UNIÓN

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Número 8

Diciembre de 2006

Índice

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, página 2
ISSN: 1815-0640

Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática es una publicación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática **(FISEM)**. Tiene una periodicidad trimestral, de modo que se publican cuatro números al año, en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 3 - 10
ISSN: 1815-0640

La razón de cambio (cociente de incrementos) desde un punto de vista gráfico y numérico

José Carlos Cortés Zavala

Resumen

Para el estudio de esta experiencia se utilizó un software[1] diseñado y desarrollado por el autor en el que se presenta un acercamiento funcional al concepto de derivada. En este software se resalta el aspecto gráfico y numérico de lo que es una razón de cambio y es esta parte del software la que se experimentó con estudiantes de bachillerato para determinar si un acercamiento del tipo numérico permitiría a los estudiantes tener un mejor entendimiento de lo que es una razón de cambio que servirá como preámbulo al entendimiento del concepto de derivada. Los resultados preliminares obtenidos dan indicios de que los acercamientos numéricos proporcionan información visual de gran valor en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos. En este artículo se expone principalmente como se realizó la experimentación y un resultado preliminar.

Introducción

Varios autores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio. En el software propuesto se incorporaron actividades tendientes a resaltar estas ideas teniendo como base los aspectos visuales.

Primeramente se detectó que la idea de incremento de una variable no es entendida tan fácilmente por los estudiantes, por lo que, en el software, el incremento de una variable se presenta de manera numérica y gráfica.

Para el desarrollo del software, propuesto en esta experiencia, se parte de la hipótesis de que se puede lograr, con dicho software, que en los cursos de cálculo diferencial los profesores incorporen diferentes representaciones y que los estudiantes tengan un mejor acercamiento al concepto de derivada a través del uso de las representaciones numérica, gráfica, algebraica y verbal.

En el caso particular del aprendizaje del concepto de derivada en el bachillerato, se usa solamente la representación algebraica; pues aunque se inicie con una explicación geométrica para introducir la definición de derivada muy pronto se abandona el tratamiento geométrico y se usa solamente el algebraico. Por ejemplo, Hughes (1990, pp. 1-8) observó que muchos estudiantes son capaces de calcular algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de ver la gráfica para determinar en qué lugares la función tiene derivada positiva y

[1] Funciones y Derivadas software de apoyo al aprendizaje del cálculo. Cortés 2002.

en cuales negativa. Además, notó que pocas veces se utilizaba un acercamiento numérico para tratar este concepto. Por tanto, se considera que el resaltar el uso de registros semióticos de representación de tipo gráfico, geométrico, numérico y algebraico, es una buena opción para que los estudiantes tengan un mejor acercamiento al concepto de Derivada en el bachillerato.

El software propuesto presenta actividades donde se resalta el tratamiento en el registro numérico mediante la presencia de tablas en las que se da información numérica de una determinada función (véase figura 1) y en el registro gráfico se implementan familias de funciones que pueden ser manipuladas para obtener información, por ejemplo, de una línea tangente que varía a lo largo de toda la gráfica y de la cual se muestra la variación de su pendiente (véase figura 2).

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4.	11.	38.	103.	224.	419.	706.	1103.

Figura 1

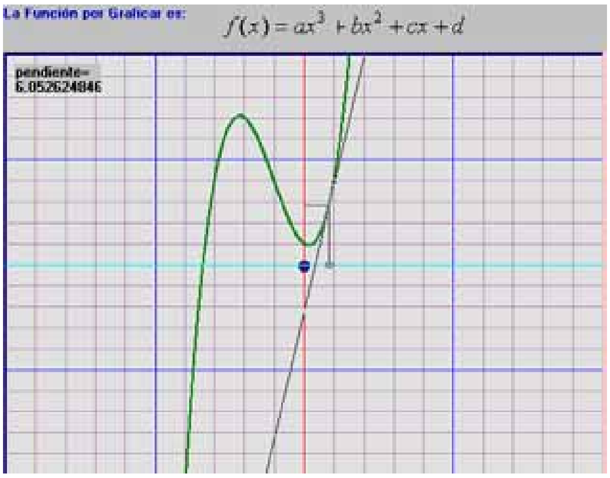


Figura 2

Confrey (1993) indicó que la presencia de tablas numéricas puede iluminar la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y también la presentación algebraica. En este trabajo de investigación se ha dado importancia al manejo tabular, así como a la representación gráfica para introducir la noción de razón de cambio.

Scher (1993) llevó a cabo un estudio relacionado con la utilización de múltiples representaciones para conceptualizar la derivada. Concluyó que existe la necesidad de promover el uso de tales representaciones para que el estudiante obtenga entendimiento fuerte de los conceptos del cálculo. Mencionó, por ejemplo, que “la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes” Scher (1993, p. 16). Dentro del software propuesto en esta investigación, la construcción de tablas de las pendientes de las secantes se da de dos maneras: una relacionada con la razón de cambio en forma numérica y gráfica y la otra mediante la construcción de la tabla de la pendiente utilizando un *incremento* fijo de x (Δx = *constante*) y variando el punto x.

Experimentación

En este apartado se describe el escenario en el que se llevó a cabo la experimentación, los objetivos, la actividad propuesta y las observaciones generales.

Escenario de la experimentación

Se implementó una experimentación con cinco estudiantes durante 12 horas, repartidas en cuatro sesiones. Se trabajó en una sala equipada con tres computadoras, un pizarrón y dos cámaras de video. En cada sesión hubo un equipo por computadora y se utilizó el software desarrollado. En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete, para que en las sesiones subsiguientes el estudiante usara libremente los contenidos permitidos en el software.

Primera Sesión

En la primera sesión se observó el comportamiento de los estudiantes al navegar en el software, para tener claridad acerca de los enunciados, la localización de los menús, el diseño de colores y la presentación de la información, básicamente.

Sesiones posteriores

Se dejó a los equipos trabajar libremente siguiendo cada uno de los niveles propuestos y se cuestionó, a cada equipo, sobre la actividad desarrollada. El trabajo que desarrolló cada equipo fue videograbado durante cada una de las sesiones.

En el desarrollo de las sesiones el instructor se desempeñó como observador y solamente intervenía para contestar algunas preguntas cuando le eran requeridas. Los estudiantes podían comunicarse libremente las ideas o las estrategias de solución, las cuales fueron grabadas en video.

La selección de los alumnos

La selección de estudiantes se hizo de la siguiente manera: dos estudiantes que habían tenido un buen desempeño escolar, de acuerdo con las calificaciones reportadas a lo largo de sus estudios, dos que habían sido alumnos regulares, y un alumno con bajo desempeño académico.

Se formaron dos equipos de trabajo integrados con un alumno con buen desempeño y otro de desempeño regular. El alumno de bajo desempeño trabajó solo. Los cinco estudiantes ya habían llevado un curso de cálculo diferencial a la manera tradicional.

La idea básica de realizar esta distribución se debió a que se esperaba que el estudiante de más bajo rendimiento lograra encontrar las estrategias de igual manera que los otros equipos. Asimismo, que la comunicación entre los integrantes de los equipos 1 y 2 fuera más fluida.

El entorno propuesto y el ambiente generado entre estudiantes

Se utilizó una computadora en cada equipo. Las computadoras se encontraban en la misma sala, distribuidas de tal forma que se permitiera, en forma natural, la interacción de los miembros de los equipos.

Una actitud observada en los estudiantes que participaron en la experimentación fue que el uso de la computadora les permitió tener mayor comunicación en cada equipo, pues estaban obligados a discutir una estrategia que posteriormente se debía introducir en la computadora. Además, hubo mayor interacción entre los miembros de los equipos gracias al ambiente de discusión promovido por la interacción con la computadora. Analizando este aspecto, nos damos cuenta de que el ambiente de trabajo con lápiz y papel en la escuela, normalmente es un trabajo de tipo individual sin que haya retroalimentación inmediata.

El software presenta una serie de ejercicios que son generados en forma semi-aleatoria y resulta muy difícil que dos equipos tengan el mismo ejercicio. Esta cualidad permitió observar que cuando el integrante de un equipo daba una explicación al de otro equipo, se centraba en exponer la estrategia utilizada para resolver el ejercicio y no sólo en comunicar la solución.

Interacción de los alumnos con el software

La navegación en el software y la tarea por resolver no causaron problemas. El software tiene implementada, como forma de evaluación a una respuesta determinada, las opciones de “correcto” o “incorrecto”. Esto sirvió a los estudiantes para que cada vez que introdujeran datos supieran si su respuesta era correcta o no. Como resultado de la experimentación, se observó la necesidad de utilizar un tipo de respuesta más explicativo de acuerdo con el dato introducido y el nivel en que se encuentre trabajando el estudiante.

Objetivos de la experimentación

Los objetivos de la experimentación fueron dos: a) la amigabilidad y facilidad de navegación en el software (experimentar la interfase), y b) evaluar si el enfoque propuesto en el prototipo informático al concepto de derivada tenía un contenido educativo motivador e interesante para los estudiantes.

La navegación y amigabilidad en el software

Dentro del estudio de estas características del software se incluyó la detección de posibles errores de programación que confundieran al estudiante. Esto es, se intentó que la actividad propuesta fuera entendible, que la interface permitiera al usuario navegar sin dificultad y que le fuera fácil la introducción de las respuestas requeridas.

En la primera sesión se puso énfasis a estos objetivos, para lo cual se permitió a los estudiantes navegar por todo el software. Se encontraron algunos errores concernientes a la programación (los cuales posteriormente fueron corregidos); Los estudiantes entendieron con cierta facilidad las actividades propuestas, aunque se vio la necesidad de que el profesor explicara algunos de los temas de trabajo. Así mismo, se comprobó que no hubo problemas para entender la tarea e introducir los datos correspondientes.

Contenidos del software

En esta parte de la experimentación se determinó qué tan atractiva y motivadora era para los estudiantes la presentación de contenidos y las tareas por desarrollar. Asimismo, se quería tener un primer acercamiento a la reacción de los estudiantes al tratar los temas de función y derivada en su forma numérica y gráfica. Por tal razón, se pretendió que las ideas de incremento de una variable y de razón de cambio quedaran establecidas en los estudiantes. Para ello, se enfatizó el trabajo con la parte numérica del software y que el instructor explicara las ideas en forma gráfica a los estudiantes.

Exposición de la tarea experimentada

Se experimentó la parte correspondiente al tratamiento numérico (progresiones, incrementos y razón de cambio). Primeramente, se trabajó con el apartado de progresiones aritméticas. El software genera, en forma semi-aleatoria, una tabla en la cual se presentan espacios vacíos, siendo la tarea del usuario el llenarlos (figura 3); el software realiza la evaluación del dato introducido y muestra si es correcto o incorrecto. Esta opción presenta una introducción y cuatro niveles.

posición	1	2	3	4	5	6	7	8
valor	21	25	29					

Figura 3.

La opción de incrementos presenta cuatro niveles (del mismo tipo que los presentados en el apartado de progresiones). Análogamente a la opción anterior, se generan tablas con espacios vacíos; la diferencia es que se proporciona mayor información, es decir, se presentan las tablas de los incrementos y se realiza un primer acercamiento gráfico (figura 4).

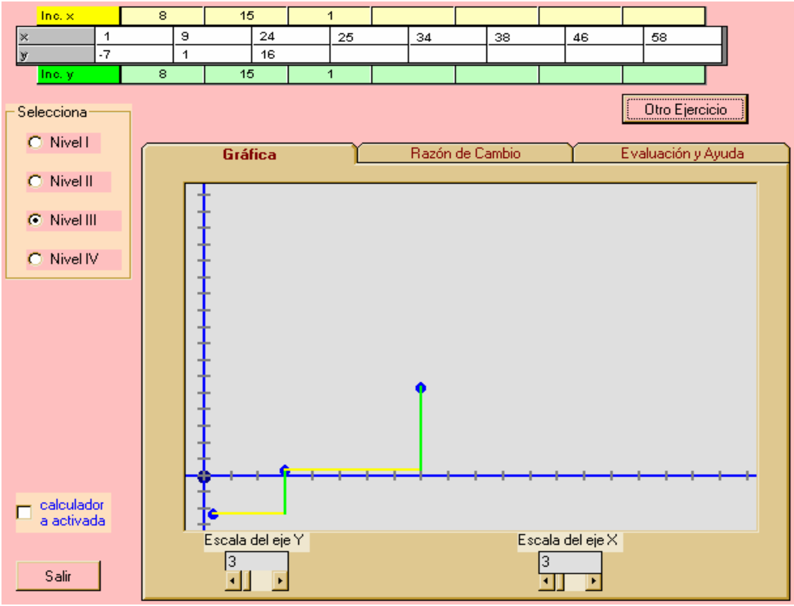


Figura 4.

La opción correspondiente a razones de cambio, a diferencia de las anteriores, es que ya no se trabaja con progresiones aritméticas, sino con funciones (polinomiales, circulares, etc.) que pueden ser seleccionadas o introducidas. Se presenta la información tabular (tabla de la función y tablas de los incrementos) así como la gráfica (gráfica de la función y de la función razón de cambio). La tarea consiste en llenar la tabla de la función razón de cambio (figura 5).

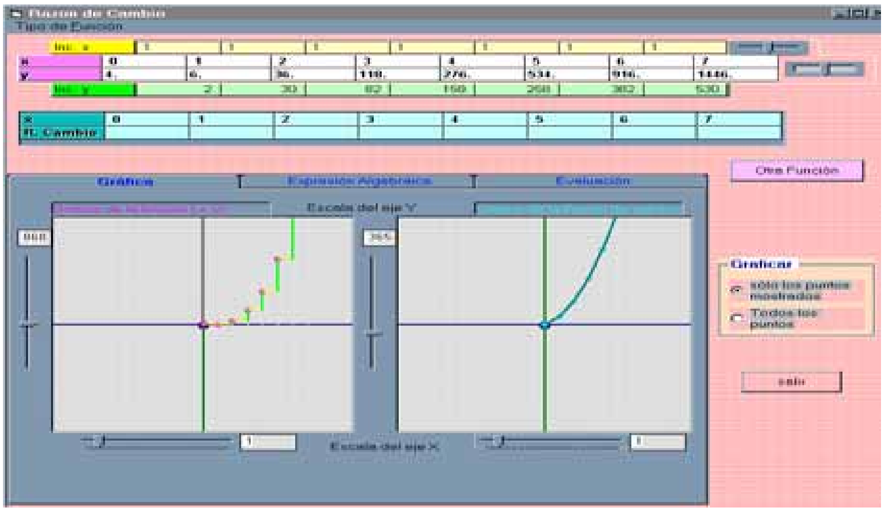


Figura 5.

Observaciones generales

Los integrantes de los equipos no tuvieron ningún problema en la navegación con el software y entendieron rápidamente la tarea por desarrollar. Tuvieron algunos conflictos en encontrar la estrategia adecuada, pero al final lo lograron.

Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados

El análisis de esta experimentación se centrará en explicar, con base en las video-grabaciones, si las ideas de incremento de una variable y de razón de cambio fueron entendidas por los estudiantes. Asimismo, este análisis será un primer contacto para vislumbrar la posibilidad de que un acercamiento a través de la función razón de cambio permita a los estudiantes transitar al concepto de derivada.

Opción de progresiones

En esta opción se tiene una introducción a lo que es una progresión aritmética y cuatro niveles de ejercicios.

Todos los estudiantes entendieron bien la introducción y la tarea por desarrollar. El nivel I y nivel II no presentaron ningún problema para encontrar la solución requerida en cada caso. Pero en el nivel III y nivel IV, fue muy difícil para los estudiantes dar una respuesta adecuada al tipo de ejercicio propuesto. Sólo un equipo de trabajo encontró una estrategia para resolver lo requerido en el nivel III. A continuación se describe cómo fue el desempeño del equipo con respecto a la tarea solicitada.

Elizabeth y Leticia están intentando resolver el siguiente ejercicio del Nivel III:

Posición	1	6	25	42	52	53	81
Valor	4	14	52				

Cuadro 1

Elizabeth: veamos cuánto es.... (empieza a escribir en su libreta, haciendo operaciones aritméticas) son 17 por 2 que son 34 y le sumamos 52.

Investigador: ¿Me explicas cómo lo obtuviste?

Elizabeth: Del 1 al 6 hay 5 espacios. Sé que si 1, es igual a 4; y hay 2 espacios entre uno y otro, y se va incrementando de 2 en 2 entonces son 42-25 para sacar los espacios; multiplicado por 2, y le sumo el valor de 52.

Leticia: Sacamos el espacio que hay de un lado a otro y, como ya sabemos que va de 2 en 2, de 52 a 53 hay un espacio y lo multiplicamos por 2.

Investigador: Ese número que obtuvieron es muy importante (el 2). ¿Cómo lo sacaron?

Elizabeth: Muestra una tabla y me da una explicación sobre ella.

Posición	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Valor	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*

Cuadro 2

Llenaron la tabla con los valores que faltaban del 1 al 6, y determinaron que se va incrementando de 2 en 2 cada posición.

Se les sugirió que revisaran la opción de incrementos y la definición de razón de cambio. Revisan la opción y la explicación de lo que es una razón de cambio:

Elizabeth: Ya!, lo que pasa es que con el incremento que le damos, lo podemos sacar al dividir el incremento de x entre el incremento de y.

Leticia: Es al revés.

Elizabeth: Y ya nos ahorramos lo que estábamos haciendo.

Se les sugirió entonces que regresaran a la opción de progresiones y que resolvieran otros ejercicios nuevamente, pero en esta ocasión sin hacer una tabla. Resolvieron algunos ejercicios más de los niveles III y IV y dijeron que ya no tenían dificultades.

Como podrá observarse para la solución de ejercicios de este tipo es necesario utilizar la razón de cambio, lo cual fue logrado por este equipo. En tareas posteriores ya tenían esta idea y la aplicaron.

A manera de Conclusión

A través del uso de tablas de valores de funciones es posible que los estudiantes entiendan y usen lo que es una razón de cambio y con esto empezar a construir una nueva función y a partir de ella introducir la función derivada.

Bibliografía

▪ CONFREY, J. (1993). A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations. (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association), April, 1993.
▪ HUGHES, D. (1990). Visualization and calculus reform, Vizualization in teaching and learning mathematics. MAA notes number 19, pp.1-8.
▪ SCHER, D. (1993). Students conceptions of the derivative across multiple representations. Mathematics in College, 1993, pp. 3-17.

José Carlos Cortés es doctor y profesor de la Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana en México. Ha realizado varias publicaciones (libros y artículos) y desarrollado diferentes softwares educativos

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 11 - 21
ISSN: 1815-0640

Filosofia e modelagem matemática

Lênio Fernandes Levy* e *Adílson Oliveira do Espírito Santo

Resumo

A argumentação em prol da realidade histórica da mútua influência, notadamente quanto ao aspecto epistemológico, entre, de um lado, a Filosofia, com as questões e as reflexões que lhe são concernentes, e, de outro, a Matemática, com a respectiva produção de modelos/representações, é o mote do presente artigo, cuja proposta, em termos pedagógicos, haja vista a defesa da citada conjunção, é o ministério de aulas de Matemática com o uso da Filosofia e da História da Filosofia, ou seja, é o engenhamento docente de conexões entre conteúdos matemáticos, durante o processo de ensino-aprendizagem, e elementos da Filosofia e da História da Filosofia, buscando-se com isso conduzir os alunos pela seara dos ideários filosóficos que, no decorrer histórico, influíram sobre a (e foram influenciados pela) criação de modelos matemáticos.

Abstract

The subject of the present article is the argumentation in favor of the historic reality of the mutual influence, as to the epistemological aspect between the philosophy, with the questions and the reflections which are pertaining to it, and the mathematic with the production of models/representations. Its proposal, in pedagogical terms, is ministering mathematic classes with the use of the philosophy and the philosophy history, that is, teaching mathematic linking its contents to elements of the philosophy and the philosophy history, seeking with it leading the students to the land of the philosophical ideas, which in the historical pass, influenced on (and were influenced by) the creation of mathematic models.

Considerações Iniciais

Como acontece o conhecimento? A idéia de que a cognição exige a interação do indivíduo perquiridor com o objeto estudado é predominante na atualidade. “(...) Se experimenta, tem que raciocinar; se raciocina, tem que experimentar” (BACHELARD, 1934, p.7). Entretanto, por um lado, em mais de uma época, pensou-se que o mundo poderia ser compreendido (apenas e/ou predominantemente) de dentro do próprio homem, através do exercício puro e simples da “razão”. Por outro lado, também em mais de um momento, acreditou-se que o conhecimento acerca desse mesmo mundo estaria vinculado (somente e/ou ou acima de tudo) à “sensibilidade” humana, ao uso dos sentidos.

De igual relevo na busca de como se dá e se desenvolve o conhecimento, há as seguintes questões, estreitamente ligadas às colocações acima: Conhecer e/ou modelar é representar, é interpretar, sem jamais haver coincidência entre a “coisa para si” e a “coisa em si”? Ou será que conhecer/modelar permite, em tese, a chegada ao âmago efetivo do objeto estudado? Poderia haver conciliação entre essas duas indagações? Tratar-se-ia de estágios distintos de um mesmo processo, qual seja o de evolução cognitiva do homem ou, em escala temporal mais ampla, da espécie humana?

Pino afirma que:

> Desde os tempos de Parmênides, século V antes da nossa era, os filósofos vivem perguntando-se se o mundo da percepção, captado pela sensibilidade, é ou não o mundo real. Em outros termos, perguntam-se se esse mundo "real" que conhecemos tem existência em si ou se ele é criado pela razão. As respostas dadas a essa indagação constituem as grandes teorias epistemológicas que atravessam a história da filosofia ocidental.
> Historicamente, as duas principais respostas dadas à pergunta sobre a natureza do conhecer humano, a racionalista e a empirista, remontam à Grécia antiga: de um lado, aos trabalhos de Platão (427-347 a. C.) e Aristóteles (384-322 a. C.), perspectiva racionalista; do outro lado, aos trabalhos dos sofistas e estóicos, como Zenon de Cício (340-264 a. C.) e Lúcio Sêneca (4 a. C.- 65 d. C.), perspectiva empirista (PINO, 2001, p.23-24).

Ao longo das linhas seguintes, argumentar-se-á em prol da realidade histórica da mútua influência[1] exercida entre pensamento filosófico e pensamento científico/matemático[2], analisando-se, nesse sentido, as hipóteses mais plausíveis[3], nas diversas épocas, acerca das questões supra mencionadas, buscando-se, pois, deixar à mostra a freqüente convergência do pensar científico/matemático rumo à hipótese então mais aceita (e vice-versa, caminhando-se também da construção filosófica para a científica/matemática), a exemplo das significações que se atribuíram, no decorrer temporal, a "modelo matemático", normalmente condizentes com as características das correntes filosóficas hegemônicas que se sucederam. Ademais será ressaltada a importância dos contextos social, político, econômico e religioso, que, interligados, sempre atuaram sobre a – e receberam influências da – produção cognitiva acadêmica, tanto filosófica quanto científica/matemática. De resto, comungamos com as seguintes palavras de Morin:

> Pode-se e deve-se definir filosofia e ciência em função de dois pólos opostos do pensamento: a reflexão e a especulação para a filosofia; a observação e a experiência para a ciência. Mas seria uma loucura crer que não há reflexão nem especulação na atividade científica, ou que a filosofia desdenha por princípio a observação e a experimentação. As características dominantes numa são dominantes na outra e vice-versa. Por isso, não há fronteira "natural" entre elas (MORIN, 1999, p.28).

O objetivo pedagógico que subjaz a este artigo corresponde a uma proposição de ensino-aprendizagem não apenas de Matemática, mas, concomitantemente, de Matemática e de Filosofia, o que abarca, necessariamente, ensino e aprendizagem de Epistemologia e de História da Filosofia. Saber, por exemplo, em plena aula de geometria, que a "tendência formalista" na Matemática e na Educação Matemática – cujo apelo maior fez-se e faz-se por aspectos como a abstração, a perenidade, a essencialidade e a realidade dos objetos matemáticos – teve e tem íntima ligação

[1] No que se refere a concepções de como se constrói o conhecimento.
[2] Influência perceptível inclusive nos tempos em que o esforço em separar a filosofia da ciência/matemática foi deveras enfático.
[3] Racionalismo e/ou empirismo? Subjetividade e/ou objetividade?

com o pensar filosófico pitagórico/platônico[4] certamente proporcionará ao alunado uma consciência mais ampla, seja em termos de Matemática, de Filosofia ou de História.

Os Primórdios

Em se considerando o conhecimento sistematizado, expressivo número de estudiosos afirma que a Filosofia e a Ciência surgiram na Grécia, aproximadamente na mesma época. Neto esclarece que:

> Entre o final do século VII e o início do século VI a.C., na Grécia Antiga, assistimos a um dos espetáculos mais belos e importantes da humanidade: a transição entre duas formas de explicar o mundo – a mitológica e a racional. A partir desse momento, os mitos e as religiões passam a ser pouco a pouco abandonados em favor da Filosofia.
> O pensamento racional surge simultaneamente com a escrita, e diminui a importância que a memória e a audição tinham para as sociedades míticas. A demonstração, por intermédio da razão e da experiência, vai aos poucos adquirindo mais valor que o poder de revelação dos mitos. A observação da realidade passa a ser mais importante que a história dos deuses. Assim, costumamos dizer que a ciência surgiu na Grécia Antiga, apesar de civilizações anteriores à grega (como os egípcios, os mesopotâmicos, os caldeus, os persas e os hebreus) já apresentarem consideráveis realizações científicas (NETO, 2002, p.6-7).

Ciência/Matemática e Filosofia, em sua origem, não eram tratadas em separado. Ulteriormente, foram tidas umas vezes como conjuntas e outras como disjuntas. Porém, ao que se crê, influenciaram-se e influenciam-se mútua e permanentemente. Quando se alardeava, por exemplo, a prevalência do racionalismo sobre o empirismo, fosse na Grécia Clássica, através dos platônicos, fosse na Europa Pós-Medieval, em conformidade com o pensamento cartesiano, tendia-se, então, a relegar o caráter experimental/prático da Ciência e/ou da Matemática a um plano secundário. Assim sendo, quem concebia o verdadeiro mundo como o das idéias, como, nos dizeres de Platão, o "mundo inteligível", enaltecia o caráter abstrato da Matemática, considerando-a componente da e/ou equivalente à própria realidade, descolada (a Matemática) do mundo concreto/sensível. A matematização do mundo, diga-se do mundo ideal ou inteligível, não seria uma representação ou uma construção subjetiva, passível de mudança. Considerava-se, pelo contrário, que a Matemática era (a chave para) o mundo perfeito, ao mesmo tempo abstrato e objetivo. As formas matemáticas existiriam de fato, e os modelos corresponderiam efetivamente aos objetos estudados. Nessa perspectiva, portanto, não se criava, descobria-se. A propósito, Bicudo e Garnica asseveram que:

[4] O mesmo pensar que, de certa maneira, conduziu Agostinho de Tagasta (Santo Agostinho), séculos depois, à extensão do "mundo ideal" de Platão ao âmbito religioso – daí, entre outras, a noção de "paraíso" –, fato de incontestável influência sobre os valores e as condutas de bilhões de cristãos de outrora e mesmo de agora.

> Na tradição da ciência ocidental com suas raízes na Grécia Antiga, os objetos matemáticos são concebidos como tendo existência objetiva e real, como perfeitos e perenes. Essa visão reflete o platonismo e, de maneira simplificada, pode-se estabelecer ligações entre a concepção matemática, o mundo das idéias platônicas e o modo de conhecer tais idéias e, por conseguinte, os objetos matemáticos. A realidade desses objetos pode ser comparada à das formas perfeitas, cuja existência independe da ação humana. Existindo de maneira objetiva, sendo reais e perenes, independentes da realidade mundana, o conhecimento dos mesmos tem como base a descoberta (BICUDO & GARNICA, 2002, p.28-29).

Por sua vez, o pensamento concernente à valorização do empirismo também se verificou ao longo da Antigüidade e no transcurso de períodos posteriores. Não obstante seu inegável caráter racionalista, Aristóteles, na obra Metafísica, livro I, capítulo 1, apregoou que:

> Por natureza, todos os homens desejam o conhecimento. Uma indicação disso é o valor que damos aos sentidos; pois, além de sua utilidade, são valorizados por si mesmos e, acima de tudo, o da visão. Não apenas com vistas à ação, mas mesmo quando não se pretende ação alguma, preferimos a visão, em geral, a todos os outros sentidos. A razão disso é que a visão é, de todos eles, o que mais nos ajuda a conhecer coisas, revelando muitas diferenças.

A história do conhecimento matemático é pródiga em construções de modelos voltados para o lado mais prático ou concreto, em consonância com as correntes filosóficas/epistemológicas favorecedoras da importância do empirismo. Cita-se, por oportuno, o exemplo de Eratóstenes, que "é lembrado especialmente por sua medida da terra – não a primeira nem a última de tais avaliações na antigüidade, mas em tudo a de mais sucesso" (BOYER, 1974, p.17).

A Soberania da Fé

Vários foram os motivos que conduziram a Europa à Idade Média, não se podendo aventar o aspecto político-militar, ou seja, a queda de um império, como fato gerador único das transformações ocorridas, devendo-se considerar, do mesmo modo, causas sociais, econômicas e religiosas, que, entrelaçadas, compuseram e fomentaram esses e outros desdobramentos complexos. No século V d. C., quando da derrocada do Império Romano do Ocidente, já havia sinais[5] de redirecionamento da cultura européia (inclusive da acadêmica) com vistas àquele que se tornaria o objeto primordial de atenção e de estudo, qual seja o aspecto religioso, sobremaneira no que dizia respeito à necessidade de criação e de fortalecimento da doutrina cristã. Adaptaram-se, embora em momentos distintos, Platão e Aristóteles aos novos ditames, formatando-se a Matemática na esteira, consecutivamente, da patrística e da escolástica[6], procedendo-se a um movimento recursivo, em que o

[5] E, à época, alguns não eram recentes.
[6] Patrística e escolástica são termos que se referem, respectivamente, às idéias filosóficas defendidas por Santo Agostinho (354 d.C.–430 d.C.) e por Santo Tomás de Aquino (1225 d.C.–1274 d.C.), que eram, nessa ordem, o (neo)platonismo e o (neo)aristotelismo.

pensamento matemático e o pensamento filosófico robusteciam-se mutuamente, sempre em consonância com os ditames da Igreja.

A Modelagem Matemática, haja vista o citado motivo (religioso), certamente não fugia do que se lhe destinava. O exercício matemático voltava-se para a procura de resultados melhores no que fosse concernente, por exemplo, à construção de enormes catedrais, "mais próximas dos céus". Com esse objetivo, engendrou-se muito em termos de Matemática, de Engenharia e de Arquitetura, sobretudo durante o período de manifestação da arte gótica[7]. A busca de cálculos e de resultados cada vez mais precisos quanto à identificação de datas importantes do calendário cristão (Páscoa, Natal etc.) também era de grande valor, assim como o esforço em se aperfeiçoar a geometria, a exemplo do desenvolvimento da noção de perspectiva, noção essa que potencializaria a mensagem transmitida pelos desenhos e pinturas de apelo religioso (D'Ambrósio, 1993).

Alhures, onde se vivenciavam outros contextos religiosos[8], as óticas matemática e filosófica, como era de se esperar, distinguiam-se daquelas vinculadas aos mosteiros cristãos, o que englobava, evidentemente, as discussões acerca de Platão, de Aristóteles e dos demais clássicos gregos, para cuja preservação do pensamento foi decisiva a compilação dos textos correspondentes pelos muçulmanos, em conseqüência do que vários ideários científicos/matemáticos e filosóficos, entre eles o aristotélico, puderam retornar[9], dessa feita durante a Baixa Idade Média, a terras européias, haja vista também o comércio e a indústria, mesmo que incipientes a essa época, já demandarem tal regresso e, inclusive, reivindicarem o aperfeiçoamento correlato, fato (o aperfeiçoamento) mais notório a partir do século XIV. Miorim lembra que:

> (...) Foi devido ao avanço das navegações e ao florescimento das atividades comerciais e industriais, com suas inerentes necessidades de melhor compreender as propriedades e transformações que ocorrem no mundo concreto, que o estudo e o ensino das matemáticas começaram a se desenvolver e a se modificar no território europeu.
> Isso, entretanto, só foi possível em virtude do contato com os árabes, que, durante grande parte da Idade Média – especialmente entre os séculos VIII e XII –, traduziram todas as contribuições disponíveis dos clássicos gregos, dos trabalhos produzidos por indianos, persas, além de apresentarem suas valiosas contribuições. Por intermédio deles, começaram a penetrar na Europa, já a partir do século XII, as primeiras traduções do árabe para o latim, dentre as quais, as Tabelas astronômicas e a Álgebra, de al-Khowarismi, os Elementos, de Eulides, e o Almajesto, de Ptolomeu (MIORIM, 1998, p.33).

O estudo, ao longo do período medieval europeu, da Matemática e da Astronomia por outros povos, a citar árabes[10], chineses e hindus, trouxe resultados generosos. Tratava-se de culturas, assim como a cristã, impregnadas de

[7] Gênero artístico difundido na Europa desde o século XII até o Renascimento.
[8] Tal diferença contextual extrapolava, evidentemente, os limites da religião, estendendo-se a âmbitos como o social, o econômico, o político etc., todos conectados entre si e com desdobramentos complexos.
[9] Inicialmente, é claro, sob a batuta da igreja e/ou da filosofia escolástica.
[10] Cuja contribuição, conforme evidenciado no parágrafo anterior, não ficou restrita à compilação de textos greco-romanos.

religiosidade. Entretanto os indivíduos em questão entendiam o mundo de modo parcialmente distinto daquele dos sujeitos componentes das culturas européias, e essa originalidade, advinda e provedora de um amor/*filo* diferenciado pela sabedoria/*sofia*, certamente influiu sobre as suas produções matemáticas. É certo que contextos diferentes ajudam a produzir pessoas diferentes, as quais, por sua vez, atuam no engenhamento de novos contextos. No que tange ao fazer matemático durante o período medieval, Boyer declara que:

> Uma visão demasiado simplificada da Idade Média resulta freqüentemente de uma exposição centrada em demasia na Europa; por isso lembramos aos leitores que cinco grandes civilizações, escrevendo em cinco línguas diferentes, fornecem a maior parte da história da matemática medieval (BOYER, 1974, p.180).

O autor em questão se refere às inestimáveis contribuições da China, da Índia, da Arábia, do Império do Oriente, ou Bizantino, e do Império do Ocidente, ou Romano, que não tinha – esse último – um centro único.

O Lento Ocaso de Uma Era e a Aurora da Modernidade

A Igreja fortaleceu-se sob a égide feudal e chegou a exercer absoluto poder temporal e/ou a possuir vastos territórios, que eram (os territórios) então o verdadeiro símbolo da força secular. A instituição religiosa controlava os mundos espiritual e material desde antes da queda de Roma. Entretanto o modelo econômico-político-social utilizado com êxito durante a idade medieval começava a dar sinais de enfraquecimento[11]. Urgia que o feudalismo cedesse lugar à centralização política, representada pela formação de Estados nacionais, e aos anseios econômicos (que demandavam essa centralização política) de uma classe social emergente: a burguesa.

O reencontro com a cultura clássica, devido em larga escala à (re)leitura e à (re)interpretação dos textos gregos compilados, preservados e reintroduzidos em terras européias pelos árabes, foi indicativo e componente das mudanças pelas quais o continente passava.

É importante ressaltar que o florescente espírito moderno denotava uma tentativa de compreensão da realidade da natureza sem que, para isso, houvesse ingerência da Igreja. O teocentrismo começou a ceder lugar ao antropocentrismo. Retomaram-se Platão e Aristóteles, dessa feita sob uma ótica diferenciada em relação às da patrística e da escolástica. As correntes filosóficas racionalista e empirista adquiriram nova roupagem.

[11] Assim como não é prudente afirmar que a incursão dos diversos povos na aventura medieval ocorreu de forma súbita e igual, também não se deve asseverar que o término da Idade Média aconteceu de modo instantâneo, concomitante e homogêneo nos vários locais do continente europeu. As severas condições de vida da maior parte do campesinato russo às vésperas da revolução de outubro de 1917 eram, por exemplo, análogas àquelas dos trabalhadores que viveram à época das cruzadas.

As idéias de René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês, deram características novas ao racionalismo. Partindo-se da dúvida (ou melhor, de uma única certeza: “Penso, logo existo”) e da análise subjetiva condicionada à ação do “bom senso”, atingir-se-ia a “realidade cabal” do objeto estudado. Assim sendo, os modelos matemáticos deveriam ser gerados a partir do exercício da “razão”, caminhando-se de dentro para fora do sujeito, do geral para o particular. Sob a influência imediata do cartesianismo, destacaram-se os filósofos e matemáticos Baruch Espinosa (1632-1677) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em que pese as peculiaridades das idéias de ambos. Acerca de Descartes, Marías enfatiza que: (...) É a figura decisiva da passagem de uma época para outra. A geração que marca o trânsito do mundo medieval para o espírito moderno em sua maturidade é a sua. Descartes – disse Ortega – *é o primeiro homem moderno* (MARÍAS, 2004, p.229).

Oferecendo oposição, em certo grau, ao racionalismo cartesiano, há que se considerar a escola inglesa, acerca da qual Marías tece os seguintes comentários:

> Do século XVI ao século XVIII, desenvolve-se na Inglaterra, paralelamente ao idealismo racionalista do continente, uma filosofia com características próprias, claramente definidas. Entre Francis Bacon e David Hume há uma série de pensadores que se opõem em certa medida aos filósofos que acabamos de estudar, de Descartes a Leibniz. Há na filosofia inglesa dois aspectos que a diferenciam da continental: uma preocupação menor com as questões rigorosamente metafísicas, com maior atenção para a teoria do conhecimento (que, é claro, sempre pressupõe uma metafísica) e para a filosofia do Estado; e enquanto método, ante o racionalismo de tendência apriorística e matemática, um empirismo sensualista. A filosofia inglesa tende a se tornar psicologia e a conceder primazia, no tocante ao saber, à experiência sensível (MARÍAS, 2004, p. 269).

Francis Bacon (1561-1626), na esteira dessa tendência (a empírica), cuja boa acolhida em território britânico já havia oportunizado o surgimento de idéias como as de Roger Bacon[12] (1214-1294) e de Guilherme de Ockham[13] (1280-1349), reformulou o método indutivo, “segundo o qual uma lei geral é estabelecida a partir da observação e repetição de regularidades em casos particulares” (JAPIASSÚ & MARCONDES, 1996, p.181). Em conformidade com o indutivismo, caminhar-se-ia do particular para o geral, a sensibilidade precederia a reflexão e o conhecimento aconteceria de fora para dentro do indivíduo. Os modelos matemáticos seriam plausíveis na proporção direta do grau de exatidão com que as prescrições indutivas fossem seguidas ao longo do processo de investigação. Após Francis Bacon, outros pensadores britânicos debruçaram-se sobre o empirismo e, de um lado, exaltaram-no, ao mesmo tempo em que, de outro lado, impuseram-lhe as marcas da originalidade de seus pensamentos. Nesse sentido, é imprescindível a citação de nomes como os de Thomas Hobbes (1588-1679), de John Locke (1632-1704), de George Berkeley (1685-1753) e de David Hume (1711-1776).

[12] Roger Bacon, que era monge franciscano, libertou-se da escolástica e preconizou a ciência experimental.
[13] Guilherme de Ockham foi um dos precursores da busca do conhecimento dos fenômenos naturais através da investigação científica.

O Pensamento Contemporâneo

Os traços mais notórios da Filosofia e da Ciência/Matemática modernas foram o determinismo e a fragmentação. Por um lado, a suposta periodicidade ou reversibilidade dos fenômenos da natureza, aceita então com *status* de dogma, o que ainda é defendido por muitos cientistas, condizia com a idéia de universo-máquina, perfeito, ordenado e de comportamento previsível nos mínimos detalhes. O papel destinado a um modelo matemático seria o de cabal possibilidade de previsão de eventos/fenômenos, dada a certeza quanto à regularidade da natureza. Por outro lado, acreditava-se que a análise das partes seria necessária e suficiente para a compreensão da totalidade inerente ao objeto estudado, preconizando-se, pois, o isolamento dos diversos campos de conhecimento, acadêmicos ou não, o que também parecia aceitável em função do crescimento exponencial a que o cabedal cognitivo humano estava (e ainda está) submetido, devendo-se, dessarte, como alternativa segura de sucesso, estudar ordenada e separadamente as particularidades para se poder dar conta dos conjuntos cognitivos, maiores a cada dia que passa(va). Outrossim a fragmentação estava em conformidade com o afã de redução, e mesmo de eliminação, da interferência religiosa sobre a produção científica, daí a tão propalada crença na separação de sujeito e objeto do conhecimento, cujos sinais se manifestam inclusive na atualidade. Nos termos da divisão do conhecimento em disciplinas isoladas, a análise de um certo objeto seria satisfatória se conduzisse à consecução de um modelo apenas matemático, ou físico, ou químico, ou biológico, sem grandes preocupações com a eventual necessidade de conjunção dessas e de outras áreas para uma melhor compreensão das partes e da totalidade em questão. Betto[14], reagindo a essa "tentativa" de fragmentação, afirma que:

> Se um elétron se apresenta ora como onda, ora como partícula, energia e matéria, Yin e Yang, isso significa que cessa o reino da objetividade. Há uma inter-relação entre o observador e o observado. Desmorona-se, assim, o dogma da imaculada neutralidade científica. A natureza responde às questões que levantamos. A consciência do observador influi na definição e, até mesmo, na existência do objeto observado. Entre os dois, reina um único e mesmo sistema. Olho o olho que me olha.
> (...) Há uma íntima e indestrutível conexão entre tudo o que existe, das estrelas ao sorvete saboreado por uma criança, dos neurônios de nosso cérebro aos neutrinos no interior do sol (2002, p.45-46).

No curso dos últimos três séculos e meio, as idéias preconizadas por Bacon e Descartes foram revisadas e transformadas por filósofos do porte de Immanuel Kant (1724-1804), John Dewey (1859-1952), Gaston Bachelard (1884-1962), entre tantos outros. Crê-se hoje, de um modo geral, que o conhecimento é fruto tanto da razão quanto da sensibilidade, apesar das características peculiares das diversas correntes filosóficas que levantaram e que levantam o estandarte da referida conjunção.

[14] Frei Betto é dominicano, jornalista e escritor.

Segundo Cunha (a propósito de John Dewey):

> O fundamento central do pensamento deweyano é que o "organismo (...) não permanece passivo e inerte, aguardando que alguma coisa o impressione desde o exterior; pelo contrário, age sobre o meio ambiente, de acordo com sua própria estrutura simples e complexa". (...) Esse ponto de vista, que situa o homem no contexto da interação entre seu próprio organismo e o meio que o circunda, revela a continuidade existente entre o caráter biológico e a natureza cultural do ser humano (CUNHA, 2002, p.30).

Quanto a Bachelard, Barbosa e Bulcão asseveram que:

> A obra bachelardiana defende uma polaridade epistemológica, mostrando que, para se adequar à ciência atual, a filosofia das ciências deve ser uma filosofia de dois pólos: realista e idealista, empirista e racionalista, ao mesmo tempo. A polaridade epistemológica não significa um dualismo, mas, sim, o reconhecimento de que a alternância do a priori e do a posteriori representa a própria dinâmica do conhecimento e que esses pólos, em lugar de se oporem, completam-se, oferecendo à ciência seu verdadeiro dinamismo (BARBOSA & BULCÃ0, 2004, p.27).

De acordo com os referidos termos, sujeito e objeto jamais estão ou estariam separados. Na alvorada do século XXI, essa é a concepção hegemônica sob o ponto de vista filosófico/epistemológico, embora ainda seja notória a defesa e a adoção de uma prática científica fragmentadora, em especial quando se trata das ciências exatas e naturais. Contudo o número crescente de pesquisas levadas a efeito por equipes multidisciplinares é um exemplo da tendência de revisão do paradigma moderno/fragmentador no que tange à "investigação sistematizada", o que apenas corrobora a tese defendida por estes autores acerca da construção conjunta e interdependente, no decurso histórico, dos contextos científicos/matemáticos e daqueles relativos à Filosofia.

Outro mito da ciência moderna, o "determinismo" das leis naturais, encontra-se igualmente em xeque, conforme já o haviam sinalizado algumas correntes filosóficas desde antes do surgimento da física quântica, das idéias matemáticas de Kurt Gödel e dos trabalhos de Ilya Prigogine em termodinâmica. Segundo Cotrim:

> O determinismo que se desenvolveu a partir da mecânica de Newton se estendeu aos outros ramos da física, como a termodinâmica, a ótica e a acústica.
> No entanto, o desenvolvimento das pesquisas sobre eletrodinâmica fizeram surgir contradições que abalaram a concepção determinista do universo físico e, ao final do século XIX, levaram ao início da física quântica.
> (...) O mecanismo da física clássica newtoniana sofreu novo abalo com a formulação do princípio da incerteza, pelo físico alemão Werner Karl Heisenberg (1901-1976), um dos fundadores da física quântica. O princípio da incerteza estabeleceu a impossibilidade de determinar com precisão a velocidade e a localização de um elétron.
> (...) O desenvolvimento desses novos campos da física rompeu com a concepção determinista e mecanicista da física clássica, admitindo inclusive, com o princípio da incerteza, certo irracionalismo, o que abalou a pretensão de causalidade e previsibilidade que caracterizava a ciência até então (COTRIM, 2002, p.246-247)

Considerações Finais: Uma nova tendência em Educação Matemática?

A análise da história humana sob o prisma da produção cognitiva permite confirmar a mútua influência exercida e/ou a constância do diálogo estabelecido entre os contextos filosóficos e os matemáticos. Ora, se o pensares filosóficos prevalentes em determinada época imprimem/imprimiram suas características sobre a produção dos conhecimentos matemáticos, e vice-versa, não se deveria falar em Matemática sem se cogitar em Filosofia e em História da Filosofia, sob pena de haver afirmações incompletas ou errôneas. A questão contextual é, pois, importantíssima. Faz-se Matemática num tempo (ontem, hoje, amanhã) e num local (cidade, região, país etc.), e os fatores que agem sobre essa construção, assim como o *quando* e o *onde*, são diversos e estão mutuamente relacionados. Há, para se deter apenas em alguns, o aspecto político, o econômico, o social e o religioso. A Filosofia é, concomitantemente, mãe e filha de todos eles. Qualquer produção pode e deve ser interpretada filosoficamente. O local, a época e a cultura a que pertencem ou pertenciam os sujeitos do conhecimento impregnam os (e estão impregnados dos) contextos filosóficos então vigentes. O pensar analítico, crítico, reflexivo e abrangente, portanto filosófico, é tão cultural quanto o exercício do pensamento dito científico ou sistematizado, o qual, aliás, também é, em tese, analítico, crítico, reflexivo e, por vezes, abrangente. Outrossim, lembrando os dizeres de Edgar Morin, constantes no início deste artigo, a Filosofia não prescinde, em absoluto, de uma atitude sistematizada. Diante da inevitabilidade de tais diálogos, particularmente no que diz respeito à permanente realidade da influência mútua envolvendo as construções matemáticas e as filosóficas, estes autores propõem um ensino e uma aprendizagem da Matemática em que se faça uso da Filosofia e da História da Filosofia. As argumentações e as correlatas conclusões expostas nestas páginas conduzem inexoravelmente a tal proposta.

Bibliografía

- Aristóteles. “Metafísica, Livro I, Capítulo 1”. Em: D. Marcondes (2000): Textos básicos de filosofia. Dos Pré-Socráticos a Wittgenstein, 46-48. 2.ed. Jorge Zahar, Rio de Janeiro.
- G. Bachelard (1934): Le nouvel esprit scientifique. PUF, Paris.
- E. Barbosa, M. M. Bulcão (2004): Bachelard. Pedagogia da razão, pedagogia da imaginação. Vozes, Rio de Janeiro.
- F. Betto (2002): “Indeterminação e complexidade”. Em: G. Castro, E. A. Carvalho, M. C. Almeida: Ensaios de complexidade, 42-48. 3.ed. Sulina, Porto Alegre.
- M. A. V. Bicudo, A. V. M. Garnica (2002): Filosofia da educação matemática. 2.ed. Autêntica, Belo Horizonte.
- C. Boyer (1974): História da matemática. Edgard Blücher, São Paulo.
- G. Cotrim (2002): Fundamentos da filosofia. 15.ed. Saraiva, São Paulo.
- M. V. Cunha (2002): John Dewey. Uma filosofia para educadores em sala de aula. 4.ed. Vozes, Rio de Janeiro.

- U. D'Ambrósio (1993): "A transdisciplinaidade como acesso a uma história holística". Em: P. Weil, U. D'Ambrósio, R. Crema: Rumo à nova transdisciplinaridade. Sistemas abertos de conhecimentos, 75-124. Summus, São Paulo.
- H. Japiassú, D. Marcondes (1996): Dicionário básico de filosofia. 3.ed. Jorge Zahar, Rio de Janeiro.
- J. Marías (2004): História da filosofia. Martins Fontes, São Paulo.
- J. A. Mattar Neto (2002): Metodologia científica na era da informática. Saraiva, São Paulo.
- M. A. Miorim (1998): Introdução à história da educação matemática. Atual, São Paulo.
- E. Morin (1999): O método 3. O conhecimento do conhecimento. 2.ed. Sulina, Porto Alegre.
- A. Pino (2001): "O biológico e o cultural nos processos cognitivos". Em: E. F. Mortimer, A. L. B. Smolka: Linguagem, cultura e cognição. Reflexões para o ensino e a sala de aula, 21-50. Autêntica, Belo Horizonte.

Lênio Fernandes Levy Licenciado Pleno em Matemática (Universidade Federal do Pará / UFPA), Especialista em Educação Matemática (Universidade do Estado do Pará / UEPA), Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA) e Doutorando em Educação (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro / PUC-RJ). Professor do Centro Federal de Educação Tecnológica do Pará (CEFET-PA).
E-mail: **leniolevy@ig.com.br**.

Adílson Oliveira do Espírito Santo Engenheiro Elétrico (UFPA) e Doutor em Engenharia Elétrica (Universidade de Campinas / UNICAMP). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (NPADC) da Universidade Federal do Pará (UFPA).
E-mail: **adilson@ufpa.br**.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 23 - 39
ISSN: 1815-0640

A Exemplificação do Conceito de Função em quatro Professores Estagiários

Carlos A. Figueiredo, Lorenzo J. Blanco, Luis C. Contreras

Resumo

Este artigo divulga um estudo que incidiu sobre o conhecimento didáctico do conteúdo de quatro professores estagiários no âmbito da sua prática pedagógica na Escola Secundária de D. Sancho II em Elvas, Portugal, no ano lectivo de 2004/2005. A investigação descrita estudou e descreveu as características apresentadas pelos quatro estudantes para professores que resultam de uma experiência escolar de muitos anos: todas as crenças e atitudes sobre a matemática e o ensino da matemática enquanto foram alunos. A investigação incidiu nos exemplos utilizados sobre o conceito de função.

Abstract

This article divulges a study focussed on the Pedagogical Content Knowledge of four young teachers in their year of tutored practice in a secondary school in Elvas, Portugal, in 2004/2005. The described investigation studied and described the showed characteristics of those teachers obtained by their experience, as pupils, during several years: all the beliefs and attitudes towards mathematics and towards how to teach mathematics. The aim of this investigation was to study the examples over the function concept.

A. Introdução

Neste artigo queremos apresentar uma investigação (Figueiredo, 2005) sobre a exemplificação utilizada e aplicada por quatro professores no seu ano de estágio pedagógico, como estes professores escolhem os seus exemplos e, mais do que isso, a origem desses exemplos, a situação e o modo como os aplicam[1].

O objectivo do estágio pedagógico é introduzir o estudante para professor na actividade docente com um mínimo de ferramentas que lhe permitam iniciar e avaliar essa actividade de forma autónoma. Não é fácil transformar um conhecimento que, sendo conhecimento prático de outros e observado nos outros, se tem que transformar em conhecimento prático próprio para utilização própria. O papel do orientador de estágio deve ser o de promover essa transformação, pois é seu objectivo trazer o estudante para professor de uma posição observadora daquele conhecimento para um papel de protagonismo na sua utilização. Preparar

[1] Esta investigação desenvolveu-se dentro do Programa de Doutoramento oferecido pelo Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas da Universidade de Extremadura (Biénio 2003-2005), no qual se desenvolve uma linha de investigação sobre "*El Profesorado de Matemáticas: formación inicial y desarrollo profesional"* durante o segundo ano do programa.

professores é ensinar-lhes ***como ensinar***, transmitir-lhes um conhecimento que tem uma componente pessoal, de reflexão individual sobre a experiência docente (Blanco, 1998).

A investigação que apresentamos foi desenvolvida segundo uma duplicidade de papéis pois o autor do estudo era, simultaneamente, professor da Escola Secundária de Elvas, designado como Orientador dos quatro estudantes para professores do 5º ano da Licenciatura em Ensino da Matemática da Universidade de Évora, e condutor desta investigação.

A investigação envolveu quatro áreas:

i) **O Conhecimento Didáctico do Conteúdo.**

ii) **Os Esquemas Conceptuais.**

iii) **A Exemplificação apresentada por professores em práticas.**

iv) **O Conceito de Função.**

B. O enquadramento teórico

i) O conhecimento específico que o professor utiliza na sua actividade quotidiana começou a ser objecto de uma observação mais atenta nos anos 80. Shulman (1986) teve o mérito de chamar a atenção para a importância de um domínio, de algum modo a meio caminho entre o conhecimento das técnicas didácticas e pedagógicas e o conhecimento do conteúdo matemático: ***The Pedagogical Content Knowledge***. Este conhecimento inclui a capacidade de compreensão profunda das matérias de ensino por parte do professor, o que lhe permite encontrar as maneiras mais adequadas de as apresentar aos alunos de modo a facilitar-lhes a aprendizagem. Este conhecimento compreende por isso, no seu entendimento, as formas mais úteis de representar os conteúdos, as analogias mais eficazes, ilustrações, **exemplos** (o destaque é nosso), explicações e demonstrações - resumido: as formas de representar e formular a matéria de forma a torná-la compreensível aos outros. Assim observámos os aspectos relativos ao Conhecimento Didáctico do Conteúdo (Marcelo, 1993).

Mais recentemente, para Blanco, Mellado e Ruiz (1995), o Conhecimento Didáctico do Conteúdo constitui um conhecimento que se gera e evolui a partir dos próprios conhecimentos, crenças e atitudes que requerem um envolvimento pessoal, cuja evolução se produz mediante um processo dialéctico entre a teoria assimilada e a prática desenvolvida, tudo isto num processo de reflexão-acção. Não queremos deixar a noção que este conhecimento apenas se transmite e adquire aquando da formação inicial, a sua evolução é fundamental para uma boa prática e nunca será, portanto, um conhecimento estático e momentâneo.

Para Climent (2002) este conhecimento envolve duas vertentes, o *conhecimento didáctico do conteúdo referido ao ensino*, que inclui conhecimentos e recursos próprios de como se ensina, e o *conhecimento didáctico do conteúdo referido à aprendizagem*, que inclui o conhecimento dos aspectos próprios de como o aluno aprende. Esta diferenciação do conhecimento do professor é particularmente útil quando se pretende observar estudantes para professores, principalmente para diferenciar os resultados e apresentar sugestões para a formação inicial de professores.

Já se sabe há muito que a matemática se aprende principalmente através da tomada de contacto com exemplos em vez de ser directamente à custa das definições. Efectivamente, é apenas pelos exemplos que as definições têm algum sentido (Watson e Mason, 2002). Portanto considerámos a exemplificação como elemento do conhecimento didáctico do conteúdo que faz a ponte entre a forma como o professor ensina e a forma como os alunos aprendem, isto é, algo que une os dois pólos deste processo de ensinar alguém que aprende conceitos matemáticos.

ii) A necessidade de dar um sentido preciso ao termo **conceito** já se mostra evidente nos trabalhos de Skemp (1971). O autor propõe-se definir e esbater ambiguidades relativamente ao sentido dos termos por ele empregues quando explica a forma como os indivíduos constroem conceitos em geral mas também, em particular, como constroem conceitos matemáticos. Seguindo o autor, considerámos os conceitos como adaptações a estruturas conceptuais chamadas esquemas e um conceito como um objecto puramente mental que requer, para a sua formação, um certo número de experiências que têm algo em comum e cujas semelhanças consciencializamos por abstracção (Skemp, 1971).

A aquisição de um esquema conceptual requer que se associem certos significados à palavra que designa o conceito: imagens mentais (qualquer classe de representação: forma simbólica, diagrama, gráfico, etc), propriedades, procedimentos e experiências desenvolvidas associadas ao conceito (Azcárate, 1995; 1997).

Definição $\Rightarrow$ Esquema conceptual

O esquema conceptual ligado ao conceito está formado por exemplos, não-exemplos, procedimentos vinculados ao conceito, recordações de experiências que o envolveram, propriedades, etc. (Calvo e Azcárate, 2001). Os atributos relevantes de um conceito são as características que um objecto deve possuir para poder ser considerado um exemplo desse conceito (Wilson, 1990; Calvo e Azcárate, 2001). A metáfora do andaime ilustra de forma precisa o papel destes termos na actividade matemática de um indivíduo. Na construção da *imagem de um conceito* a *definição do conceito* tem o papel equivalente ao de um andaime durante a construção de um edifício. Depois de construído o edifício, o andaime pode ser retirado porque o edifício já não necessita do seu auxílio na sustentação. Assim, o papel da definição aparece como o suporte para a construção da imagem do conceito. Uma vez construída, é esta que se utiliza e dispensa-se a definição do conceito. No entanto, se necessário, poderemos sempre socorrer-nos da definição se a imagem do conceito necessitar de alguma alteração. Os termos *imagem de um conceito* e *definição do conceito* são termos introduzidos por Tall e Vinner (1981).

Na investigação considerámos que a aquisição do conceito se faz segundo um esquema tão simples como intuitivo e que determinou, na metodologia adoptada, a construção do sistema de categorias.

iii) **“**Por exemplo” é uma expressão que encerra muito do espírito da investigação que desenvolvemos. É uma expressão que todo o professor de matemática usa várias vezes todos os dias. O que atrai nesta expressão é, na verdade, o que a ela se segue e em que contexto é esta expressão utilizada. Relativamente à **exemplificação** convém reforçar o seu papel no objectivo de criar ligações e relações entre conceitos matemáticos. Esta perspectiva incluída no NCTM de 2000 vem descrita: “*O pensamento matemático envolve a busca de ligações e, provocar ligações constrói uma compreensão matemática. Sem ligações os estudantes têm que aprender e memorizar demasiados conceitos isolados e capacidades. Com ligações, os alunos constroem novas aprendizagens baseadas em conhecimentos anteriores*”(p. 274).

Para orientar a investigação que desenvolvemos sobre os exemplos utilizados pelos professores em estágio pedagógico considerámos as duas formulações seguintes:

- Através da exemplificação (exemplos, não-exemplos e contra-exemplos) promove-se no aluno a construção da estrutura mental do conceito.
- Através da exemplificação utilizada pode observar-se o conhecimento didáctico do conteúdo no jovem professor.

Para reforçar a **primeira afirmação** usamos o termo “exemplo” para nos referirmos a um amplo espectro de géneros matemáticos tais como ilustrações de conceitos, técnicas de demonstração, problemas, objectos matemáticos que satisfazem uma dada condição, etc. (Watson e Mason, 2002). Podemos, se quisermos, distinguir entre duas grandes classes de exemplos: os essencialmente indutivos, aqueles que apontam para algo mais geral, os que são particularizações de uma generalidade. Usamos estes exemplos para *personificar* ou *materializar* conceitos abstractos e mostrar procedimentos gerais, o seu uso é uma prática pedagógica muito comum que facilita a abstracção por parte do aluno; depois temos outros exemplos, aqueles a que chamamos exercícios, que não são indutivos, antes cumprem um papel ilustrativo e são orientados para a actividade prática do aluno (Rowland, Thwaites, e Huckstep, 2003).

A **segunda afirmação** pode ser suportada pela forma como utilizamos a exemplificação. Usando as duas classes de exemplos descritas, a selecção dos exemplos por parte dos professores não é trivial nem arbitrária, a forma de dificuldade gradual e crescente é geralmente bem compreendida, assim, o sucesso experimentado pelos alunos através de exemplos rotineiros prepara-os para atacarem outros mais desafiadores (Rowland, Thwaites, e Huckstep, 2003). Além do mais, a utilização de exemplos pode ser ou não acertada, promover ou não boas aprendizagens. Portanto, estamos interessados em criar boas relações entre linguagem e compreensão activa, isto é, relações que são efectivas em dirigir os alunos para formas úteis de compreenderem a matemática (Watson e Mason, 2002) através dos exemplos que o professor utiliza.

iv) Da revisão bibliográfica feita chamou-nos a atenção a variedade de formas de tratar o conceito de função e o número de investigações orientadas no sentido de aclarar pontos e pormenores relacionados com os seus aspectos ou sub-temas. A forma que adoptámos, e que já descrevemos, de aquisição dos conceitos tem como base os trabalhos que DeMarois e Tall (1996) apresentaram como sendo a sua visão da forma como o aluno constrói o conceito de função. Este conceito é tanto mais aprofundado pelo aluno quanto maior for o grau de abstracção que ele possa conseguir e, por outro lado, será mais amplo se o aluno puder desenvolver e interrelacionar diferentes representações do conceito de função. Nesse tempo investigava-se como a imagem do conceito podia ser descrita segundo duas dimensões: em profundidade e em amplitude (DeMarois e Tall, 1996). O modelo apresentado assenta nos termos ***Camadas*** e ***Facetas***. O termo *facetas* destina-se a descrever a dimensão relativa à amplitude do conceito de função e é entendido como “qualquer um dos lados ou aspectos”, enquanto o termo *camada,* entendido como sendo “uma das várias capas ou estratos”, destina-se a descrever a dimensão relativa à profundidade com que o conceito de função é obtido pelo aluno.

Já relativamente às facetas consideramos importante descrevê-las, isto porque as utilizámos para integrar o sistema de categorias, mais propriamente para a análise do material recolhido. Este sistema será descrito mais à frente na parte relativa à Metodologia. As Facetas estudadas em DeMarois e Tall, (1999) incluem a ***notação*** da função (algébrica), o uso ***coloquial*** da máquina de funções como caixa de input e output, ***numérica*** (tabelas) e ***geométrica*** (gráficos) e incluem também a ***verbal*** e a ***escrita***. A designação das várias camadas variou desde a sua primeira apresentação em 1996 até à designação apresentada em 1999. Tomaremos esta última por supormos que será fruto do amadurecimento por parte dos investigadores. Com um crescente grau de profundidade teremos Pré-procedimento, Procedimento, Processo, Objecto e Proceito. A descrição detalhada de cada uma das camadas não cabe neste trabalho mas poderá ser consultada em DeMarois e Tall, (1999). Contudo, o termo Proceito (Gray e Tall, 1994) é um termo que merece ser descrito pela importância no que respeita à descrição e construção de conceitos. Proceito é uma simbiose entre três coisas: um processo, um conceito e um sinal. Assim "2+3" inclui o processo de adicionar, o conceito de soma e o sinal + que representa tanto o conceito como o processo. No que concerne à camada mais profunda deste modelo, o proceito apenas é alcançado pelos estudantes que evidenciam uma flexibilidade em ver e manipular uma função tanto como um processo como um objecto quando colocados numa situação problemática (DeMarois e Tall, 1996).

O modelo poderá ser representado como um disco dividido em fatias, as facetas, e em sectores circulares concêntricos, as camadas, conforme a figura 1.

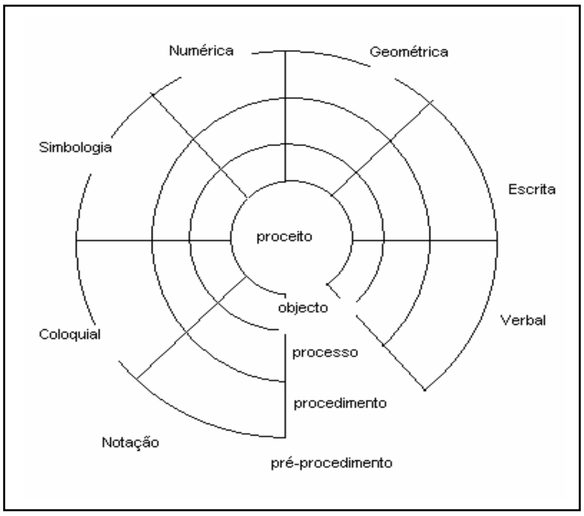


Figura 1

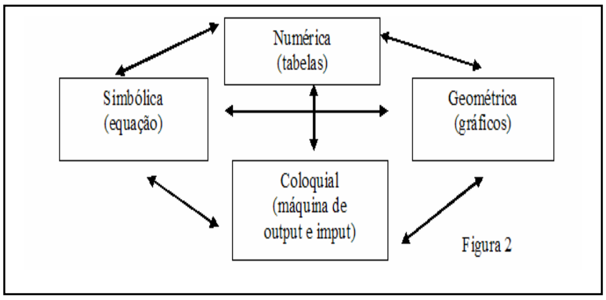


Figura 2

Este modelo ainda suporta as relações entre as várias facetas. As quatro facetas, Numérica, Simbólica, Coloquial e Gráfica, possuem ligações que poderão, ou não, ser evidenciadas se o estudante realizar as ligações entre as várias facetas (figura 2).

Interessou-nos este tipo de modelo porque se adequava ao nosso estudo de forma muito particular pois forneceu as perspectivas adequadas à observação e análise de qualquer processo de exemplificação que se apresentasse num contexto de conceito de função.

C. O que motivou o estudo: definição do problema.

A forma como o professor comunica com o aluno é, digamos assim, a sua impressão digital como professor. As características que o diferenciam têm a sua génese em factores tão diferentes como as suas crenças, a sua personalidade ou vivências, como aluno, que de alguma forma foram marcantes. O período de estágio pedagógico é um desses factores que orientará todo o percurso futuro da actividade profissional do professor. A exemplificação utilizada proporciona uma leitura objectiva do ponto de partida destes professores e a reflexão sobre esse ponto de partida proporcionará, seguramente, um melhor percurso futuro.

A necessidade do uso de exemplos parece-nos óbvia pois torna-se difícil que os alunos possam aprender com base exclusiva nas definições, são os exemplos e contra-exemplos que ajudam a perceber e matizar as definições dos conceitos (Orton, 1990). Esta necessidade traduz, em parte, o que nas aulas de qualquer professor de matemática ocupa uma substancial fatia do tempo disponível.

A necessidade de introduzir, modificar e desenvolver uma estrutura conceptual no aluno obriga a que se modifique a nossa própria estrutura do conceito. À medida que controlamos as várias perspectivas do conceito mais capacitados estamos para poder transmitir (de formas diversas, se necessário) o conceito em causa. No fundo, é este processo ensino/reflexão/ensino a que nos obrigamos que melhora a nossa própria prática e enriquece a forma como conseguimos manusear um conceito. Cada conceito pode ser definido de diferentes maneiras. Dispor de uma grande variedade de definições equivalentes colabora na resolução de problemas onde o conceito está envolvido (Calvo e Azcárate, 2001). Então também a exemplificação será tanto mais eficaz quanto mais variada for a forma de perspectivar e abordar o conceito. O que atrás foi dito é facilmente aceite se tivermos em conta a sensação que todos os professores já experimentaram de que conhecemos, perspectivamos e manuseamos melhor os conceitos que já ensinámos ou que ensinamos mais frequentemente; o que é equivalente a afirmar que melhor se exemplifica quanto melhor se controla o conceito (e vice-versa) e mais diversificada for a perspectivação desse conceito. Assim, mais que exemplificar sobre conteúdos, devemos exemplificar sobre conceitos, esquemas cognitivos e aplicações para que a matemática faça sentido e, em última análise, se possa tornar útil.

A exemplificação encerra em si mesma as duas faces da mesma moeda: se por um lado tem um papel esclarecedor, por outro, se deficiente, pode criar problemas graves de todos conhecidos – erros de conceito, concepções alternativas, obstáculos cognitivos, etc. Assim sendo, não é de estranhar que a forma de transmissão de conhecimentos seja, por parte do professor, um processo que requer todo o cuidado. Perante esta assumpção impõe-se a escolha de uma metodologia baseada nas concepções e crenças do professor. Desde uma metodologia tradicional (Porlán, 1992; Carrillo e Contreras, 1995; Contreras, 1998) à resolução de problemas.

Pela falta de experiência lectiva, as crenças explicitadas pelos professores no início do ano de estágio não são coerentes com as práticas posteriormente apresentadas nas aulas. Por isso, mais uma vez, entendemos que a exemplificação é um veículo apropriado ao estudo do desenvolvimento do conhecimento didáctico do conteúdo do professor durante o ano de estágio pedagógico. Desta forma o tipo de exemplificação utilizada --os exercícios apresentados, os problemas propostos-- poderá ser um factor (entre vários) que permite estudar e aprofundar o conhecimento didáctico do conteúdo que um professor estagiário apresenta ao longo deste período de práticas.

No fundo, uma situação particular que envolva um determinado conceito será sempre um exemplo. No quotidiano o nome será ou exemplo ou exercício/problema, consoante a situação é apresentada aos alunos resolvida ou é apresentada por resolver. Para nós o exemplo incluiu ambas as apresentações.

D. O que se pretendeu com o estudo

Ao analisarem-se as especificidades dos exemplos, a exemplificação utilizada e o seu papel no processo de ensino/aprendizagem do conceito de Função, pretendeu-se verificar a existência de padrões vinculados ao nível do Conhecimento Didáctico do Conteúdo de quatro professores no ano de Estágio Pedagógico com a intenção última de trazer algumas sugestões à Formação Inicial de Professores, no âmbito da exemplificação.

E. Os aspectos metodológicos

Procurámos que a relação entre o investigador e os informantes fosse de colaboração, estando todos os elementos integrados no seu ambiente e interagindo durante um determinado período de tempo. De cariz etnográfico, enquadrámos esta investigação num paradigma qualitativo. Os exemplos foram a forma e o conceito de função o veículo para podermos olhar para os conhecimentos iniciais que quatro jovens professores trouxeram para o terreno, quais foram os instrumentos que a sua vivência como estudantes e a formação académica lhes proporcionaram e, depois da sua análise, reflectir de forma a poderem melhorar as suas *performances* enquanto jovens professores.

A perspectiva é construtivista e, tendo em conta que se promove que estes professores se assumam como profissionais reflexivos, racionais, que tomam decisões, emitem juízos, possuem crenças e geram rotinas próprias do seu desenvolvimento profissional (Marcelo, 1987), entendemos a investigação como integrada no paradigma do pensamento do professor. Por tudo isto, a investigação que realizámos apresenta como principal característica ser uma análise descritiva e interpretativa.

Os exemplos são simultaneamente um produto e um instrumento que o professor usa. Foi sempre tida em consideração a opinião dos quatro estudantes para professores, antes da produção dos exemplos, durante a sua utilização e também após essa utilização. Da seguinte forma: houve uma primeira entrevista em Setembro de 2004 no início do estágio pedagógico; em Maio de 2005, enquanto as práticas decorriam, recolheram-se os exemplos e informação a eles ligada; e uma segunda entrevista no final do ano, em Junho de 2005. A análise e reflexão sobre a prática é o que nos permite melhorar e ajudar a melhorar. Com base naqueles três momentos, a análise e reflexão ao longo de todo o processo foi uma constante, permitindo esclarecer dúvidas e aclarar pormenores no momento em que surgiram. Assim, os materiais que constituíram as unidades de análise são de dois tipos: as referências que foram obtidas nas entrevistas e os exemplos que foram obtidos nas aulas e nas fichas de trabalho

Considerando o que referimos sobre a aquisição de conceitos por um lado e, por outro, sobre como se constrói o conceito de função definimos o sistema de categorias. É um sistema simples, sem subcategorias, e que de algum modo reflecte o esquema conceptual de função.

A 1ª Categoria é a **Definição**, porque o primeiro momento prende-se com a apresentação da função em estudo.

A 2ª Categoria é a **Representação**, porque após a apresentação do conceito dessa função surgem os primeiros contactos com as suas possíveis representações.

A 3ª Categoria é **Características**, no sentido de pormenorizações, porque as primeiras dúvidas surgem e o seu esclarecimento torna-se necessário trabalhando os pormenores da função.

A 4ª Categoria é **Aplicações Internas**, porque o conceito de função se relaciona com outros conceitos matemáticos.

A 5ª Categoria é **Aplicações Externas**, porque a aplicação à vida real e a outras ciências é fundamental para uma compreensão global do conceito de função e para o seu ensino.

Com este sistema de categorias procedeu-se à análise dos dados.

As referências às categorias que constituem unidades de análise foram encontradas nas entrevistas de Setembro de 2004 e de Junho de 2005 e os exemplos recolhidos nas aulas assistidas e nas fichas de trabalho foram classificados na categoria correspondente com base nas características que apresentavam.

As unidades de análise foram codificadas segundo a categoria, o conteúdo, o material de origem e o professor que a produziu. Os totais de unidades de análise, por categorias, dos quatro professores são dados pelo quadro:

Categoria EXEMPLOS	**Definição**	**Representação**	**Características**	**Aplicações Internas**	**Aplicações Externas**
TOTAL prof1	**25**	**49**	**17**	**15**	**10**
TOTAL prof2	**27**	**37**	**14**	**16**	**11**
TOTAL prof3	**18**	**39**	**16**	**14**	**11**
TOTAL prof4	**17**	**40**	**14**	**12**	**10**

Quadro 1: Totais de exemplos recolhidos

Os dados foram objecto de uma análise cruzada, foram analisados por professor e por categoria. Isto é, analisaram-se todos os professores categoria a categoria e, por sua vez, cada categoria professor a professor. Assim, pudemos fazer quatro análises finais por professor e finalmente cinco análises finais por categoria.

A figura 3 representa em esquema os passos que caracterizam a metodologia seguida e também o espaço temporal que a investigação ocupou.

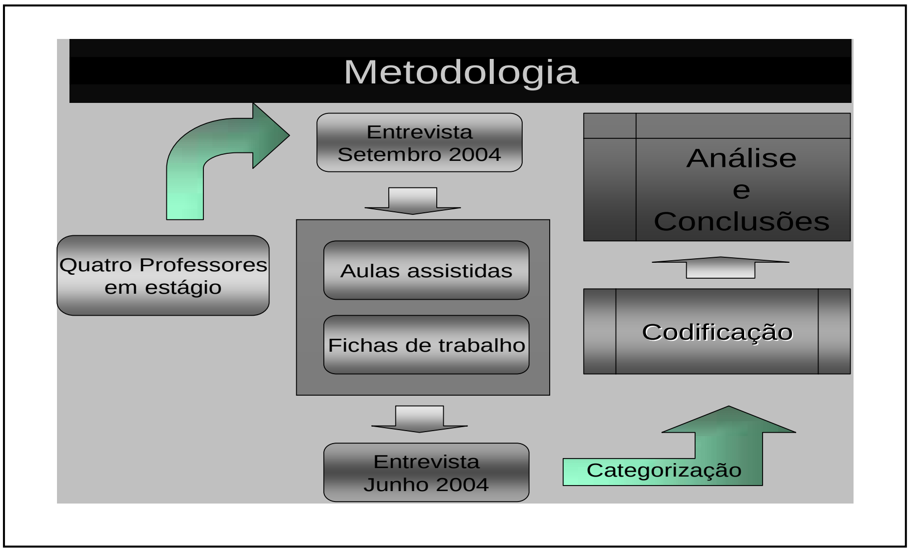


Figura 3

F. Resultados mais significativos

A análise cruzada de toda a informação produziu, obviamente, resultados referentes à exemplificação de cada professor. Contudo, para este artigo, estes resultados foram plasmados nos resultados referentes às categorias. Assim, considerámos mais interessante, para a área da formação inicial de professores, apresentar os resultados de forma conjunta mas dando maior relevância aos resultados por categorias.

1. Definição: todos os professores distinguiram duas formas de introdução de conceitos. Uma indutiva: uma selecção de exemplos com características semelhantes que conduzem os alunos ao conceito e à sua definição. Outra ilustrativa: o conceito é definido e, para que faça sentido, apresenta-se uma colecção de exemplos que dão corpo e materializam esse conceito. Durante as entrevistas os quatro professores estagiários apontaram a primeira forma como a mais adequada mas, durante as práticas apenas um a utilizou.

2. Representação: o resultado mais importante é a constatação do grande número de exemplos relativos a esta categoria que todos utilizaram. Um olhar para os quadros com os totais apresentados atrás é suficiente para constatar o desequilíbrio em relação aos totais das outras categorias. A quase totalidade dos exemplos desta categoria envolve apenas uma representação, duas representações em alguns, sempre a faceta algébrica ou a gráfica, eventualmente as duas. O motivo relaciona-se com um processo de simplificação e fraccionamento do conceito com vista a motivar o aluno pelo sucesso. A estratégia é não complicar no início; depois, no final, juntam-se as partes e forma-se o todo.

3. Características: foi nesta categoria que os resultados se mostraram mais contraditórios. Esta é a categoria mais referida nas entrevistas mas é a que inclui menos exemplos. Isto é, em teoria o papel principal dos exemplos é elucidar e esclarecer dúvidas; contudo, na prática, esse papel principal coube aos exemplos simples da categoria anterior. Os conceitos e esquemas conceptuais não foram aprofundados pelas suas características mas sim pelas representações. Em situação de dúvida por parte do aluno os jovens professores não criaram nem recorreram a exemplos próprios para esclarecer, utilizaram a própria situação que levou à dúvida.

4./5. Aplicações Internas/Externas: quanto às categorias relativas às *aplicações* existe um desequilíbrio das *aplicações internas* relativamente às *aplicações externas*. A importância que os estudantes para professores atribuíram às aplicações internas não ultrapassou o mero exercício rotineiro e serviu apenas para deixar clara a não estanquicidade dos temas matemáticos. Já o tratamento da aplicação às outras ciências ou à vida real foi diferente. Houve referências a esta aplicação nas duas entrevistas e os exemplos, por vezes configurando situações problema, fizeram a sua aparição de forma quotidiana para concluir os capítulos dedicados a determinado tema. A importância das modelações noutras ciências e caracterizações da vida real teve um cariz de importância crescente ao longo do ano, muito evidente no final, em consequência do realce dado pelas indicações metodológicas emanadas do Ministério da Educação e, directamente, pela utilização do manual adoptado.

G. Conclusões

Neste artigo quisemos evidenciar uma forma, entre outras, de observar professores em prática pedagógica. Não foi, nem pretendia ser, um estudo exaustivo sobre a forma de exemplificar dos quatro professores estagiários que se dispuseram a colaborar com o seu orientador. O objectivo que se perseguiu foi o de se encontrarem coincidências e discrepâncias que pudessem ser consideradas importantes, dignas de um olhar mais atento e, sobretudo, que a sua evidência pudesse ser objecto de um estudo mais aprofundado e de uma reflexão por parte de todos e cada um dos cinco participantes desta experiência conjunta. Na opinião de um dos jovens professores, que todos seguramente compartimos, está muito do espírito que orientou todos os dias em que nos ajudámos mutuamente:

"*…, se uma pessoa tiver experiência e nunca reflectiu sobre aquilo que está a fazer, nunca vai conseguir chegar à conclusão se é bom ou se é mau professor, se utiliza bem os exemplos, ou se não utiliza bem os exemplos.*" (Junho 2005)

Relativas às especificidades dos exemplos:

Existem traços comuns às referências dadas nas entrevistas e também à exemplificação apresentada pelos quatro professores estagiários. Consideramos significativos os aspectos:

a) A categoria mais referida nas entrevistas é a Categoria Características.

Categoria **Referências**	Definição	Representação	Características	Aplicações Internas	Aplicações Externas
Total do prof. 1	**4**	**6**	**10**	**1**	**3**
Total do prof. 2	**4**	**4**	**8**	**0**	**3**
Total do prof. 3	**3**	**4**	**7**	**1**	**2**
Total do prof. 4	**4**	**5**	**10**	**1**	**4**

Quadro 2: Totais de referências recolhidas nas entrevistas

Pelo número de referências retiramos das palavras dos professores estagiários que os exemplos servem sobretudo para esclarecer dúvidas e para sistematizar. Sem a pressão do ambiente da sala de aula e da actividade lectiva, em conversa descontraída e despreocupada é essa a função dos exemplos que sobressai das opiniões destes professores estagiários, seja em Setembro seja em Junho.

b) Outra coincidência é que a função da exemplificação menos considerada é a de interligação entre conceitos matemáticos a nível interno. De todos os contactos tidos entre os professores estagiários e o seu orientador sempre sobressaiu a aplicação da matemática a nível externo, as ligações a nível interno são tão óbvias para eles que não sentem grande necessidade de trabalhar esse facto com os seus alunos de forma isolada. A somar a este facto, as linhas apontadas nos programas, exemplos propostos nos diversos manuais e as orientações das disciplinas de didáctica sempre apontam para a resolução de problemas, sobretudo, da vida real. Por isso os professores não estiveram muito despertos para os exemplos exclusivamente matemáticos.

c) Em todas as situações improvisadas por qualquer dos quatro professores que se destinavam ao esclarecimento de dúvidas dos alunos, nos exemplos que foram produzidos sem preparação, os coeficientes, raízes e outros valores numéricos utilizados foram sempre inteiros, dando a ideia que o universo com que se trabalha é sempre Z e nunca utilizaram outros que fossem de Q ou IR. A explicação para este facto reside no cuidado que estes professores tiveram em não introduzir elementos que pudessem criar algum ruído na exemplificação. A sua opinião é de que a utilização de elementos de Q ou IR poderiam introduzir um grau de dificuldade artificial e desnecessário. Ora, o efeito do seu uso é exactamente o contrário. Os alunos serão indiferentes à utilização de elementos de Q ou IR se estes números forem usados de forma banal. A não utilização quotidiana destes números é que gera dificuldades.

Poder-se-á perguntar se as dificuldades sentidas pela generalidade dos alunos em trabalharem com elementos de IR não estarão relacionadas com uma inclinação que os seus professores têm em não os utilizarem nos seus exemplos.

Na leccionação destes quatro professores queremos destacar o papel dos exemplos da 2ª categoria. Pelo número de exemplos que esta categoria engloba podemos constatar que foram os exemplos relativos às representações que assumiram maior importância e protagonismo na actividade docente dos estudantes para professores. O papel principal dos exemplos deixou de ser o esclarecimento para passar a ser a construção do conceito através das representações algébrica e gráfica. Assim, a actividade usual com os alunos centrou-se fundamentalmente em exemplos que configuravam exercícios elementares e rotineiros tratando até à exaustão faceta por faceta, conteúdo por conteúdo e sofrendo, deste modo, as relações internas e externas um tratamento deficitário, como pode ser confirmado pela pouca quantidade de exemplos das 4ª e 5ª categorias. As 4ª e 5ª categorias incluem exemplos que podem ser situações problema e, caso surgissem, as dúvidas levantadas deviam ser esclarecidas de imediato, o que é mais exigente para os jovens professores e, talvez por isso, tenham optado por exercícios rotineiros que se incluem na 2ª categoria e que são menos propícios ao surgimento de situações de dúvida. Esta forma de actuar é resultante da auto-constatação das dificuldades inerentes a uma exposição a situações que mais exigem do professor; nos níveis etários a que estes professores leccionaram (15-17 anos) o *período de sobrevivência* não se refere tanto à disciplina da aula, mas antes ao terem de enfrentar situações inesperadas em termos de competência didáctico-pedagógica ou, mas não tanto, de competência matemática. Ser um professor inexperiente acarreta, naturalmente, estas fragilidades profissionais.

Com a excepção de um, todos os professores definiram primeiro e exemplificaram depois, utilizaram uma metodologia baseada num processo cuja orientação é partir do geral para o particular na situação em que se pretende a introdução de novos conceitos, dando aos exemplos um papel essencialmente ilustrativo e quase nunca indutivo. Este traço de tendência didáctica tradicional dos professores inexperientes, tal como está amplamente documentado (Carrillo e Contreras, 1995; Contreras, 1998), também se evidenciou nesta investigação.

Foram encontradas semelhanças na exemplificação dos professores. Nas análises dos dados de cada um destes estudantes para professores podemos encontrar uma tendência para o fraccionamento dos conceitos. Foi notório nestes professores a forma como a sua exemplificação atomizou o esquema conceptual que estava a ser trabalhado. Promoveram a separação do esquema conceptual em partes para exemplificarem sobre cada uma dessas partes (normalmente eram referências a cada representação por separado) e depois, com algum exemplo adequado, sistematizaram, voltando a unir as partes num todo. O elevado número de exemplos utilizados que se enquadram na 2ª categoria é indicadora disso mesmo. O motivo pelo qual dividiram em múltiplos exemplos simples um esquema complexo é julgarem que a sua compreensão é mais fácil de alcançar se estiver fraccionado em situações mais simples. Este facto, dos alunos compreenderem as situações mais simples, não é contestável, o que se contesta é o facto de os professores considerarem simples a junção de todos os passos. Persistir em situações simples, habituar os alunos à simplicidade das situações é, consequentemente, perpetuar aquilo que não foi o objectivo escolhido inicialmente.

Padrões vinculados ao nível do Conhecimento Didáctico do Conteúdo

Do que enunciámos anteriormente podemos fazer constatações ao nível do conhecimento didáctico do conteúdo destes quatro estudantes para professores. Se quisermos, podemos considerar que são padrões apresentados por todos.

a) Referente à aprendizagem:

- Não esperam e não antevêem as dúvidas e dificuldades dos alunos nos diversos conteúdos relativos às funções, o que indica que o seu conhecimento didáctico do conteúdo se encontra num patamar de desenvolvimento muito incipiente.
- Consideram que os alunos aprofundam os diferentes conceitos sobre funções com base em muitos exemplos simples que envolvem uma representação de cada vez, o que poderia ser justificado como característica da tendência tradicional em que consideram que a aprendizagem assenta num seguimento rígido de um guião pré-determinado que conduz, forçosamente, ao objectivo para que foi criado.
- Não se apercebem dos erros e dificuldades futuras que podem induzir nos seus alunos.

b) Referente ao ensino:

- Não concebem o conceito de função como um todo integrado, vêem-no mais como a soma de várias partes, esperando que o aluno sobreponha a informação e que a apreenda apenas pelo facto de o professor lhe ter transmitido essa informação. O que revela, segundo Contreras (1998), uma forte tendência tradicional.
- Numa situação de dúvida mantêm o exemplo que a provoca, não diversificam o esclarecimento com outros exemplos, o que é sintomático de que não possuem uma base de exemplos suficientemente rica e ampla onde escolher os exemplos mais apropriados a determinada situação.

H. Sugestões para a Formação Inicial.

Os aspectos observados nos quatro casos fornecem fortes indícios a ter em consideração por quem seja tutor de professores em práticas. O estudo pretendeu observar e colaborar com estes quatro professores e, tão só, descrever o resultado. Não pôde, nem desejou, fazer generalizações mas encontrámos motivos para as sugestões que se seguem no âmbito da formação inicial de professores:

- Ter em atenção e contrariar a propensão que os professores estagiários possam ter para a utilização excessiva de exemplos e exercícios estritamente dirigidos a trabalharem as representações de uma função por separado.

Sugere-se a quem tem responsabilidades de formação que alerte os professores em formação para, caso essa excessiva utilização se verifique, tratarem os diversos conceitos com base em tarefas que envolvam de forma completa e integrada os conceitos a adquirir pelos alunos. Para isso, a resolução de problemas pode ser uma forma. Contudo não será a única, também a utilização de situações motivantes e variadas que promovam descobertas significativas pode ter efeitos semelhantes na aprendizagem.

- Contrariar de forma enérgica a inércia que os professores estagiários possam adquirir persistindo numa exemplificação que não trabalha as relações internas dos temas matemáticos e a sua aplicação à vida real. Estes exemplos de aplicação interna e externa de esquemas conceptuais derivados do conceito de função devem ser tratados em aula e não ser deixados ao livre arbítrio do interesse do aluno.
- Chamar a atenção dos professores estagiários para o facto de que os alunos de 16, 17 e 18 anos trabalham há vários anos com o conjunto dos números reais e que a exemplificação utilizada deve incluir os elementos desse conjunto.
- Não deixar que os professores estagiários utilizem de forma exagerada uma determinada representação de função e incentivá-los a utilizarem (e relacionarem) todas as facetas relativas a este conceito.

Ao terminar o estudo foi nossa forte convicção que o estudo da exemplificação apresentada pelo professor é um instrumento que pode ser usado para observar e estudar o conhecimento do professor de forma alternativa ou, então, complementar aos instrumentos que estão hoje disponíveis.

Bibliografia

- Azcárate, C. (1995): “Sistemas de representación”. Uno 4, 53-61.
- Azcárate, C. (1997): “Si el eje de coordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?”. Suma 25, 23-30.
- Blanco, L.J. (1998): “Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar matemáticas”. Cultura y Educación 9, 77-96.
- Blanco, L., Mellado, V. e Ruiz, C. (1995): “Conocimiento didáctico del contenido en matemáticas y ciencias”. Revista de Educación 307, 427-446.
- Calvo, C. y Azcárate, C. (2001): “Usos alternativos de las pruebas visuales en los cursos de cálculo diferencial e integral”. Reporte de investigación presentado en la 15ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. (RI-044, RELME 15) Buenos Aires, Argentina.
- Carrillo, J. e Contreras, L.C. (1995): “Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza”. Educación Matemática 7(3), 79-92.
- Climent, N. (2002): El desarrollo Profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Tese de Doutoramento. Universidade de Huelva.
- Contreras, L.C. (1998): Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. Tese de Doutoramento. Publicações da Universidade de Huelva.

- DeMarois, P. e Tall, D. O. (1996): "Facets and layers of the function concept. Em Puig, L & Gutierrez, A. (Eds.), Proceedings of the 20th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education 2, 297–304. Valencia, Spain.
- DeMarois, P. e Tall, D. (1999): "Functions: Organizing principle or cognitive root". Proceedings of PME 23(2), Haifa, 257–264.
- Figueiredo, C. A. (2005): Os exemplos utilizados por professores estagiários quando ensinam o conceito de Função. Memoria de Proyecto de investigación de Doctorado. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidada de Extremadura.
- Gray, E. M. e Tall, D. O. (1994): "Duality, ambiguity, and flexibility: A Proceptual view of simple arithmetic". Journal for Research in Mathematics Education 25(2), 116–140.
- Marcelo, C. (1987): El Pensamiento del Profesor. Barcelona: CEAC.
- Marcelo, C. (1993): "Cómo conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido". Em L. Montero e J. Vez (Eds.), Las Didácticas Específicas en la Formación del Profesorado. Santiago, 151-186.Tórculo.
- NCTM (2000): Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston. NCTM.
- Orton, A. (1990): Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Ediciones Morata/MEC.
- Porlán, R. (1992). Teoría y práctica del currículum. El currículum en la acción. Em AA.VV. Curso de actualización científico-didáctica. Madrid: MEC.
- Rowland, T., Thwaites, A. e Huckstep, P. (2003): "Elementary Teachers' Mathematics Content Knowledge and Choice Of Examples". CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, March 2003, Bellaria, Italy.
- Shulman, L. S. (1986): "Those Who Understand: Knowledge Growth". Teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.
- Skemp, R. (1971): The Psychology of Learning Mathematics. Middlesex, England: Penguin.
- Tall D., e Vinner S. (1981): "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity". Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.
- Watson, A. and Mason, J. (2002): Extending example spaces as a teaching/learning strategy in mathematics. Em A. D. Cockburn and E. Nardi (Eds.) Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4, 378-386. Norwich: University of East Anglia.
- Wilson, P. S. (1990). "Inconsistent ideas related to definitions and examples". Focus in Learning Problems in Mathematics 12(3-4), 31-47.

Carlos Alberto Figueiredo é licenciado em Ensino da Matemática e Professor Efectivo na Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, Portugal. A sua Tese de Doutoramento refere-se à Analise de Exemplos empregues durante a actividade lectiva tanto na Formação Inicial como no Desenvolvimento Profissional de professores de Matemática. carlosaafigueiredo@sapo.pt

Lorenzo J. Blanco Nieto é Professor Titular de Didáctica da Matemática do Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, Badajoz, España. A sua linha de investigação está orientada para a Formação Inicial de Professores e para o Desenvolvimento Profissional dos Professores do Ensino Primário e Secundário, tendo publicado vários trabalhos sobre o assunto. lblanco@unex.es

Luís Carlos Contreras González é Profesor Titular de Didáctica da Matemática do Departamento de Didáctica de las Ciencias y la Filosofía, Universidad de Huelva, España. As suas linhas de investigação estão orientadas para a Formação Inicial de Professores e Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática bem como, para a Resolução de Problemas. lcarlos@uhu.es

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 41 - 51
ISSN: 1815-0640

Las Matemáticas como fuente de inspiración artística

Vicente Meavilla Seguí

Resumen

A lo largo de la historia del arte son numerosos los ejemplos en los que las Matemáticas están presentes en las composiciones de muchos creadores. Recordemos, por ejemplo, la mayor parte de la producción de M.C.Escher, algunos cuadros de Salvador Dalí, muchas obras del pintor Victor Vasarely, pinturas y esculturas del minimalista norteamericano Sol LeWitt, ciertos diseños de la artista Karen Combs, las casas cúbicas de Piet Blom, las esculturas cúbicas de Bathsheba Grossman, Agustín Ibarrola, Bernard (Tony) Rosenthal, etc.[1]

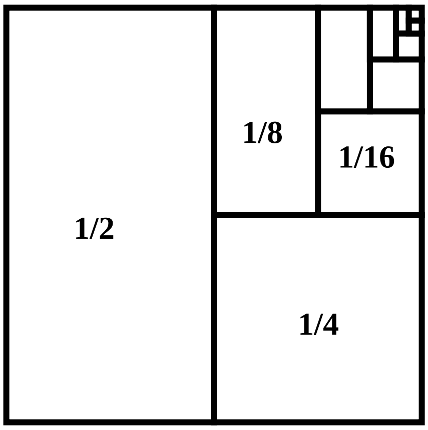
En este artículo no pretendemos incrementar el catálogo de obras de arte en las que la influencia de las Matemáticas es manifiesta. Nuestro objetivo es, simplemente, ofrecer algunos ejemplos de cómo se pueden utilizar determinados contenidos de carácter matemático en la primera etapa de la creación artística: LA INSPIRACIÓN.

Agustín Ibarrola. *Cubos de la Memoria.* Puerto de Llanes (Asturias)

[1] Para comprobar la presencia del hexaedro en el arte puede consultarse *Sinfonía de cubos. Opus I* y *Sinfonía de cubos. Opus II*
<http://www.divulgamat.net/weborriak/Exposiciones/Expode/index.asp>

Una demostración gráfica

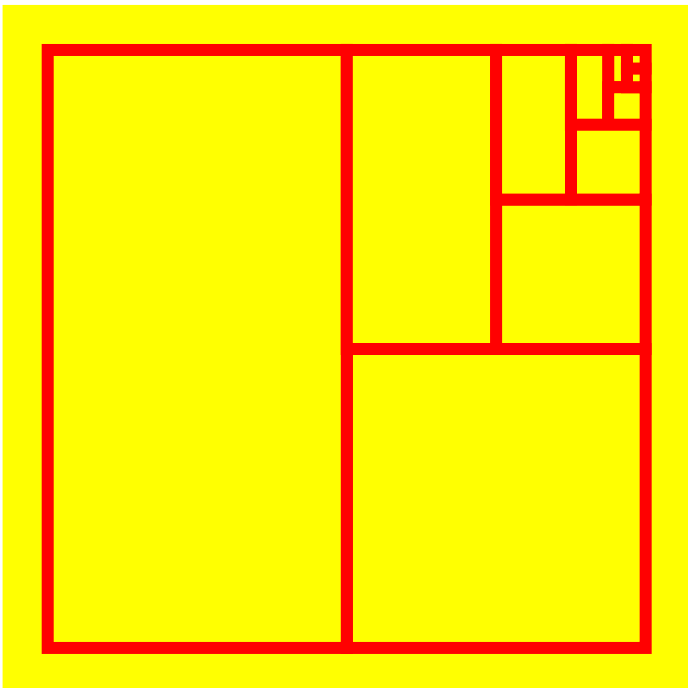
La figura adjunta sirve para calcular de forma visual el resultado de una suma infinita.

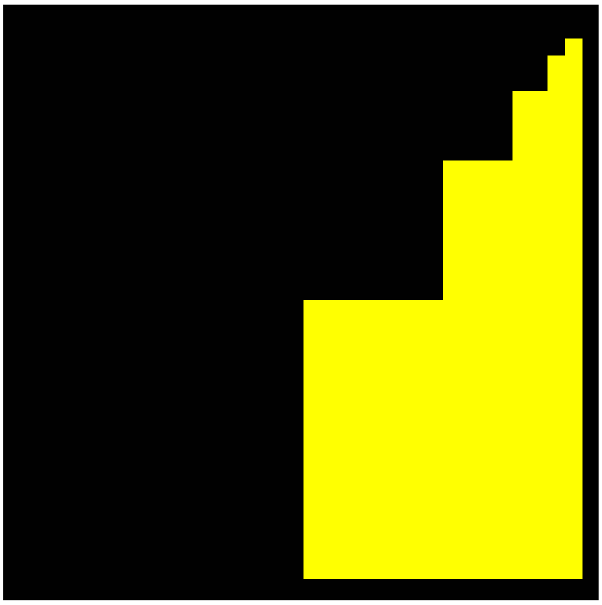


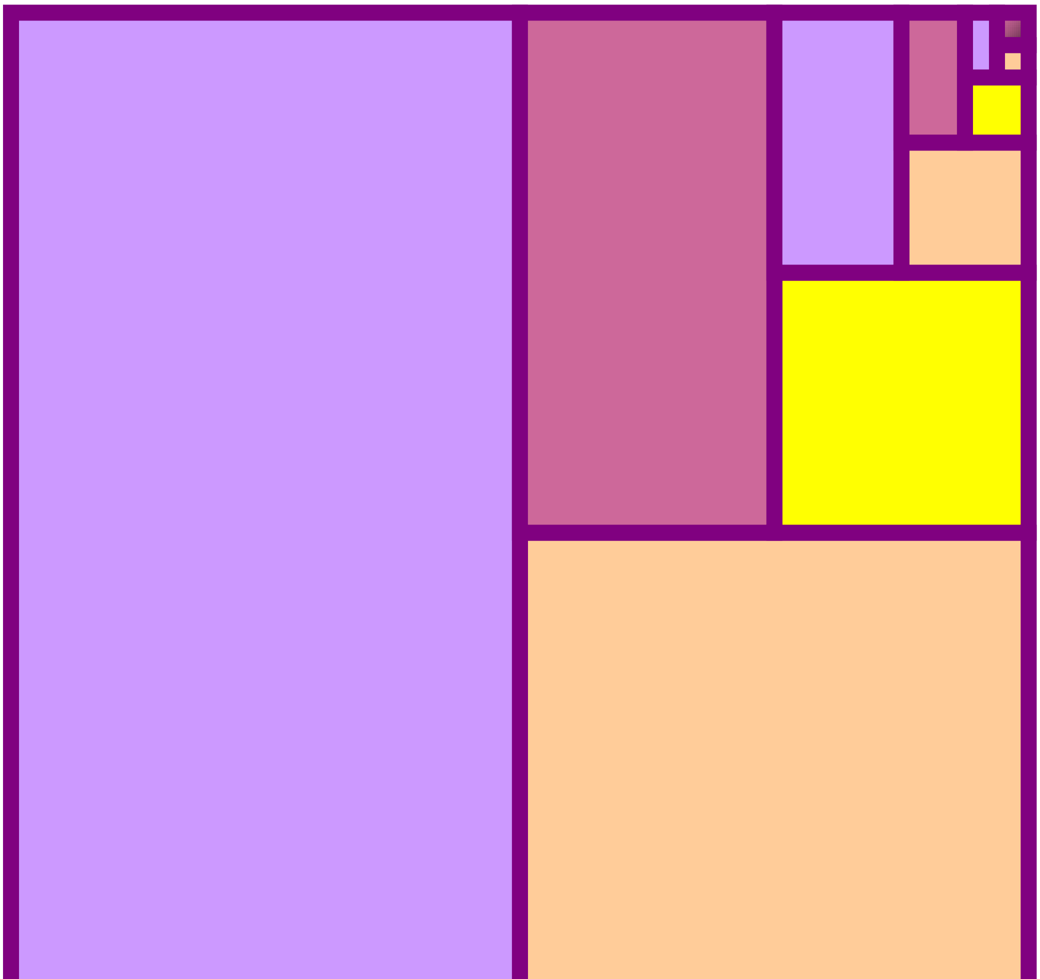
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$

Esta demostración gráfica, cuyo interés didáctico es incuestionable, goza además de un potencial plástico que puede ser provechoso para estudiantes del Bachillerato de Artes, para alumnos de Bellas Artes y para artistas minimalistas en general.

Veamos algunos diseños que justifican la afirmación anterior.





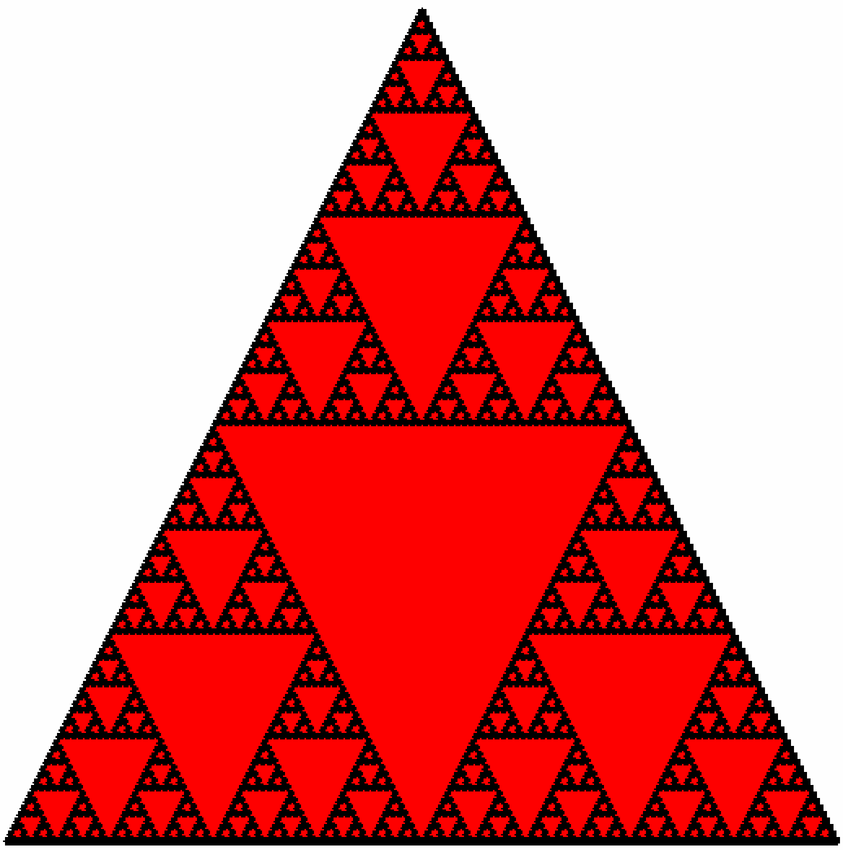


Los triángulos de Pascal y Sierpinski

Una disposición numérica (con infinitas filas) muy familiar para los alumnos de Enseñanza Secundaria, es la conocida con el nombre de "triángulo aritmético", "triángulo de Tartaglia" o "triángulo de Pascal".

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
. . . .
. . . .

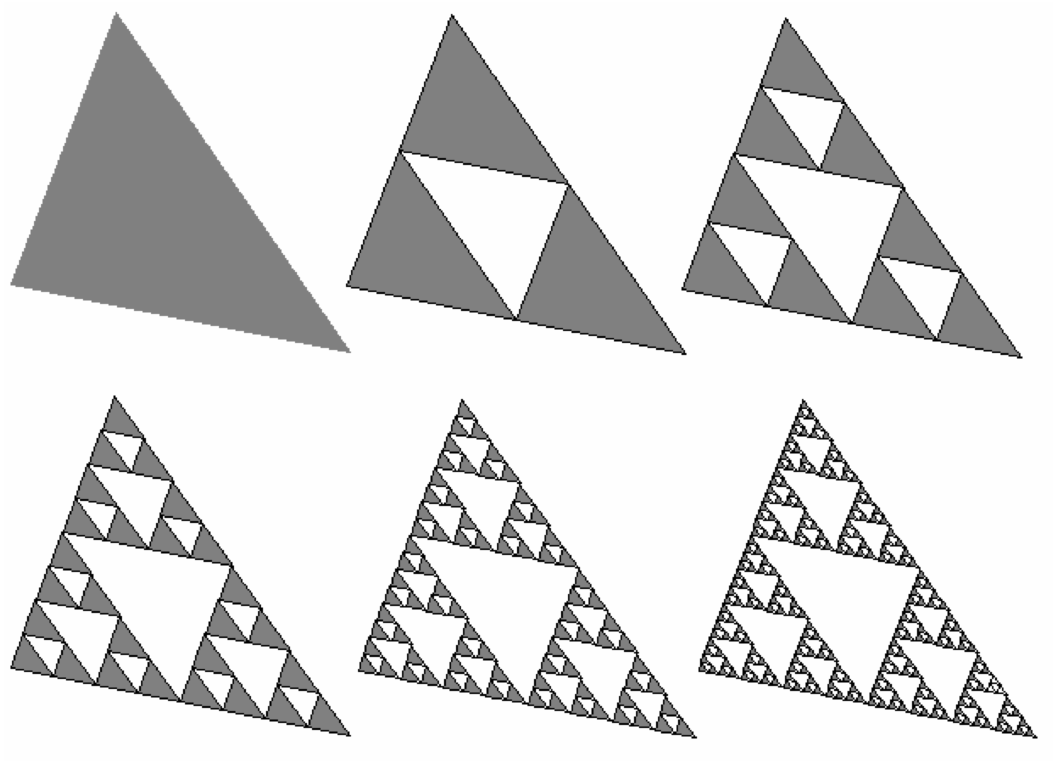
Representando cada número del triángulo por un círculo y coloreando los números pares e impares con dos colores diferentes [p.e.: negro (impares), rojo (pares)] se pueden obtener composiciones cromáticas como la siguiente.[2]



[2] El triángulo bicolor obtenido tiene 128 filas y ha sido diseñado con la ayuda del programa informático contenido en la dirección http://faculty.salisbury.edu/~kmshannon/pascal/article/twist.htm

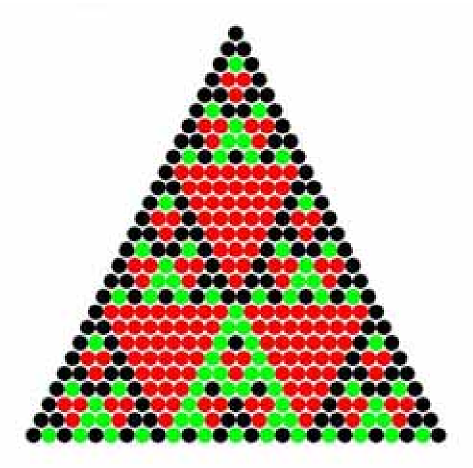
El diseño anterior es un caso particular de un fractal conocido como “triángulo de Sierpinski”, construido a partir de un triángulo cualquiera si se procede así:

- Se marcan los puntos medios de los lados y se elimina el triángulo interior.
- Se repite el proceso con los tres triángulos equiláteros sobrantes, y así sucesivamente.



El conjunto geométrico que acabamos de describir ofrece al artista un amplio repertorio de posibilidades estéticas.

También resulta interesante asignar un color a los múltiplos de 3, otro a los múltiplos de 3 más uno y un tercer color a los múltiplos de 3 más dos. De este modo se obtienen diseños similares a los de la figura adjunta.

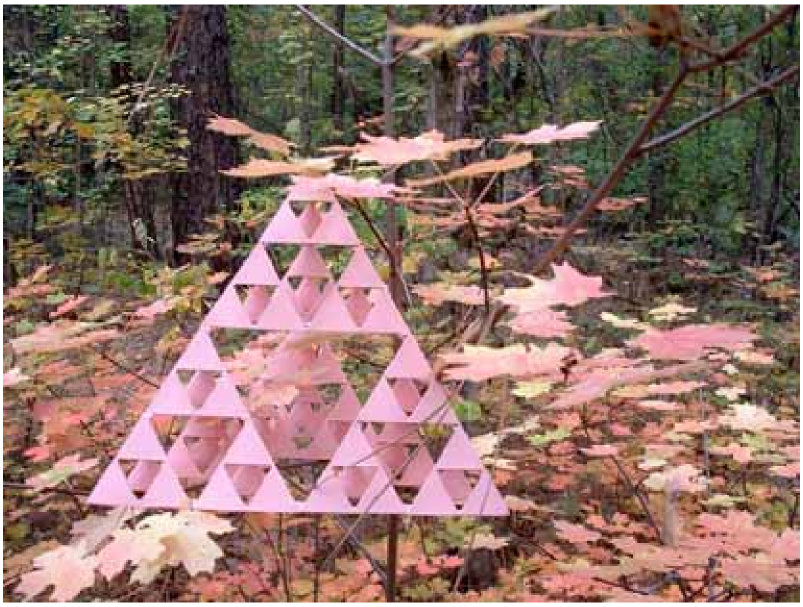


Del mismo modo, se podrían obtener representaciones pictóricas del triángulo aritmético asignando colores a los números tal como se indica en la tabla siguiente.

color	número
c_1	nk
c_2	nk + 1
c_3	nk + 2
.	.
.	.
.	.
c_n	nk + n - 1

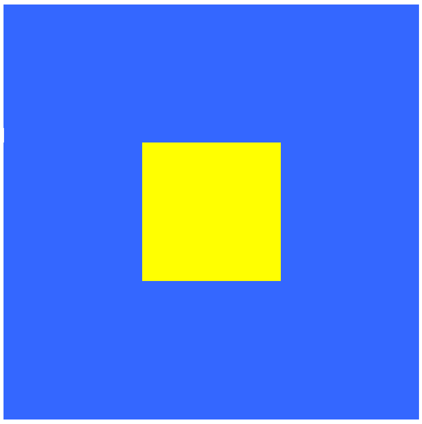
Sierpinski 3D

A partir del tetraedro regular (o de cualquier tetraedro) se puede obtener un curioso objeto matemático, pariente bidimensional del triángulo de Sierpinski, cuya utilización en el arte queda patente en las siguientes fotografías de Gayla Chandler.

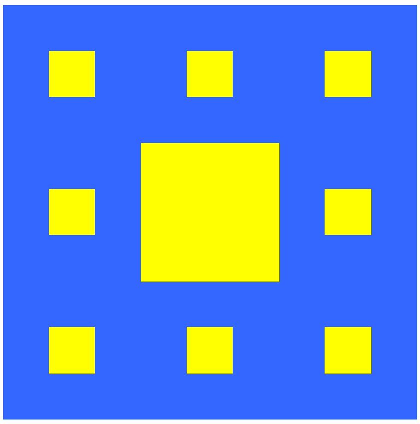


Un fractal cuadrado

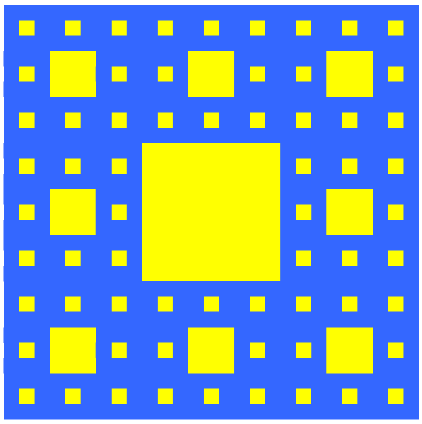
Cuadrado original



Primera fase



Segunda fase



Tercera fase

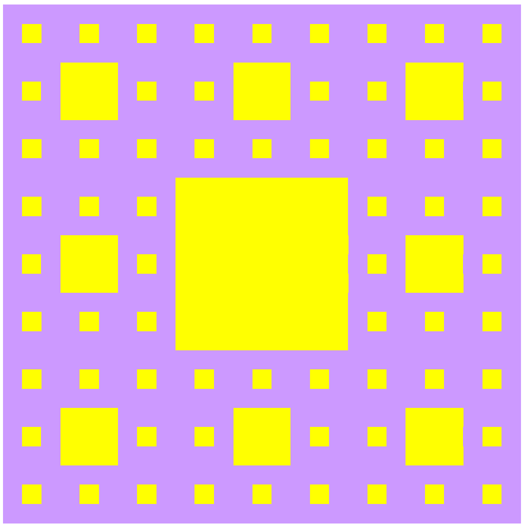
En los diagramas anteriores se describen las tres primeras fases para la construcción de un curioso ser geométrico a partir de un cuadrado dado.

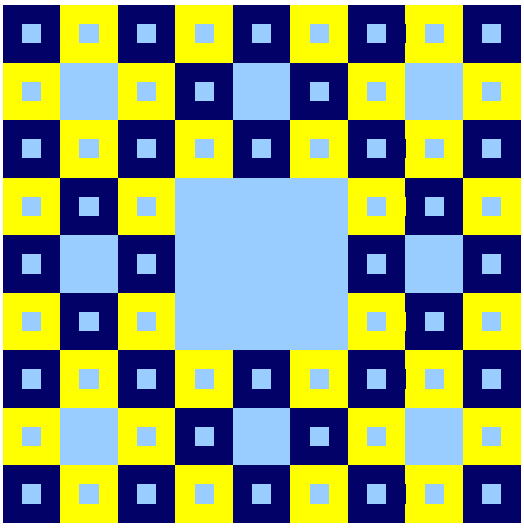
En la primera, se elimina el cuadrado central en un cuadrado 3 x 3.

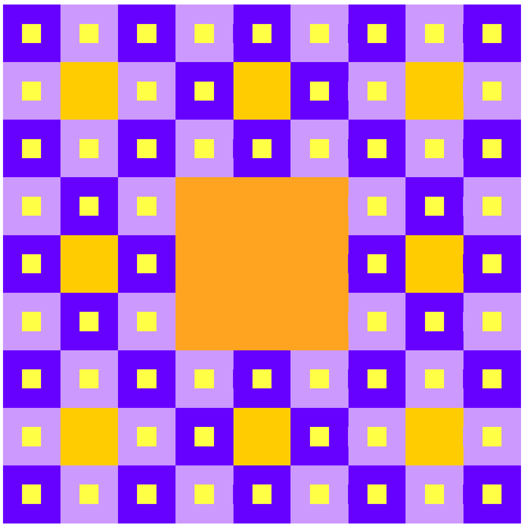
En la segunda, se repite el mismo proceso en cada uno de los ocho cuadrados restantes.

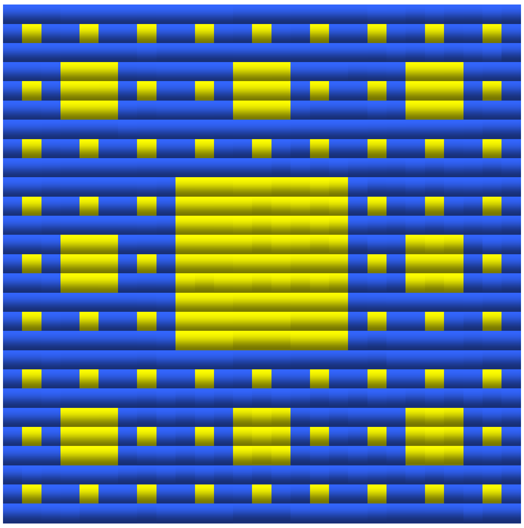
En la tercera, se vuelve a proceder de forma similar en los 64 cuadrados que quedan.

Repitiendo el proceso ad infinitum se obtendría un fractal de área cero, cuyas cualidades plásticas (restringidas a un número finito de fases) intentamos poner de manifiestos en los cuatro diseños que se adjuntan.





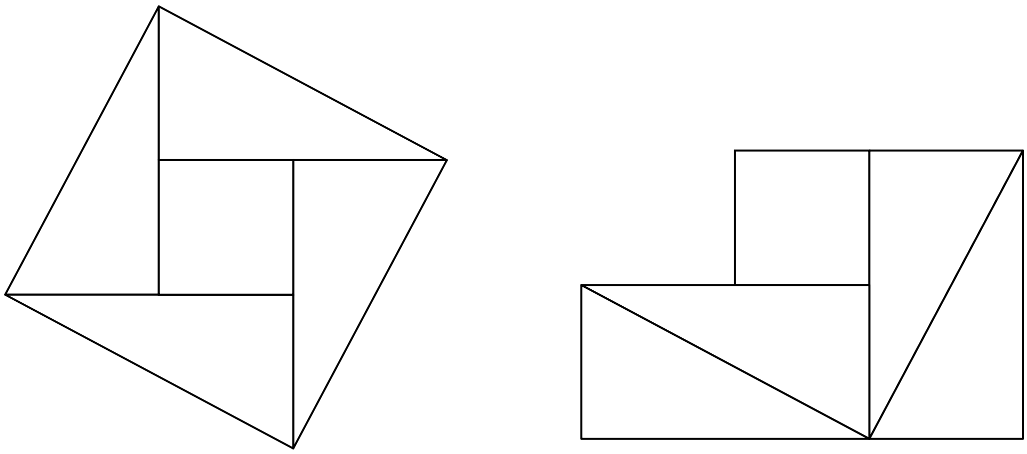




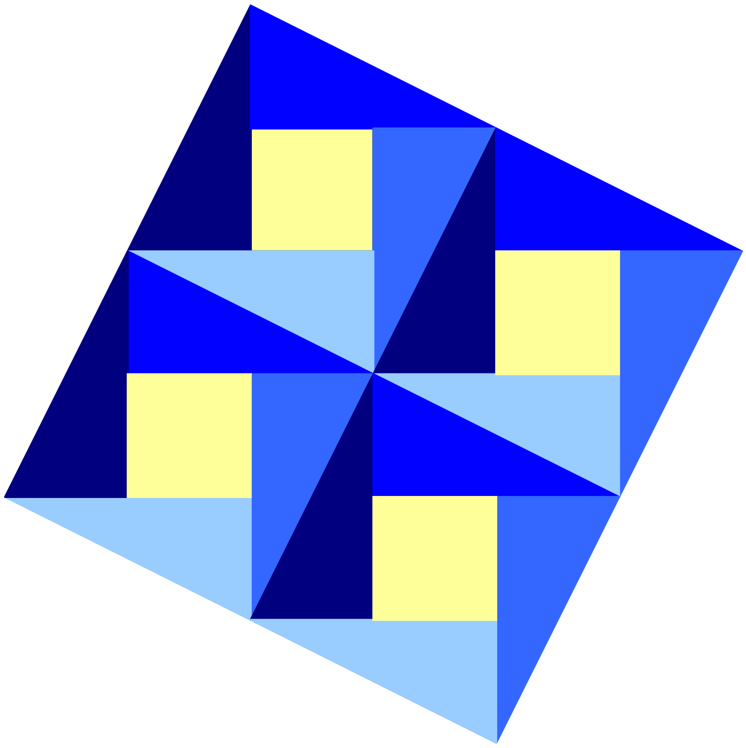
Teorema de Pitágoras

Entre las demostraciones del teorema de Pitágoras, una de las más bellas y económicas en palabras es la debida al matemático indio Bhaskara (s. XII).

En ella, el autor se limitó a dibujar las dos figuras siguientes. Un escueto mensaje: “Míralo”, invitaba al estudioso a contemplar los dos diagramas y descubrir la información encerrada en ellos.



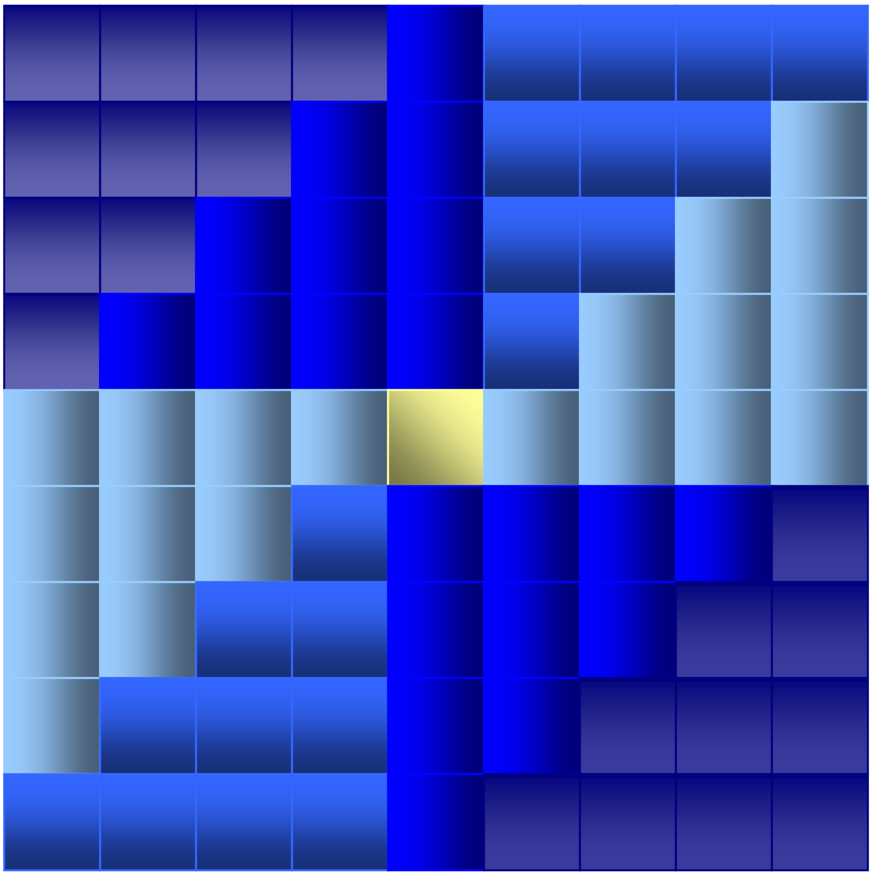
Solapando los dos dibujos anteriores se pueden conseguir mosaicos policromados cuyo atractivo plástico es notable. He aquí un ejemplo.



Números figurados

Pitágoras (s. VI a. C.) y sus discípulos utilizaron representaciones diagramáticas de los números para descubrir interesantes relaciones de carácter aritmético.

De este modo lograron intuir que si se aumenta en una unidad el óctuplo de cualquier número triangular se obtiene un número cuadrado.



La composición anterior ilustra un caso concreto de la propiedad general que acabamos de enunciar.

Breve despedida didáctica

En las líneas precedentes hemos presentado un catálogo de contenidos matemáticos que, además de su interés intrínseco, pueden utilizarse como fuente de inspiración para aquellos estudiantes cuyo interés se centra en el mundo de las artes.

Desde aquí animamos a nuestro colegas a que desarrollen actividades de enseñanza y aprendizaje compartidas con los departamentos de Plástica en las que los alumnos puedan manifestar su creatividad artística utilizando modelos extraídos de las Matemáticas. Que así sea.

Bibliografía

- Meavilla, V. (2001). Aspectos históricos de las matemáticas elementales. Zaragoza, Prensas Universitarias de Zaragoza.
- Gayla Chandler
  http://www.public.asu.edu/~starlite/
- Triángulos de Pascal y Sierpinski
  http://faculty.salisbury.edu/~kmshannon/pascal/article/twist.htm
- Triángulo de Sierpinski
  http://es.wikipedia.org/wiki/Imagen:Sierpinski_segmentos.png#file

Vicente Meavilla Seguí, Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza y Doctor en Filosofía y Letras (Pedagogía) por la Universidad Autónoma de Barcelona, es Catedrático de Matemáticas del IES “Francés de Aranda” de Teruel y Profesor Asociado del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.
Entre sus publicaciones destacan: Aspectos históricos de las Matemáticas elementales (Prensas Universitarias de Zaragoza), 201 problemas resueltos de Matemática Discreta (Prensas Universitarias de Zaragoza) y Figuras imposibles: geometría para heterodoxos (Proyecto Sur de Ediciones, S. L).
Sus investigaciones se centran en dos campos: (1) el estudio de la influencia de las interacciones verbales en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, y (2) la utilidad de la historia de las Matemáticas como fuente de recursos didácticos. **vmeavill@hotmail.com**

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 53 - 62
ISSN: 1815-0640

Matemáticas y Literatura

Joaquín Leguina

Esta pretensión mía, la de unir matemáticas y literatura, quizá les pueda parecer un sinsentido a los matemáticos y a los escritores, pero no renuncio a convencerles de lo contrario.

Claro que para ello cuento, en principio, con un notable aliado: Novalis, que en su famoso "Monólogo" escribió lo siguiente: Si tan solo se le pudiera hacer entender a la gente que las cosas tienen con el lenguaje la misma relación que con las fórmulas matemáticas, las cuales constituyen un mundo aparte, juegan sólo consigo mismas, no expresan otra cosa que su naturaleza prodigiosa y, precisamente por ello son tan expresivas… Sólo en sus libres movimientos se manifiesta el alma del mundo".

La matemática, como disciplina científica, no pertenece a la ciencia empírica (Física, Química, Biología…), sino que para estas ciencias las matemáticas representan una ayuda impagable, nada más, pero nada menos.

¿Qué son las matemáticas? ¿Un lenguaje? ¿Un arte? Veamos lo que a este propósito dejó escrito un notable matemático inglés de la primera mitad del siglo XX, Harold Hardy, en su libro "Autojustificación de un matemático":

"Un matemático, lo mismo que un pintor o un poeta, es un constructor de configuraciones. Si sus configuraciones gozan de mayor perdurabilidad que las construidas por los demás hombres es a causa de que su material básico son las *ideas*. Un pintor construye configuraciones con formas y colores, un poeta con palabras.

Las configuraciones construidas por un matemático, lo mismo que sucede con las de un pintor o un poeta, deben poseer *belleza*; las ideas, los colores y las palabras deben ensamblarse de un modo armónico. La belleza es la primera piedra de toque; en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas desagradables desde el punto de vista estético.

Definir la belleza matemática puede encerrar una dificultad enorme, pero no superior a la que implica hacerlo con cualquier otro tipo de belleza. Quizás no sepamos explicar con precisión qué entendemos por un poema hermoso, pero ello no es óbice para que lo reconozcamos como tal al leerlo".

En un reciente y breve ensayo ("Henry Poincaré. La creación matemática" de Brewsteer Griselin), puede leerse lo siguiente: "La génesis de la creación matemática es algo que debería interesar profundamente a los psicólogos. Es la actividad en la cual la mente humana parece extraer menos del mundo exterior, y en la que actúa o parece que actúa únicamente por sí misma y a partir de sí misma…, esta intuición del orden matemático nos proporciona ocultas y divinas armonías".

¿Y la literatura? ¿Qué pretende? Tengo para mí que si a cualquier escritor le dijéramos que la literatura quiere trasladar al lector, bellamente, la emoción y la complejidad de la vida humana, seguramente estaría de acuerdo. Pero vayamos un poco más lejos.

Una novela, también una obra de teatro o una película, contienen, al menos, dos componentes: Personajes y Trama. Personajes vivos, verosímiles, que encarnan el pensamiento y las pasiones que anidan en la cabeza y en el corazón de los hombres. Nos identificamos con esos personajes, los queremos u odiamos… pero, en todo caso, nos emocionan. Y, también, una trama que nos mantiene atentos, atados a ella. Queremos saber qué es lo que va a ocurrir en al próxima página. Son los personajes y la trama los que nos hacen desear, como ocurre siempre con las buenas novelas, que el libro no se acabe nunca.

Algunos matemáticos, quizá los más notables, son personajes literariamente atractivos. A mi juicio, por dos razones. En primer lugar, porque su trabajo intenso nos invita a entrar en ese "laberinto de la soledad" en el que habitan. Por otro lado, contemplar cómo trabaja la mente humana en el estadio más alto del razonamiento es siempre un espectáculo llamativo y sorprendente. Para ilustrarlo, tomaré un ejemplo, sacado también de la vida de Hardy:

Una tarde, Hardy tomó un taxi para visitar a su amigo, el matemático hindú Ramanutjan, que estaba muy enfermo en el hospital de Putney. Al entrar en la habitación donde yacía Ramanutjan, Hardy lo saludó y, con el ánimo de iniciar una conversación trivial, comentó que el número del taxi en el que se había desplazado era 1729, "un número bastante soso", añadió Hardy. Ramanutjan contestó, de inmediato, que no, que era un número muy interesante: "es el número más pequeño que puede ser expresado de dos formas diferentes como la suma de dos cubos", le dijo.

Tampoco Hardy era un tipo corriente. Podría decirse que era el prototipo del "anti-narcisista". No soportaba que le hicieran fotografías y sólo se conservan de él cinco instantáneas. Tampoco toleraba espejos a su alrededor, ni siquiera uno para afeitarse. Cuando viajaba y tenía que alojarse en algún hotel, lo primero que hacía era cubrir con toallas los espejos. Esta manía sería considerada una rareza, acaso explicable en una persona poco agraciada físicamente, pero es que Hardy era un hombre extraordinariamente guapo.

Su afición obsesiva por el juego del *cricket* era memorable. John Maynar Keynes, que empezó su carrera como matemático y era amigo de Hardy, afirmaba que si éste hubiera leído las cotizaciones de bolsa con la cuarta parte de atención con la que leía los resultados del *cricket*, se habría hecho multimillonario.

Los teoremas matemáticos, si bien se mira, no son sino la solución de un enigma. Estamos, pues, ante una trama más atractiva y rigurosa que la de la mejor novela policíaca, donde la sangre, el sudor y las lágrimas las pone el matemático en su ejercicio hercúleo, en su lucha titánica con los conceptos con los que trabaja. Una apuesta en la que al matemático le va la vida. Lo ilustra la de Galois, bien corta por cierto. Detengámonos un momento en esta biografía apasionante.

Evariste Galois nació en Bourg la Reine, cerca de París, en 1811. Cuando tenía diecisiete años dio a conocer sus primeros trabajos sobre teoría de los números. Su activismo revolucionario provocó, como represalia, su expulsión de la Escuela Normal y lo llevó después a la cárcel. Envuelto en una cuestión de honor, en un duelo, a causa de "una infame coqueta", que se llamaba Stephanie Poterin, murió a los veinte años. Posteriormente se ha especulado con la hipótesis de que un miembro de la policía política de Luis Felipe le hubiera provocado con la sola intención de matarlo bajo la apariencia de un lance de honor.

La víspera del duelo, dos días antes de su muerte, escribió con premura su testamento matemático, que entregó a un amigo, pidiéndole que, si su adversario lo vencía, hiciera conocer sus descubrimientos a Gauss o a Jacobi para que dieran una opinión "no respecto de su validez, sino de la importancia de estos teoremas… Espero que más tarde alguien encuentre provechoso descifrar todo este lío", escribió Galois. Este lío se conoce hoy como la "Teoría de Grupos".

El 30 de mayo de 1831, un tiro de pistola, disparado a unos treinta pasos, le atravesó el intestino. Su adversario lo dejó malherido en el suelo y un antiguo militar que lo encontró allí, tirado, lo llevó al hospital. Al día siguiente se le declaró una peritonitis, infección de pronóstico fatal en aquellos tiempos. Sus últimas palabras, dirigidas a su hermano Alfred, fueron éstas: "No llores, me hace falta todo el ánimo para morir a los veinte años".

El cine nos ha dado últimamente algunas muestras de esa relación emocionante entre la mente matemática y el mundo. Citaré tres ejemplos: "Pi" (1998), de Darren Aronofsky; "Una mente maravillosa" (2001), dirigida por Ron Howard y protagonizada por el actor Russell Crowe, sobre la vida del matemático John Nash, y "Enigma" (2003), dirigida por Michael Apted y protagonizada por Dougray Scott y Kate Winslet, inspirada en la participación del matemático británico Alan Turing en la Segunda Guerra Mundial.

¿Quién era este Alan Turing y cuál fue la aportación que hizo a su país, el Reino Unido, durante la Segunda Guerra Mundial? Para responder, me serviré del libro de Peter Watson "Historia intelectual del siglo XX":

Cuando estalló la guerra –cuenta Watson- se solicitó a Turing que se dirigiese a Bletchley, donde se había instalado el aparato de información militar británico. Allí, su encuentro con los altos cargos militares resultó casi cómico, pues habría sido difícil encontrar a alguien menos adecuado para la vida castrense. A los militares, el matemático les parecía un bicho raro. Turing juzgaba a las personas guiándose en exclusiva por su capacidad intelectual, por lo que despreciaba a oficiales superiores que consideraba necios, mientras que podía pasar el tiempo jugando al ajedrez con los soldados rasos que demostraban aptitudes.

Los alemanes utilizaban un sistema de códigos, altamente sofisticado, llamado Enigma. Descifrar los códigos del Enigma constituía un problema que sólo podría resolver una mente como la suya, por eso se le consentían sus extravagancias. La dificultad fundamental consistía en que Turing y los demás que trabajaban con él debían analizar miles de mensajes alemanes interceptados en busca de alguna regularidad para intentar descifrarlos. El objetivo principal: localizar a los submarinos alemanes que operaban en el Atlántico. La respuesta de Turing fue construir un dispositivo electromagnético capaz de hacer cálculos a gran velocidad. La máquina recibió el nombre de Colossus. Los pormenores de su construcción se mantuvieron en secreto durante años, pero ahora se sabe que poseía 1.500 válvulas y, en el caso de las últimas versiones, 2.400 tubos de vacío que calculaban mediante un sistema «binario» (toda la información se hallaba contenida en «bits», es decir, combinaciones de 0 y 1). Por esta razón se considera al Colossus como el precursor del ordenador digital electromagnético.

Hay que tener en cuenta que durante el período más crudo de la guerra, la Gran Bretaña apenas contaba con alimento suficiente para una semana. El suministro dependía de los barcos que cruzaban el Atlántico desde los Estados Unidos. Las obstinadas mejoras del Colossus redujeron el tiempo necesario para descifrar un mensaje en clave de varios días a algunas horas y, más adelante, a unos cuantos minutos. Al final, gracias a la máquina de Turing, los especialistas en mensajes cifrados eran capaces de localizar el paradero de cada uno de los submarinos alemanes del Atlántico, lo que permitió reducir de forma drástica las pérdidas navales británicas. Los alemanes sospecharon algo, pero nunca imaginaron que los mensajes del Enigma hubiesen sido descifrados: un error que pagaron caro.

Pasaron décadas hasta que el mundo conoció la existencia del Enigma y del Colossus. Para entonces, los ordenadores se habían convertido en un componente de la vida cotidiana. Turing no vivió para verlo, pues se suicidó en 1954.

Al inicio del siglo XX, concretamente en el Congreso de París, celebrado en 1900, un notable matemático alemán llamado David Hilbert (1862-1943) propuso un ambicioso proyecto. Se pretendía construir el edificio de las matemáticas basándose en muy pocos axiomas (verdades que no necesitan demostración) y sobre ellos deducir todos los teoremas. Lo hecho hasta entonces por los matemáticos encajaría en esa *summa*, como piezas de un gran *puzzle*. Para Hilbert y sus seguidores, en Matemáticas no existía la frase: “lo ignoramos”. Si una conjetura era cierta, en algún lado existía una demostración. Se trataba de descubrirla.

En otras palabras, lo que se pretendía era construir sistemas formales *consistentes* y *completos.* Consistentes, es decir, que de los axiomas nunca se derivan resultados contradictorios, y completos, en el sentido de que cualquier afirmación puede ser demostrada o refutada.

No fueron matemáticos, sino dos lógicos británicos, Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, quienes, en 1910, colocaron los cimientos de aquel edificio que se pretendía levantar. En efecto, en ese año, los dos británicos publicaron el primer tomo de sus “Principia mathematica”, obra que fue saludada como una poderosa aportación a la nueva empresa.

Pero aquel optimismo de los matemáticos “formalistas”, como suele ocurrir en la vida, se vino abajo cuando, al inicio de los años treinta del siglo pasado, concretamente, en 1931, un lógico de la escuela de Viena llamado Kurt Gödel (1906-1978) publicó un artículo que echaba por tierra muchas de aquellas esperanzas. En él demostraba que en todo sistema matemático existen conjeturas que no se pueden demostrar ni refutar, que son indecidibles. El teorema de Gödel recibe el nombre de “teorema de incompletud”. Gödel probó que todo sistema formal, por ejemplo, las matemáticas, es incompleto. Además, demostró que la consistencia de dichos sistemas es imposible de probar.

Como sabemos, hay viejas conjeturas para las que aún no se ha encontrado demostración. Una de las más conocidas es la conjetura de Golbach, que se suele enunciar así: todo número par mayor que dos es igual a la suma de dos números primos. Los cálculos realizados, que con los modernos ordenadores llegan a cifras astronómicas, no han hecho sino confirmar la verdad de la conjetura, pero nadie ha encontrado una demostración para ella. Golbach, que era entonces tutor del zar Pedro II, escribió esta conjetura en el margen de una carta que envió al gran Euler en 1742.

Un escritor norteamericano de origen griego, Apostolos Doxiadis, publicó, no hace mucho, una novela de éxito bajo el título “El tío Petros y la conjetura de Goldbach”. La trama de la novela, básicamente una trama matemática, nos narra la tragedia de Petros Papachristos (el tío Petros) que, habiendo dedicado todos sus anhelos y talento a descubrir una demostración de la citada conjetura, se da de bruces con el teorema de Gödel.

“El Tio Petros y la Conjetura de Goldbach” trata de mostrar la atracción que produce la luz de un descubrimiento. La narración es ágil y se lee como una novela de aventuras.

Antes de leer esta novela, yo había escrito un relato corto que titulé “Números primos” y que publiqué dentro de mi libro “Cuernos”. Lo encabezaba, precisamente, con el enunciado de la conjetura de Goldbach. Este relato pedía a gritos ser pasado a un formato más amplio, es decir, reclamaba convertirse en novela. Estaba ya dispuesto a ello cuando cayó en mis manos el libro de Apostolos Doxiadis. Entonces decidí dos cosas: la primera que mi novela tendría una subtrama matemática, reptando como yedra adherida a la trama principal, que es de carácter sentimental; la segunda, que me apropiaría, como personaje, de Petros Papachristos, a quien reharía de arriba a abajo.

¿Y cuál sería mi trama matemática? No tuve que pensarlo mucho: el último teorema de Fermat, que, como es bien conocido, se enuncia así: no existen tres números enteros (x,y,z) que cumplan la siguiente ecuación: $x^n= y^n+z^n$. Para n=2, la ecuación es el teorema de Pitágoras que cumplen siempre los lados de los triángulos rectángulos.

Es cierto que Andrew Wiles, un matemático británico afincado en Estados Unidos, no sin tropiezos, había conseguido, al fin, demostrar en 1995 el famoso teorema. Pero, si Fermat tenía la demostración, no podía ser la de Wiles, pues este último utilizaba en su elaboración multitud de conceptos matemáticos modernos que Fermat no podía conocer.

¿Había engañado Fermat a todo el mundo al asegurar que tenía la demostración? Una broma de tal calibre parece improbable en un hombre tan riguroso. Además, para todos los otros teoremas que había dejado enunciados se había encontrado una demostración, ¿por qué no habría de existir una para éste?

Mi novela se titula “El rescoldo” y en ella Jesús Vió, mi personaje, es un joven zaragozano superdotado y de buena familia, que viaja a Cambridge en los años veinte para ampliar sus estudios de matemáticas con Harold Hardy (en la novela lo llamo Lardy), y allí decide meterse a resolver el enigma de Fermat, después de oír a Lardy explicar en su clase lo siguiente:

Pasemos a otra conjetura que todos ustedes conocen- continuó Lardy- el mal llamado último teorema de Fermat. No es un teorema, pues nadie hasta ahora ha conseguido demostrarlo. Tampoco se ha encontrado ningún contraejemplo, por lo tanto, debemos suponer que la conjetura es cierta. Pierre de Fermat, que era un cuco, dejó escrito que él tenía la demostración. Yo, con todos los respetos, no creo que la tuviera. Fermat era juez, una gente que no suele ser muy piadosa con el prójimo y menos en el siglo XVII. En sus ratos libres se dedicaba a las matemáticas y martirizaba a sus colegas con hallazgos cuya demostración él se guardaba. Por ejemplo, sostuvo que el 26 es el único número que existe emparedado entre un cuadrado (25) y un cubo (27). Lo proclamó a los cuatro vientos dentro de la escasa comunidad matemática de la época y desafió a que lo demostraran. No pudieron. Esta vez él sí tenía la demostración. Fermat trabajó, o se entretuvo, que nunca se sabrá, con uno de los tomos de la *Arithmetica* de Diofanto y en los márgenes escribió el enunciado de multitud de teoremas sin preocuparse de sus demostraciones. Todas las conjeturas que Fermat escribió en los márgenes de la *Arithmetica* de Diofanto -continuó Lardy-, más tarde o más temprano, han sido demostradas, convirtiéndose así en teoremas. Todas menos una, la que ustedes conocen. Un alemán llamado Paul Wolfskehl, rico y aficionado a las matemáticas, rechazado por una dama de la que estaba perdidamente enamorado, decidió suicidarse en una fecha y hora prefijadas, justo cuando sonaran las campanadas de la media noche. Llegado el día y para entretener las horas que le quedaban, se puso a estudiar un artículo de Kummer, sobre el enigma de Fermat. Wolfskehl lo tomó con tanto empeño que se le fue el santo al cielo sin que se apercibiera de que su hora había ya sonado. En la madrugada, decidió que el suicidio le privaba de conocer el final de la trama, así que rompió las cartas de despedida que había escrito, se olvidó de aquella esquiva dama y cambió su testamento. Cuando, tras su muerte en 1908, el testamento fue leído, la familia quedó anonadada. Paul había dejado un buen pellizco de su fortuna como premio para quien demostrara el último teorema de Fermat, y ahí sigue ese dineral, depositado en la Real Sociedad de la Ciencia en Gotinga, esperando a que alguno de ustedes resuelva el enigma y cobre el premio. Les animo a intentarlo –concluyó Lardy.

Y mi personaje, en efecto, se anima a ello y avanza con paso seguro hasta presentar con éxito su tesis doctoral en Cambridge, que publica en una prestigiosa revista.

Jesús Vió, de vuelta en Zaragoza, donde sostiene una relación sentimentalmente heterodoxa, un trío amoroso cuyo eje es una prima suya, Paquita Vió, se entera a través de su amigo y colega Petros Papachristos de la publicación del ya citado artículo de Gödel. Estamos en los días en que se proclamó en España la segunda República.

-He recibido una carta preocupante de mi amigo el griego –dijo Jesús.

-¿Le ha pasado algo? –preguntó Paquita.

-De salud está bien, pero el asunto que me cuenta no sólo le afecta a él, sino a todos los matemáticos del mundo. Junto a la carta me ha enviado un artículo científico que me inquieta.

Una semana más tarde, una vez estudiado el artículo de Gödel, Jesús escribió a Petros confirmándole los malos presagios. A su juicio, el artículo del lógico vienés no tenía fallos. La conjetura de Goldbach y el teorema de Fermat se habían convertido de la noche a la mañana en una quimera. Papachristos contestó a vuelta de correo con una carta casi desesperada. “He viajado a Viena y me he entrevistado con el individuo en cuestión –decía-. Es un tipo muy joven, bajito y cubre sus ojos de miope con unas lentes tipo culo de vaso. Fui derecho al grano y le pregunté si existía algún procedimiento para saber, *a priori*, si un teorema tiene demostración o no la tiene. Aquel pichafría me contestó, completamente en serio, que toda conjetura puede, en principio, ser indemostrable. Le apremié para que me dijera si la de Goldbach estaba o no en la lista de los teoremas indecidibles, que es como él los llama. No me sacó de dudas. Me dijo que, por el momento, no hay manera de contestar a mi pregunta. Me entraron ganas de estrangularlo, pero me contuve. ¿Te acuerdas de la frase de Hilbert: en matemáticas no hay *ignorabimus*? Pues a la mierda, es lo más suave que se me ocurre decir”.

Desanimados, pero con la esperanza de que los lógicos, que les habían echado encima un jarro de agua fría, acabaran por señalar cuáles eran los teoremas demostrables y cuáles no, Vió y Papachristos, aunque con los ímpetus disminuidos, siguieron en sus respectivas trincheras, intentando asaltar las fortalezas de Goldbach y de Fermat pese a que pudieran ser inexpugnables.

Jesús Vió supo de la existencia de Alan Turing a través de una carta que le había enviado desde Cambridge Petros Papachristos, desplazado allí en uno de sus viajes: “He conocido a un tipo curioso –le escribió Petros-, un muchacho que no ha cumplido los veinte años y ha conseguido una beca del King’s College. Es hijo de un funcionario destinado en la India y se ha criado en un internado de corte militar de los que tanto abundan por aquí. El muchacho se queja del mal trato recibido, aunque parece dispuesto a resarcirse: trasnocha y viste como le viene en gana, se sujeta los pantalones con una corbata en lugar de cinturón, se afeita una vez a la semana y, para colmo, es tartamudo, pero tiene un talento descomunal. Anda detrás de construir una máquina universal, así la llama él, capaz de realizar todo tipo de cálculo, y probablemente lo consiga. Hablé con él del asunto de la indecibilidad y ya conocía el artículo del maldito moravo. Le dejé muy claro lo que me interesa: conocer *a priori* si una conjetura es demostrable o no. Prometió dedicarse al asunto. ¡Ah!, se llama Alan Turing".

La respuesta que los matemáticos esperaban acabó por aparecer cuando Alan Turing publicó un artículo sobre aquel enrevesado asunto. Fue como si, tras la mojadura recibida, a Jesús y a Petros les cayera sobre las espaldas una copiosa nevada, bajo la cual les sería imposible volver a entrar jamás en calor. Turing había demostrado la imposibilidad de demostrar, *a priori*, si una conjetura tiene demostración o no la tiene. Parecía un trabalenguas, pero, para ellos y, en general, para todos los matemáticos, fue una noticia muy desagradable.

Esto ocurría en los primeros años de la tercera década del siglo pasado y no tardaría mucho en estallar la guerra civil española y con ella la destrucción del triángulo amoroso de mis protagonistas, cuyo oscuro final quedó oculto dentro de la tragedia colectiva que representó la guerra.

Muchos años después, un nieto de Jesús, Adolfo Vió, no se conforma con el silencio impuesto y se dispone a elucidar lo que pasó en su familia. Adolfo quiere saber, descifrar aquel enigma familiar, encontrar un hilo conductor que le permita llegar al final de aquella trama sentimental y matemática en la que se vieron envueltos sus ancestros. La segunda parte de "El rescoldo" trata de mostrar esta investigación cuasi policíaca. Habla Adolfo Vió:

Cuando, al final de los años ochenta –cuenta Adolfo Vió-, se celebró en Berkeley un Congreso Internacional de Matemáticas, seguí atentamente los preparativos y me propuse asistir a él. Mi hermano Fernando me facilitó las cosas, consiguiéndome una invitación y, lo que fue más interesante, poniéndome en contacto con un profesor de Berkeley, Kin Rivat, a quien escribí adjuntándole la tesis de mi abuelo y todos sus artículos y notas. Rivat estudió a fondo lo que le envié antes del Congreso. Un mes antes de que éste comenzara, Rivat me escribió anunciándome que había avanzado –"muy seriamente", fueron sus palabras- en la demostración de que una curva elíptica construida a partir de una hipotética solución de la ecuación de Fermat no es modular.

Ahora, "para acabar con el enigma de Fermat, sólo queda demostrar la conjetura que formuló tu abuelo", me aseguró.

Tiempo después, en los primeros días de junio de 1993, cacé en Internet un mensaje que anunciaba algo insólito –continúa Adolfo Vió-. Decía que el día 23 de ese mes, en Cambridge, el matemático Andrew Wiles, un británico emigrado a los Estados Unidos que ocupaba una cátedra en Princeton y que desde los diez años de edad había caído en la misma trampa que mi abuelo, en el último teorema de Fermat, pronunciaría unas conferencias demostrándolo. En ello había trabajado sin pausa durante los últimos siete años.

Saqué billete para Londres y me busqué un hotel en Cambridge. La sala del Instituto Isaac Newton en la que Wiles se disponía a dar las conferencias estaba atestada. Allí pude ver, sentado en la primera fila, a Rivat. La serie de conferencias se titulaba “Formas modulares, curvas elípticas y representaciones de Galois” y pensé que, probablemente, había hecho el viaje en balde.

El primer día, Wiles se limitó a revolotear en torno a la conjetura de Fermat, sin anunciar siquiera cuáles eran sus intenciones. En la segunda sesión pareció que profundizaba algo más. “No sé hacia dónde va, aunque sí hay una enorme cantidad de trabajo. Habrá que esperar a mañana”, me dijo Rivat cuando me acerqué a saludarlo. El día siguiente fue el de la apoteosis. La sala estaba plagada de fotógrafos y cámaras de televisión. Wiles siguió llenando una pizarra tras otra y al final se limitó a leer lo que me pareció que era el final de su demostración. Se volvió hacia la pizarra, escribió el teorema de Fermat en su formulación primitiva, dijo con aire británico: “Creo que lo dejaré aquí”, y se sentó. Los asistentes, puestos en pie, aplaudieron durante varios minutos.

El *Guardián* del día siguiente colocaba en primera página la noticia: “Todo acabó para el último enigma de las matemáticas”. El *New York Times* escogió otro titular: “El fin de un antiguo misterio matemático”. El titular del diario francés *Le Monde* fue más preciso: “El Teorema de Fermat al fin resuelto”. Me alegré de haber asistido al final de una historia que tanto había ocupado a mi abuelo y me sentí partícipe de aquel éxito, sobre todo, porque Wiles citó a Jesús Vió varias veces a lo largo de su disertación. Sin embargo, para Wiles, llevado a los altares por la prensa (la revista *People* lo eligió como uno de los “personajes más fascinantes” del año junto a la Princesa Diana de Gales), comenzaba un calvario.

El manuscrito de doscientos folios enviado por Wiles a la revista *Inventiones Mathematicae* fue remitido también a seis expertos, para que realizaran un exhaustivo escrutinio sobre él. En agosto, uno de ellos, llamado Nick Katz, se topó con un error que creyó trivial y así se lo comunicó a Wiles, pero la explicación que éste le remitió no era satisfactoria. En realidad, Katz había encontrado un grave defecto en la demostración. Wiles se encerró de nuevo a trabajar, pero esta vez lo hacía contrarreloj. Enseguida comenzaron los rumores. Los matemáticos pensaron que la demostración se había frustrado definitivamente. Fueron catorce meses de tortura, durante los cuales, a menudo, el matemático inglés estuvo a punto de tirar la toalla, pero Wiles, no sin ayudas, acabó por encontrar la salida del laberinto.

En mayo de 1995 la revista *Annals of Mathematics* publicó dos artículos (130 páginas en total) que enterraban definitivamente el enigma de Fermat. Wiles cobró el premio Wolfskehl y, al fin, descansó.

Resuelto el trágico enigma sentimental que encerraba aquel silencio familiar, aclarado el otro enigma, el de Fermat, aún le quedaba a Adolfo Vió encontrar la demostración que su abuelo, poco antes de morir, había anunciado en una carta fechada en 1947 y enviada a su amigo Petros Papachristos. En esa carta, Jesús Vió aseguraba haber dado con una demostración del enigma de Fermat, resuelto por métodos clásicos, sin recurrir a la matemática moderna.

El nieto, Adolfo Vió, ayudado esta vez por la casualidad, acaba por encontrar los papeles con la demostración, que estaban encerrados junto al cadáver de un hombre, ambos, hombre y demostración, emparedados tras un tabique en la vieja casa familiar, situada en el Pirineo de Huesca.

A través de extrañas peripecias -que les ahorro-, esa demostración ha llegado a mí y está a la disposición de quien tenga interés en ella.

Joaquín Leguina (1941, Cantabria, España) es doctor en Ciencias Económicas por la Universidad Complutense de Madrid y doctor en Demografía por la Sorbona de París. Ha desempeñado diferentes responsabilidades políticas (concejal de Madrid, presidente de la Comunidad Autónoma de Madrid, diputado) y ha escrito varias novelas.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 63 - 75
ISSN: 1815-0640

Educación Estadística en la Matemática Escolar: retos para la Enseñanza y la Formación del Profesor
(Documento de discusión)

Antecedentes

Desde mediados de la década que comienza en 1980, la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI, http://www.mathunion.org/ICMI/) decidió implicarse directamente en la identificación e investigación de cuestiones y temas de especial significación para la teoría o la práctica de la educación matemática contemporánea e invertir esfuerzos para organizar estudios ICMI específicos sobre dichos temas.

Al mismo tiempo, en las tres últimas décadas se ha desarrollado una comunidad de investigación sobre educación estadística, que reúne a personas de campos diferentes (estadísticos involucrados en la enseñanza de la estadística en cursos de servicio en la universidad, educadores matemáticos y psicólogos), llegándose en 1991 a la creación de la International Association for Statistical Education (IASE, http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/) .

Los contactos entre ICMI e IASE dejaron ver un interés común en organizar un Estudio Conjunto relacionado con los problemas actuales de la enseñanza de la estadística dentro de la matemática escolar. Este interés surgió del hecho de que, a pesar de las recomendaciones para incrementar la enseñanza de la estadística en las escuelas, los estudiantes de educación primaria y secundaria no adquieren la cultura estadística necesaria para manejarse en una sociedad basada en la información y progresar en el estudio de la estadística en niveles superiores, como la universidad o formación profesional.

La invitación de ICMI para colaborar en un Estudio Conjunto fue aceptada por IASE, que a su vez sugirió que este Estudio se fundiera con la siguiente IASE Round Table Conference (30 de Junio a 4 de Julio, 2008 Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores, Monterrey, México) inmediatamente antes del International Congress on Mathematics Education (ICME-11; Monterrey, México, Julio 6-13, 2008). En este Documento se describe el foco del Estudio Conjunto, se sugieren algunas cuestiones preliminares de investigación, se hace una llamada a la participación en el Estudio y se dan algunas normas y calendario para participación.

Justificación

La situación de la enseñanza de la estadística en los niveles escolares

La estadística es hoy día parte del currículo de matemáticas en la educación primaria y secundaria en muchos países. Las razones para incluir la enseñanza de la estadística en estos niveles se han subrayado repetidamente en los últimos 20 años (e.g. Holmes, 1980; Hawkins, et al., 1991; Wild y Pfannkuch, 1999; Gal, 2002; Franklin et al., 2005): Utilidad de la estadística y probabilidad en la vida diaria, su papel instrumental en otras disciplinas, la necesidad de un conocimiento estocástico básico en muchas profesiones y el importante papel de la estadística en el desarrollo de un razonamiento crítico.

La tendencia hacia una enseñanza de la estadística orientada a los datos se muestra en las directrices curriculares para los niveles de enseñanza primaria y secundaria, que indican que los estudiantes han de diseñar investigaciones, formular preguntas de investigación, recoger datos usando observaciones, encuestas o experimentos, describir y comparar conjuntos de datos, usar y comprender los gráficos y resúmenes estadísticos, proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos (e.g., NCTM, 2000; SEP, 2006; Lajoie, 1998; Burrill, 2006; Burrill y Camden, 2006). Estos documentos se concentran en el desarrollo del razonamiento estadístico, que es diferente del razonamiento matemático, siendo ambos esenciales en la sociedad moderna y complementándose en reforzar el currículo global de matemáticas para los estudiantes (Gattuso, 2006; Scheaffer, 2006).

Sin embargo, estas recomendaciones curriculares apenas se siguen, ya que la enseñanza de la estadística se reduce u olvida con frecuencia y, en el mejor de los casos, se enseña demasiado formalmente, con pocos ejemplos de aplicaciones reales (Meletiou, 2003). Muchas veces, la enseñanza de la estadística sólo consiste en realizar cálculos o demostrar teoremas matemáticos con poca oportunidad de diseñar experimentos, analizar datos o conectar la estadística con el proceso general de indagación. Como consecuencia, los estudiantes finalizan la escuela secundaria con escasa comprensión de los principios básicos que subyacen en el análisis de datos, lo que explica muchos de los problemas que encuentran en el uso posterior de la estadística en su vida cotidiana o profesional o en los cursos de estadística en la universidad.

Retos en la formación inicial y desarrollo profesional permanente de los profesores

El cambio de la enseñanza de la estadística en las escuelas dependerá del grado en que se pueda convencer a los profesores de que la estadística es uno de los temas más útiles para sus estudiantes (Gattuso, 2006). También se requiere una mejor preparación de estos profesores, que, con frecuencia, no han tenido suficiente formación en educación estadística (Russell, 1990; Gattuso y Pannone, 2002; Mendonça, Coutinho, y Almouloud, 2006). A pesar de que muchos futuros profesores de secundaria han cursado una licenciatura de matemáticas, generalmente sólo estudiaron estadística teórica (matemática) en su formación inicial. Pocos matemáticos reciben una formación específica en estadística aplicada, diseño de muestreo o de experimentos, análisis de datos de aplicaciones reales o uso del software estadístico. Estos profesores también necesitan formación en el conocimiento pedagógico relacionado con la educación estadística, a la que no pueden transferirse algunos principios generales válidos para la geometría, aritmética u otras ramas de las matemáticas (Russell, 1990; Batanero, Godino y Roa, 2004)[1]. La situación es todavía más crítica para los profesores de educación primaria, ya que pocos de ellos tuvieron una formación suficiente, ni en estadística teórica ni en estadística aplicada, y un curso tradicional de iniciación a la estadística no les proporcionará el conocimiento didáctico que necesitan (Franklin y Mewborn, 2006).

La investigación en educación estadística muestra, por otro lado, que los libros de texto y materiales curriculares preparados para los profesores de educación primaria y secundaria son insuficientes, en algunos casos, como soporte para el profesor. La razón es que, a veces, presentan una visión muy parcial de los conceptos (por ejemplo, solo la aproximación clásica a la probabilidad o la inferencia); en otros casos las aplicaciones se limitan a juegos de azar o no se basan en datos tomados de aplicaciones reales; finalmente en algunos de ellos las definiciones de los conceptos son incorrectas o incompletas (Moncecchi y D'Argenzio, 1994; Cardeñoso, Azcárate y Serradó, 2005).

Se debería también prestar más atención a las concepciones y creencias estadísticas de los profesores. La investigación en educación estadística está mostrando que muchos profesores mantienen inconscientemente una variedad de dificultades y errores (concepciones erróneas) sobre la estadística que podrían transmitir a sus estudiantes (Rubin y Rosebery, 1990; Makar y Confrey, 2004; Stohl, 2005). Hay también poca oportunidad para un desarrollo profesional de los profesores en estadística, por falta de práctica de enseñanza o aplicación de la estadística para analizar datos educativos. Como consecuencia, los profesores podrían percibir una necesidad de mayor desarrollo profesional en estadística (Watson, 2001; Gattuso y Pannone, 2002; Mendonça, Coutinho y Almouloud, 2006) o a veces sentirse incómodos al enseñar el tema y, debido a ello, tratar de omitirlo o reducirlo. El conocimiento del contenido pedagógico requerido para la enseñanza y el modo en que los profesores usan su conocimiento estadístico al enseñar estadística también debe tenerse en cuenta (Mickelson y Heaton, 2004).

El esfuerzo de investigación que se ha concentrado sobre la educación del profesor de matemáticas y su desarrollo profesional en la década pasada no se ha reflejado en la educación estadística. Esto es evidente en conferencias (e.g., el ICMI Study 15), revistas (e.g., *Journal of Mathematics Teacher Education*), estados de la cuestión y libros, que apenas tratan el caso particular de la estadística. Este olvido

[1] Por ejemplo, en aritmética o geometría una operación elemental es reversible y esta reversibilidad se puede representar con materiales concretos. Esto es muy importante para los niños pequeños, que están aún muy ligados a las situaciones concretas en su pensamiento matemático. Al juntar un grupo de dos manzanas con otro grupo de tres manzanas, un niño siempre obtiene el mismo resultado (5 manzanas); si separa el segundo grupo del total, siempre vuelve al conjunto original; no importa cuántas veces repita la operación. Estas experiencias son muy importantes para ayudar al niño a abstraer progresivamente la estructura matemática subyacente. En el caso de los experimentos aleatorios, se obtienen diferentes resultados cada vez que se repite el experimento y el experimento no es reversible.

debe ser subsanado, promoviendo la investigación específicamente orientada sobre la educación y desarrollo profesional de profesor para enseñar estadística (Shaughnessy, en prensa).

Especificidad de la Educación Estadística

Los problemas anteriores no sólo preocupan a los matemáticos o a los educadores matemáticos. Por un lado, los institutos de estadística, que tienen a su cargo la producción de estadística para una variedad de aplicaciones en la vida cotidiana, social, industrial, política o científica se interesan cada vez más por la *cultura estadística* de los ciudadanos. Estos ciudadanos con frecuencia son incapaces de interpretar información estadística sencilla presentada en la prensa, Internet u otros medios y no siempre están dispuestos a cooperar para proporcionar los datos que se necesitan para producir estas estadísticas, por ejemplo, el censo. Como resultado, hay una implicación creciente de los institutos y asociaciones de estadística en la preparación de materiales y organización de acciones que ayuden a mejorar la cultura estadística (e.g. Barbieri y Giacché, 2006; Ottaviani y Rigatti, 2006), esto es, la capacidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que impregnan nuestras vidas a diario, unida a la valoración de la contribución que el razonamiento estadístico puede hacer en la vida privada y pública y en la toma de decisiones (Wallman, 1993; Gal, 2002).

Por otro lado, la fuerte especificidad de la educación estadística se refleja en las cuestiones filosóficas, éticas, procedimentales e incluso políticas que son todavía objeto de debate en la estadística y sus aplicaciones y no ocurren en otras ramas de las matemáticas. La estadística está mucho más relacionada que las matemáticas con otras ciencias (desde la lingüística o geografía a la física, ingeniería o economía) donde se usa como el lenguaje y método de investigación científica y desde donde se desarrollaron muchos métodos estadísticos. En este sentido, es también más sencillo en estadística que en matemáticas establecer conexiones con otras áreas curriculares en la escuela, e incluso se ha argumentado que la estadística debiera enseñarse fuera de la clase de matemáticas (Pereira-Mendoza, 1993).

La estadística está separada actualmente como carrera universitaria en muchos países que ofrecen licenciaturas separadas de matemáticas y estadística. La investigación estadística involucra una variedad de instituciones, conferencias y revistas específicas. Finalmente, no se puede ignorar la amplia contribución a la investigación en educación estadística desde áreas diferentes de la matemática, como la estadística, psicología o educación en otros temas (Vere-Jones, 1995; Shaughnessy, 1992; Shaughnessy, Garfield y Greer, 1996; Batanero, 2004; Jones, 2005; Shaughnessy, 2006, en prensa). Más aún, asistimos a un gran incremento de la investigación en educación estadística fuera de la comunidad de educación matemática[2]. Aunque el tema de la formación de profesores ya se ha considerado (e.g., Hawkins, 1990, Watson, 1998; Friel y Bright, 1998), no ha habido un esfuerzo sostenido por explorar, explicar o mejorar las concepciones estadísticas de los

[2] Esto se refleja en las actas de las conferencias ICOTS e IASE Round Table (la mayor parte de los cuales están disponibles en la página web de IASE (http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/), en libros como los de Gal y Garfield (1997), Sedlmeier (1999), Ben-Zvi y Garfield (2004), y en la creación en 2002 de *Statistics Education Research Journal*.

profesores, sus actitudes y creencias. Dado el papel crecientemente importante de la estadística en el currículo y la vida diaria, es esencial que los estadísticos, matemáticos, educadores matemáticos y otros colaboren en el diseño e implementación de programas de formación de profesores tanto para los profesores en formación como para los profesores en servicio (Franklin y Mewborn, 2006).

Foco

Las consideraciones anteriores llevaron a la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) y la International Association for Statistical Education (IASE) a comenzar el proceso de organizar un Estudio Conjunto para *analizar la enseñanza de la estadística en los niveles escolares y hacer recomendaciones sobre cómo mejorar la formación de los profesores de matemáticas para tener mayor éxito al formar estudiantes estadísticamente cultos.* Este Estudio reúne a las comunidades de educación matemática y estadística para trabajar en colaboración sobre un problema común y podría servir para continuar la colaboración en el futuro.

El Estudio Conjunto se orienta a la reflexión sobre la especificidad de la enseñanza de la estadística en los niveles escolares y en la educación de los profesores y proporcionar una panorámica de la situación actual, tanto en la enseñanza de la estadística en las escuelas, como en la preparación inicial de los profesores de matemáticas. Se trata de sugerir cuestiones de investigación e invitar nueva investigación que produzca recomendaciones y materiales útiles para la formación de los futuros profesores o de aquellos profesores en servicio que nunca tuvieron una preparación adecuada para enseñar estadística en la escuela. Puesto que la formación inicial de los profesores en el área de estadística está restringida por el tiempo disponible, el Estudio Conjunto se concentrará en la definición de los elementos esenciales de estadística, conocimiento didáctico y experiencias requeridas para la formación de profesores. No se tendrá en cuenta la estadística enseñada en la Universidad o especialización profesional para restringir el foco del estudio a un tamaño manejable.

La estadística y la probabilidad están ligadas en la matemática escolar en muchos países y también dentro de la teoría y la práctica de la matemática. Por este motivo, son inevitables las referencias a la probabilidad en el Estudio Conjunto, especialmente, al trabajar sobre inferencia. Sin embargo, el Estudio no se enfoca en la probabilidad en si misma, sino que, en lugar de ello, nos apoyaremos en trabajos previos, como el reciente libro de síntesis sobre la enseñanza de la probabilidad en los niveles escolares editado por Jones (2005).

Este Estudio Conjunto se relaciona con el Estudio 15 de ICMI, *Formación Profesional y Desarrollo de los Profesores de Matemáticas,* en el sentido que se enfoca sobre el profesor de matemáticas y, por tanto, muchas conclusiones de dicho Estudio pueden también aplicarse al caso de la estadística. Una diferencia importante es que se concentra sobre un contenido específico del currículo de formación inicial de profesores que ha estado en general ausente hasta el momento. Nos enfocaremos sobre esta formación inicial, puesto que, como se ha argumentado, ha habido pocas oportunidades de desarrollo profesional en enseñanza de la estadística hasta la fecha, aunque serán también bienvenidos los trabajos que describan buenos ejemplos de desarrollo profesional en enseñanza de la estadística que hayan tenido éxito. El Estudio Conjunto se apoya también en el trabajo llevado a cabo en la conferencia IASE Round Table sobre Desarrollo Curricular en Estadística (Burrill y Camden 2006) y las conferencias Round Table del Instituto Internacional de Estadística sobre Formación de Profesores para Enseñar Estadística (Hawkins, 1990) y La Introducción del Análisis de Datos en las Escuelas (Pereira-Mendoza, 1993).

Audiencia y Posibles Participantes

Esperamos que los resultados del Estudio Conjunto sean útiles, tanto a los educadores matemáticos, como a los educadores estadísticos, incluyendo los profesores de estadística activos, estudiantes que se preparan como profesor, educadores de profesores, personas involucradas en el desarrollo curricular en estadística, así como a los investigadores en educación estadística y educación matemática.

Una especificación del Estudio Conjunto es su carácter interdisciplinario, y, por tanto, esperamos la participación de matemáticos, educadores matemáticos y estadísticos, incluyendo estadísticos oficiales que trabajan en las oficinas de estadística, así como psicólogos y profesores de otras disciplinas que usan la estadística como un instrumento. Estamos especialmente interesados en invitar a personas con diversos grados de experiencia, tanto a personas bien conocidas en el área, como a algunos investigadores jóvenes que están comenzando a formarse y a algunos formadores de profesores que están educando a los futuros profesores de matemática que tendrán que enseñar estadística en los niveles escolares.

Temas y Cuestiones de Investigación Previas

El Estudio Conjunto se estructura alrededor de seis temas diferentes, cada uno de ellos organizado por dos miembros del Comité Internacional de Programa. A continuación se describen algunas cuestiones iniciales de investigación para cada tema, que pueden servir como foco inicial para posibles contribuciones y pueden más tarde ser desarrolladas, ampliadas o modificadas.

- *Tema 1. Situación actual de la enseñanza de la estadística en las escuelas.* Responsables: Dani Ben-Zvi (dbenzvi@univ.haifa.ac.il) y Chris Reading (creading@une.edu.au)

    1. *¿Cuál es la situación actual de la enseñanza de la estadística en los niveles de educación primaria y secundaria en diferentes países? ¿Qué estatuto tiene el análisis de datos y la estadística en el currículo de diferentes países? ¿Qué contenido estadístico se incluye en los currículos y exámenes nacionales y cómo afecta a la enseñanza? ¿Cómo puede el énfasis actual en la evaluación*

y rendimiento limitar o reforzar la educación estadística en los niveles de escuela primaria y secundaria?

2. *¿Se enseña la estadística como un tema puramente matemático, o se integra en otros temas como las ciencias y estudios sociales? ¿Cuáles son los principales problemas actuales sobre la forma en que se enseña la estadística? ¿Cómo podemos comparar la enseñanza de la estadística y la enseñanza de otros temas de matemáticas en el currículo escolar?*
3. *¿Qué diferencia hay entre enseñar estadística y enseñar cultura estadística? ¿Qué enseñanza específica de razonamiento estadístico se requiere?*
4. *¿Cómo debiera enseñarse la estadística a través de trabajos con proyectos, relacionando la estadística con sus aplicaciones y ampliando la enseñanza de la estadística fuera de la clase de matemáticas?*
5. *¿Cuáles son los buenos ejemplos de enseñanza de estadística en las escuelas?*
6. *¿Cuáles son los principales retos asociados a la formación de estudiantes para la transición de la escuela a la universidad?*

- *Tema 2. Actitudes, conocimientos concepciones y creencias de los profesores, con relación a la educación estadística. Responsables: Carmen Batanero (batanero@ugr.es) y Gail Burrill (burrill@msu.edu)*

1. *¿Cuáles son las actitudes y creencias de los profesores sobre la estadística y su papel en la matemática escolar? ¿Cómo afectan las actitudes y creencias de los profesores sobre la estadística y la enseñanza de la estadística a su enfoque pedagógico?*
2. *¿Qué conocimiento básico y profundo sobre la estadística deben adquirir los profesores para poder desarrollar los conceptos y la investigación estadística en sus estudiantes?[3] ¿Cuánta probabilidad formal necesitan?*
3. *¿Qué instrumentos y estrategias de investigación son útiles para determinar el conocimiento de la estadística y de la enseñanza de la estadística que tienen los profesores?*
4. *¿Qué conocimiento y competencias pedagógicas básicas requieren los profesores para enseñar con éxito estadística en los diversos niveles escolares?¿Cómo se relacionan estas competencias entre sí?*

- *Tema 3. Análisis de las prácticas actuales en formación de profesores respecto a la enseñanza de la estadística.* Responsables: Doreen Connor (doreen.connor@ntu.ac.uk) y Lionel Pereira-Mendoza (lionel@iammendoza.com)

1. *¿Cuáles son las prácticas actuales de formación de profesores para enseñar estadística en diversos países? ¿Qué es prometedor y qué es débil en dichas prácticas?*
2. *¿Cuáles son los programas que fueron útiles para ayudar a los profesores a desarrollar su conocimiento estadístico y sus competencias para la enseñanza?¿Qué evidencias tenemos de buenas situaciones didácticas que*

[3] Por ejemplo, conocimiento sobre el ciclo de investigación científica, formulación de preguntas que puedan contestarse con los datos, problemas de medición, recogida de datos, diseño. aleatorización, el papel del tamaño de muestra, sesgo y variación, extracción de conclusiones, toma de decisiones bajo incertidumbre y evaluación informal de riesgos

son significativas para los profesores y pueden usarse para formar a los profesores para enseñar estadística?
3. *¿Qué ejemplos tenemos de experiencias de aprendizaje para profesores en formación, que les ayuden a construir un sentido global de las ideas fundamentales en estadística y de la forma en que deben enseñarse?*
4. *¿Cómo podemos usar la tecnología para apoyar el aprendizaje estadístico del profesor?*
5. *¿Qué materiales hay actualmente disponibles para ayudar a los profesores a aumentar su conocimiento y competencia con relación a la enseñanza de la estadística?*
6. *¿Que oportunidades de desarrollo profesional tienen los profesores mientras enseñan estadística?*

- *Tema 4. Mejorando la formación de los profesores para enseñar estadística. Una mirada al futuro* Responsables: Joachim Engel (engel@ph-ludwigsburg.de) y Maxine Pfannkuch (pfannkuc@math.auckland.ac.nz)

1. *¿A qué retos se enfrentan los profesores y qué apoyo necesitan cuando enseñan estadística?*
2. *¿Qué bases teóricas tenemos sobre el aprendizaje de la estadística por parte de los profesores?*
3. *¿Qué aprendizaje de la estadística basado en la práctica es esencial para los profesores en activo y futuros profesores?¿Qué estudios de casos recogidos en la práctica escolar pueden ayudar en la educación de profesores?*
4. *¿Cómo preparar a los profesores para adquirir un conocimiento adecuado del contexto, cuando basan su enseñanza de la estadística en un rango amplio de aplicaciones?*
5. *¿Cómo puede ayudarse a los profesores a ser capaces de crear diseños didácticos que permitan a sus estudiantes adquirir las ideas básicas de estadística?*
6. *¿Qué experiencias con la tecnología estadística son esenciales para los profesores? ¿Cómo se puede facilitar su aprendizaje de la estadística a través de la tecnología? ¿Cuánto conocimiento precisan los profesores sobre aprendizaje multimedia para poder aprovechar las ventajas de la tecnología en sus diseños didácticos? ¿Cuánto conocimiento requieren sobre métodos empíricos y experimentales, como la simulación?*
7. *¿Cómo pueden los profesores adquirir un nivel suficiente de cultura estadística? ¿Cuánta competencia crítica de lectura y evaluación de informes basados en estadística en los medios de comunicación (e.g. Periódicos, TV, Internet) precisan?*
8. *¿Cómo ayuda la investigación actual a comprender las buenas prácticas de los profesores o los programas de formación en educación estadística? ¿Qué nueva investigación se necesita para ayudar a preparar a los profesores para enseñar estadística en el ámbito escolar?*

- *Tema 5. Formación de profesores en países en desarrollo*. Responsables: Jun Li (lijun@math.ecnu.edu.cn) and Victor Polaki (mv.polaki@nul.ls)

1. *¿Cuáles son los desafíos y perspectivas de los profesores de países en desarrollo, donde la infraestructura es generalmente pobre, la tecnología adecuada como calculadoras u ordenadores puede estar disponible pero no es alcanzable y donde el software estadístico no está disponible o no es alcanzable incluso cuando se disponga de ordenadores?*
2. *En el contexto de países en desarrollo, ¿Cómo influye la cultura sobre las decisiones educativas de los profesores al enseñar estadística? ¿Cómo sus creencias, normas culturales, lenguaje y experiencia influyen en la enseñanza y aprendizaje de la estadística?*
3. *¿Qué estrategias y métodos son útiles para formar profesores y para el aprendizaje de los estudiantes en los países en desarrollo?*
4. *¿Qué características de los países en desarrollo podrían usarse para apoyar el aprendizaje de ideas estadísticas? ¿Qué podría hacerse para asegurar que la educación estadística florezca, incluso en contextos difíciles?*

- *Tema 6. Construyendo la colaboración entre educadores matemáticos y educadores estadísticos para la formación de profesores.* Responsables: Joan Garfield (jbg@umn.edu) y Maria Gabriella Ottaviani (mariagabriella.ottaviani@uniroma1.it)

1. *¿Cuáles son los modelos productivos para la colaboración de miembros de departamentos universitarios de estadística y educación matemática para proporcionar cursos de estadística a los profesores en formación?*
2. *¿Cuáles son los modelos productivos para que las oficinas de estadística, profesionales estadísticos en otras áreas y asociaciones profesionales de estadística participen en la preparación de los profesores de estadística?*
3. *¿Cuáles son los buenos ejemplos de programas y actividades de colaboración que tuvieron éxito en la educación de profesores para enseñar estadística?*
4. *¿Qué formas efectivas tienen los estadísticos para ayudar a comprender a matemáticos y educadores matemáticos que la estadística es diferente de la matemática y los profesores necesitan conocimiento y formación específica para enseñar estadística en forma eficiente?*
5. *¿Cuáles son las estrategias efectivas para ayudar a los profesores de matemáticas a comprender la importancia de la estadística como disciplina?*
6. *¿Cuáles son los Buenos ejemplos de estadísticos y matemáticos trabajando en colaboración para encontrar formas de integrar auténticamente la estadística en el estudio de diferentes temas matemáticos en las escuelas primarias y secundarias?*
7. *¿Qué conocimiento y habilidades necesitan los educadores de profesores (que trabajan con profesores en formación) para desarrollar y mejorar el razonamiento, cultura y conocimiento estadístico de los futuros profesores?*

Puesto que la investigación sobre algunas de las cuestiones mencionadas es muy escasa, el Estudio Conjunto tratará de fomentar nueva investigación sobre estos temas. Al mismo tiempo se desea recibir reflexiones teóricas sobre cómo debiera ser esta formación y análisis de ejemplos de experiencias que hayan tenido éxito en la formación de profesores para enseñar estadística.

Invitación a la participación en la conferencia

Siguiendo la tradición, este Estudio comprenderá dos partes: la Conferencia del Estudio Conjunto[4] y la producción del libro del Estudio Conjunto. La Conferencia tendrá lugar en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores. Monterrey, México (http://www.mty.itesm.mx/), del 30 de Junio al 4 de Julio en 2008.

La participación en la Conferencia es sólo por invitación, que se basará en las contribuciones recibidas. Las invitaciones se apoyarán también un proceso de revisión[5] que organizará el Comité Internacional de Programa, con participación de expertos en los diferentes temas del Estudio Conjunto. Los trabajos aceptados se presentarán en la Conferencia y aparecerán en las Actas que se publicarán por ICMI e IASE en CD-ROM y en Internet.

Se espera que los participantes representen una variedad de formación previa, experiencia y nacionalidades que lleven a cubrir adecuadamente el Estudio Conjunto, sus diferentes temas y las cuestiones relacionadas. Se aspira a que la Conferencia atraiga educadores matemáticos y estadísticos, investigadores en educación estadística, prácticos en la enseñaza de la estadística y educadores, tanto con experiencia, como jóvenes investigadores iniciándose en el campo.

El Comité Internacional de Programa invita, por tanto, a individuos y grupos a enviar contribuciones sobre las cuestiones o problemas relacionados con el tema del Estudio Conjunto para ser considerados por el Comité. Los trabajos han de aportar una contribución significativa para el tema del Estudio y ser substancialmente diferentes de otros trabajos publicados anteriormente. La invitación a la Conferencia no implica apoyo financiero, pero se espera que esta invitación ayude a los participantes a obtener apoyo suficiente de sus propios países.

La segunda parte del Estudio Conjunto es la producción de un libro, que será preparado después de la conferencia y será publicado en *ICMI Study Series*. La participación en la conferencia no implica automáticamente la participación en el libro, pues se hará una nueva selección y habrá que volver a escribir los trabajos seleccionados después de la conferencia, teniendo en cuenta las discusiones generadas en la misma.

Los trabajos para una posible contribución han de ser enviados por correo electrónico antes del 1 de Octubre de 2007 a la Presidenta del Comité (Carmen Batanero, batanero@ugr.es). Basándose en los resultados del proceso de revisión, el Comité enviará las invitaciones hacia el 1 de Enero del 2008. Si se desea más información, se ruega escribir a Carmen Batanero, batanero@ugr.es.

[4] La Conferencia se une (se hace coincidir) con la IASE Round Table Conference prevista para 2008

[5] EL proceso de revisión será doble ciego – se borrará la identificación de los autores y referees de todos los documentos y tendrá en cuenta la calidad de la contribución y su potencialidad para contribuir a los fines del Estudio. Todos los comentarios de los referees se darán a los autores como críticas anónimas.

Bibliografía

- Batanero, C. (2004). Statistics education as a field for research and practice. Regular Lecture, Tenth International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark.
- Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. Journal of Statistics Education, 12. Recuperado 31 de Agosto, 2006 de http://www.amstat.org/publications/jse/
- Barbieri, G., y Giacché, P. (2006). The worth of data: The tale of an experience for promoting and improving statistical literacy? En A. Rossman y B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. CD ROM. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. B. (Eds.) (2004). The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking. Dordrecht, Netherlands: Kluwer
- Burrill, G. (Ed.) (2006). NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.
- Burrill, G., y Camden (Eds.) (2006). Curricular development in statistics education: International Association for Statistical Education 2004 Roundtable. Voorburg, the Netherlands: International Statistical Institute. Recuperado el 31 de Agosto, 2006 de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php
- Cardeñoso, J. M., Azcárate, P. y Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. Statistics Education Research Journal 4(2), 59-81. Recuperado el 31 de Agosto, 2006 de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=serjarchive
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). A curriculum framework for K-12 statistics education. GAISE report. American Statistical Association. Recuperado el 31 de Agosto, 2006 de http://www.amstat.org/education/gaise/
- Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.
- Friel, S. N. y Bright, G. W. (1998). Teach-Stat: A model for professional development and data analysis for teachers K-6. En S. Lajoie (Ed.), Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12 (pp. 89-117). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. International Statistical Review, 70 (1), 1-25.
- Gal, I. y Garfield, J. B. (Eds.) (1997). The assessment challenge in statistics education. Amsterdam: ISI e IOS Press.
- Gattuso, L. (2006). Statistics and Mathematics. Is it possible to create fruitful links? En A. Rossman y B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. CD ROM. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.
- Gattuso, L. y Pannone, M. (2002). Teacher's training in a statistic teaching experimentation. En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International

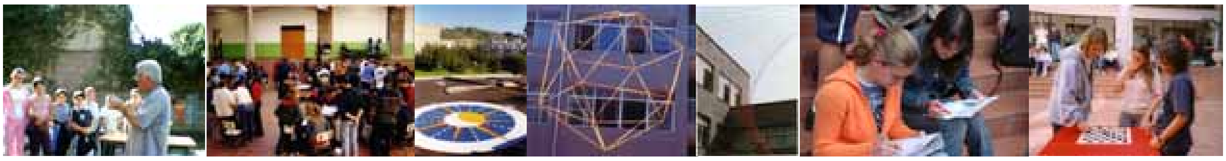
Conference on Teaching Statistics, (pp. 685-692). Cape Town: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.

- Hawkins, A. (Ed.) (1990). Training teachers to teach statistics. Proceedings of the International Statistical Institute Round Table Conference Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1991). Teaching statistical concepts. London: Longman.
- Holmes, P. (1980). Teaching statistics 11-16, Sloug: Foulsham Educational.
- Jones, J. (Ed.) (2005). Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning. New York: Springer.
- Lajoie, S. (Ed.) (1998). Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Makar, K. M. y Confrey, J. (2004). Secondary teachers' reasoning about comparing two groups. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking (pp. 327-352). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Meletiou, M. (2003). On the formalist view of mathematics: impact on statistics instruction and learning En A. Mariotti (Ed.), Proceedings of Third European Conference in Mathematics Education. Bellaria, Italy: European Research in Mathematics Education Society. Recuperado 31 de Agosto, 2006 de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings
- Mendonça, T., Coutinho, C. y Almouloud, S. (2006). Mathematics education and statistics education: meeting points and perspectives. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. CD ROM. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.
- Mickelson, W. T. y Heaton, R. (2004). Primary teachers' statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands: Kluwer
- NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA; NCTM. Recuperado 31 de Agosto, 2006 de http://standards.nctm.org/
- Moncecchi G. y D'Argenzio M. P. (1994). Textbooks and statistics in Italian primary school, En L.Brunelli., G. Cicchitelli (Eds.), Proceedings of the First Scientific Meeting of the International Association for Statistical Education (pp 23-24). Perugia: International Association for Statistical Education.
- Ottaviani, M. G. y Rigatti, S. (2005). "Data and predictions" emerging as one of the basic themes in the mathematical curriculum of the first cycle school level in Italy. En G. Burrill y M. Camden (Eds.), Curricular development in statistics education: International Association for Statistical Education 2004 Roundtable. Voorburg, the Netherlands: International Statistical Institute. Recuperado 31 de Agosto, 2006 de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php
- Pereira-Mendoza, L. (Ed.) (1993). Introducing data analysis into schools: Who should teach it and how? Proceedings of the International Statistical Institute Round Table Conference. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Rubin, A. y Rosebery, A. S. (2000). Teachers' misunderstandings in statistical reasoning: Evidence from a field test of innovative materials. En A. Hawkins (Ed.), Training teachers to teach statistics. Proceedings of the International

Statistical Institute Round Table Conference (pp. 72-89). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Russell, S. (1990). Issues in training teachers to teach statistics in the elementary school: A world of uncertainty En A. Hawkins (Ed.), Training teachers to teach statistics Proceedings of the International Statistical Institute Round Table Conference (pp. 59- 71). Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute.
- Scheaffer. R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. En G. Burrill (Ed.), NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.
- Sedlmeier, P. (1999). Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- SEP (2006). Programa de estudio, educación secundaria (Curricular guidelines for secondary education) Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 465–494). New York: Macmillan.
- Shaughnessy, J. M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts in statistics. En G. Burrill (Ed.), NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance (pp. 77-95). Reston, VA: NCTM.
- Shaughnessy, J. M. (En prensa). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., y NCTM.
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. Bishop et al. (Eds.), International handbook of mathematics education (v.1, pp. 205-237). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning . New York: Springer.
- Vere-Jones, D. (1995). The coming of age of statistical education. International Statistical Review, 63(1), 3-23.
- Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. Journal of the American Statistical Association, 88, 1-8.
- Watson, J. M. (1998). Professional development for teachers of probability and statistics: Into an era of technology. International Statistical Review, 66, 271-289.
- Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. Journal of Mathematics Teacher Education, 4, 305-337.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), 221-248.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 77 - 81
ISSN: 1815-0640



Dinamización matemática

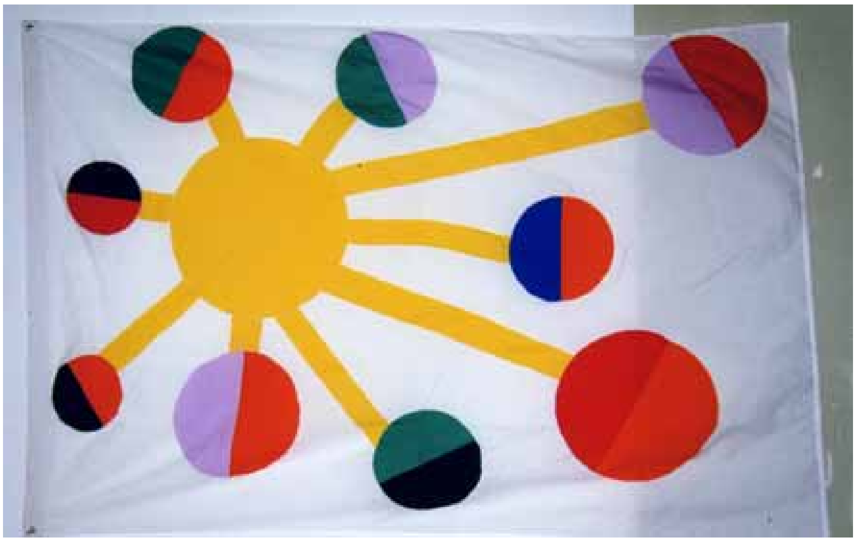
Departamento de Matemáticas

Instituto de Enseñanza Secundaria Viera y Clavijo (La Laguna, Tenerife, España)

Feria de la Astronomía

Hoy, en la clase, el profesor de matemáticas nos anunció que bajaríamos a visitar la Feria de la Astronomía que organizaban los compañeros y compañeras de esta asignatura. Les voy a contar lo que vi y escuché.

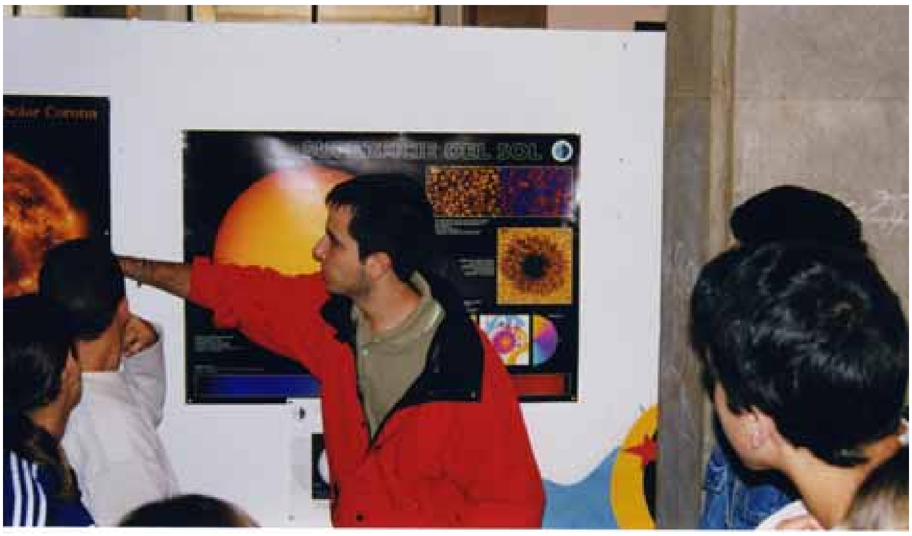
Bajamos del segundo piso al hall del instituto y allí estaba la mesa de información de la Feria. Dos alumnos nos explicaron en qué consistía y nos pidieron que nos organizásemos en grupos de seis. Una vez que lo hicimos, nos asignaron a uno de los estudiantes de Astronomía que fue quien nos acompañó durante todo el tiempo que duró la visita por los diferentes stands. Les relato brevemente el recorrido. Nos dijo que al acabar el recorrido nos pasásemos de nuevo por allí.



Bandera de la Feria

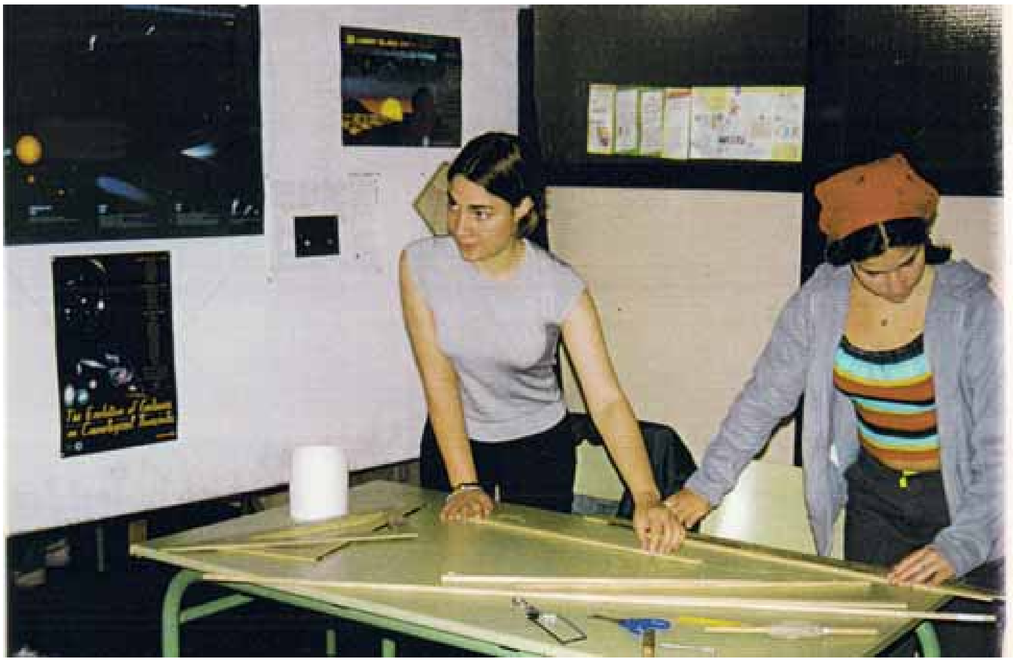
Nuestro grupo pasó en primer lugar al stand de **“Las Constelaciones”**. Estaba en una pequeña aula que hay justo en el hall. Cuando entramos estaba todo oscuro y al fondo, sobre una mesa se veían unas lucecitas pequeñas brillantes que, según nos iban explicando, eran varias constelaciones (Orión, Casiopea, la Osa Mayor, Leo, Tauro y Can Mayor en la que está Sirio, la estrella que más brilla después del Sol y que desde luego se veía bien brillante). Más tarde pude comprobar que se trataba de cajas de zapatos que tenían dentro una bombilla y en una de las caras se habían hecho unos agujeros que daban la forma de las constelaciones. A continuación, los compañeros, ayudados con un retroproyector, fueron mostrando detalles de las constelaciones y contándonos unas bonitas leyendas de la mitología asociada a cada una de ellas. Se les veía muy seguros y me resultó interesante.

Después pasamos al stand de **“El Sol”**. Los alumnos y alumnas que estaban al frente pertenecían a otro instituto en el que también dan Astronomía y se veía que dominaban lo que presentaban. Allí había unos carteles grandes donde se leía que habían sido elaborados por el Instituto Astrofísico de Canarias. Sobre uno de ellos nos explicaron las partes del Sol. Pero lo más interesante de este stand era un



telescopio mediano con el que pudimos ver la proyección de las manchas solares. En base a lo que se veía en esa proyección, hicieron unos cálculos que, aunque no lo entendí mucho, están ligados a la actividad del Sol. Después, gracias a un filtro, lo miramos y era la primera vez que ponía mi ojo en uno de estos artilugios. Muy curioso todo el stand.

Al lado estaba otro stand dedicado a **"Aparatos de medida"**. Lo llevaban dos chicas muy dinámicas que explicaron con mucha claridad cómo se podían hacer los aparatos que nos mostraron. Por un lado el cuadrante de Tolomeo con el que calcularon la altura a la que estaba el Sol en aquel momento. Es algo que nunca había visto hacer. La ballestilla de arco me pareció muy curiosa y sencilla de hacer aunque nos advirtieron que podía ser un poco peligrosa por la especie de flecha que se utiliza. Una cosa que nos indicó es que la figura que formaba la ballestilla hecha en madera era un radián, esa unidad de ángulos que damos cuando se inicia la explicación de la trigonometría. Explicaron también otra ballestilla formada por una varilla como de unos 60 centímetros que tiene tres travesaños de diferentes tamaños. En una figura que estaba en la pared del stand se veía a un marinero con pinta de ser del Renacimiento, utilizando ese tipo de ballestilla. Sobre otra mesa había unos cuantos aparatos de medida: un astrolabio, un sextante y unos cuantos relojes de sol.



Construyendo uno de los aparatos de medida

A continuación pasamos a la entrada del instituto. De allí parte una calle de unos cien metros de larga. En ese espacio hicimos **"Un viaje interplanetario"** y es que, en efecto, en el suelo están pintados a escala los diferentes planetas del sistema solar. El compañero que hizo de piloto y guía de la nave virtual que pasaba de un planeta a otro, que se presentó como comandante de la nave y por eso sé que se llama Felipe, nos llevó desde el Sol que está a la entrada hasta Plutón que está allá lejos, al final de la calle. Por el camino nos iba dando detalles de cada uno de los planetas. Me resultó especialmente interesante cómo se descubrió Neptuno pues nos dio algunos datos de esta historia.

Viaje interplanetario. Paso por los Asteroides

Cuando acabó este viaje, acabó también nuestra visita a la Feria. Todo me pareció curioso y aprendí bastantes cosas que no sabía de ese mundo que vemos a nuestro alrededor.

Volvimos a la mesa de información tal y como nos solicitaron y allí nos entregaron una participación en el sorteo de una estrella, concretamente Antares, que está en la constelación de Escorpio. No tuve la suerte de que me tocara. La afortunada estaba en la clase de al lado. Supongo que algún día irá a tomar posesión…

I FERIA DE LA ASTRONOMÍA ESCOLAR
SORTEO EXTRAORDINARIO

Entre los asistentes a la I Feria de la Astronomía Escolar se sorteará un preciado regalo que hará del agraciado el propietario más afortunado y original del Universo.

La estrella **ANTARES** es una de las más fascinantes de cuantas podemos ver desde Canarias. Es la principal de la constelación **SCORPIO**. Su color rojizo y su brillo,que oscila entre 0.9 y 1.8, la hacen inconfundible en el cielo veraniego. Además está cerca de nosotros, tan sólo a 520 años-luz equivalentes a unos 4.919.616.000.000.000 kilómetros . Su nombre proviene del griego pues **ARES** es el dios de la guerra que en Roma se conoció como **MARTE**. Pues bien, el color rojizo de Antares compite con el rojizo del planeta Marte y por eso Antares significa "antiares" o si se prefiere "antimarte". Los árabes, en cambio, la conocían por el nombre de **CALBALAKRAB** que significa "Corazón del escorpión" porque, si se observa la constelación, se podrá comprobar que esa es la posición de nuestra estrella.

Todos estos datos los damos, porque aquel que resulte agraciado en el sorteo que haremos ante notario intergaláctico, será obsequiado con:

LA PROPIEDAD DE ANTARES DE POR VIDA NO SIENDO UN BIEN HEREDABLE. SE LE HARA ENTREGA DEL CORRESPONDIENTE TÍTULO DE PROPIEDAD.

A aquí acabó nuestra visita a la Feria de Astronomía. Le dimos las gracias a nuestro guía y lo felicitamos por lo bien que estuvo todo.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8 páginas 83 - 99
ISSN: 1815-0640

Sistemas educativos

Panorama de la Educación Matemática en Uruguay

Avances y perspectivas

Bernardo Camou

SEMUR

Sociedad de Educación Matemática de Uruguay

Introducción

Comencemos diciendo que la Educación Uruguaya tiene una larga tradición de ser obligatoria, gratuita y laica.

La educación matemática evidentemente comienza desde el nacimiento del niño en su hogar y la primera educación que el niño tiene en ese sentido en el sistema formal ese en la escuela preescolar o jardín de infantes. No nos referiremos a la educación matemática del niño en la edad escolar sino a partir de los 12 años que ingresa en la Educación Secundaria.

La enseñanza Primaria en nuestro país es muy exigente y estricta respecto a la formación y reclutamiento de maestros y en este sentido quien no haya obtenido el título de tal, no podrá bajo ningún concepto tener a su cargo una clase de niños de edad escolar.

Sin embargo esta exigencia de profesionalismo no se da en la Enseñanza Secundaria.

Así como el 100% de los Maestros de la escuela Primaria tienen título de Maestros sólo el 34% de los Profesores de Matemática de Secundaria tienen título de tales. Es decir de cada 3 profesores, 2 no tienen título y sólo 1 lo tiene.

En el Uruguay la Enseñanza Secundaria es mayoritariamente pública en una proporción del 90% contra 10% de la Educación Privada.

El 90% de la enseñanza secundaria pública está distribuida en 21% para la Universidad del Trabajo (UTU) que constituye una escuela secundaria de artes y oficios orientadas a la formación técnica y el 69% Enseñanza Secundaria que corresponde a liceo y bachillerato donde sólo en los dos últimos años se debe elegir orientación en función del estudio universitario que se desee seguir.

Matemática es una materia de una fuerte carga horaria en el currículo.

En los primeros cuatro años de liceo su carga horaria es de 4 clases (de 40 o 45 minutos) pero en los dos últimos años del Secundario su carga horaria aumenta pasando a hacer de 5, 10,12 y hasta 16 clases semanales dependiendo de la orientación que se siga.

Diferentes planes de estudio

En nuestro sistema conviven distintos planes de estudio.

En ciclo básico están el plan 86 y el plan 96 y en bachillerato el plan 76, la microexperiencia, el del Liceo 3 Nocturno y el plan 2004 de la TEMS.

Tratando de unificar estos distintos planos se está trabajando ahora en la reformulación 2006.

Los nuevos planes de Ciclo Básico se caracterizan por intentar integrar materias afines. Uno de los defectos que se ha constatado en nuestra enseñanza es la excesiva compartimentación del conocimiento que lleva que un alumno de los primeros años de liceo tenga 14 materias diferentes.

Evidentemente esta excesiva cantidad de materias, junto con el hecho que el alumno no puede elegir ninguna, conspira notoriamente en la posibilidad de profundizar el conocimiento y tornarlo significativo para el alumno.

Es así que materias como historia y geografía se integran en los dos primeros años de liceo en una única materia llamada ciencias sociales y física, química y biología en ciencias de la naturaleza.

Esta iniciativa, muy deseable del punto de vista de la calidad del aprendizaje de los alumnos ha chocado sin embargo con resistencias por parte de los docentes cuyas asignaturas se integran con otras.

Muchos de estos docentes sienten una pérdida real de lo que significa para ellos su asignatura que no logran compensarla con lo que significa la adquisición de nuevos conocimientos al integrarla a otra asignatura.

Se ve aquí un fenómeno muy habitual cuando se intenta hacer cualquier reforma educativa; hay una tendencia inercial de muchos docentes a repetir año a año sus cursos efectuando mínimas modificaciones; cualquier cambio profundo tanto de plan como de programa lo viven como una amenaza a su actividad y no como lo que debería ser: una aventura a lanzarse a aprender nuevos contenidos y métodos con el fin de actualizar la enseñanza a los nuevos desafíos que nos plantea el presente.

Lamentablemente en una actividad donde como docentes tenemos que alentar y promover con todos nuestros medios el aprendizaje de nuestros alumnos y el desarrollo de su capacidad de aprender, hay muchos docentes que se resisten sistemáticamente a cambiar su libreto, que no se cuestionan nada de lo que enseñan y para quienes los que tienen que aprender son los alumnos porque ellos ya aprendieron y por ende ya saben.

¿Cómo puede un profesor promover la curiosidad de sus alumnos , su creatividad, el espíritu investigador, la sed de aprender para poder adaptarse y poder buscar soluciones a problemas reales, si él mismo no investiga, no se cuestiona y ha perdido el entusiasmo en aprender cosas nuevas?

A principios del siglo XXI, se ve claramente que el rol del docente ha cambiado o debe cambiar radicalmente.

En un mundo donde el conocimiento se produce en cantidades gigantescas y se trasmite casi instantáneamente a través de INTERNET el profesor no puede ser ya más el "detentor" del conocimiento.

Queda más en evidencia que nunca que por más conocimiento que un docente pueda tener de su materia de todas maneras éste va a ser mínimo comparado con todo el conocimiento que existe de ésta.

¿Qué quiere decir esto?

Que cada día cobra más importancia no tanto los contenidos en sí mismos, sino como medios de adquirir los métodos adecuados y potenciadores de la capacidad de cada ser humano para que él pueda una vez dejada la enseñanza formal seguir aprendiendo y desarrollándose en aquello que desea.

Es decir las necesidades de formación pedagógica, didáctica y hasta sicológica de los docentes se vuelven cada día más urgentes.

Cuando dos docentes tienen el conocimiento necesario para dar un curso, la diferencia para lograr un alto grado de aprendizaje en los alumnos, no está en cuál de los dos profesores sabe más matemática sino en quien es capaz de establecer una mejor relación pedagógica y emplear mejores métodos didácticos que logren poner en contacto al alumno con el conocimiento.

Las reformas del bachillerato son más del tipo evaluativo; se intenta sustituir la evaluación puntual y única a fin de año mediante un examen por una evolución más continua a través de parciales.

En la reforma TEMS hay tres elementos de evaluación: el proceso anual, pruebas semestrales y la realización de un proyecto multidisciplinario.

En lo referente estrictamente a matemática existe una integración entre geometría y álgebra o entre análisis y geometría analítica muy interesante que permite el abordaje de problemas matemáticos de gran valor epistemológico que en cursos tradicionales separados sería imposible abordar.

Para concluir esta parte cabe agregar que cualquier cambio de plan o programa necesariamente debe ir acompañado de una importante discusión entre los docentes para lograr consenso y además una importante labor de formación docente para los nuevos profesores y de formación permanente para los profesores en servicio.

Podremos cambiar los planes pero si los docentes no están de acuerdo dichos planes quedarán en la nada.

Podremos cambiar los programas pero si los docentes no están formados para estos cambios, ellos seguirán dictando los cursos que dieron toda su vida ya que la mayoría evitará tratar los nuevos contenidos que fueron incorporados.

Programas

Se adjuntan aquí dos programas correspondientes a 1er año de liceo (alumnos de 12 y 13 años) y el de 1er de Bachillerato (alumnos de 15 y 16 años).

Programa de matemática

Primer año - ciclo básico – reformulación 2006 (5 horas semanales)

• Actividades numéricas

Tema 1.

- Técnicas operatorias en el conjunto de los números naturales. (20)

Se darán por conocidos los números naturales, estudiándose el tema mediante problemas que pongan en evidencias la práctica de la operatoria con dichos números y la posibilidad del redescubrimiento por parte del alumno de las propiedades de las operaciones.

El alumno deberá:

Apoyarse en la práctica del cálculo mental, manual (en el caso de operaciones técnicamente simples) y en el empleo de la calculadora. Se incluirá en este último caso el cálculo de potencias y algunos casos particulares de radicación.

Hacer uso de paréntesis y poseer conocimiento de las prioridades entre las operaciones:

* Conocer la distributividad de la multiplicación respecto de la adición.

* Saberla utilizar en los dos sentidos (desarrollar y factorizar).

Iniciarse en el uso de la escritura literal.

Aplicar las técnicas operatorias al cálculo de perímetros y áreas.

Complementos

- Orden en el conjunto de los números naturales. Propiedades.

Tema 2.

- División entera.
- Múltiplos y divisores.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- Números primos.
- Descomposición de un número en producto de factores primos.
- Problemas de aplicación. (15)

Se sugiere iniciar el estudio de divisibilidad mediante la resolución de problemas sencillos, que permiten al alumno recordar y afianzar los conocimientos adquiridos en el ciclo escolar.

Se ejercitará el cálculo mental del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor, evitando en una primera instancia la aplicación de metodología para su cálculo, las cuales serán aplicables sólo en aquellos casos en que el cálculo mental resulte dificultoso.

Complementos

- Criterios de divisibilidad. Generalidades sobre los sistemas de numeración.

Tema 3.

- Fracciones y números decimales.
- Practica operatoria. Orden.
- Representación sobre la recta numérica. (20)

El alumno deberá:

Conocer diversas escrituras de un mismo número. Adquirir práctica en las técnicas operatorias con fracciones.

Conocer la notación de número mixto.

Adquirir práctica en la comparación de fracciones.

Se jerarquizará la consideración del número decimal y el manejo de su operatoria.

Complementos

- Aproximaciones decimales por defecto y por exceso de un número y su aplicación, por ejemplo al cálculo de áreas de figuras irregulares y áreas y volúmenes de prismas y cilindros. (Se sugiere proponer a los alumnos situaciones problemáticas que no consistan únicamente en la aplicación de fórmulas. Por ejemplo el dibujo de una hoja o la palma de la mano, modificando el cuadriculado sobre el cual se coloca la figura cuya área se desea determinar, para afinar la aproximación).

Tema 4.

- Proporcionalidad. Porcentajes. (15)

Se sugiere introducir el tema mediante la resolución de problemas sencillos, con contenido actualizado y cercano al mundo vivencial del alumno.

El alumno deberá:

Reconocer una situación de proporcionalidad (directo o inversa) en tablas, gráficas.

Saber determinar coeficientes de proporcionalidad.

Aplicar el cálculo de porcentajes a la resolución de problemas en diversas áreas.

Conocer formas abreviadas de cálculos de porcentajes.

Saber usar la tecla de porcentaje de la calculadora.

Complementos

- Uso de escalas. Actividades con mapas y dibujos a escala.

Tema 5.

- Numero entero. Adición
- Sustracción y orden. (20)

Se mostrará, con ejemplos variados el empleo de los números negativos. Se evitarán consideraciones teóricas. En todos los casos se justificará mediante ejemplos y sin mayores formalizaciones, las definiciones de adición, sustracción y orden.

El alumno deberá:

Dominar la técnica operatoria concerniente a la adición y sustracción de enteros.

Utilizar los números enteros y emplearlos para obtener la graduación de una recta.

Complementos

- Sistemas de ejes cartesianos.

• Actividades geométricas

Tema 1.

- Revisión de conceptos geométricos elementales
- Uso de instrumentos de dibujo y de medida. (10)

Esta primera unidad de geometría plana permitirá precisar conceptos y vocabulario sobre nociones geométricas adquiridas en el ciclo escolar, así como adquirir destreza y soltura en el uso de instrumentos de dibujo y medida.

El alumno deberá ser capaz de:

Transportar un segmento.

Reproducir un ángulo, un arco de circunferencia de centro dado.

Utilizar correctamente, en una situación dada, el siguiente vocabulario: recta, circunferencia, círculo, arco de circunferencia, ángulo, rectas perpendiculares, rectas paralelas, semirrecta, segmento, punto medio de un segmento.

Describir y construir triángulos y cuadriláteros particulares.

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.

Tema 2.

- Simetría axial. Simetría central.
- Aplicaciones. (20)

Es conveniente que el estudio de las simetrías sea precedido por ejercitaciones de carácter experimental.

Se procurará que en una segunda instancia se determinen la simetría axial y central y se descubran sus propiedades enunciándolas con precisión.

Las construcciones mediante simetrías serán una consecuencia del estudio antes señalado y siempre realizadas con precisión y rigor de trazado.

Las construcciones servirán para observar, conjeturar y conceptualizar respecto de la perpendicularidad y paralelismo entre rectas, punto medio de un segmento, mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo y paralela media, lo que será aplicado en abundante resolución de problemas.

El alumno deberá ser capaz de:

Aplicar las simetrías para la construcción de figuras que admitan ejes y/o centros de simetría.

Determinar ejes y centros de simetrías de figuras.

Observar las propiedades y figuras que se conservan invariantes: distancias, alineación y orden, ángulos.

Complementos

- Construcción de polígonos regulares.

Tema 3.

- Rectas y planos en el espacio.
- Descripción y representación de prisma, cilindros, pirámides y conos. (10)

Las nociones de geometría del espacio se desarrollaran a nivel intuitivo, precisándose oportunamente los nuevos conceptos.

* El cubo puede servir para introducir el estudio de relaciones entre rectas,

rectas y planos y entre planos.

* Se aconsejan las construcciones con material concreto en las cuales se apliquen los conocimientos adquiridos o que sirvan para adquirir otros, utilizando el modelo como soporte de la investigación.

El alumno deberá ser capaz de:

Observar y distinguir las posiciones relativas en el espacio de: dos rectas, dos planos, una recta y un plano.

Complementos

- Descripción y desarrollo de pirámides y conos.

Bibliografía recomendada

Aritmética. Geometría. Colección Cánepa.

Aritmética. Geometría. Rey Pastor y Pereyra.

Geometría. Petracca. Bonifacino y Peralta.

Matemática 1º - Colección Gauss – L.Belcredi y M. Zambra.

Matemática 1º - Grupo Botadá – M. Borbonet, B. Burgos, A. S. Martínez y N. Ravaioli.

1º Ciclo Básico – A. Fort, J. Cabrera y M. H. Sanchez.

Guías para el Docente – ANEP – CO.DI.CEN.

Matemática 1. Petracca. Varela. Foncuberta.

Primer año de bachillerato – reformulación 2006

Tema 1: lugares geométricos y aplicaciones a construcciones (30)

- Circunferencia. Círculo. Mediatriz. Bisectriz.
- Elementos notables en un triángulo.
- Angulos inscriptos, semi-inscriptos y centrales. Arco capaz.
- Intersección de lugares geométricos y aplicaciones a la construcción de triángulos y polígonos.

Complementos

- Definición métrica de las cónicas. Construcción por puntos. Hipérbola equilátera: propiedades métricas de las asíntotas.

Sugerencias metodológicas

Se trabajará a través de problemas y ejercicios, utilizando regla y compás y escribiendo adecuadamente el algoritmo de resolución.

Con respecto a: circunferencia, círculo, mediatriz, bisectriz y elementos notables de un triángulo, no son temas específicos a tratar, se mencionarán en el momento que sea necesario para el tratamiento de otros temas.

El algoritmo de resolución no debe constituirse en un fin en sí mismo, pero debe cuidarse la expresión matemática correcta.

Tema 2: funciones polinómicas (12 hs)

- Función f:f(x) = ax+b
- Casos particulares. Ceros. Signos. Gráficos.
- Crecimiento. Decrecimiento
- Ecuaciones de primer grado. Aplicaciones.
- Resolución de problemas.

Sugerencias metodológicas

Se hará una breve revisión del concepto de función y de su representación gráfica (sistema de ejes cartesianos).

Es conveniente proponer situaciones problemáticas vinculadas con otras ciencias.

Se sugiere una revisión de sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas.

Se efectuará la representación gráfica de una función de primer grado e interpretará a partir de ella, ceros, signo, crecimiento, decrecimiento.

Se resolverán ecuaciones con denominadores numéricos.

Se resolverán problemas que originan ecuaciones de primer grado.

Tema 3: funciones polinómicas de 2do. grado (20 hs)

- Estudio de la función f: f(x) = ax2 + bx + c.
- Casos particulares. Gráficos.
- Recorrido. Crecimiento y Decrecimiento. Máximos y mínimos.
- Ecuación de 2do. Grado.
- Determinación de cero y de preimágenes de funciones polinómicas de 2do grado.
- Signo de f(x) con x perteneciente a los reales.
- Aplicaciones y resolución de problemas.

Complementos

- Ecuación de la parábola y vinculación con la función estudiada.
- Relaciones entre coeficientes y raíces. Descomposición factorial.

Sugerencias metodológicas

El estudio analítico de la función y la representación gráfica servirán como temas de reflexión para el estudio de: ceros de la función, puntos de intersección con los ejes, cálculo de las coordenadas del vértice, máximos y mínimos, crecimiento, decrecimiento, concavidad, variación de signo de la función.

El alumno deberá adquirir dominio en la resolución de ecuaciones de segundo grado. Se procura no solo la simple mecanización operatoria sino también la adquisición de habilidades para aplicar los conocimientos adquiridos a problemas de la vida real y a la interpretación rápida de las características de la función.

El alumno deberá resolver problemas que conducen al planteo de ecuaciones de segundo grado o al estudio de máximos y mínimos.

Tema 4: funciones racionales (12 hs)

- Función f : f(x) = ax+b
- cx+d
- Dominio. Recorrido. Ceros. Signo. Gráficos.

Complementos

- Ecuación de la hipérbola equilátera con asíntotas paralelas a los ejes y vinculación con el gráfico de las funciones estudiadas.
- Estudio y representación gráfica de algunas funciones particulares cocientes de polinomios de grado no mayor que 2. Ecuaciones e inecuaciones racionales.

Sugerencias metodológicas

Se observará los valores de f(x) para x en la proximidad del punto de no existencia y para valores grandes de x, obteniéndose una idea intuitiva de las asíntotas y del concepto de límite.

Se admitirá la propiedad métrica de la hipérbola equilátera de que el producto de las distancias de sus puntos a las asíntotas es constante, para hallar la ecuación respectiva y vincularla con la función estudiada.

Tema 5: funciones angulares (15 hs)

- Seno. Coseno. Tangente. Ceros. Signos. Gráficos. Periodicidad.
- Teorema del seno y del coseno.
- Cálculo de distancias y áreas.

Sugerencias metodológicas

Comenzar con medidas de ángulos: grados sexagesimales y centesimales, radianes.

Las representaciones gráficas y estudio de estas funciones permiten reflexionar sobre puntos de intersección con los ejes de coordenadas, signos, máximos y mínimos relativos, crecimiento, decrecimiento, periodicidad.

Debe evitarse que las aplicaciones de los teoremas del seno y del coseno se refieran únicamente a los clásicos "casos de resolución de triángulos". Es necesario insistir en problemas de aplicación al cálculo de distancias, áreas, en figuras planas y en el espacio, y temas relacionados con ciencias y tecnología.

Tema 6: funciones exponenciales y logarítmicas (14 hs)

- Dominio. Ceros. Signos.Gráficos.
- Crecimiento. Decrecimiento.

Complementos

- Notación científica.
- Conversión. Operaciones.

Sugerencias metodológicas

Es conveniente habituar a los estudiantes al manejo de cuestiones relativas al crecimiento exponencial o logarítmico proponiendo ejemplos de origen variado, crecimiento de poblaciones, crecimiento de capitales, desintegración radioactiva, variación del ph de una solución.

Del mismo modo que en las funciones trigonométricas, la representación gráfica de las funciones y su interpretación permitirá profundizar los conceptos de dominio y de recorrido de una función. Se destacará el concepto de función inversa y se determinará sus condiciones de existencia.

Los logaritmos han perdido interés como instrumento de cálculo aritmético debido al uso generalizado de las calculadoras y por lo tanto debe dejarse de lado el manejo de tablas de logaritmos decimales.

Los estudiantes deben adquirir el concepto de logaritmo en cualquier base, en particular los neperianos.

Se realizarán cálculos de potencias y logaritmos en diferentes bases y cambios de base.

Se utilizarán en forma correcta las calculadoras.

Se resolverán ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas relacionadas con ecuaciones de primer o segundo grado o utilizando cambio de variable.

Se realizará una breve revisión de la notación científica, conversiones y operaciones. El tratamiento se limitará al uso del lenguaje respectivo.

Bibliografía recomendada

Matemática. Colección Tapia

Matemática. Colección Rey Pastor- Pereyra

Matemática. Colección Silva y Cánepa.

Inspección de Matemática. "Lugares Geométricos. Método de los lugares. Aplicaciones"

Matemática Dinámica. Varela y Foncuberta.

Elementos de Geometría. Severi.

Geometría Métrica. Puig Adam.

Matemática. Rey Pastor – Puig Adam.

Geometría Intuitiva. Castelnuovo.

La Enseñanza de la matemática en la Escuela Media. Santaló.

Matemática general. Tomo I. Trejo

Matemática I y II. Vázquez de Petracca y Foncuberta.

Cómo plantear y resolver problemas. Polya

Introducción al Análisis matemático. Osín

Espacios vectoriales y geometría analítica. Monografía Nº2 de la OEA

Calculus. Apóstol

Cómo resolver problemas de Geometría Métrica. Vázquez de Petracca y Peralta.

Textos del Bachillerato francés.

¿Dónde estamos?

Hace un buen tiempo que en Uruguay se acusa desde distintos sectores a la enseñanza de la matemática como un verdadero problema para la sociedad.

A veces la matemática es usada injustamente como instrumento para filtrar o discriminar a la gente por su inteligencia cuando la matemática se debería usar como una herramienta poderosísima para educar a la gente y enseñarle cómo distinguir entre lo verdadero y lo falso.

La enseñanza pública terciaria tiene en Uruguay serios problemas y la necesidad de una profunda reformulación tema en el cuál no entraremos aquí pero lo que quiero consignar acá, es que más allá de los problemas y deficiencias reales que tiene la enseñanza de la matemática en nuestro país, también se la quiere hacer pasar como chivo expiatorio de una problemática mucho más vasta y compleja de nuestra enseñanza y por qué no también de nuestro país.

¿Hacia dónde vamos o podemos ir?

En lo que a la enseñanza de la matemática a nivel Secundario se refiere para superar claramente la situación en que nos encontramos creo que hay 4 puntos a atacar con urgencia.

El primero es la formación de más cantidad de profesores de matemática anualmente. Hasta hace 10 años la formación de profesores de matemática a cargo exclusivo del IPA (Instituto de Profesores de Artigas) era numéricamente totalmente deficitaria.

Con la creación de los CERP (Centro Regional de Profesores) esta cifra aumentó sensiblemente. En el 2005 hubo un total entre los CERP e IPA de 48 egresados cifra similar de los que ingresan y los que se dan de baja anualmente en Secundaria. Esto significa que habría que esperar unos 35 años para que en Secundaria el 100% de los profesores de matemática sean titulados.

Es un tiempo demasiado largo para solucionar un problema bien identificado.

Lograr el 100% de titulados (como en Primaria con los maestros) es un objetivo con el cual creo que todos podemos estar de acuerdo y para ello hay que aumentar la cantidad de profesores que egresan de los institutos de formación ya sea destinando más recursos a éstos o incluso creando nuevos institutos y también hay que brindar la oportunidad y las facilidades de titularse a aquellos docentes interinos que acrediten muchos años de dedicación total a la enseñanza y manifiesten su deseo real de querer titularse.

Con una campaña agresiva de formación puede lograrse en un mediano plazo de 15 años lograr una titulación de más de 90%.

El 50% de los docentes de matemática son interinos y no titulados; esto significa una desprofesionalización alarmante.

El docente interino que toma algunas horas como una changa, no ofrece ninguna garantía para el educando.

El estado le está confiando y pagando por la educación de nuestros jóvenes a personas que no han acreditado ninguna competencia para la delicada y trascendente tarea que se les encomienda, más allá de únicamente cierto conocimiento de la materia, lo cual es necesario pero de ninguna manera suficiente.

El segundo punto es la necesidad de una evaluación externa al menos en el último año del bachillerato.

Un alumno que egresa de un liceo periférico de Mdeo o de una localidad pequeña del Interior no puede competir de ninguna manera en la Universidad. Secundaria le expide un certificado de egreso que no asegura que él esté bien preparado.

Por otro lado, otro alumno puede perder varias veces un examen rehén de un profesor que se dedica a dar la mitad del programa pero que plantea exámenes que prácticamente sólo él puede resolver.

Este profesor puede tener niveles altísimos de exigencia sobre determinados puntos del programa y sin embargo no enseñar nada sobre otros igual o más importantes.

De este modo puede arbitrariamente frustrar reiteradamente a muchos alumnos sin que éstos cuando finalmente aprueben hayan aprendido gran cosa.

La evaluación externa no va en detrimento de evaluaciones más exigentes que determinadas instituciones deseen seguir implementando pero asegura un nivel mínimo para todos y una temática común tratada por todos.

La evaluación externa no es una fiscalización o inspección de profesores; es ante todo un mecanismo de defensa del estudiante que sabrá como va a ser evaluado y una garantía para él que logró un nivel adecuado.

También es una posibilidad objetiva de validar o no determinados métodos didácticos que serán medidos o valorados, no por el dudoso criterio de una persona que “ve” como otra da la clase sino por el resultado del aprendizaje de los alumnos al cabo de un determinado período de tiempo.

El tercer punto es una profunda revisión metodológica que incorpore la Didáctica de la Matemática como la disciplina fundamental para obtener aprendizajes profundos y perdurables.

El profesor de matemática no puede ser de ninguna manera repetidor de un texto o de una actividad diseñada por otro.

Enseñar matemática implica crear estrategias, inventar métodos y descubrir matemática, para poder crear puentes entre la estructura cognitiva del educando y la estructura de la matemática.

El alumno instintivamente emula al profesor; si el profesor experimenta entusiasmo por aprender cada día aprender matemática no será una carga para el alumno, sino una actividad gratificante.

El cuarto y último punto es la renovación de los programas.

Aquí se necesita hacer un gran debate para llegar a consensos sobre cuáles son los cambios necesarios.

Es fundamental el aporte de la comunidad de investigadores de matemática sobre las nuevas ramas de la matemática y sus aplicaciones.

Para incorporar nuevos contenidos habrá necesariamente que sacar otros. Algunos pueden ser sintetizados o integrados con otros y de esta manera pueden dejar espacio a la introducción de lo nuevo.

No basta con una nueva rama de la matemática se revele como trascendente y digna de ser introducida en los cursos.

Habrá que elaborar una transposición didáctica de modo de hacerla "enseñable".

Tanto el punto 3 como el punto 4 están supeditados directamente al punto 1 es decir jerarquizar la Didáctica como corresponde e incorporar nuevos contenidos ineludibles en los programas pasan necesariamente por la formación de los nuevos docentes y los docentes en servicio ya son ellos los que van a producir o no los cambios.

Toda reforma de cualquier tipo que no forme intensamente a los docentes podrá ser muy bonita en los papeles pero será letra muerta.

Espero que este documento sea útil de alguna manera.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia

Diciembre de 2006, Número 8 páginas 101-107
ISSN: 1815-0640

Coordinador: Wagner Rodrigues Valente

Los tratados franceses en la enseñanza del análisis en Colombia (1851-1951)[1]

Luis Carlos Arboleda[2]

En este trabajo se exponen algunos de los resultados de la investigación que hemos venido adelantando sobre la formación de pensamiento matemático en Colombia en los siglos XIX y XX. Se analizan comparativamente cuatro momentos claves en la recepción, difusión y apropiación de los fundamentos del cálculo infinitesimal:

1. Los tres primeros momentos tienen que ver con los pioneros en la enseñanza del cálculo: José Celestino Mutis y sus alumnos en los años 1770 la Cátedra de matemáticas del Colegio del Rosario, André Bergeron en el Colegio Militar de Bogotá en la década de 1840, y el primer curso sistemático de cálculo diferencial e integral en el enfoque de Cauchy enseñado por Julio Garavito en la Universidad Nacional de Colombia a principio del siglo 20.
2. El cuarto momento se refiere a la enseñanza del ingeniero Jorge Acosta Villaveces en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería durante los años 1930 y 1940, que tiene como hecho significativo la publicación del primer texto colombiano de *Análisis Matemático* en 1951.

Cada uno de estos casos particulares se estudia con base en fuentes documentales primarias y publicaciones originales poco conocidas, con lo cual este trabajo pretende contribuir a valorar nuestro patrimonio histórico en matemáticas. Hemos procurado situar cada momento en su respectivo contexto institucional y en su correspondiente fase de profesionalización de las matemáticas. Se ha tratado asi

[1] Este texto constitui uma primeira versão condensada de capítulo de livro que irá ser publicado em 2007, sobre a matemática moderna nos países ibero-americanos. Nessa obra estarão as referências completas aqui mencionadas.

[2] Grupo de Historia de Matemáticas, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Ciudad Universitaria-Meléndez, Cali. Colombia. E-mail: arboleda@univalle.edu.co

mismo de caracterizar las prácticas pedagógicas asociadas con los distintos tipos de enseñanza del cálculo en los establecimientos de educación superior.

La investigación se adelantó sobre materiales educativos producidos en Colombia dentro de procesos de enseñanza inspirados en tratados y planes de estudio franceses. Nos hemos apoyado para ello en la tipología elaborada por el matemático e historiador francés Martín Zerner. De esta tipología hemos retenido la periodización y la caracterización de las tres generaciones de los tratados franceses que de una u otra manera representaron la influencia francesa en la enseñanza del cálculo dentro en las instituciones seleccionadas en nuestro estudio. Estos son tales tratados junto con los intervalos en donde se sitúan sus correspondientes ediciones: (I) Lacroix (1802-1881) y Boucharlat (1813-1891), (II) Duhamel (1856-1886), Sturm (1857-1929), (III) Bertrand (1864), Serret (1868-1911), Jordan (1ª ed.)(1882) y (III) Tannery (1886-1904), Jordan (2ª ed.)(1893), Goursat (1902-1942), Humbert (1903). Entre todos ellos los más significativos en este trabajo sobre la transformación de la cultura de los fundamentos del análisis en Colombia, son Boucharlat, Sturm y Humbert. El criterio rector para establecer esta tipología es el es el principio de sustitución de las cantidades infinitamente pequeñas, el cual fue introducido por Jean-Marie-Constand Duhamel en su tratado de 1856 como resultado de la enseñanza de sus cursos de análisis en la década anterior, y que en una de sus primeras formulaciones dice lo siguiente:

“El límite de la suma o de la razón entre cantidades infinitamente pequeñas no cambia si se reemplaza estas cantidades por otras cuyas razones con las primeras tienen por límites respectivamente la unidad”.

Durante los cien años que van desde que Bergeron enseñó su curso de cálculo diferencial en el Colegio Militar, hasta la publicación del libro de Acosta en la Universidad Nacional, se aclimató en el país una cultura sobre los fundamentos del análisis de corte esencialmente francesa. Los planes de estudio de los colegios e instituciones universitarias legitimaron esta influencia, por lo menos en lo que se refiere al último año de la formación en cálculo diferencial, integral, ecuaciones diferenciales (en épocas más recientes) y mecánica racional. En nuestras instituciones circularon textos de análisis de primera, segunda y tercera generación que venían precedidos del prestigio de haber sido empleados para la enseñanza en escuelas y facultades francesas.

Sin embargo, las concepciones de los pioneros de esta enseñanza, las prácticas pedagógicas de naturaleza operatoria e instrumental, los débiles intercambios con los medios matemáticos internacionales, la precariedad de monografías y memorias originales en nuestras bibliotecas y la casi inexistente demanda interna de conocimientos avanzados en matemáticas puras y aplicadas, favorecieron que esta cultura llevara la impronta del libro más influyente del período estudiado por nosotros: el curso de Sturm, una obra de segunda generación. Esta situación es la misma aún en la etapa de los años 1940 cuando en el marco de esta cultura operatoria, se expresaron tímidamente corrientes de rigor del análisis pertenecientes a textos de la tercera generación como el de Humbert. Estos libros se encontraban de tiempo atrás en las bibliotecas públicas y privadas en donde nuestros profesores y estudiantes más aventajados los consultaron para su formación personal; pero no por ello se generó algún interés en apropiarse de tales obras para transformar cualitativamente las muy conservadoras prácticas pedagógicas.

Una situación algo distinta se presentaba por la misma época en otros países latinoamericanos. En Perú, por ejemplo, en donde el estudio de las matemáticas en la Universidad Católica de Lima era entonces reconocido por su alto nivel, se publicó en 1945 un completo curso en dos volúmenes de análisis matemático. Por su factura esta obra parece ubicarse en el nivel de tercera generación según la rejilla analítica de Zerner. Su autor, Cristóbal Losada y Puga, catedrático de esa universidad y célebre hombre público, se doctoró en ciencias matemáticas en la Universidad de San Marcos de Lima en 1923 con una tesis sobre teoría de curvas. También se graduó de Ingeniero de Minas en la Escuela de Ingenieros. Como resultado de la enseñanza de varios años en estas instituciones y en la Universidad Católica, produjo su Curso de Análisis Matemático, tal vez la más conocida de sus publicaciones.

En el prólogo, Losada y Puga explica que éste se originó en la necesidad de "poner al alcance de mis alumnos aquellos puntos teóricos que no suelen encontrarse tratados en los textos corrientes de cálculo"; se refiere a los fundamentos de la teoría de conjuntos, la teoría de los números reales y la teoría de funciones continuas. En particular reconoce las filiaciones de los capítulos de su tratado sobre las funciones continuas, con el "gran *Cours d'Analyse Mathématique* del maestro francés Édouard Goursat". También dice haber consultado en la elaboración de su libro todos los tratados clásicos de análisis franceses que "como todos lo saben y reconocen, (es en esto) la maestra del mundo". El curso de Losada y Puga responde al *desideratum* de su autor de presentar a sus alumnos en español "una exposición amplia y rigurosa del Análisis, que permita abordar primero el estudio de las obras monográficas y luego el de las memorias originales de los investigadores, así como por otra parte resolver las cuestiones –a menudo arduas- que plantean las ciencias aplicadas".

Losada y Puga consideraba que el principio de sustitución de infinitesimales era legítimo y aportaba claridad en ciertas "cuestiones arduas" del cálculo, y por ello abogaba por su empleo en la enseñanza. En el *Curso* el autor introduce el principio de Duhamel al inicio del primer volumen, en la parte correspondiente a las derivadas e infinitesimales, a partir de lo cual se desarrollan en seguida las aplicaciones de la diferenciación a las tangentes, máximos y mínimos y velocidades. El hecho no deja de ser sorprendente para una obra que se reclamaba en la introducción del paradigma francés de tratado moderno de análisis y que, tanto por la claridad y rigor de su exposición como por la calidad de su edición, aspiraba a justo título a ser utilizada como texto de enseñanza en el Perú y otros países.

El recurso privilegiado a este tratamiento se justificaba en el siguiente planteamiento de Losada y Puga:

"Incluso los más rigurosos de los aritmetizantes (*sic,* en clara alusión a los seguidores del enfoque de aritmetización del análisis de la escuela de Weierstrass), quienes no le confieren a la intuición ningún derecho como elemento demostrativo, y que desconfían de ella, creo que estarían dispuestos a aceptarla al menos como un elemento auxiliar de explicación, particularmente asequible y claro".

Otro es el punto de vista de los autores de textos de la tercera generación como Jordan y Goursat, en los cuales dice basarse el curso de Losada y Puga. Los cursos de segunda generación como Duhamel, Sturm y Serret empleaban el principio de manera natural cada vez que se trataba de calcular límites asociados con problemas como la rectificación de curvas o el cálculo de áreas. Jordan introducirá un tratamiento alternativo mediante el enunciado de teoremas, por ejemplo, sobre las condiciones necesaria y suficiente que debe cumplir una curva expresada en su forma paramétrica para ser rectificable, y su demostración basada en el empleo estricto de técnicas aritméticas en el lenguaje ε-δ. Goursat hace suyo el tratamiento formal y analítico de Jordan en ésta y otras materias de teoría de curvas, un asunto que como hemos visto era del mayor interés para Losada y Puga. Precisamente Goursat plantea lo siguiente que viene bien a propósito de la opinión del carácter "auxiliar de explicación" de la intuición geométrica de curva:

"el razonamiento no hace más que confirmar la intuición geométrica, pero no hay que creer que ello siempre es así. Peano ha dado un ejemplo bien curioso de una curva plana que tiene la siguiente propiedad singular. Cuando se hace variar el parámetro t, el punto de coordenadas $x = f(t)$, $y = g(t)$ coincide sucesivamente con *todos los puntos interiores de un cuadrado*. Si citamos este resultado es para mostrar hasta dónde la noción analítica de curva es más compleja que la noción vulgar". [Goursat (1910), vol. 1, p. 30]

Por lo que parece, la estrategia pedagógica de Losada y Puga de recurrir a la intuición geométrica de lo infinitesimal cada vez que se hiciera necesaria, iba de hecho en contravía de uno de los propósitos centrales del patrón de texto francés de tercera generación que parece haber moldeado su enseñanza en las universidades de Lima y la propia escritura de su *Curso de Análisis Matemático*.

Pero, como también lo hemos constatado en el caso de Acosta Villaveces, ni la cuestión de determinar el nivel de rigor de la organización del material de los cursos de cálculo diferencial e integral, ni mucho menos su aplicación en estrategias de enseñanza, admitían respuestas simples ni uniformes en contextos institucionales y profesionales tan diferentes como los de las universidades de Bogotá, Lima y París.

Mientras a mediados de los años 1940 la enseñanza en nuestros países sigue, con las variantes que se han señalado, el patrón de libros de tercera generación como el Goursat, en Francia se está gestando desde hace una década un distanciamiento radical con respecto a ese patrón. Los textos de tercera generación y concretamente el Goursat, ya no satisfacían las expectativas de la generación de matemáticos como Weil, Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonné y Mandelbrojt, varios de ellos egresados de la influyente y prestigiosa Escuela Normal Superior de París, y quienes como miembros de la élite matemática de entonces aseguraban la enseñanza del análisis en París y en las universidades de provincia. Sus intereses iban en la dirección de sistematizar los conocimientos matemáticos universitarios en una obra con una organización temática y un estilo distintos a la factura clásica de los textos utilizados por sus maestros Hadamard, Denjoy, Borel, Lebesgue, Montel, Julia y Fréchet.

La idea de producir un tratado de análisis alternativo al Goursat se convertiría en un ambicioso programa para elaborar el tratado *Éléments de mathématique* como un emprendimiento colectivo del célebre grupo Bourbaki. De acuerdo con el testimonio de un miembro del grupo, Armand Borel, "En 1934 A. Weil y H. Cartan eran Maîtres de Conférences (el equivalente a profesores asistentes) en la Universidad de Estrasburgo. Su función principal era, obviamente, la enseñanza del cálculo diferencial e integral. El texto estándar era el *Traité d'Analyse* of E. Goursat que les parecía deficiente en varios aspectos. Cartan asediaba frecuentemente a Weil con preguntas sobre cómo presentar este material; de manera que para resolver el asunto de una vez por todas, Weil propone escribir entre ambos un nuevo *Traité d'Analyse*. Esta sugerencia se hizo pública y rápidamente un grupo de unos diez matemáticos comenzó a reunirse regularmente para planear este tratado. Pronto se pusieron de acuerdo que el trabajo sería colectivo sin ningún reconocimiento a las contribuciones individuales. En el verano de 1935 se escogería el seudónimo de Nicolás Bourbaki".

Por distintos factores como el aislamiento relativo de la actividad real de los centros académicos franceses, los eventos de la guerra y la propia dinámica de las instituciones universitarias en nuestros países, este proceso de transformaciones radicales en la investigación y en la enseñanza de las matemáticas escapó a la consideración de las élites de Bogotá y Lima. Habrá que esperar la siguiente década, la de los años 1950, para que estos acontecimientos sean reconocidos y empiecen a incidir en transformaciones en la enseñanza del análisis y de las matemáticas en general, dentro de entornos institucionales distintos, y a través de las relaciones que establecerían con Bourbaki algunos de los matemáticos e ingenieros formados por la generación de Acosta Villaveces, y Losada y Puga.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 109-112
ISSN: 1815-0640

¡¡Esto no es serio!!

José Muñoz Santoja

Las otras efemérides

Es costumbre que los medios de comunicación recuerden algún suceso histórico acontecido el mismo día que se da la información, sólo que algunos, o muchos, años antes. Grandes desastres provocados por la naturaleza o el propio hombre, importantes descubrimientos, sucesos importantes en la vida de algún famoso personaje histórico, etc. Sin embargo, hay otros acontecimientos en la vida de muchos personajes que han forjado la historia, que a veces pasan desapercibidos o ignorados, pero que han sido tremendamente importantes, pues sin ellos, no hay duda de que los hechos históricos por los que se recuerdan a estos personajes no se habrían producido.

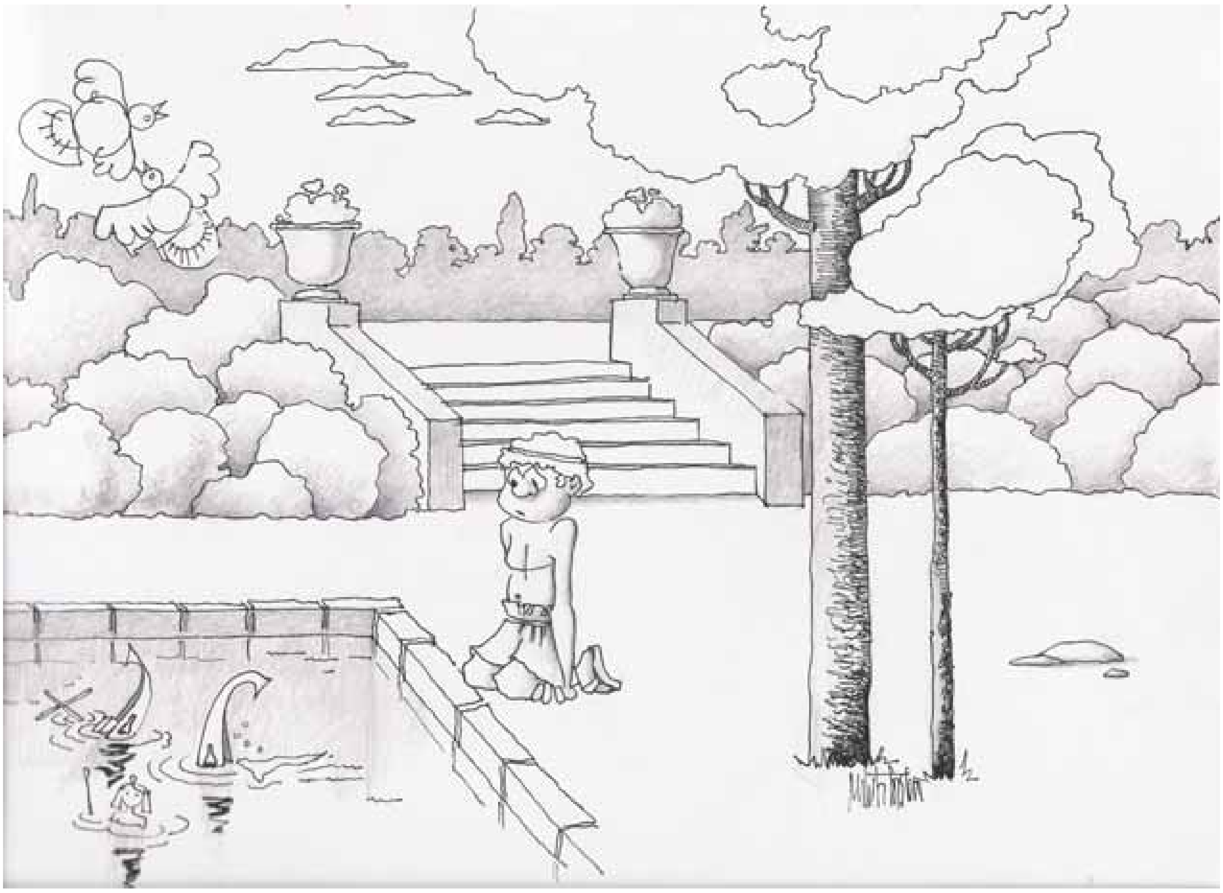
Hoy queremos en esta sección hacernos eco de algunos de esos momentos importantes en la historia, que sin embargo suelen mantenerse en el olvido.

280 a. C. El niño Euclides suspende el examen de quadrivium y tiene que pasar todo el verano estudiando. Este hecho se debió a que como los profesores explicaban de viva voz, muchos de ellos mientas paseaban, Euclides no tenía buenos manuales para estudiar (era un poco penco cogiendo apuntes). Años más tarde decidió escribir sus famosos Elementos para que los estudiantes futuros no tuvieran ese problema. No debió hacerlo muy mal, cuando generaciones de descendientes vivieron gracias a los royalties de dicha publicación.

José Muñoz Santoja

590 a. C. Thales de Mileto, uno de los siete sabios de Grecia, pierde toda la fortuna que consiguió años antes al acaparar casi todo el aceite de oliva de un año, que él había predicho como especialmente abundante en la cosecha de aceitunas. En esta ocasión pronosticó que se iba a poner de moda el color pistacho en las túnicas de gala, por lo que hizo gran acopio de este suculento fruto seco. Sin embargo, el color que finalmente revolucionó la moda fue el color azul petróleo.

270 a.C. El conocido matemático griego Arquímedes observa con consternación cómo es incapaz de mantener a flote los barcos de juguete de sus soldaditos egipcios. Ello le marcaría de tal forma, que años más tarde dedicaría muchos esfuerzos a estudiar ese problema.



262 a.C. A pesar de lo anterior, y dado que Arquímedes continuaba sin poder mantener a flote sus barcos, investigó la forma de impedir que los barcos de los demás flotaran. Lo que comprobaron con gran pesar los romanos al invadir Siracusa.

105. El niño Ptolomeo se divierte sobremanera, cuando su padre lo agarra por los brazos y, girando rápidamente sobre sí mismo, hace que Ptolomeo vuele alrededor de él. Como además su padre solía decirle cariñosamente que Ptolomeo era “su sol”, no es raro que años más tarde investigara su visión geocéntrica del universo, que durante muchos siglos defendió que el Sol giraba alrededor de la Tierra.

1614. El famoso matemático Fermat es reprendido por su maestro, debido a su manía de escribir en los márgenes de sus libros de texto en lugar de en su cuaderno de trabajo. A pesar de ello, dicha manía no le desaparecería con los años. Esto último unido a su tendencia a no gastar papel limpio, le llevó a hacer referencia a su teorema en un margen, lo que ha traído de cabeza a los matemáticos durante cuatro siglos.

1572. El muy poco conocido científico maorí, Kaò Haê Ote, resulta muerto tras recibir en la cabeza el fuerte impacto de un coco, desprendido del cocotero bajo el que pretendía sentarse a la sombra para digerir la comida. Si hubiese tenido la cabeza un poco más dura, o hubiese elegido otro árbol de fruta más blanda, podría haber descubierto la Ley de la Gravedad un siglo antes que Isaac Newton.

José Muñoz Santoja

1660. La sociedad de Moneda y Timbres francesa nombra miembro honorario al matemático Pascal, por el gran auge dado a la citada empresa debido a la amplia relación epistolar entre el citado matemático, y los afamados Fermat y el Caballero de Meré.

Antes de acabar este artículo quiero dar las gracias a mi amigo y catedrático de Dibujo en mi instituto, Antonio de Castro Jiménez, que ha plasmado divinamente algunas de mis ideas en los dibujos que aparecen. Indudablemente ellos han mejorado la presencia plástica y visual de estas páginas.

También quiero agradecer a Dácil Jiménez López la creación del precioso y divertido logotipo que va a caracterizar a esta sección a partir de ahora.

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

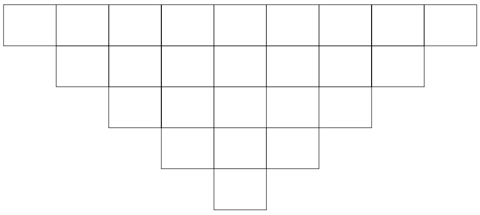
Diciembre de 2006, Número 8, páginas 113-117
ISSN: 1815-0640

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Problema[1]

Considera un tablero de 25 casillas como el que se muestra en la figura.



En cada una de las casillas de la primera fila se escribe una letra A o una letra B y luego se completa escribiendo las mismas letras, de acuerdo con la siguiente regla: se eligen tres casillas consecutivas de la primera fila y se escribe debajo de la casilla del centro de éstas, en la segunda fila, la letra que aparece más veces en las 3 casillas escogidas. Así se completa la segunda fila y se continúa con las siguientes.

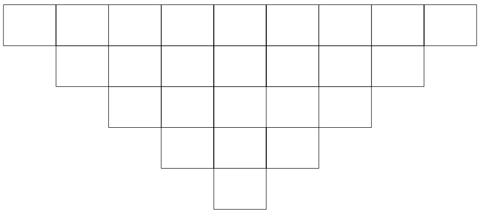
¿Cuál es la mínima cantidad de letras A que se debe escribir en la primera fila para asegurar que, en cualquier orden en que éstas se escriban, siempre se tenga una letra A en la casilla de la última fila?

Este es un problema de carácter lúdico, que es natural comenzar a resolverlo por ensayo y error. Ciertamente, es fundamental entender bien lo que se está pidiendo y puede usarse muy bien para aclarar algunos conceptos relacionados con la lógica y la formulación de un teorema. Una manera de explotar sus potencialidades es –como lo hicimos en un taller con profesores– presentándolo por partes, considerando actividades individuales y actividades grupales, como se muestra a continuación:

[1] Problema creado por Jorge Tipe, ex olímpico peruano, actualmente estudiante universitario. Se propuso en la fase final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemáticas del Perú, en noviembre del 2006.

Situación

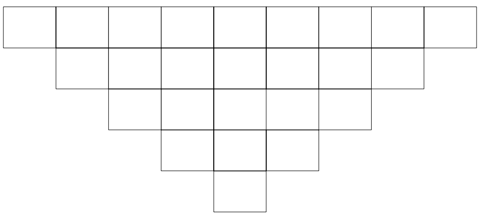
Se tiene un tablero de 25 casillas como el que se muestra en la figura.

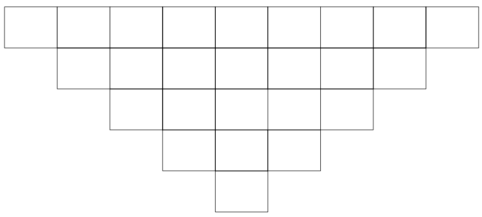


En cada una de las casillas de la primera fila se escribe una letra A o una letra B y luego se completa escribiendo las mismas letras, de acuerdo con la siguiente regla: se eligen tres casillas consecutivas de la primera fila y se escribe debajo de la casilla del centro de éstas, en la segunda fila, la letra que aparece más veces en las 3 casillas escogidas. Así se completa la segunda fila y se continúa con las siguientes.

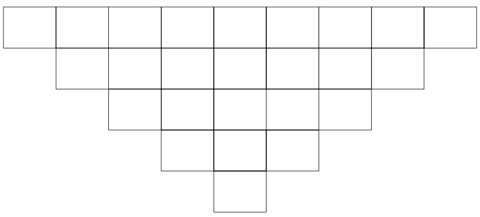
Para trabajo individual

a. Muestra dos posibles formas de completar el tablero.





b. Escribe la letra A en siete casillas cualesquiera de la primera fila y completa el tablero[2].



[2] El lector queda invitado a desarrollar las actividades pedidas, e imaginándose varios participantes trabajando individualmente, hacer la actividad *b* de varias formas

Para trabajo grupal (grupos de dos o tres participantes)

a. Escribiendo la letra A en siete casillas de la primera fila, ¿se puede **asegurar** que se obtendrá una letra A en la casilla de la última fila?

b. ¿Cuál es la mínima cantidad de casillas de la primera fila en las que debe escribirse la letra A para **asegurar** que, en cualquier orden en que éstas se escriban, siempre se tenga una letra A en la casilla de la última fila?

c. Con base en el análisis hecho para responder la pregunta planteada en *b*, formular y demostrar un teorema, relacionado con la situación planteada.

Comentarios

La actividad *c* se planteará según el nivel de los participantes. Es muy interesante plantearla en talleres con profesores.

Las actividades individuales familiarizan al participante con la situación planteada y dan elementos para responder las preguntas planteadas en las actividades grupales. La experiencia muestra que en los grupos descubren fácilmente que escribiendo la letra A en siete casillas de la primera fila, **no** se puede asegurar que se obtendrá una letra A en la última fila. Es una excelente oportunidad para hablar de lo que es un *contraejemplo*, pues si alguien afirma que escribiendo la letra A en siete casillas de la primera fila se asegura obtener la letra A en la última, para demostrar que tal afirmación es falsa, basta mostrar un caso cualquiera en el que se escriba la letra A en siete casillas de la primera fila y se obtenga la letra B en la última fila. Es oportuno conversar con los participantes, replanteando la primera pregunta grupal usando la expresión "*es suficiente*". Las experiencias llevan a concluir que **no es suficiente** tener siete casillas con la letra A en la primera fila para obtener A en la última fila. Según el nivel de los participantes, puede ser oportuno hacer comentarios relacionados con las proposiciones compuestas de la forma "*si p entonces q*", que se simbolizan $p \to q$, en las cuales "*p* es condición suficiente para *q*" y "*q* es condición necesaria si se cumple *p*"

Análogamente, pensando en responder la segunda pregunta grupal, es claro que escribiendo la letra A en las nueve casillas de la primera fila, siempre se obtendrá la letra A en la última fila; o dicho de otra manera, **es suficiente** tener la letra A en las nueve casillas de la primera fila para asegurar tener una A en la última; también se podría enunciar en una forma más usual ("*si… entonces…*"):

"si en todas las casillas de la primera fila se escribe la letra A entonces en la casilla de la última fila obtendremos una A"

Sin embargo esto es similar a decir que es suficiente que un paralelogramo tenga cuatro ángulos interiores rectos para que sea un rectángulo; o. en la forma "*si … entonces …*":

"si un paralelogramo tiene sus cuatro ángulos interiores rectos entonces el paralelogramo es un rectángulo"

La similitud está en que ambas proposiciones son verdaderas pero no son útiles o interesantes por ser muy evidentes. Los teoremas de la forma "*si… entonces…*" son proposiciones verdaderas que establecen una o más condiciones suficientes, y son más útiles o interesantes en la medida que la afirmación no sea tan evidente; por ejemplo,

"si un paralelogramo tiene un ángulo interior recto entonces el paralelogramo es un rectángulo"

La pregunta planteada en *b* lleva a buscar una relación lógica que vaya "más allá de lo evidente". Si las casillas de la primera fila las numeramos del 1 al 9, de izquierda a derecha, al escribir la letra A en las casillas 4 y 5 ó en las casillas 5 y 6, se puede ver fácilmente que aunque en las siete casillas restantes se haya escrito la letra B, siempre se obtendrá A en la última fila Podría pensarse entonces que dos es la mínima cantidad de casillas de la primera fila en las que debe escribirse la letra A, pero leyendo con cuidado la pregunta *b*, se encuentra que es acerca del número mínimo de casillas en las que se escriba la letra A, **en cualquier orden**, por lo cual, dos casillas no es la respuesta correcta, ya que se estaría exigiendo que se escriba en las casillas 4 y 5 ó 5 y 6, con lo cual ya el orden no es cualquiera. Por otra parte, fácilmente se puede construir un contraejemplo, pues basta escribir A sólo en las casillas 1 y 9 (y obviamente B en las siete casillas restantes) para obtener B en la última fila.

Como ya se vio que con siete letras A en la primera fila no se puede asegurar la obtención de A en la última fila, la respuesta a la pregunta *b* no puede ser siete. Más aún, no puede ser siete ni menor que siete, pues en tales casos en la primera fila habría por lo menos dos casillas con la letra B y bastaría que tales casillas sean la 4 y la 5 ó la 5 y la 6 para que inevitablemente se tenga B en la última fila.

En consecuencia, sólo resta analizar qué pasa al escribir la letra A en ocho casillas de la primera fila. En tal caso sólo se escribirá B en una casilla y en todo trío de casillas consecutivas siempre aparecerá más veces la letra A, por lo cual es imposible que en la segunda fila haya alguna casilla con la letra B y como resultado final, en la última fila se tendrá siempre la letra A.

Finalmente, podemos dar una presentación "matematizada" de lo analizado respecto a la situación planteada:

***Lema 1*: Si se escribe la letra A en ocho casillas cualesquiera de la primera fila entonces se obtendrá la letra A en la última fila

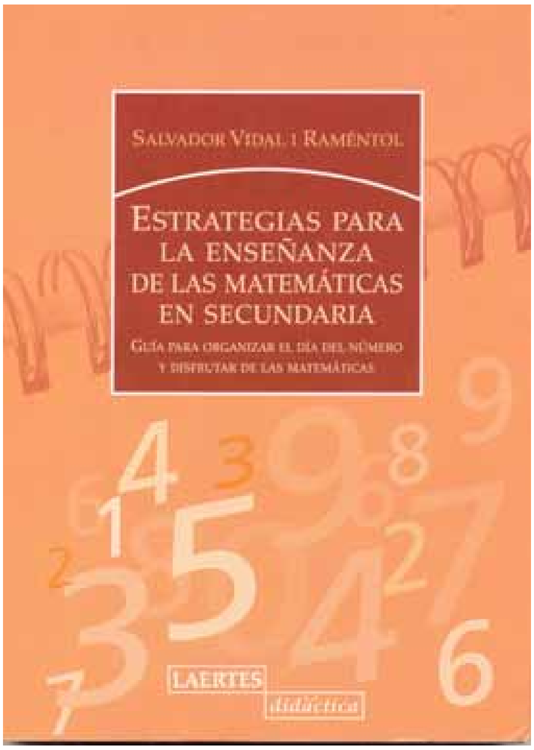
***Lema 2*: Si se escribe la letra A en siete o menos casillas cualesquiera de la primera fila, no se puede asegurar que en la última fila se tendrá la letra A.

***Teorema*: El mínimo número de casillas de la primera fila en las que debe escribirse la letra A, en cualquier orden, para asegurar que se obtendrá A en la última fila, es ocho.

La demostración de los lemas se ha hecho con detalle, y la del teorema es consecuencia de ambos lemas. El lema 1 garantiza que con la A en ocho casillas cualesquiera de la primera fila se asegura la A en la última, y el lema 2 garantiza que ocho es el número mínimo.

El lector queda invitado a pensar en una situación similar generalizando la idea, con *n* casillas en la primera fila. ¿Cómo serían los lemas y teorema correspondientes, y sus respectivas demostraciones?

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Libros
Diciembre de 2006, Número 8, páginas 119-126
ISSN: 1815-0640



Estrategias para la enseñanza de las matemáticas en Secundaria

Autor: Salvador Vidal i Raméntol

Editorial: LAERTES S.A. de Ediciones, Barcelona

Año: 2005

143 páginas

ISBN: 84-7584-557-6

La obra parte de la gran preocupación que se tiene en la comunidad educativa por la actitud no muy favorable de los alumnos hacia las matemáticas y de la tesis doctoral del autor *Día del Número, motivació de la matemàtica*.

Este libro subtitulado Guía para organizar el día del número y disfrutar de las Matemáticas aporta interesantes reflexiones acerca de algunas teorías generales, estrategias prácticas y técnicas de motivación en el aula así como de técnicas de grupos y la autoestima de los alumnos, además de explicar el desarrollo de una experiencia Día del Número realizada en un colegio de Secundaria y la propuesta de metodología empleada durante 10 años en un cursillo de escuelas de verano.

La idea central de toda la obra es que los alumnos deben disfrutar haciendo matemáticas.

El libro se estructura en ocho capítulos:

1. Introducción

2. Teorías generales de la motivación

3. Estrategias prácticas y técnicas de motivación en el aula

4. Motivación en el aula

5. Dinámica de grupos

6. Autoestima

7. Día del Número

8. Análisis cualitativo de la experiencia

Bibliografía

En el *Prólogo* el Dr. Alberto Arbós, Vicerrector de la Universidad Internacional de Catalunya, indica que el libro es fruto de la preocupación actual por la investigación-acción como metodología de investigación en las instituciones educativas y de la preocupación del autor por divulgar la ciencia y las matemáticas en particular. El trabajo concreto surge de la tesis doctoral del autor "Día del Número, motivación de la matemática".

El planteamiento que propone de matemática lúdica como medio, a través de la Fiesta, y no como fin, ya que sitúa el objetivo de aprender matemáticas y de la superación de las mismas como un instrumento al servicio del aprendizaje de las competencias vitales para el alumno, es también un medio para los estudiantes disfrutar.

En la *Introducción* el autor sitúa la experiencia realizada, la justifica, explica el diseño los objetivos, la metodología y otros aspectos como los relativos a actitudes del maestro y del alumno y la incidencia en la de los estudiantes de las actitudes de la propia familia y de la del profesor.

En el segundo capítulo *Teorías generales de la motivación* define la motivación como energía que orienta la vida humana hacia un objetivo, algo que nos interesa, que nos puede satisfacer una necesidad, y es susceptible de ser activada (produciendo motivación intrínseca o extrínseca) o desactivada (produciendo insatisfacción).

Presenta una breve referencia a la teoría de Maslow "jerarquía de las necesidades", según la cual todas las personas al desarrollar su trabajo queremos dejar satisfechas ciertas necesidades que están jerarquizadas en cinco niveles: los dos primeros relativos a las necesidades fisiológicas, el tercero atañe a las necesidades sociales y los dos últimos a las necesidades de autoestima y autorrealización. Así mismo indica que la Teoría de Elton Mayo describe la importancia de las relaciones humanas en el trabajo. Finalmente, cita la Teoría de Herzberg o del modelo dual de la motivación basada en dos factores: un elemento de mantenimiento (son las manifestaciones de factores externos al trabajo que producen insatisfacción en el caso de no estar cubiertas) y otro de motivación (que hacen resistencia al mismo trabajo y producen satisfacción si están satisfechas).

Ahonda en el tema de la motivación en el capítulo 3 *Estrategias prácticas y técnicas de motivación en el aula.* Con relación a las estrategias de motivación en la clase abarca dos niveles: conquista de la atención (comunicar la justificación racional de los objetivos, despertar la curiosidad, crear disonancia, modificar el medio físico de aprendizaje, variar las pautas de instrucción, variar los canales sensoriales, usar el movimiento, usar sistemas de comunicación de forma matizada) y conquista de la participación (interrogatorio, refuerzo positivo, realimentación creciente, expectativas de éxito y representación de roles).

Como técnicas de motivación en el aula indica la correlación con la realidad (necesaria entre lo que se enseña y la realidad circundante), la victoria inicial (al hacerles preguntas fáciles a los alumnos), el fracaso inicial (planteando preguntas que sólo son en apariencia fáciles y que provoca respuestas erróneas en especial al realizarlas los alumnos más capaces y despiertan en los menos capacitados, intrigas que favorecen el desarrollo de la clase), tener en cuenta la problemática de las edades, el uso de acontecimientos actuales de la vida social, participación del alumno, autosuperación, voluntad de aprobación, elogios y censuras (usados inteligente y oportunamente), uso de material didáctico, preocupación por las necesidades del alumno que supone conocimiento de la utilidad mediata e inmediata de la materia, compañerismo, conocimiento preciso de los objetivos para conseguir, hecho poco habitual con el estudiante, y, que en palabras de autor "es desalentador el estudio de cualquier cosa sin noción del punto de llegada", reducción de los factores negativos y aumento de los positivos, utilización de las aspiraciones del alumno, trabajos graduados e interés por el educando. Como se puede observar algunas de las técnicas están íntimamente relacionadas con otras, pero así las ha expresado el autor.

Dada la importancia que da a la personalidad e influencia del maestro propone, a modo de síntesis, recomendaciones para que el profesorado actúe positivamente y algunas ideas sobre lo que el maestro no debe hacer.

Para incorporar al proyecto educativo objetivos motivacionales propone dos líneas de actuación complementarias: la que implica un planteamiento a realizar desde el centro (todo el equipo docente estudie y planifique las grandes líneas de intervención que favorezcan la aparición de los patrones motivacionales, previamente propuestos) y la que el maestro desarrolla en el aula (trabajando la organización de la actividad con el fin de que las competencias individuales signifiquen una contribución a los objetivos del grupo).

Finalmente, el autor en este capítulo llega a presentar un esquema de tipología de estereotipos de maestros: enemigo, falta de base, payaso, egocéntrico, sabio y nervioso.

El capítulo 4 *Motivación en el aula* comienza con una muy breve referencia a la investigación didáctica en el área de matemáticas en la enseñanza primaria, para pasar a referenciar de nuevo dos teorías de las indicadas en el capítulo 2 (las de Maslow y Herzberg) y las de "Y" de Douglas Mc Gregor, que aprovecha los recursos humanos y cree en los alumnos y en el grupo como estrategia de acción positiva, y, la de V. Vroom basada en la idea de que todo esfuerzo humano se realiza con la expectativa de conseguir éxito.

Termina el capítulo con tres ejemplos prácticos (para alumnos de 11, 12 y 13 años, respectivamente), para mejorar la actitud hacia las matemáticas: el primero consiste en calcular el presupuesto de la reforma de su baño, el segundo, modificar la decoración de su habitación y el tercero, calcular cantidades y el precio total de su comida, al confeccionar los menús para tres días de una salida de convivencia.

En el capítulo 5 se dedica exclusivamente a *Dinámica de grupos*, el autor recuerda a Kurt Lewin que introdujo el término de dinámica de grupos el año 1944 para designar la evolución y los fenómenos de los grupos, así como los ocho principios básicos para guiar el aprendizaje del trabajo en grupo de Jack R. Giba. También considera las técnicas de grupo como instrumentos para lograr el objetivo del grupo y expresa algunas normas generales a tener en cuenta, y, como considera que hace falta un cambio de actitudes por parte de los alumnos, hace un listado de las mismas. Con relación al conductor del grupo hace una distinción entre el rol del docente tradicional y el de conductor de grupo y muestra la necesidad e importancia del conocimiento de la dinámica de grupos e indica distintas técnicas para la formación de grupos. Plantea diferentes roles dentro del grupo, tanto para el tutor como para los miembros del grupo completo. Hace referencia a un artículo de Fabra que enumera una serie de posibilidades para los potenciales usuarios. Termina con la sugerencia de tener en cuenta las variables que implica esta técnica y presenta un cuadro mostrando las interacciones entre los términos tema (fácil o difícil) y agrupación (pequeño o gran grupo).

Autoestima, energía que nos permite ejecutar los trabajos más variados con la misma seguridad de conseguir el éxito (Lindelfield, 1996) es el título del 5º Capítulo. Primero aborda la relación entre los educadores y la autoestima de sus alumnos, luego se centra en la importancia de tener una buena autoestima; señala que comprender y aprender aumenta la autoestima y posteriormente apunta cómo mejorar la autoestima en los centros educativos y la relación de la familia con la autoestima e indica cinco condiciones para aumentarla: sentirse seguro, capaz, importante, único y acompañado. Termina el capítulo con una referencia a los autores Gairín (Las actitudes en educación, 1990) y Beltrán (Psicología educacional, 1985), indicando algunos puntos esenciales para la autoestima.

Desde la perspectiva de didáctica de las matemáticas el capítulo más interesante es el 7, *Día del Número*, guía didáctica que le ha surgido al autor como necesidad para motivar las matemáticas. Se decidió a organizar esta Fiesta del Día del Número porque todos los departamentos de la escuela en la que trabajaba tenían mucha vitalidad y preparaban diversas actividades para hacer más atractivas sus asignaturas. Los miembros del departamento reflexionaron acerca de qué podrían organizar para que los alumnos disfrutaran haciendo matemáticas. Su objetivo no era sólo aplicar las matemáticas al mundo real sino ir más allá, se trataba de hacer conscientes a los alumnos de la necesidad de que vivir y vivir cada día mejor lleva a querer conocer el lenguaje que nos facilita la vida, las matemáticas, el lenguaje de la ciencia.

Interrogándose acerca de lo que querían hacer explicitaron unos objetivos, propusieron sugerencias para desarrollar la experiencia, hicieron una propuesta de juegos y decidieron lo que tenían que hacer los maestros y los alumnos antes, durante y después de la experiencia. Posteriormente plantearon con detalle el esquema de la organización, temporal, espacial y de contenidos de la experiencia.

El capítulo continúa con las encuestas a los maestros y a los alumnos así como con la valoración de las respuestas.

Con relación a los recursos utilizados aparecen dos pregones de los primero y segundo días del número y las referencias a la película de Donald en el país de las Matemáticas, para el primer año, y un cuento del Día del Número, para el segundo. Se muestra la valoración de las técnicas de motivación respecto al objetivo general (disfrutar de las matemáticas) y como se hizo un cursillo en las escuelas de verano de Blanquerna a la que asistieron 250 maestros “Día del Número, motivación de las matemáticas”durante 10 años. Se expresa con detalles el desarrollo de las cinco sesiones y de la metodología empleada para terminar con la valoración de los cursillos de verano y la conclusión global a la fiesta del número que "hacía falta hacer unas matemáticas más ligadas a la experiencia, realidad necesidad y utilidad".

La primera sesión comienza con una adivinanza y se explica el proceso hasta desarrollar la experiencia, los objetivos de la misma y se proponía definir nuevos objetivos y hacer sugerencias, además de hacer la dinámica de grupo *el juego de los cuadrados,* completando el trabajo con un foro sobre un audiovisual de motivación. Para terminar se les pedía a los profesores que pensaran acerca del trabajo realizado en la sesión. El resto de las sesiones (cuatro) comenzaron todas con dos minutos de silencio para hacer gestión mental y recordar la sesión anterior. En la sesión segunda se explicó la taxonomía como necesidad de una pedagogía científica y las hojas de orientaciones didácticas. Se hicieron grupos y analizaron los objetivos e hicieron aportaciones. Como dinámica de grupo hicieron el *juego de los oficios.* Se comentaba cómo se había organizado en las clases el Día del Número para que ellos pensaran cómo se les ocurriría hacerlo. Se les pasaba un vídeo realizado en la escuela el Día del Número, trabajaron en grupo e hicieron la puesta en común; de nuevo tenían que pensar en lo que habían hecho en esta sesión. La tercera sesión comenzó también con los dos minutos de silencio y se comentaron objetivos específicos, de procedimientos y de actitudes, valores y normas, que se usaban en la escuela. Nueva dinámica de grupo: *clínica del rumor.* Comenzaban a trabajar en el Día del Número que celebrarían en la propia escuela de verano. Se les aportaba libros de entretenimientos, trozos de diarios, revistas matemáticas, etc. También trabajos hechos por los alumnos de la escuela. Realizaron un panel integrado para que los grupos no hicieran lo mismo. Como vídeos se les pasó *Ojo matemático I y II* (fragmentos) y *La geometría a la plaÇa dels Països Catalans.* En la cuarta sesión se comentó lo que hacía falta que hicieran los alumnos antes, durante y después del Día del Número y qué se podía evaluar. Se les pasó la Encuesta a los maestros y se les pidió que elaboraran una para hacérsela a los alumnos. Se siguió trabajando en lo necesario para celebrar el Día del Número y se les pasó el vídeo *Las mates al camp del BarÇa.* Se les vuelve a recordar la necesidad de la gestión mental acerca de lo vivido ese día. En la quinta y última sesión algunos se entusiasmaron tanto con la gestión mental que pidieron información para profundizar en el tema. Terminaron de preparar el Día del Número y lo comenzaron a celebrar. Se hizo la encuesta del cursillo y se vio la película de Donald en el país de las matemáticas de Walt Disney. Se hizo un foro de la película y la despedida. Las personas expresaron su satisfacción que después se vio corroborada en las encuestas.

El autor reserva el último capítulo (el 8º) para hacer un *Análisis cualitativo de la experiencia* y afirma que "queda demostrado que a nivel cualitativo la actitud de los alumnos hacia las matemáticas después del Día del Número mejora sustancialmente puesto que es una fuente de motivación".

Termina el libro con unas conclusiones de la experiencia en las que constata que a lo largo de los años el disfrutar haciendo matemáticas es un hecho y era lo que se pretendía. Además se expresa que se han conseguido otros objetivos como: darse cuenta que en la vida cotidiana se hace un uso continuo de las matemáticas; ayudar a organizarse en los juegos y contribuir en responsabilizar en el control y marcha de los mismos; estimular al niño que tiene dificultades para el aprendizaje de las matemáticas razonadas; estimular la creatividad a la hora de inventar un juego; ayudar a autocontrolarse ante los resultados o ante las normas; interesarse por curiosidades numéricas; aprender juegos nuevos.

Existen otras conclusiones referentes a las preguntas a las que se pensaba responder el autor: ¿Podemos cambiar la actitud de los alumnos hacia las matemáticas con una buena motivación? ¿Puede mejorar el trabajo que hacemos en matemáticas aplicando técnicas de grupos? ¿Si mejora la autoestima de los alumnos, mejorará su rendimiento en matemáticas? ¿La afectividad hacia las matemáticas puede depender del maestro que imparte la materia? ¿Hay alguna correlación entre los alumnos que encuentran atractivas las matemáticas y las notas que sacan? Las respuestas han sido todas positivas a excepción de las del último interrogante ya que después del análisis cuantitativo se ve, en general, que no. Sólo hay cierta correlación entre los alumnos a los que les parecían atractivas las matemáticas y las notas que sacaban.

La bibliografía no corresponde exactamente con los títulos expresados a lo largo de la obra, pero sí son relativos a los temas tratados en la misma.

Los *Anexos* son variados y presentan actividades para trabajar individualmente y como grupo, tanto en parejas como en pequeño y gran grupo, hecho metodológico muy importante sobre todo como modelo a profesionales que quisieran repetir la experiencia o diseñar alguna similar.

Las fichas, a las que titula técnicas, además de explicitar el tipo de agrupamiento también indican la temporalización, propuesta de trabajo, en cuanto a materiales auxiliares, por ejemplo, y sugerencias. Las técnicas son de conocimiento y reflexión sobre sí mismos y sobre sus compañeros. Utiliza frases célebres de varios autores, hecho también importante en la formación en el nivel de secundaria. Existe también trabajo acerca no sólo de mejorar la autoestima sino incluso de detectar los alumnos que la tienen baja. Termina el apartado de las técnicas con una serie de juegos y situaciones problemáticas para resolver muy distintos pero interesantes y fáciles de llevar al aula.

En definitiva, es un libro práctico cuyo contenido es de fácil aplicación en el aula y no dudamos que ciertamente motivante para el profesorado y el alumnado, aunque observamos que no está muy cuidada y presentada de manera homogénea la bibliografía y siendo un libro dirigido, se supone, a profesores y alumnos, este aspecto debe ser tenido en cuenta.

En la misma línea de observación se detectan algunos errores ortográficos, ausencia de letras, signos de puntuación, concordancia, etc.

Estamos de acuerdo con la expresión que aparece en la contraportada que indica que es una experiencia exportable a cualquier nivel y de fácil aplicación que pretende contribuir a mejorar el fascinante mundo de las matemáticas.

Reseña: Mª Mercedes Palarea Medina
Universidad La Laguna
Tenerife, España

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 127-131
ISSN: 1815-0640

Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Uso de Tecnología para la enseñanza actual de la Matemática

Elisabeth Magdalena Ramos Rodríguez y Soledad Baquedano Jer

Resumen

Resumen: Este trabajo consiste en desarrollar, durante una semana, competencias matemáticas y tecnológicas en 80 estudiantes recién ingresados a las Carreras de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, mediante Talleres en los que se incluye dos componentes, uno directamente relacionado con el manejo de tecnología y otro de índole matemático.-ambos factores necesarios para el estudio actual de las Matemáticas de la Enseñanza Superior-.

Abstract

This work consists in developing, during one week, math and technology competitions between 80 students recently admitted to the Pontificia Universidad Católica de Valparaíso majoring in Engineering, through workshops which include two components, one directly relating to the use of technology and the other one with the use of math, both factors which are necessary for the modern study of Mathematics of higher education.

Introducción

El primer componente, de índole tecnológica, se alcanza mediante el manejo de tres tipos de herramientas:

- Espacios virtuales de aprendizaje propios de la Universidad, en las direcciones www.agora.ucv.cl y www.tutoriasvirtuales.ucv.cl.
- Uso de la Calculadora Gráfica Voyage 200.
- Empleo del Software Científico Matemático Scientific WorkPlace.

El segundo componente, de índole matemática, es emprendido a través de actividades que apuntan al esfuerzo lógico, analítico y/o crítico, abordando temas básicos de Cálculo y Álgebra que serán primordiales para el estudiante, a la hora de enfrentar con éxito el primer semestre de Universidad.

Cabe señalar que este Taller no es parte de los cursos oficiales de primer año de Ingeniería, sino que tiene carácter voluntario y complementario. Además, es parte del Programa de Aseguramiento de los Aprendizajes como proyecto de docencia a nivel Institucional.

Se presenta este trabajo considerando los puntos:

I.- Antecedentes e implementación.

II.- Experiencia.

III.- Prolongación.

I.- Antecedentes e implementación

Dentro de las asignaturas de primer año en las Carreras de Ingeniería en la Enseñanza Superior se cuenta los cursos "Cálculo Diferencial" y "Álgebra". Estas asignaturas son enfrentadas por los recién ingresados estudiantes universitarios en formas muy variadas. El proceso de integración de los alumnos al "estudio universitario" es difícil, ya que traen, en su gran mayoría, una mentalidad poco inclinada al esfuerzo y pensamiento crítico y/o analítico. Ello les impide, por ejemplo, enfrentarse exitosamente a problemas matemáticos, relacionados con la Ingeniería, que suelen presentarse en esas asignaturas.

En el contexto descrito, nace este proyecto**.** El proyecto contempló la elaboración y entrega de un Manual a cada estudiante que participó en el taller.

Los temas abordados en el Manual son:

- Taller 1: Internet como herramienta de estudio y Explorando la biblioteca Ágora.
- Taller 2: La plataforma "Tutorías Virtuales" en el Cálculo Diferencial.
- Taller 3: Conceptos Básicos sobre Funciones Reales. Calculadora Gráfica Voyage 200.
- Taller 4: Resolviendo ecuaciones e inecuaciones. Calculadora Gráfica Voyage 200.
- Taller 5: Descubriendo las Representaciones Gráficas de algunas Funciones. Programa "Scientific WorkPlace".
- Taller 6: Una mirada a las expresiones algebraicas y aplicaciones de funciones. Programa "Scientific WorkPlace".

Además, al curso virtual MAT 115, Cálculo Diferencial, ubicado en la plataforma virtual de la Facultad de Ciencias, se le modificaron algunos aspectos para poder ser trabajado de mejor manera por este grupo de estudiantes, de tal manera de ilustrarles el ambiente virtual de los cursos de Matemáticas y Ciencias de la Universidad.

II.- Experiencia

Contempló las siguientes etapas:

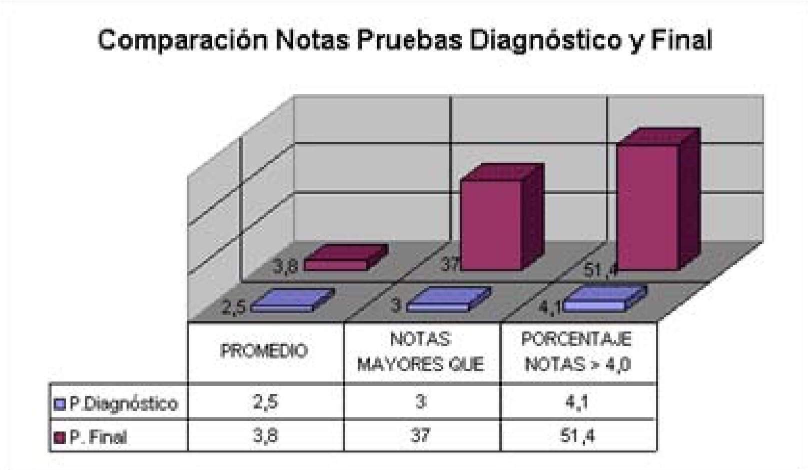
1. Selección de los estudiantes. Esta contempló los subsecuentes tópicos:

- No estar en el listado de estudiantes participantes del curso CIM, Competencias Iniciales en Matemáticas.
- Ser de la Quinta Región.
- Haber seleccionado como primera o segunda opción la carrera en la cual están y ésta debía ser una carrera de la Facultad de Ingeniería.

Con estas características se seleccionó a 85 estudiantes.

2. Inicio Curso “CTM”. Hubo un total de 4 paralelos, en los que asistieron 79 estudiantes en promedio por día. Se inician las actividades. En el primer día, se tomó una prueba de diagnóstico para medir el aprendizaje efectivo de algunos tópicos matemáticos que los estudiantes vieron en la enseñanza media y que volverán a ver en los talleres y próximamente en los cursos de matemática de primer año de Universidad.
3. Término del curso. Se realiza una segunda prueba de matemática, para medir el impacto inmediato del taller con respecto a los tópicos presentados en éste. También se realiza una Encuesta Virtual para medir aspectos del taller, tales como, entre otros, infraestructura adecuada, desempeño e interés de ayudantes y profesores, horarios. (Ver anexo).

Con respecto a las calificaciones obtenidas en las pruebas, se obtuvo un 4.1% de notas suficientes en la prueba de diagnóstico y en la prueba final el porcentaje de notas suficientes es de un 51.4%. Estos resultados se pueden observar en el siguiente gráfico:



	PROMEDIO	NOTAS MAYORES QUE	PORCENTAJE NOTAS > 4,0
P.Diagnóstico	2,5	3	4,1
P. Final	3,8	37	51,4

III.- Prolongación

Los profesores y ayudantes elaboraron una serie de sugerencias y observaciones sobre la actividad desarrollada para ser consideradas en una segunda oportunidad.

1. El material de apoyo para los alumnos (texto guía) resulta de gran utilidad para la actividad.
2. Es una muy buena alternativa la de desarrollar las pruebas virtualmente y ver los resultados de inmediato.
3. Se observó un creciente entusiasmo de los estudiantes durante el desarrollo del curso, lo que se reflejó, por un lado en los puntajes obtenidos en la Prueba de Diagnóstico en comparación con los alcanzados en la Prueba Final, y por otro, en la impresión de inseguridad y desaliento de los jóvenes al término de la Prueba de Diagnóstico y luego las expresiones de satisfacción y seguridad al término de la Prueba Final, considerando que se trataba de los mismos tópicos de la Prueba de Diagnóstico y con el mismo grado de dificultad. Estas pruebas, además de medir los contenidos, tenían por objetivo que el estudiante tomara conciencia del nivel matemático que trae de la enseñanza media y lo importante que es empezar en forma sería y activa el año académico.

Al término del primer semestre de debe realizar un seguimiento sobre:

- El rendimiento obtenido en los cursos de Álgebra y Cálculo durante el semestre por estos alumnos con respecto al universo de sus compañeros.
- La actividad y participación en el Sistema de Bibliotecas (junto con el catastro de las veces que pidieron allí las calculadoras gráficas Voyage 200).
- La actividad y participación en la plataforma Tutorías Virtuales.

De acuerdo a estos resultados, las autoridades de la Universidad decidieron realizar otras versiones del Taller. Una de esas versiones se está llevando a cabo en este semestre académico, y se está planificando una tercera para agosto de este año, esperando beneficiar a más estudiantes con este tipo de iniciativa. Por otro lado, actualmente se está realizando el seguimiento mencionado anteriormente, para así validar el esfuerzo y compromiso en estas versiones posteriores.

Conclusiones

La experiencia obtenida en este trabajo nos sugiere que el uso de tecnología favorece el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, lo cual se manifiesta en el entusiasmo de los estudiantes al abordar los conceptos y en el logro de estos con respecto a las metas establecidas para cada actividad. También se puede visualizar al comparar las calificaciones de la prueba de diagnóstico y la prueba final.

Nuestra próxima meta es un estudio del seguimiento del estudiante para observar el grado de apropiación de los conceptos estudiados, es decir, constatar si la mejora de los estudiantes en sus calificaciones indicó aprendizaje real.

Se propone replicar este tipo de trabajo a otros tópicos de matemática, para verificar si los resultados observados son similares.

Elisabeth Magdalena Ramos Rodríguez, en 1991 ingresa a la Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación como estudiante a la Carrera de Pedagogía en Matemáticas y Computación. Posteriormente comienza sus estudios de postgrado en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso en el Magíster en Matemáticas, iniciando su docencia en esa casa de estudios. Actualmente cursa el Programa de Magíster en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática; además, es integrante del Grupo Ingeniería Didáctica, del Instituto de Matemáticas de la PUCV, y lidera dentro de la misma Universidad proyectos con uso de TIC's tales como las plataformas virtuales.
Email: elisabeth.ramos@ucv.cl

Soledad Baquedano Jer, realiza sus estudios de Licenciatura y Pedagogía en Matemáticas, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, posteriormente, comienza sus estudios de postgrado en el Magíster de Matemáticas, iniciando su docencia en esa casa de estudios. Actualmente cursa el Programa de Magíster en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática.
Email: solebaquedano@yahoo.es

Diciembre de 2006, Número 8, páginas 133 - 136
ISSN: 1815-0640

Por Santiago López Arca y Gonzalo Temperán Becerra

Rectángulo de Juego

Si te digo que voy a referirme a números, medidas, puntos, rectas, ángulos, rectángulos, círculos, esferas… pensarás que el tema elegido para hoy es de matemáticas. Pues no, hablaré de fútbol.

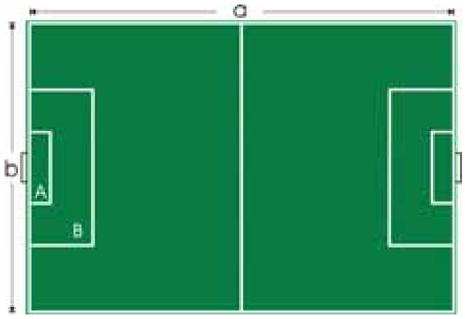
¿Cuántos de los deportes que conoces no podrían existir si prescindimos de un rectángulo o de una esfera? Comencemos por la esfera; es decir, por el balón de fútbol. No estamos ante cualquier esfera. Su peso debe oscilar entre 410 g y 450 g y la presión también está determinada. Su circunferencia máxima varía entre 68 cm y 70 cm; por lo tanto… ¿entre qué medidas oscila el radio de un balón de fútbol reglamentario?, ¿cuánto mide su superficie?, ¿y su volumen?

El balón de fútbol debe ser esférico, pero, ¿es realmente una esfera? Los fabricantes construyen balones a partir de diferentes tipos de piezas, pero todos identificamos el "típico" balón. Fíjate en estas imágenes:



¿Qué son las dos primeras figuras? Descríbelas, di de qué tipo son sus caras y cómo se agrupan en cada vértice. La imagen central se denomina icosaedro truncado, ¿por qué se llama así?, ¿cuántas caras, vértices y aristas tiene?

Y ahora reparemos en las dimensiones del rectángulo de juego, ¿o debiéramos decir rectángulos? ¿Cuántos rectángulos podemos observar en un terreno de juego?



Las líneas de marcación deben tener una anchura máxima de 12 cm. A continuación indicamos las longitudes máxima y mínima entre las que pueden oscilar:

***a**, línea de banda*. Puede tener entre 90 m y 120 m.

***b**, línea de meta*. Oscila entre 45 m y 90 m.

La línea de banda debe ser más larga que la de meta. Para partidos internacionales sus longitudes deben estar dentro de los siguientes márgenes: 100 - 110 m y 64 - 75 m, respectivamente. La *línea media* divide el terreno de juego en dos partes iguales.

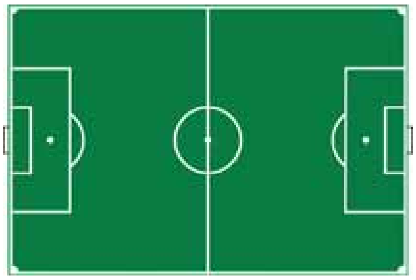
Teniendo en cuenta lo anterior, ¿entre qué valores pueden oscilar las medidas de las superficies de los campos de fútbol?, ¿cuál será la medida de las diagonales de estos rectángulos? Investiga cuáles son las dimensiones del terreno de juego del estadio de tu equipo favorito.

El rectángulo señalado con una ***A*** en el esbozo anterior, se llama área de meta. Para diseñarlo debemos trazar dos segmentos perpendiculares a la línea de meta a una distancia de 5,5 metros medidos desde la cara interior de cada poste de meta. La longitud de estos segmentos es de 5,5 m y sus extremos están unidos por otro segmento paralelo a la línea de meta.

La *meta* se coloca centrada en la línea de meta; está formada por dos postes unidos por un travesaño, deben tener el mismo grosor y anchura que la línea de meta. La distancia entre los postes será de 7,32 m y la distancia desde la cara inferior del travesaño al suelo de 2,44 m. A simple vista, estas medidas parecen un poco raras, pero no olvidéis donde nació el fútbol. ¿Recordáis que un *pie* es una unidad de medida del sistema inglés que equivale a 30,5 cm?

Teniendo en cuenta las informaciones anteriores, contesta a estas preguntas: ¿Cuál es la superficie del área de meta?, ¿cuáles son las medidas de la meta expresadas en pies?, ¿qué proporciones tiene la meta?, ¿cuánto mide la diagonal de la meta?

El rectángulo ***B*** del dibujo es el área *penal*. Para determinar este rectángulo, se trazan dos segmentos perpendiculares a la línea de meta a una distancia de 16,5 metros, medidos desde la cara interior de cada poste de la meta. La longitud de estos dos segmentos es de 16,5 m y sus extremos están unidos por otro segmento paralelo a la línea de meta. ¿Cuál es la medida de la superficie del área penal?



Hablemos ahora de círculos, sectores circulares y segmentos circulares. El punto medio del segmento denominado *línea media* está claramente marcado. Este punto se toma como centro para determinar el *círculo central*. La circunferencia que limita el círculo central tiene un radio de 9,15 m.

En cada área penal, está marcado el *punto penal* situado en la recta perpendicular a la línea de meta, trazada por su punto medio, a 11 m de distancia. Este punto es, por lo tanto, equidistante con los dos postes de la meta. Haciendo centro en el punto penal, con un radio de 9,15 m, se traza un arco de circunferencia para determinar un segmento circular en el exterior del área penal.

Haciendo centro en cada vértice del rectángulo de juego y tomando un radio de 1 m, se construyen, dentro del terreno, las *áreas de esquina*. Son cuatro sectores circulares con ángulo de 90º.

Para finalizar, te proponemos que contestes a las siguientes cuestiones: ¿Cuáles son las medidas respectivas de las superficies del círculo, segmento circular y sector circular que acabamos de describir? ¿A qué distancia está el punto penal de cada uno de los postes?

Tú, ¿fútbol o matemáticas?

Daniel Pereira García.
Tercero de ESO.

Fuentes:

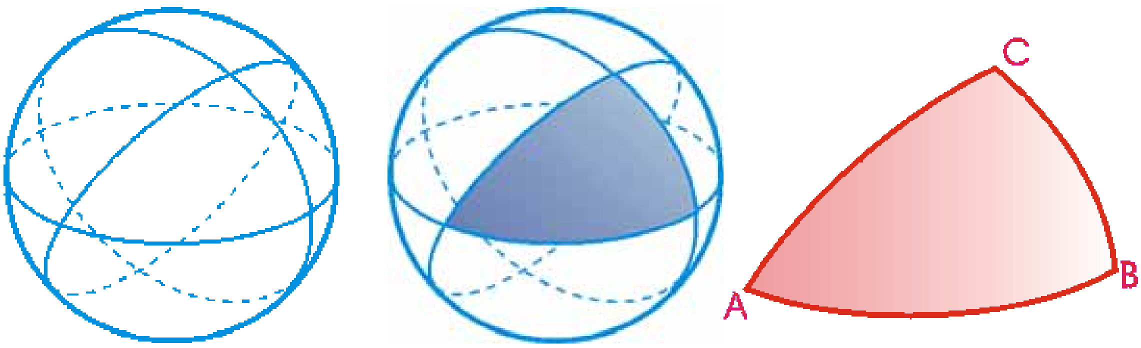
- www.geocities.com/Athens/Delphi/9368/reglas.htm
- http://www.lfp.es/reglasjuego/regla1.htm

Triángulos esféricos

Cuando un plano pasa por el centro de una esfera, ésta queda dividida en *dos hemisferios* y obtenemos como intersección de la esfera y el plano un ***círculo máximo***. Cualquier otro plano que corte a la esfera sin pasar por su centro (y que no sea tangente a ella) determina como intersección un círculo menor.

Dos planos que pasen por el centro de una esfera dividen, lógicamente, el espacio en cuatro *ángulos diedros*. Estos dos planos determinan sobre la superficie *esférica* dos *circunferencias máximas* que se cortan en los extremos de un diámetro común y dividen la superficie esférica en cuatro regiones denominadas *husos* o ángulos *esféricos* que vienen determinados por los cuatro ángulos diedros de partida. La medida de cada diedro se toma también como *medida del ángulo esférico* correspondiente.

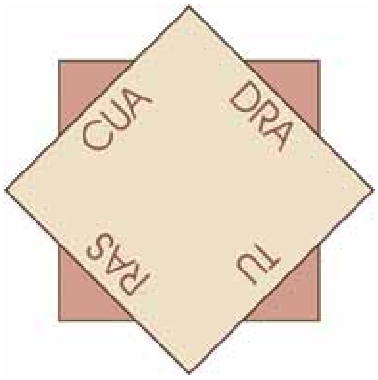
Un *triedro* con vértice en el centro de la esfera determina sobre la superficie esférica una región, limitada por *tres arcos de circunferencia máxima*, que se denomina ***triángulo esférico***.



Un *triángulo esférico* con dos lados iguales se llama *isósceles*; será *equilátero* si tiene los tres lados iguales. Observemos que existen triángulos esféricos *rectángulos,* pero también los hay *birrectángulos* e incluso *trirrectángulos* (en este caso se denominan también *octantes*).

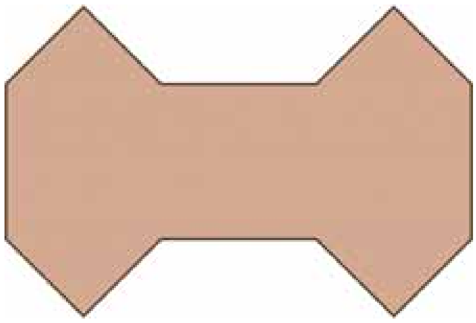
En el caso de los *triángulos esféricos* se cumplen propiedades que pueden sorprendernos mucho (por comparación con las propiedades que se verifican para triángulos planos). Pongamos un ejemplo: *La suma A+B+C de los ángulos de un triángulo esférico está entre 180º y 270º, y no es constante, dependiendo del triángulo*.

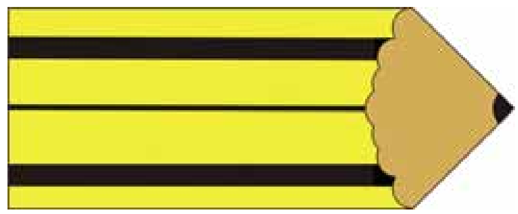
N. S. M. 3º ESO.

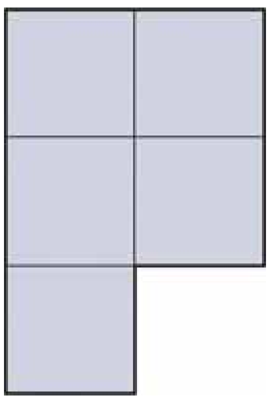


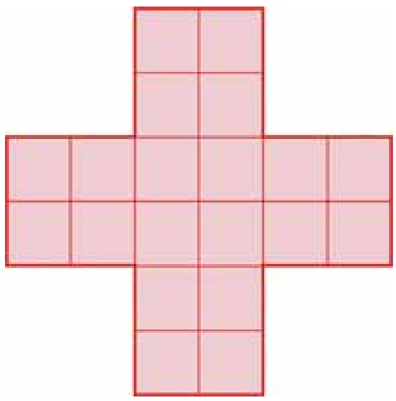
Vamos a denominar ***cuadratura*** a la operación que consiste en construir un cuadrado de área igual a la de la figura dada.

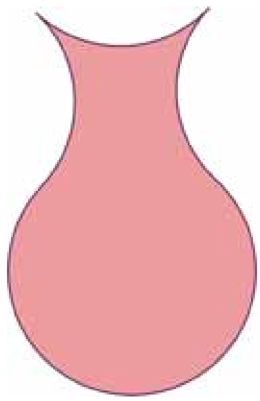
Te proponemos que tomes unas tijeras y, dando únicamente dos cortes rectos, construyas sendos cuadrados a partir de las piezas que obtengas al cortar estas figuras: hueso, lápiz, “P”, cruz y jarrón.











Tres en uno

¿Seremos capaces de diseñar una pieza que encaje en estos tres orificios?

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2006, Número 8, página 137
ISSN: 1815-0640

Normas para publicación en Unión

1. Los trabajos para publicar se deben enviar a union.fisem@sinewton.org. Deben ser originales y no estar en proceso de publicación en ninguna otra revista. Serán remitidos a varios evaluadores y el Comité editorial de la Revista decidirá finalmente sobre su publicación.
2. Los artículos remitidos para publicación deben ser escritos en Word, preferentemente usando la plantilla establecida al efecto (descargar plantilla) y, en todo caso, cumpliendo las siguientes normas: letra tipo **arial**, tamaño **12 puntos**, interlineado simple, márgenes de 2,5 cm. como mínimo en los 4 bordes del papel, tamaño DIN A-4. La extensión no debe ser superior a las 15 páginas, incluyendo figuras, que deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. La simbología matemática necesaria se escribirá con el editor de ecuaciones de Word, se insertará como una imagen o se realizarán utilizando los símbolos disponibles en el juego de caracteres "Arial". Es importante no cambiar el juego de caracteres, especialmente **evitar el uso del tipo "Symbol"** u otros similares.
3. Las **ilustraciones y fotografías** deben estar situadas en el lugar del texto donde deben ser publicadas. Si es posible, los "pie de foto" se escribirán dentro de un "cuadro de texto" de Word (con o sin bordes) que estará "agrupado" con la imagen de referencia. Se deben numerar usando: Fig. 1, Fig. 2,… Tabla 1, Tabla 2,…
4. El artículo deberá comenzar con un **resumen o abstract**, que tendrá una longitud máxima de 6 líneas. Preferiblemente se redactará también en inglés, además de la lengua original utilizada (español o portugués).
5. Teniendo en cuenta el carácter internacional de la revista, se hace indispensable que cuando los autores se refieran a un determinado sistema educativo nacional lo hagan constar expresamente y que siempre que se trate de un nivel educativo se indique la edad normal de los alumnos, lo que permitirá la comparación con el sistema educativo nacional del lector.
6. Los datos de identificación de los autores deben figurar en la última página del mismo documento word que contiene el artículo. Con el fin de garantizar el anonimato en el proceso de evaluación, solamente estarán los **datos identificativos en** esta **última página**. En ella se hará constar los siguientes datos:
   - **De contacto**: nombre, dirección electrónica, dirección postal, teléfono.
   - **Para la publicación**: centro de trabajo, lugar de residencia y/o del centro de trabajo, así como una breve reseña biográfica de unas cinco líneas (lugar y fecha de nacimiento, títulos, centro de trabajo, publicaciones...).
7. Las referencias bibliográficas se incluirán al final del trabajo (y antes de la hoja de datos identificativos) y deben seguir los formatos que se indican a continuación.

Para un libro:

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid.

Bermejo, A. (1998). *La enseñanza de la geometría en la educación primaria.* Editorial Pico Alto, Buenos Aires.

Para un artículo:

Ibáñez, M. y Ortega, T. (1997). "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria". *Educación Matemática* 9, 65-104.

Díaz, C. y Fernández, E. (2002). "Actividades con ordenador para la enseñanza de la suma". *Revista de didáctica de las matemáticas* 19, 77-87.

Para un capítulo de libro:

Albert, D. y Thomas, M. (1991). "Research on mathematical proof". En: Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* 215-230. Kluwer, Dordrecht.

Hernández, G., Juárez, I. y Lorenzo, K. (1998). "Recopilación de datos estadísticos y su tratamiento en la enseñanza secundaria". En: Nuez, M. y Pérez, O. (eds.), *Segundo Congreso Americano de Educación Matemática,* 223-234. Editorial JJ, Caracas.

NOTA: Las normas que se indican en los puntos 2, 3 y 7 pretenden dar uniformidad a los trabajos que se reciban en la redacción y simplificar así el trabajo de composición y maquetación de la revista. Si alguien tiene dudas sobre su aplicación, puede dirigir sus preguntas (lo más concretas posible) a union.fisem@sinewton.org