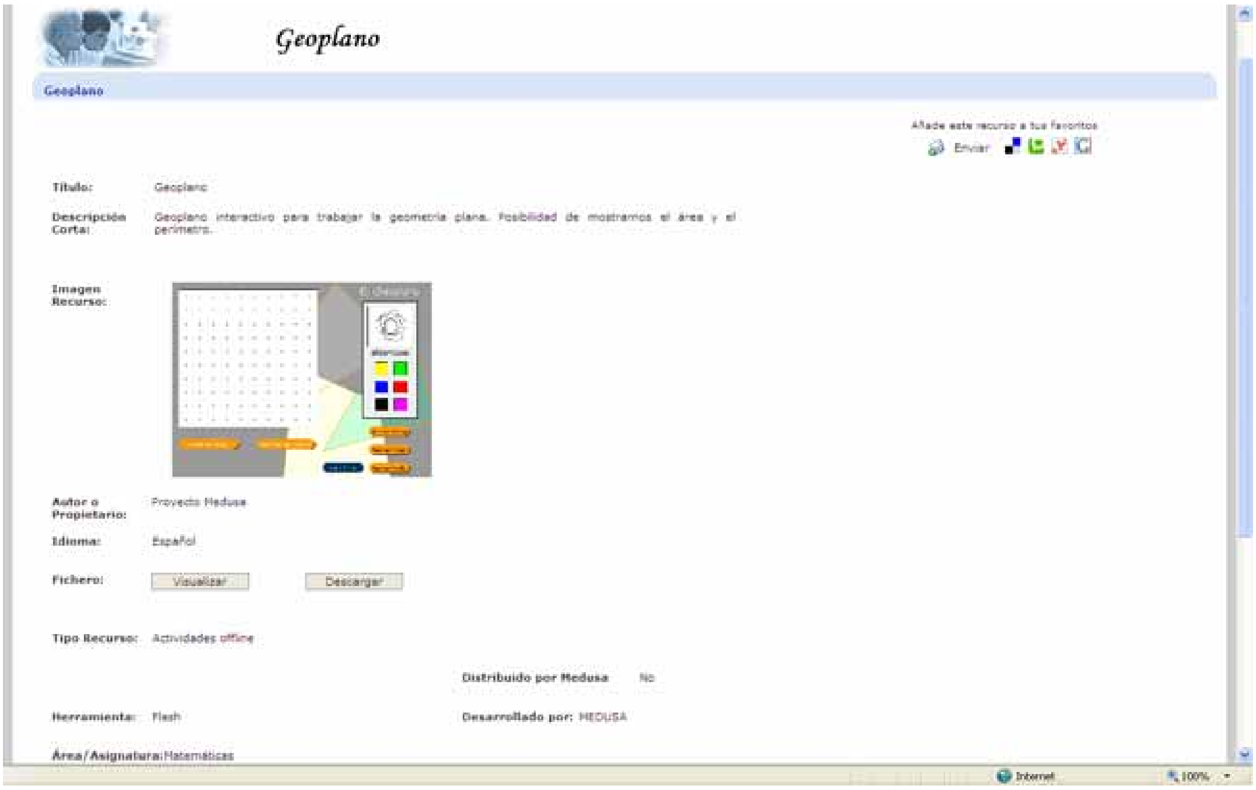
1. Actividades

En este apartado disponemos de actividades desarrolladas por el profesorado, materiales desarrollados por el Proyecto Medusa, materiales curriculares elaborados por el CNICE (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa), aplicaciones desarrolladas conjuntamente por el CNICE y las Comunidades Autónomas, materiales premiados por el CNICE y actividades online.

Distinguimos, en primer lugar, un buscador para facilitar la localización de las actividades. Debajo aparece el listado de las mismas. Éste puede ordenarse según diversos criterios (título, descripción, autor, mejor valoradas, más visitadas o más votadas). Cada elemento de esta lista está formado por una imagen, el título, la descripción y el autor. Se muestra también el número de visitas y, en el caso en que haya sido valorado el recurso, el número de votaciones y la valoración.

Buscador y listado de actividades

Al pulsar sobre la imagen o el título de cualquier actividad se abrirá el detalle del recurso. A través del mismo, se podrá visualizar y, en su caso, descargar la actividad. También nos permite valorarla y añadir comentarios. Entre la información que se ofrece podemos distinguir la relativa a la catalogación de la misma según el currículo oficial del área.



Detalle del recurso “Geoplano”

2. Enlaces

Listado de páginas Web catalogadas, de utilidad para el área de matemáticas. Contiene un subapartado dedicado a blogs.

La presentación de los contenidos es análoga a la del apartado Actividades, con el buscador y el listado correspondiente. Igualmente, al pulsar sobre la imagen o el título de cualquier enlace se abrirá una nueva ventana con el detalle del mismo. En ella encontraremos información diversa relativa a dicho enlace (url, descripción, catalogación, valoración,…).

Buscador y listado de enlaces

3. Descartes

En esta sección encontraremos información relativa al Proyecto Descartes y el enlace a su página Web.

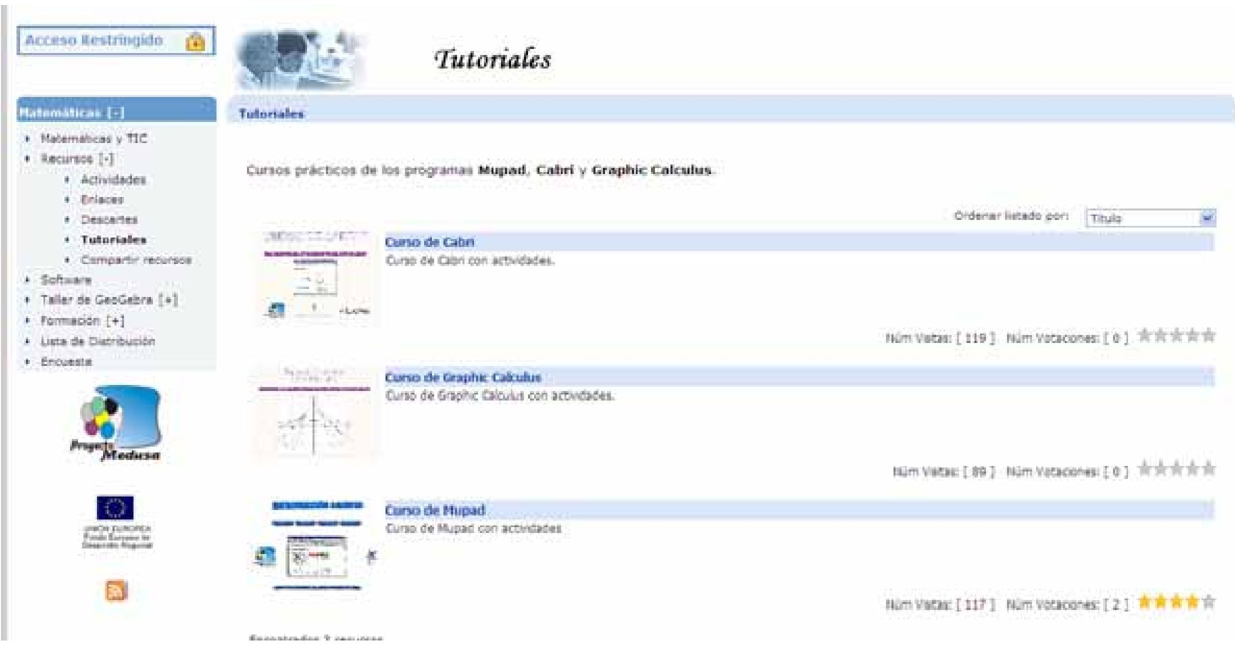
El Proyecto Descartes ha sido promovido por el Ministerio de Educación y Ciencia de España. Su objetivo es la innovación en un entorno colaborativo en el área de Matemáticas que, a través del ordenador y de Internet, ofrezca a los profesores y alumnos una nueva forma de enfocar el aprendizaje de las Matemáticas, promoviendo nuevas metodologías de trabajo más activas, creativas, participativas, motivadoras y personalizadas. Está dirigido a alumnos de los niveles de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato (12 a 18 años**).**

Página web del Proyecto Descartes

4. Tutoriales

En este apartado disponemos de tres cursos sobre los programas Cabri, Graphic Calculus y Mupad. Dicho software ha sido distribuido en todos los centros públicos de Enseñanza Secundaria de la Comunidad Autónoma de Canarias.

En cada uno de los cursos encontraremos contenidos, actividades y manuales para descargar. Están concebidos como materiales para la autoformación.



Tutoriales de Cabri, Graphic Calculus y Mupad

5. Compartir recursos

Esta sección posibilita el que los usuarios de la web compartan recursos, ya sean actividades, enlaces o cualquier otro tipo de material o información relevante para el área de matemáticas.

En la introducción del nodo se indica el procedimiento que hay que seguir para compartir un recurso. Al pulsar el botón "Insertar Recurso" se nos muestra un sencillo formulario mediante el cual podemos aportar toda la información que lo conforma. Cuando se trate de una actividad compuesta por un conjunto de archivos, se debe subir una carpeta comprimida que los contenga, indicando en la casilla "Pág. Inicio:" el nombre del archivo con el que se inicia la actividad.

Estos recursos, una vez catalogados, aparecerán en los apartados correspondientes, según se trate de actividades, enlaces, tutoriales,…

Formulario para compartir recursos

En definitiva, el objetivo que se persigue desde el Proyecto es ofrecer apoyo al profesorado y alumnado a través de diferentes materiales e información, así como ser un punto de encuentro que permita a los usuarios compartir recursos y el desarrollo de trabajos y proyectos colaborativos e innovadores.

Reseña: Pablo Espina Brito
Coordinador del Área de Matemáticas del Proyecto Medusa
Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 135-140
ISSN: 1815-0640

Matemátic@s en l@ red

Planeta Matemático, un repositorio web 2.0 para contenidos matemáticos

Autor de la Página: *Hugo Afonso Pestana*

Dirección: *http://www.planetamatematico.com*

En este trabajo se realiza una revisión del portal Planeta Matemático, un repositorio web de contenidos matemáticos abierto a la participación de la comunidad matemática. El proyecto pretende crear una comunidad de usuarios y colaboradores en torno al mismo, sacando el máximo partido de Internet como medio para la publicación de recursos matemáticos, fomentando la interacción y libre participación a través de foros, servicios de comentarios y valoración de contenidos, boletines, sindicación de noticias, encuestas y otros servicios. La página, desarrollada con un sistema gestor de contenidos dinámicos, ofrece como novedad principal la posibilidad a sus usuarios registrados de enviar contenido a la web a través de un potente editor. La revisión incluye algunos datos que permiten tener una visión sobre el volumen estadístico de accesos y visitas al portal

Los creadores del repositorio pretenden acercarse a un público lo más amplio posible, interesado en la belleza y las aplicaciones prácticas de las matemáticas, sacando el máximo partido de Internet como medio para la publicación de apuntes, ejercicios, exámenes, formularios, software, historia, artículos de divulgación, foros de discusión y otros muchos recursos. El proyecto surge como un trabajo académicamente dirigido en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Actualmente el repositorio se localiza en http://www.planetamatematico.com y su principal administrador es el autor del proyecto original, Hugo Afonso Pestana.

Frente a páginas de temáticas similares, como “El Paraíso de las Matemáticas” [Gombau García, C.C. y otros], el Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas [Ibáñez Torres, R.] la página personal de D. Antonio Pérez Sanz [Pérez Sanz, A.] MathWorld [Weisstein, E.W.] o el Proyecto Descartes [Ministerio de Educación y Ciencia (2006)], Planeta Matemático podría aportar novedades sustanciales. Entre ellas, destaca la posibilidad de enviar contenido a la web a los usuarios a través de un potente editor de contenidos, el formato libre a la participación en la web, la existencia de foros de discusión, wikis, boletines de noticias, video, etc. Planeta Matemático está abierto a la participación de aquellos que lo deseen puesto que bajo la filosofía de los autores, se pretende crear una comunidad en torno a la página, con distintos grupos de usuarios que posean diferentes niveles de facultades y permisos dentro de la administración y gestión de la web en el marco de un entorno colaborativo auténtico más propio de la web 2.0.

Para cubrir los objetivos fijados para la página, desde su origen los autores han apostado por tecnologías basadas en gestores de contenidos dinámicos. Los gestores de contenidos proporcionan entornos que posibilitan y facilitan la actualización, mantenimiento y ampliación de la web con la colaboración de múltiples usuarios. De este modo es posible crear y mantener una página con facilidad, ocultando al usuario las tareas más tediosas que habitualmente ocupan un tiempo importante de los administradores de las webs. Planeta Matemático ha sido desarrollado con el sistema Joomla [Allinson, R. y otros]. Para facilitar la incorporación de contenidos por parte de usuarios no expertos, el editor de contenidos de la web funciona a través de la tecnología WYSIWYG, acrónimo de What You See Is What You Get (en inglés, "lo que ves es lo que obtienes"), lo que permite, a través de una interfaz web, escribir la página sobre una vista preliminar similar a la de un procesador de textos, ocupándose en este caso el programa de generar el código fuente en HTML. Este editor permite agregar imágenes, clips de audio y vídeo, applets en Java, Flash, Shockwave u otros lenguajes, archivos, elementos de formularios, iconos y otros objetos, entre ellos, fórmulas y expresiones matemáticas en LaTeX.

Características principales del portal

La figura 1 muestra la portada o página principal del portal Planeta Matemático en el momento de escribir este trabajo. En el diseño, se ha optado por una portada a dos columnas, con un menú izquierdo en el que se muestran las distintas secciones de la web y la parte derecha en la que se visualizan los distintos ítems de contenido. El menú izquierdo se divide en distintas secciones:

- **Menú principal**: consta de la portada, la presentación, la ayuda de la web, contacto, wikis, foros de discusión, enlaces, el buscador y acceso al menú de administración.
- **Menú de usuario**: en este apartado los usuarios registrados podrán editar sus datos y enviar contenido dinámico a la web (artículos, enlaces, noticias, etc.).

- **Recursos**: apuntes, ejercicios, exámenes y formularios, applets. En la subsección de applets, se pretende hacer una reseña de páginas interactivas de matemáticas. Se incluyen proyectos de matemáticas (proyecto Descartes, proyecto Vestac, etc.) y páginas en las que los applets y la tecnología flash permiten visualizar, experimentar y aprender conceptos matemáticos.
- **Divulgación**: sociedades, congresos, revistas, libros, prensa, televisión, cine, poesía, problemas propuestos, historia, ¿sabías que...?, humor.

Figura 1: Página principal del portal Planeta Matemático

Las dos características fundamentales de la web son el formato libre a la participación y la posibilidad de enviar contenido a sus usuarios registrados a través del editor.

Dado que el número de usuarios podría ser, potencialmente, muy numeroso y con distintos niveles de participación, el portal permite la gestión de grupos de usuarios que posean distintos niveles de facultades y permisos dentro de la administración y gestión de la web. Los grupos de usuarios disponibles en Planeta Matemático son fijos pero tienen diversos niveles del control de acceso, la Tabla 1 muestra los distintos grupos disponibles en Planeta Matemático con sus respectivos niveles de acceso.

Tipo de Usuario	*Permisos*
Usuario registrado	• Puede escribir comentarios en diferentes secciones de la web. • Puede escribir mensajes en los foros de discusión. • Puede acceder a la sección wiki. • Puede acceder a los boletines de noticias de la página. • No puede editar el contenido dinámico existente en la página (artículos, noticias, enlaces, etc.).
Autor	• Puede enviar contenido dinámico a la web. • No puede editar el contenido dinámico existente en el sitio. • No puede publicar ítems de contenido.
Editor	• Puede enviar y editar contenido dinámico. • No puede publicar ítems de contenido.
Publisher	• Puede enviar, editar y publicar ítems de contenido en la web.
Encargado o Manager	• Tiene acceso a la creación de contenido y a otra información del sistema.
Administrador	• Tiene acceso a la mayoría de las funciones de la administración. • Puede administrar a pocos usuarios (editores y usuarios) pero no puede crear a otros administradores.
Super Administrador	• Tiene acceso a todas las funciones de la administración. • Puede crear cualquier otro tipo de usuario (excepto otro super administrador).

Tabla 1: Clasificación de los distintos usuarios en Planeta Matemático

Estadísticas de Uso

De acuerdo con información proporcionada por los gestores de la página, que ha sido directamente extraída de la plataforma o proporcionada por google analytics [Google Analytics]. En estos momentos el portal dispone de dos administradores (uno de ellos superadministrador) que realizan la mayor parte de la actividad que genera. Cuenta con 355 usuarios registrados, todos ellos en la categoría de autor, lo que les infiere la posibilidad de aportar contenidos. Durante el último mes el portal ha recibido más de 10.000 visitas, 350 visitas diarias y más de 20.000 páginas visitadas. La figura 2 muestra un gráfico de visitas por ubicación mundial y la figura 3 el número de visitas para los 10 países con mayor número de visitas. Claramente los países que aportan mayor número de visitantes son España y México que aportan casi el 50% de las visitas, el resto de visitas se concentran fundamentalmente en países iberoamericanos dado que se trata de un portal en lengua española.

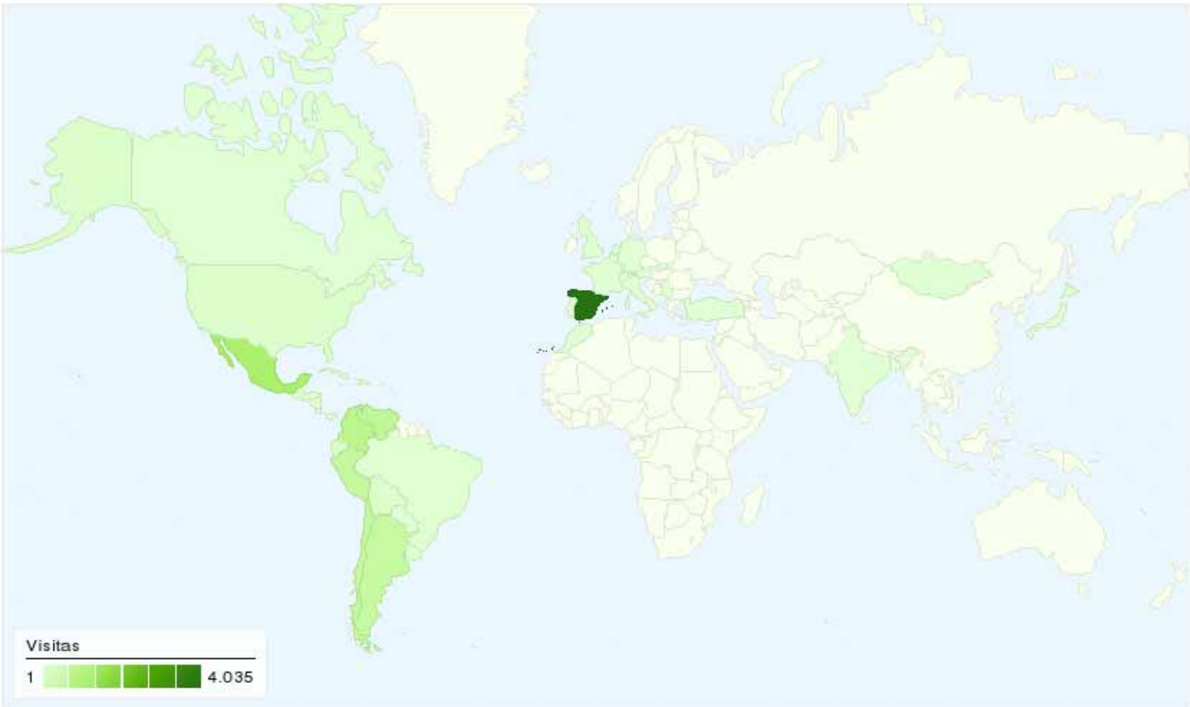


Figura 2: Gráfico de visitas por ubicación mundial.

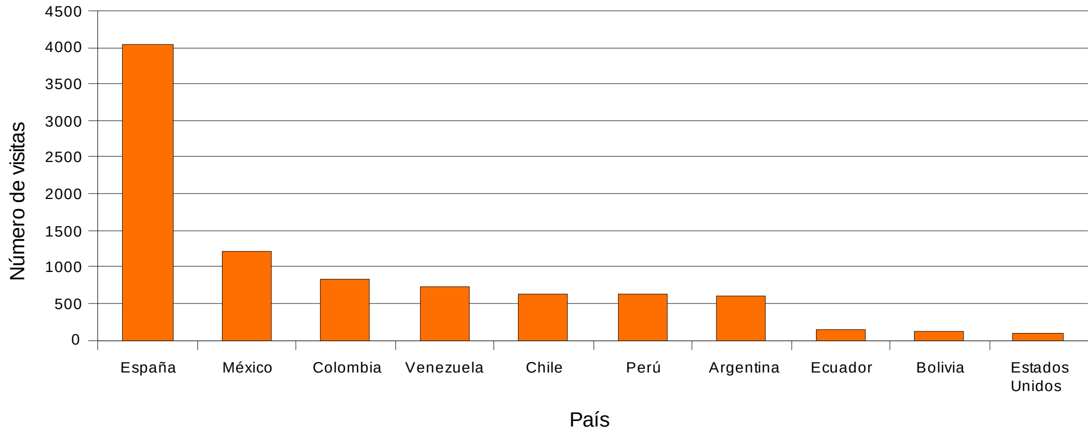


Figura 3: Número de visitantes al portal Planeta Matemático.

Bibliografía

[Gombau García, C.C. y otros] El Paraíso de las Matemáticas. http://www.matematicas.net/. 2007.

[Google Analytics] Google Analytics. http://www.google.com/analytics/es-ES/

[Ibáñez Torres, R. y otros] DivulgaMAT - Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. http://divulgamat.net/. 2007.

[Ministerio de Educación y Ciencia (2006)] Proyecto Descartes. http://descartes.cnice.mecd.es/. 2006.

[Pérez Sanz, A.] Página personal de D. Antonio Pérez Sanz. http://platea.pntic.mec.es/aperez4/. 2008.

[Weisstein, E.W.] *MathWorld: The Web's Most Extensive Mathematics Resource*. http://mathworld.wolfram.com/. 2008.

Reseña: Francisco Almeida
Universidad de La Laguna
Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 141-145
ISSN: 1815-0640

Lectura comprensiva de problemas de matemáticas

Autora de la Aplicación: *Mª Isabel Pueyo*

Dirección*:* http://www.cnice.mec.es/profesores/asignaturas/lengua_castellana_y_literatura/problemas/

Las nuevas tecnologías nos ofrecen un buen número de recursos, en formato digital, que resultan pedagógicamente muy interesantes, en la medida en la que sepamos integrarlos de forma efectiva a nuestra práctica docente.

Como docentes tendremos que conocer los recursos, saber localizarlos y tenerlos presentes en nuestras programaciones para utilizarlos en los diferentes contextos mediante el diseño de situaciones didácticas que favorezcan la adquisición de las competencias y conocimientos que nos interesen.

Cada vez, es más evidente la necesidad de hacer planteamientos educativos que refuercen, en nuestros alumnos, el razonamiento y que mejoren su capacidad lingüística. Para lo cual deberemos hacer propuestas didácticas que incluyan de forma globalizada actividades o situaciones didácticas que los enfrenten de forma autónoma ante la toma de decisiones basadas en una lectura efectiva.

Actualmente estamos inmersos en una importante reflexión sobre la enseñanza de las competencias y una de las cuestiones principales que surgen es la conveniencia de buscar un enfoque globalizador, según el cual toda intervención deberían partir de situaciones próximas e interesantes para el niño en las que se le planteen cuestiones o problemas a los que tiene que dar respuesta. Todo ello mediante una visión interdisciplinar en la que no identifiquemos un contenido determinado con un área del currículo.

Es por ello que el contenido digital, objeto de nuestro análisis, nos permitirá hacer una propuesta claramente globalizada en la que podremos trabajar, a partir del área de matemáticas o de lengua, la lectura comprensiva y eficaz como herramienta imprescindible para poder abordar la resolución de problemas en los que vamos a necesitar el razonamiento matemático.

El fin último, será la resolución de los problemas planteados y para ello el alumno tendrá que ser capaz de responder después de hacer una lectura comprensiva de los mismos para poder aplicar los razonamientos matemáticos que se le solicitan.

Proble+

El juego le ofrece al alumno la posibilidad de ayudar a los personajes Tica y Tapo a resolver algunos problemas que les van surgiendo. Tica, una gallina, y Tapo, un perro, se enfrentan a una serie de retos que están relacionados con el grano, los huevos, las gallinas, las ovejas, los huesos y otros elementos que les servirán para introducir al alumno en diferentes conceptos matemáticos.

Para ayudar a los personajes a superar las diferentes cuestiones planteadas el niño deberá realizar sencillas operaciones matemáticas pero que exigen prestar mucha atención a los datos, las ayudas y las pistas que se ofrecen en el enunciado.

Descripción del juego

El juego comienza al pulsar sobre cualquier parte del dibujo inicial. Se despliega una pantalla en la que le pregunta al alumno si es la primera vez que visita el juego.

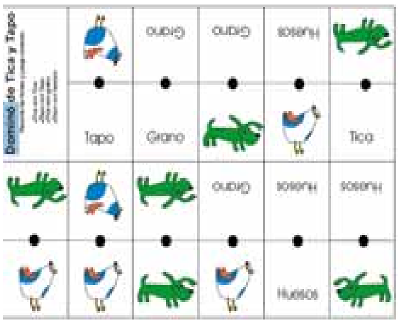
Al contestar que no, se inicia una presentación de los personajes. El niño elegirá entre los nombres de Tica o Tapo y pasará a una descripción en la que se van ofreciendo características de los personajes para luego hacer unas sencillas preguntas de comprensión.

Resulta muy interesante la introducción pues se hace un planteamiento sobre lo que nos vamos a encontrar en el juego. La lectura comprensiva resulta imprescindible para una correcta resolución de problemas. Es importante que los alumnos se conciencien de este detalle para en el futuro plantearlo con los problemas de mayor dificultad que vayan surgiendo.

El juego va proponiendo una serie de retos con la gallina Tica y con el perro Tapo en los cuales el niño deberá leer muy atentamente la información de los textos escritos. Esta será una de las claves para triunfar con este juego. Una vez que el alumno haya entendido lo que pone, hará clic en el icono: 

En caso de error el juego plantea unas ayudas en las que no se da la solución, sino se hacen planteamientos que obligan al razonamiento y manipulación que permiten visualizar la respuesta correcta.

Una vez superadas con éxito todas las pruebas planteadas, el niño obtiene un premio. La recompensa es un juego imprimible, en formato *.pdf, para que el alumno construya su propio juego.



Al comenzar un problema y una vez leído el texto se buscará la zona activa de la pantalla para continuar. Cada problema contiene una simulación que facilita el razonamiento de los niños. En la simulación se permite la libre manipulación del alumno. En cualquier momento podremos volver a iniciar la simulación pulsando un icono que se adjunta en el interfaz.

Apartados del juego

Al entrar en el menú del juego nos encontramos con tres bloques de problemas:

En el apartado de problemas de Tica encontraremos diferentes cuestiones que preocupan a la gallina. Los problemas se agrupan en cinco bloques que se corresponden con los que se observan en la imagen:

Los problemas que se presentan tienen diferentes niveles de dificultad:

- En "Tica come" se plantean problemas en los que el alumno se tiene que fijar en los granos que come Tica y contar bien para poder contestar a las preguntas en las que tendrá que sumar y restar par responder.
- En el bloque "Las gallinas", nos acercaremos al concepto de la multiplicación mediante el agrupamiento y reparto de gallinas.
- En "Tica pone los huevos", trabajaremos los conceptos de docena y media docena.
- Podremos trabajar la decena en el bloque titulado "Decenas de granos".
- Para finalizar los problemas de Tica tenemos el botón con los problemas de "La familia de Tica". En este apartado encontraremos problemas en los que se trabajará el razonamiento de la suma y la resta.

En el apartado de problemas de Tapo el sistema es muy similar, los problemas se agrupan en cinco temas que le interesan al perrito Tapo:

- En primer lugar tenemos "Tapo como huesos", en el que se plantean cuestiones relacionadas con las medidas.
- En "Las ovejas" se trabajan las expresiones numéricas de mayor y menor.
- A continuación "El tesoro de Tapo" nos acerca al uso de los mapas.
- "El trabajo de Tapo" presenta un problema de carga y no funciona.
- Por último tenemos "Los amigos de Tapo" en el que se trabaja la localización espacial.

En este apartado de juegos se presentan cuatro juegos de observación para jugar en pantalla. Uno de buscar el elemento que falta, otro de buscar diferencias, un tercero de buscar el elemento diferente a los demás y el último en el que tenemos que localizar la parte que completa el dibujo.

Los juegos a realizar en papel se presentan en formato *.pdf y son uno para realizar una gallina como Tica y otro para hacerle una casita a Tapo.

Propuesta de uso didáctico

El juego ofrece un buen número de posibilidades y permite el diseño de situaciones didácticas en diferentes contextos u organizaciones sociales del aula: gran grupo, equipos fijos o heterogéneos, equipos flexibles o trabajo individual.

Se puede trabajar alguna de las propuestas, como la incluida en El tesoro de Tapo que nos hace una introducción en el uso de los mapas. Para ello utilizaremos el gran grupo mediante el uso del proyector o la pizarra digital para presentar la actividad y mediante la observación y la discusión del grupo descubrir los elementos en los que nos fijamos para interpretar el plano o mapa.

A continuación se podrían hacer propuestas de trabajo en grupo, mediante las que los alumnos esconderán objetos por la clase o el patio del colegio y realizarán un plano para localizarlos. Los planos los intercambiarán con otros grupos que tratarán de localizar los objetos escondidos siguiendo el plano.

Como trabajo individual les propondremos a los niños el reto de conseguir el premio si supera con éxito la actividad.

Ficha educativo-técnica

Nombre	**Proble+**
Autora	**Isabel Pueyo**
Acceder al juego	http://www.cnice.mec.es/profesores/asignaturas/lengua_castellana_y_literatura/problemas/
Descarga	http://descargas.pntic.mec.es/contenidos/materiales_adq/problemas.zip (12Mb)
Contenido	Resolución de problemas
Nivel	Segundo ciclo de Educación Infantil y Primer ciclo de primaria
Metodología	Ideal para trabajar mediante la metodología de resolución de problemas. El juego permitirá la utilización de diferentes contextos educativos: de forma individual, en gran grupo mediante el uso de la pizarra digital, en pequeño grupo o diseñando trabajo por equipos.
Sistema	Es una aplicación realizada en flash que se puede visualizar en los equipos con diferentes sistemas operativos y desde los diferentes exploradores. Imprescindible tener instalado el Flash Player y el Adobe Acrobat Reader
Licencia	GNU

Reseña: M. Sergio Fortes Gómez
Asesor de Formación del Proyecto Medusa
Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 147-152
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Los docentes de matemáticas, las TIC´s y los alumnos de secundaria (México)

Julio César Antolín

Resumen

El avance de las TIC´s han superado incluso la capacidad del docente de actualizarse, donde incluso se siente cierto "temor" de enfrentarse a la posibilidad de que lo supere el alumno. En este artículo analizamos algunos aspectos retomados de la experiencia de trabajar con docentes y alumnos que utilizan estas herramientas para el aprendizaje de la materia de matemáticas en educación secundaria

Abstract

La Educación Secundaria en México y sus trasformaciones con la utilización de Tecnologías de la Información vienen a tener cambios estructurales y prácticos en las enseñanzas de las ciencias como las matemáticas.

Los docentes de Matemáticas

Los docentes de matemáticas de educación secundaria en México son los que mayor preparación académica y experiencia profesional tienen en comparación con docentes de otras academias del mismo nivel.

Entre sus filas podemos encontrar licenciados de educación secundaria, ingenieros, contadores, economistas, administradores por mencionar algunos.

Sin embargo, el principal obstáculo para el desarrollo de sus actividades, es la falta de herramientas pedagógicas que les permitan enfrentar la nueva realidad social que vivan y que no aprendieron en las escuelas.

La mayor parte del gasto del Gobierno de México en materia educativa esta atado al gasto corriente ya que el gasto a capital apenas llega al 2.8% contra el promedio de 8.4%. Por ello deja muy bajo margen para mejorar la infraestructura educativa o la compra de materiales didácticos. La inversión educativa debe de ir más allá de esa frontera, donde el principal yugo es el descentralismo disfrazado.

A pesar de los incrementos, los logros educativos (OCDE) son bajos, manteniendo a México del lugar 29 de los 30 países miembros. Corea ha pasado del lugar 24 al 1, por lo que sólo 21% de los mexicanos de 34 y 35 años de edad cuentan en la actualidad con una preparación de segundo ciclo de educación secundaria, en comparación con un promedio de la OCDE de 75%.

Algo nos falta por hacer más allá de simplemente capacitar a maestros o cambiar la teoría de aprendizaje. Nos hace falta transformar de fondo el sistema educativo.

En el año 2006 se dio un impulso importante que no termina de convencer a los docentes de aula: se realizo una reforma integral al sistema de educación secundaria en México, reorganizando planes de estudio y formas de aprendizaje orientándolos al constructivismo puro. No se trata de realizar “copias” de lo que sucede en otros países o de implementar bases teóricas rebasadas por la realidad (como el constructivismo puro de Piaget). Las escuelas deben de ir más allá, con la participación social como eje rector y trasformador de las escuelas, donde la socialización del conocimiento y reconocimiento de sus necesidades, permitan ejercitar actividades para y por la vida de la comunidad educativa. Donde la escuela se convierta en el eje impulsor del desarrollo social de una comunidad y se reconozca la labor del docente como un agente social importante para la comunidad.

A la par, se ha dado un fenómeno interesante: el fomento de la educación no formal. En este respecto debemos de analizar que la formación para la vida es una necesidad imperante donde las escuelas deben de tomar su papel transformador y ser centros de formación continua donde se transmitan conocimientos nuevos e innovadores que sirvan a la población menor y adulta y no solo para estudiantes en edad escolar. Al respecto, la población dentro de diez años de adultos mayores será de 4.5%, es decir un 270% mas que lo que sucede hoy en día. Este grupo social requerirá atención y necesidades educativas y de entretenimiento propio, lo que habla de que todo adulto de 30 años o más, tendrán nuevas necesidades educativas antes de llegar a la adultez mayor.

En tal sentido el docente se ve como parte primordial de ese futuro, donde entiende el compromiso pero deja en manos de la autoridad el resolver la mayor parte de estas necesidades educativas florecientes.

Desde 1824 se hablaba, 1857 se constitucionalizo y aun no se ha logrado, la descentralización educativa, pero una descentralización educativa real no de papel, municipio libre como base de división territorial y su organización política y administrativa (articulo 115 Constitución México). En ese sentido, los recursos públicos de equipamiento, mantenimiento de infraestructura y apoyo docente aun no se dan, siguen estancados en los lineamientos que determine la Federación.

Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC´s)

Sin duda, el avance en el uso de las Tecnologías de la Información (TIC´s), han tenido un crecimiento impresionante en la vida común de los estudiantes que se puede decir que “ya nacen” sabiéndolas utilizar como recursos de diversión y de comunicación informada.

En tal sentido las herramientas como las personal computer con el uso de multimedios, internet, blogs, wikis y demás tecnologías web 2.0, son de uso cotidiano e incluso los jóvenes alumnos transcurren largas horas detrás de un monitor.

El teléfono celular, con televisión de canal abierto, las cámaras de video, las opciones de envío de texto o mensajes audibles, son otra muestra de este tipo de tecnologías.

El problema no viene con el uso del aparato, sino que se ha convertido en simple transmisor de datos que por la velocidad con que llega y se va, no tiene tiempo de detenerse y reflexionar sobre ella.

En ese sentido, muchos docentes me han manifestado su preocupación y temor de que estas tecnologías los estén rebasando, ya que no solo no la saben manejar, sino que en su vida cotidiana se han convertido en simples objetos de consumo, sin una finalidad educativa.

Haciendo un análisis a través de sondeo de docentes de matemáticas y alumnos en las escuelas secundarias del sector escolar 4 en Guadalajara, México, obtuvimos algunas consideraciones importantes de revisar:

- Solo el 24% de los docentes de las matemáticas utilizan las TIC’s como herramientas en el desarrollo de su labor docente.
- El 90% de estos, utiliza sus propios materiales en sus planteles educativos, ya que los directivos de las instituciones no permiten su uso para actividades propias del docente.
- El 100% se sentían frustrados de la falta de cumplimiento del gobierno mexicano en seguir apoyando a la adquisición de herramientas didácticas como las graficadoras electrónicas y de exposición multimedia, a pesar que se les condiciono su participación en capacitación en el uso de las herramientas que nunca llegaron a los planteles.
- Solo el 10% participa en forma activa en los programas extracurriculares de formación docente, cumpliendo por obligación el 65% en los Talleres Generales de Actualización, donde la asistencia es obligatoria.

Por el contrario, la participación es entusiasta entre los alumnos de los docentes de matemáticas, estos expresan:

- Su interés por la materia cuando se utilizan distintas herramientas tecnológicas,
- Las herramientas favoritas son las graficadoras TI92 de Texas Instruments para cualquier tipo de ecuación, las hojas de calculo para algebra general, el geometry cabri para movimiento geométrico, por poner algunos ejemplos.

- Dan su reconocimiento a los docentes que les enseñan con herramientas TIC´s, ya que se sienten identificados con ellos
- Consideran el uso de las TIC´s fuera de clase (chat, Messenger, etc.) como una forma de acercamiento de comunicación con sus docentes fuera de clase.
- Aseguran que sus padres participan más con ellos y colaboran para que las TIC´s estén presentes en sus hogares, dándoles uso educativo.

Realizando un análisis mas a fondo, los docentes de matemáticas reconocen las ventajas de la utilización de estas herramientas, pero expresan cierto "temor" de sentirse superados por los propios alumnos, se siente solos sin el apoyo suficiente y justifican la falta de participación en aulas de medios, a que requieren de un técnico que los apoye en el servicio de las herramientas y a "controlar" los grupos.

Los docentes con el animo de su utilización, les cuesta mas trabajo relacionarse con estas tecnologías y sobre todo, se señala que se requiere "mucho tiempo" para elaborar materiales con fines didácticos que permitan utilizar estas TIC´s como herramientas de momentos educativos.

Existen en México interesantes esfuerzos para apoyar a los docentes para que poco a poco se desarrollen en el manejo de este tipo de herramientas TIC´s, como los proyectos de Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT), el Programa para el Fortalecimiento del Proceso Enseñanza-Aprendizaje de las Áreas Científicas en las Escuelas Secundarias y en la Escuela Normal Superior de Jalisco, Intel Educar para el Futuro, etc. , que son proyectos aislados para un problema mas complejo.

Sin duda, el docente de matemáticas conlleva cierto orgullo que no comparten otras materias, y es el saber, que no cualquier Maestro puede impartir el área de matemáticas.

En el ámbito práctico, así lo es, docente, padres de familia y sociedad en general, ven con cierto rencor la materia, pero reconocen su importancia en la trascendencia en la vida del hombre.

Es por ello que en el ámbito político y gubernamental, es poco el apoyo real que se da por superar los índices de marginación y pobreza de materiales didácticos y de reconocimiento al esfuerzo que realizan todos los días los docentes de matemáticas.

Sin embargo, el docente de matemáticas debe convencerse asimismo y a los demás que nadie vendrá a cambiarles nuestra realidad: solo nosotros podemos ser factores de cambio, un cambio que permita trasformar la didáctica matemática y adecuarla a los nuevos tiempos, al uso de la tecnología como herramienta y como oportunidad de aprendizaje hacia los alumnos.

Debemos mostrar con el ejemplo, que podemos realizarlo.

La labor del docente debe de reconsiderarse socialmente, sobre todo, del docente de matemáticas. Son los propios alumnos y padres de familia quienes reconocen los esfuerzos aislados de algunos docentes, pero el deber de reconocer esta importante figura social, es el docente mismo, que debe de dejar atrás el idealismo que lo rodea y convertirse en un agente de transformación social, empezando por nosotros mismos.

De igual forma, debe de verse con otros ojos a los docentes de matemáticas desde las esferas de gobierno, brindando capacitación y formación en forma permanente a sus docentes, y no solo de programas de “deslumbron” que solo permiten “salir bien en la foto”.

Los alumnos de secundaria en México

Los alumnos de educación secundaria cada vez se van admitiendo más jóvenes (entre 11 y 12 años de edad) lo que permite un lento pero duro rompimiento con lo que venia haciendo en educación primera.

En esta razón, los alumnos de educación secundaria entran en la pubertad, lo que permite una natural rebeldía ante los esquemas de educación escolar, haciéndolos resistentes ante la disciplina, el orden o la dedicación de tiempos escolares.

Con la entrada de la obligatoriedad de la educación secundaria en México, se dio apertura a los planteles educativos a muchos alumnos que lo que menos querían era estudiar. Es por ello escuchar más comúnmente que crecen los índices de reprobación y deserción escolar, todo debido a este fenómeno social paulatino.

Por otro lado, si revisamos los Factores escolares y aprendizaje en México, el caso de la educación básica (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, México, Diciembre 2007), los índices de resultados de las pruebas enlace en dicho nivel, sobre todo en el área de matemáticas, podemos apreciar que la secundaria técnica no muestra que tengan un impacto significativo sobre el aprendizaje en relación con la secundaria general. Por su parte, el impacto que tiene la Telesecundaria es de -27.8 puntos, así como un alumno estudie en una secundaria privada tiene un efecto positivo de 72.7 puntos, lo que equivale a cerca de un grado y medio escolar.

Analizando el porque esta varianza, se encontró que los estudiantes de educación secundaria privada tienen un mayor índice motivacional y de equipamiento tecnológico que le permiten realizar mas fácilmente sus actividades escolares, en donde la participación y seguimiento de los padres de familia son mas constantes.

Siguiendo con el análisis del INEE, las condiciones de los resultados que obtiene los alumnos y que impactan el aprendizaje de matemáticas son:

- Prácticas de Matemáticas, influye en 14.8 puntos,
- Motivación del estudiante (que logran los profesores) influye en 11.9 puntos;

- Disciplina en el plantel lo afecta en 10.9 puntos,
- Equipamiento escolar impacta en 10.8 puntos,
- Experiencia del docente tiene un efecto de 4.9 puntos;
- Violencia fuera del plantel en un 3.2 puntos,
- Infraestructura escolar de 2.7 puntos,
- Inasistencias del docente afectan negativamente el aprendizaje con -13.9 puntos
- Repetición de grado impacta negativamente en -31.9 puntos;
- Realizar tareas escolares ayuda en 10.2 puntos,
- Actividad laboral fuera de la escuela afecta en -4.8 puntos;
- Fumar o beber afecta el logro en seis puntos.

Estos resultados, nos permiten ver que nuestros alumnos de secundaria, tienen también factores que deben de atenderse en forma inteligente sin caer en abusos que no persigan los fines educativos.

Sin duda, la formación de competencias para la vida son actividades difíciles, y que son menospreciadas en muchas ocasiones por la misma sociedad, por ello el reconocimiento del uso de las TIC´s como herramientas educaciones son actividades que van a favor de la formación integral de los futuros ciudadanos de México.

Bibliografía

- Actas de Academia de Matemáticas. Escuela Secundaria Mixta 44. Guadalajara, México. www.secundariamixta44.calidadpp.com, consultadas el 01MZO08
- Factores escolares y aprendizaje en México: El caso de la educación básica, Capitulo 5. Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). http://www.inee.edu.mx/index.php?option=com_content&task=view&id=2916&Itemid=976 consultada el 01MZO08

Julio Cesar Antolin Larios, nacido en Guadalajara, México el 03 JUL71. Maestro Catedrático de Enseñanza Secundaria (Área Matemáticas). Licenciado en Educación con Especialidad en Gestión y Administración Educativa Universidad de Guadalajara, México. Diplomado en Comunicación y Expresión Educativa.
antolinjc@yahoo.com.mx
www.secundariamixta44.calidadpp.com

Junio de 2008, Número 14, páginas 153 - 156
ISSN: 1815-0640

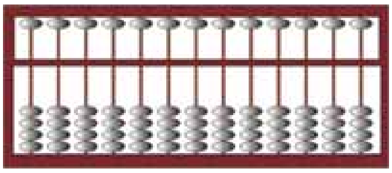
Por Santiago López Arca

ÁBACO

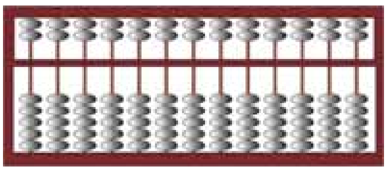
El ***ábaco*** es un instrumento que se utiliza desde hace siglos para realizar sencillos cálculos matemáticos cómo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Se construye utilizando unas bolas que se insertan en alambres enmarcados, por lo general, en un bastidor de madera.

El término *ábaco* procede del griego, *abax* o *abakon*, que significa "superficie plana o tabla cubierta de polvo"; pues en un principio los calculadores utilizaban fichas o pequeñas piedras (*calculi*) sobre una mesa o una bandeja en la que separaban las zonas correspondientes a los diferentes órdenes de unidades utilizando líneas que marcaban con polvo.

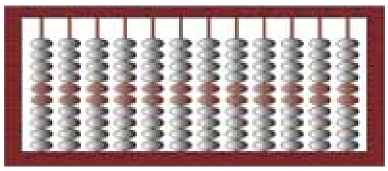
Dependiendo de las zonas geográficas, se denomina al ábaco con diferentes nombres: en la China se llama *suan pan*, en el Japón *soroban*, en Corea *tschu pan*, en Rusia *stchoty*, en Vietnam *ban tuan* o *ban tien*, en Turquía *coulba*, en Alemania *choreb*…



Ábaco japonés



Ábaco chino



Ábaco ruso

Se han encontrado restos arqueológicos en los que se representan calculadores manejando bolas que demuestran el uso del ábaco por griegos y romanos pero este instrumento fue utilizado por otras muchas culturas. Los egipcios, 500 años a.C., utilizaban un instrumento para calcular, que también consistía en bolas insertadas en alambres. Más adelante, a principios del siglo II d.C. los chinos añadieron un soporte con forma de bandeja.

El modo en que conocemos el ábaco en la actualidad parte del siglo XII y los chinos lo utilizaban hasta hace muy poco en muchas facetas de la vida cotidiana (tiendas y pequeños negocios, bancos, escuelas...) cómo máquina de calcular. Adaptaciones escolares del ábaco se usan también en las aulas de educación primaria como instrumentos pedagógicos.

El chino y el ruso son los dos tipos de ábacos más comunes.

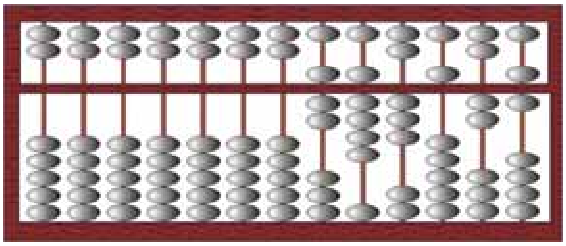
Santiago López Arca

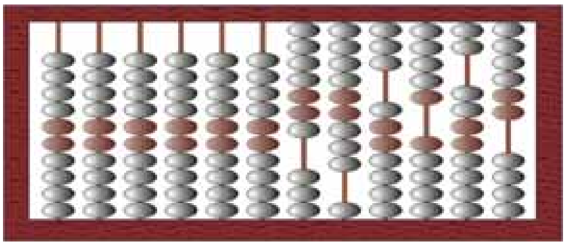
El primero consiste en un marco rectangular en el que se engarzan 13 varillas con 7 bolas cada una; el marco está dividido en dos zonas por un listón que deja, para cada orden de unidades, dos bolas en la parte superior y cinco en la de abajo. Cada una de las bolas superiores representa cinco unidades del orden correspondiente y las inferiores una unidad cada una.

El ábaco ruso tiene también un marco rectangular pero las varillas contienen diez bolas cada una, siendo habitualmente las dos centrales de diferente color para facilitar al calculador la distinción de los números.

Normalmente, los calculadores reservan los dos primeros alambres de la derecha para las fracciones decimales de primer y segundo orden. Así, de derecha a izquierda, el primer alambre se utiliza para las centésimas, el segundo para las décimas, el tercero para las unidades, el cuarto para las decenas... y así sucesivamente.

A continuación se representa el número 7 935,26 en un ábaco chino y en otro ruso.





Sabela R. L.

EL PROBLEMA DE DIDO

El poeta romano ***Virgilio*** (70 -19 a. de C.) es el autor de ***La Eneida***, obra a la que dedicó los once últimos años de su vida. En esta epopeya mitológica se relatan las peripecias de los viajes de Eneas, desde su salida de Troya hasta que arriba a Italia.

Entre los avatares que le sucedieron, se cita su naufragio ante las costas de Cartago. En la obra de Virgilio, ***Dido***, la hermosa reina de Cartago, se enamora de Eneas y, cuando éste opta por marcharse, ella decide suicidarse.

La Eneida le sirvió de inspiración al compositor inglés ***Henry Purcell*** (Londres 1659 – 1695) para concebir su obra maestra, la ópera ***Dido and Aeneas*** que data del año 1689. Esta composición consta de un prologo y tres actos, aunque se creó una semi-ópera debido a que el público de la época prefería el teatro a la ópera.

Dido, llamada Elisa en Tiro, fue una princesa fenicia que pasó a formar parte de la historia de las matemáticas debido a una leyenda en la que se pone de manifiesto su talento geométrico cuando tuvo que enfrentarse a la resolución de un problema práctico. Esta leyenda explica como tuvo lugar la fundación de Cartago. Por este motivo también se identifica a Dido como Tania, diosa tutelar de esa ciudad.

Pero vayamos a las matemáticas y veamos en que consistió *el problema de Dido*.

Santiago López Arca

Dido, que se casó con su tío Siqueo, fue hija del rey Belus. Su hermano Pigmalión, rey de Tiro, asesinó a su esposo para arrebatarle sus posesiones, por lo que ella tuvo que huir a Chipre y luego a la costa de África.

Allí intentó comprar una porción de terreno para establecerse con todo su séquito. El mandatario local, el rey Jarbas de Numidia, se mostró muy reticente ante la idea de vender parte de su territorio a una extranjera. Por este motivo, estableció la condición de que entregaría a los recién llegados aquel trozo de tierra que pudieran rodear utilizando la piel de un buey. Era el año 814 a. de C.

Dido ordenó a su gente que cortaran la piel en tiras muy finas y que las unieran para formar con ellas la cuerda más larga posible. A continuación, se situaron en la playa; y así, tomando el mar cómo límite, rodearon con la cuerda el trozo de tierra más grande que fueron capaces de abarcar. El espacio obtenido fue suficiente para poder fundar una ciudad. Jarbas se sintió engañado y persiguió a Dido, por lo que ella, para salvar a su pueblo, se quitó la vida. Como se apuntaba más arriba, Virgilio prefirió otro final para la leyenda sobre la reina de Cartago…

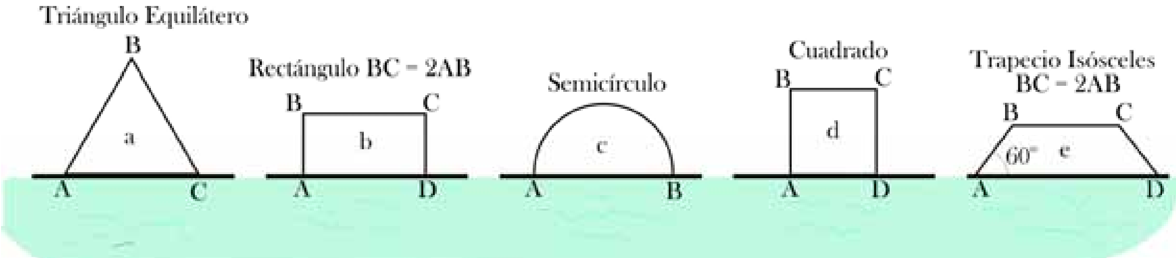
Dido resolvió, por lo tanto, la cuestión geométrica de encontrar la curva, con un perímetro dado, que encierra la máxima área posible.

Te proponemos que resuelvas tú la recreación del problema de Dido, que reproducimos a continuación:

En el año 900 a. de C. la princesa Dido fue expulsada de sus tierras por la codicia de su hermano Pigmalión, rey de Tiro. Tomó un navío y después de una arriesgada travesía llegó a Numidia (a las afueras de la futura Cartago). El rey de Numidia la autoriza, en cierto modo para burlarse de ella, a fundar un pequeño reino sobre las tierras que pudiese delimitar con una piel de buey.

*Dido hace cortar en finas tiras de cuero la piel y las une todas, obteniendo así una cuerda de longitud **L**.*

*A continuación elige una zona rectilínea a la orilla del mar y dispone esa cuerda de longitud **L** en la frontera terrestre de su dominio, determinando sucesivamente las figuras a, b, c, d, e.*



Calcula, en función de L, las superficies de los diferentes dominios. Dido quiere, evidentemente, un territorio de superficie máxima, ¿cuál elegirá? ¿Cuál será entonces la longitud de la costa de su nuevo reino?

Irene V. M.

Santiago López Arca

En estas seis imágenes se muestran otras tantas mujeres destacadas en el mundo de las matemáticas. El esfuerzo de cada una de ellas merece ser recordado y, en todos los casos, debe ser tomado como ejemplo de lucha ante las barreras que debieron superar las mujeres para ganarse un lugar dentro de la historia de la ciencia.

Te proponemos un ejercicio de investigación: asocia cada una de las afirmaciones que hacemos a continuación con la mujer a la que se refiera.

1.- Tradujo del latín al francés los *Principia Matemática* de *Isaac Newton*.

2.-Tuvo siempre una salud precaria. Llegó a perder la movilidad de sus piernas, que recuperó gracias a su gran tesón.

3.- Su nombre significa "*la más grande*". Fue matemática y astrónoma. Se llamó *Hipatia*.

4.- Se casó, organizando un matrimonio de conveniencia, para poder asistir a las clases de la universidad con el acompañamiento de su marido.

5.- Perteneció a una familia de músicos y tuvo un cierto éxito como soprano, aunque solamente cantaba cuando dirigía la orquesta su hermano William.

6.- Contribuyó decisivamente a la demostración de un caso particular del *Último Teorema de Fermat*.

7.- Es *Caroline Lucretia Herschel*, nació en Hannover el 16 de marzo de 1750.

8.- En 1883 comenzó a trabajar en la Universidad de Estocolmo. En 1889 es nombrada profesora vitalicia de esa universidad.

9.- Murió dilapidada a manos de una multitud manipulada, como víctima de la intransigencia y el fanatismo religioso.

10.- París, 1 de abril de 1776 – París, 27 de junio de 1831. Se llamaba *Sophie Germain*.

11.- Vivió con Voltaire en el castillo de Cirey-Blaise.

12.- *Augusta Ada King*, condesa de Lovelace. Se conoce también como *Ada Byron*, por ser hija del ilustre poeta *Lord Byron*.

13.- Para poder presentar una memoria en la *Escuela Politécnica de París* tuvo que fingir una identidad masculina, bajo el seudónimo de *Antoine-Auguste Le Blanc*.

14.- Su nombre era Sofía Sonia Kovalevskaya.

15.- Su padre, que fue un gran matemático y astrónomo perteneciente al museo de Alejandría, se llamaba *Teón*. *Teón* quiso que su hija fuese un ser humano perfecto.

16.- Se puede afirmar que es la más grande astrónoma de todos los tiempos.

17.- Es considerada como una pionera de la informática; trabajo con *Charles Babbage*.

18.- Su nombre fue *Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil Marquise du Châtelet*.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, páginas 157-160
ISSN: 1815-0640

Convocatorias y eventos

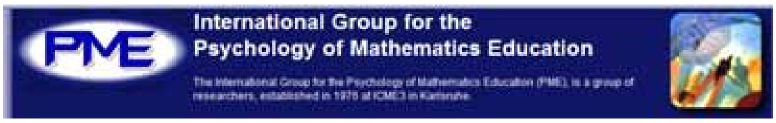
AÑO 2008

Joint ICMI /IASE Study Statistics Education in School Mathematics
Monterrey, México
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
Fecha: 30 de Junio al 4 de Julio, 2008
http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/

RELME 22
22 REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
Ciudad de México
Instituto Politécnico Nacional
Fecha: 1 al 4 de Julio de 2008
www.relme-clame.org

ICME, the International Congress on Mathematical Education
Monterrey, México
Fecha: 6 al 13 de Julio 6, 2008
http://icme11.org/

Encuentro Latinoamericano de Educación Estadística (ELEE)
ITESM, Monterrey, México
Fecha: 4 al 5 de julio, 2008
http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/



PME 32
Morelia, Mexico
Fecha: 17 al 21 de julio, 2008
http://igpme.org/default.asp

HPM 2008

Historia y Pedagogía de las Matemáticas
The HPM Reunión Satélite del ICME

14 al 18 de Julio de 2008, Ciudad de México, MÉXICO
Primer Anuncio

Historia y Pedagogía de las Matemáticas
HPM Reunión Satélite del ICME
Ciudad de México, México
Fecha: 14 al 18 de Julio, 2008,
http://www.red-cimates.org.mx/HPM2008.htm

IV Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán
Desde el Bachillerato a la Universidad en Matemáticas
Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid
Fecha: 21 al 24 de Julio de 2008
http://www.escet.urjc.es/satellite/triptico.pdf

II Seminário de Histórias e Investigações de / em Aulas de Matemática
Organização: Grupo de Sábado - FE/Unicamp
Fecha: 24 al 26 de Julio
Funcamp - Fundação da Universidade de Campinas.
http://www.fe.unicamp.br/shiam/apoio.html

Tercera Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática
Colegio y Liceo Crandon-Salto Ciudad de Salto
Montevideo Uruguay
Fecha: 8 y 9 de Agosto de 2008
escueladeinvierno@gmail.com

II Reunión Pampeana de Educación Matemática (II REPEM)
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa, Argentina
Fecha: Agosto de 2008
repem@exactas.unlpam.edu.ar

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
SEIEM

XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
XIX Seminário de Investigação em Educação Matemática
XVIII Encontro de Investigação em Educação Matemática
Badajoz, Facultad de Educación, Universidad de Extremadura
Fecha: 4, 5 y 6 de septiembre, 2008
http://www.seiem.es/actividades/simposios.htm

IV Congreso Iberoamericano de Cabri
IBEROCABRI - 2008

IV Congreso Iberoamericano de Cabri (IBEROCABRI-2008)
Ciudad de Córdoba, Argentina
Universidad Nacional de Córdoba y Cabrilog
Fecha: 23 al 26 de Septiembre, 2008
http://www.iberocabri.org/

9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa
Universidad Popular del Cesar
Ciudad de Valledupar
Fecha: 16 al 18 de Octubre de 2008
www.asocolme.com

AÑO 2009

VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática
Puerto Montt Universidad de Los Lagos de Chile
Fecha: 04 al 09 de Enero, 2009.
http://cibem6.ulagos.cl/

10º Simposio de Educación Matemática
Chivilcoy, Argentina
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 4 al 7 de Mayo, 2009
www.edumat.org.ar

AÑO 2010

8º Internacional Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)
Ljubljan, Eslovenia
Universidad Nacional de Luján
Fecha: 11 al 16 de Julio, 2010
http://icots8.org/

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2008, Número 14, página 161
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.

2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.

3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…

4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).

5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.

6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).

7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org