UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2010, Número 23, páginas 71-91
ISSN: 1815-0640

Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático

Julio César Barreto García

Resumen

En este artículo mostraremos unas extensiones del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica, tomando en consideración el área de las figuras geométricas que están sobre los lados de un triángulo rectángulo y de esta manera ver que se cumple la relación Pitagórica para cualquier tipo de figuras que cumplan cierta condición. En particular, esta extensión la vamos a realizar usando aplicaciones de homotecias a las funciones que se generen de las figuras geométricas, para lo cual cuadratura es lo mismo que decir área.

Abstract

In this article we consider an extension of the classical geometric Pythagoras theorem, taking into consideration the areas of the geometric figures which by on the side of rectangular triangle. In this way we see that the Pythagoras relationship holds for every kind of figures which satisfy certain conditions. In particular, this extension we will make use of dilation applications to the functions that are generated from the geometric figures, for which squaring is the same as saying the area.

Resumo

Neste artigo mostraremos umas extensões do Teorema de Pitágoras em seu acepción geométrica, tomando em consideração o área das figuras geométricas que estão sobre os lados de um triángulo rectángulo e desta maneira ver que se cumpre a relação Pitagórica para qualquer tipo de figuras que cumpram certa condição. Em particular, esta extensão vamos realizá-la usando aplicações de homotecias às funções que se gerem das figuras geométricas, para o qual cuadratura é o mesmo que dizer área.

1. Introducción

El campo de la Didáctica de la Matemática, durante la década de los noventa, considero la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como una simple adquisición de competencias y de habilidades según Carmen G. y Matías C. en la primera referencia. Además, en esa misma época, se amplia el campo de los problemas investigados, hasta entonces muy centrado en los conceptos básicos de las Matemáticas de la enseñanza primaria (que corresponde al “pensamiento matemático elemental” entre los cuales cabe destacar la Didáctica de la Geometría, por ejemplo), a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios.

Este desarrollo de la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el Análisis Matemático, considerando además los procesos asociados de definición, prueba y demostración, ha venido enriqueciendo los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos de aprendizaje de los estudiantes en este nivel donde el pensamiento no solo debe ser más abstracto sino que además debe ser mas formal a la hora de definir los entes involucrados en la teoría y de demostrar los que sean necesarios al momento de desarrollar un tema especifico según Carmen G. y Matías C.

2. Relevancia Del Trabajo Para La Educación Matemática

Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción la cual consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. Según Carmen G. y Matías C. de las cuales tomaremos parcialmente en cuenta sus reflexiones, no se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: La progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente mas psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Además comentan Carmen G. y Matías C. que una de las formas de establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas es considerar que, en las primeras, los objetos se describen como es el caso de homotecias en bachillerato, mientras en las segundas a nivel universitario, se definen y se le pueden dar características superiores como transformaciones. Si nos referimos al lenguaje, en ambos casos se utiliza el lenguaje natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, sea matemático sea del mundo externo, y para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con proceptos[1] operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones.

Carmen G. y Matías C. dicen que al adquirir un concepto matemático se puede describir como construir un esquema conceptual del mismo. Saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: Imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones.

3. Marco Teórico y Calidad Bibliográfica

En los Modelos Cognitivos se considera de acuerdo a Carmen G. y Matías C, por un lado, la definición de un concepto matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podrá distinguir entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (que se suelen

[1] Procepto es una traducción que usa Carmen G. y Matías C. de la expresión original inglesa procept, que proviene de proceso (process) y de concepto (concept).

encontrar escritas en los libros y más aun en manuscritos antiguos), y las definiciones personales que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal. Desde otra perspectiva, una de las razones de la complejidad del conocimiento matemático superior es que, en su mayoría, los conceptos del pensamiento matemático avanzado pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización del estudiante.

> *Sfard (1991) habla de dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: Las concepciones que llama operacionales cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones estructurales cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias ("la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de 'comprender'"), ella considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales (On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, pp. 1-36).*

La acción sobre objetos matemáticos nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con el problema de la dualidad proceso-objeto y la noción de lo que llama precepto. El estudio de un gran número de casos, en todos los niveles de las matemáticas pero especialmente en niveles superiores, en que un proceso y su producto se representan mediante el mismo símbolo, indujo a Tall (1995) a definir el término procepto: "Definimos un procepto como un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos." (Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, Proceedings of PME 19, Recife (Brasil)). Por ejemplo:

- La expresión $f(x) = x^2 - 9$ representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x. Se habla de un procepto "molde".
- En cuanto a las expresiones: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 9}{x - 1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}$

  representan el proceso de tender a un límite y el objeto valor del límite, pero sin incluir el procedimiento de calculo especifico para obtener ese valor. En este caso se trata de un procepto "estructural".

Según Carmen G. y Matías C. de aquí surge la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: Representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría.

4. Metodología y Resultados

Duval (1996, 1999)[2], considera dos características esenciales de la actividad matemática:

> *El cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico". Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función. Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos.*

Se trata de un estudio del Teorema de Pitágoras visto desde una acepción geométrica realizado en diversos eventos de *Educación Matemática* tanto nacionales como internacionales, donde participaron diferentes estudiantes y profesores en esta área. Se diagnostico mediante una serie de actividades en torno a la *deducción* que se ha realizado alrededor de este teorema tan importante para la matemática en general; la extensión la haremos usando propiedades de homotecias, desde un punto de vista geométrico y grafico de funciones polinómicas (lineales como las constantes o las identidad, de valor absoluto, cuadráticas bien sean implícitas o despejadas explícitamente, etc.) hasta ahora definidas previamente.

5. Transformaciones Geométricas

"Comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Dreyfus (1991).

Transformación geométrica es la operación que permite deducir una nueva figura de otra dada. Por tanto, existirán elementos origen y elementos transformados. El interés del estudio de las transformaciones radica en la posibilidad de facilitar la resolución de problemas gráficos de difícil resolución. En estos casos, se aplica una transformación a los datos, convirtiéndolos en otros de disposición más sencilla, con los que se resuelve el problema. Después basta aplicar a esta solución la transformación inversa para obtener el resultado buscado.

Clasificación de transformaciones:

a) Transformaciones **isométricas:** son aquellas que conservan las dimensiones y los ángulos entre la figura original y su transformada. También se llaman movimientos. Ejemplos: simetrías, traslación, giro.

b) Transformaciones **isomórficas** o **conformes:** son aquellas que sólo conservan la forma; es decir, en ellas los ángulos de la figura original y de la transformada son iguales y las longitudes proporcionales. Por ejemplo, la homotecia.

---

[2] *(1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 6, 3, pp. 349-382. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. Actas del PME 23, pp. 3-26.*

c) Transformaciones **anamórficas:** son aquellas que cambian la forma entre la figura original y la transformada. Por ejemplo, la inversión y la homología.

Homografía

Se denomina homografía a cualquier transformación proyectiva que establece una correspondencia entre dos formas geométricas, de modo que a un elemento, punto o recta, de una de ellas le corresponde otro elemento de la misma especie, punto o recta de la otra.

Homología

Es una transformación homográfica resultante de efectuar una proyección desde un punto, en la que a cada uno de los puntos y de las rectas de una figura plana le corresponden, respectivamente, un punto y una recta de su figura homológica, de modo que se cumplan unas determinadas condiciones.

Cuando tenemos el centro O, dos puntos homólogos y el eje. Sirve para obtener dos figuras homólogas. El sistema se usa para hallar secciones en diédrica, veamos la siguiente figura:

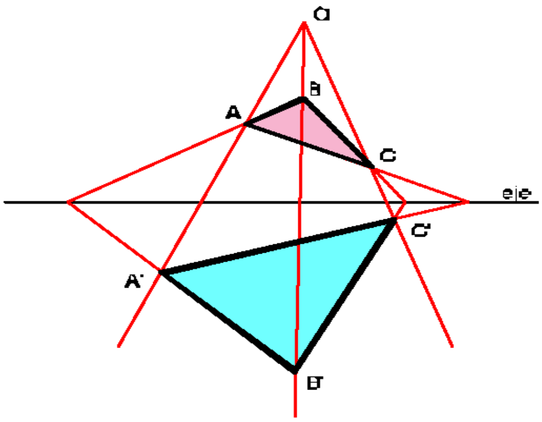

Figura 1: Homología

Afinidad

Es un caso particular de homología. Se dice que tenemos una afinidad homológica o simplemente afinidad cuando se conocen dos puntos homólogos y el eje, encontrándose el centro de homología en el infinito, veamos la siguiente figura:

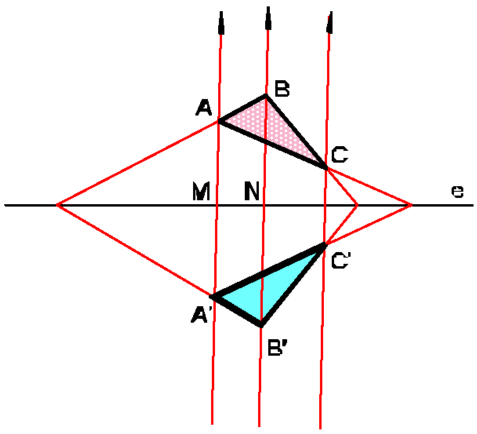

Figura 2: Afinidad

Homotecia

En una homotecia se dan el centro, el eje que se encuentra en el infinito y dos puntos homólogos, veamos la siguiente figura:

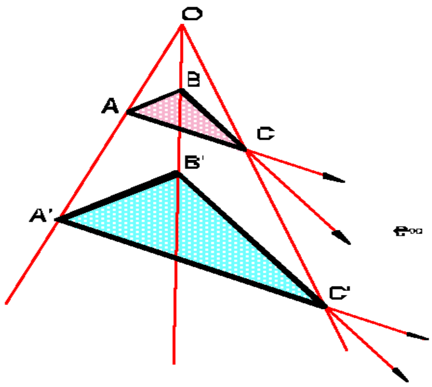

Figura 3: Homotecia

En la figura vemos que si dos triángulos que no son iguales, tiene sus lados respectivamente paralelos son homotéticos. Además, se puede probar que dos figuras homotéticas son semejantes, como un caso ilustrativo veremos, más adelante, las graficas de la Figura 9 colocadas en un mismo eje de coordenadas. Profundicemos en este último concepto:

Definición 1: Se llama homotecia de centro O y razón k (distinto de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto A otro A', alineado con A y O, tal que: $OA' = k \cdot OA$. Si $k > 0$ se llama homotecia directa y si $k < 0$ se llama homotecia inversa.

Homotecias de centro en el origen de coordenadas

En una homotecia de origen el centro de coordenadas se puede ver con facilidad la relación que existe entre las coordenadas de puntos homotéticos. Si se considera $A(x; y)$ y su homotético $A'(x'; y')$ la relación que hay entre ellos es la siguiente: $x' = k.x; y' = k.y$.

La homotecia es una transformación geométrica que no tiene una imagen congruente, ya que a partir de una figura dada se obtienen una o varias figuras en tamaño mayor (agrandada) o menor (reducida) de la figura dada, pero conservando sus proporciones. La homotecia conserva también ángulos y la alineación. Las dimensiones de dos figuras por homotecia son directamente proporcionales; esta proporción es fijada por la constante de homotecia la cual multiplica las longitudes por la relación de homotecia k, las áreas se multiplican por k^2, etc.

Teorema de Thales. Semejanza de polígonos.

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.

El Teorema de Thales es una aplicación directa de las propiedades de la homotecia.

Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; es decir, si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes se verifica:

$$A = A' \quad B = B' \quad C = C' \qquad AB / A'B' = BC / B'C' = CA / C'A' = \text{razón de semejanza}$$

Escalas

La representación de objetos a su tamaño natural no es posible cuando éstos son muy grandes o cuando son muy pequeños. En el primer caso, porque requerirían formatos de dimensiones poco manejables y en el segundo, porque faltaría claridad en la definición de los mismos. Esta problemática la resuelve la escala, aplicando la ampliación o reducción necesarias en cada caso para que los objetos queden claramente representados en el plano del dibujo. Se define la escala como la **relación entre la dimensión dibujada respecto de su dimensión real**, esto es:

$$E = \frac{dibujo}{realidad}$$

Si el numerador de esta fracción es mayor que el denominador, se trata de una escala de ampliación, y será de reducción en caso contrario. Basado en el Teorema de Thales se utiliza un sencillo método gráfico para aplicar una escala. Véase, por ejemplo, el caso para E 3:5 en la siguiente figura:

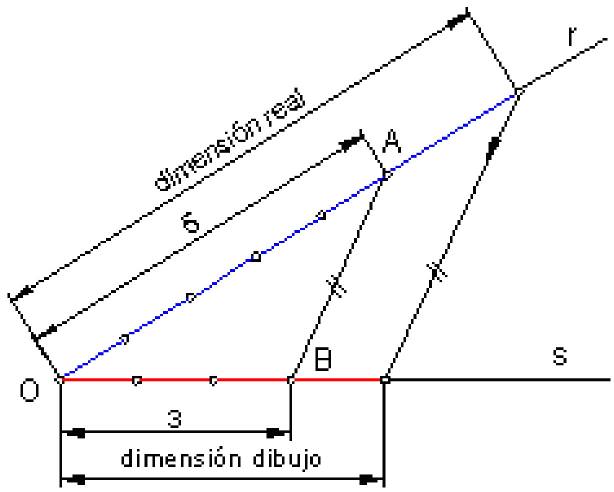

Figura 4: Modelos a escala.

1º) Con origen en un punto O arbitrario se trazan dos rectas r y s formando un ángulo cualquiera.

2º) Sobre la recta r se sitúa el denominador de la escala (5 en este caso) y sobre la recta s el numerador (3 en este caso). Los extremos de dichos segmentos son A y B.

3º) Cualquier dimensión real situada sobre r será convertida en la del dibujo mediante una simple paralela a AB.

Efecto del dibujo a escala sobre las magnitudes lineales, el área y volumen para conocer el efecto que produce el dibujo a escala sobre las magnitudes lineales, se analizará lo que ocurre cuando se amplía un rectángulo de dimensiones a y b hasta obtener un rectángulo de dimensiones $k.a$ y $k.b$, véase la siguiente figura:

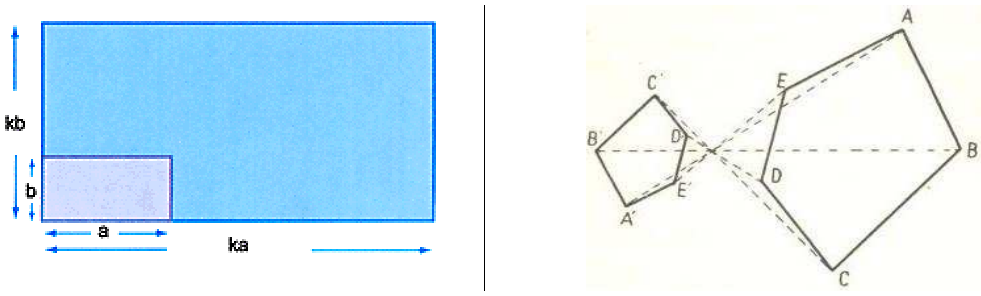

Figura 5: A la izquierda vemos la homotecia de rectángulos. Mientras que a la derecha se generaliza lo ocurrido en la Figura 3, pues cualquier polígono se puede descomponer en triángulos que cumplen esta relación, como estos pentágonos.

Obsérvese la relación que se establece entre el perímetro P del rectángulo original y el perímetro P' del rectángulo ampliado:

$$P = 2a + 2b \text{ y que } P' = 2(ka) + 2(kb).$$

Factorizando k, se obtiene que $P' = k(2a + 2b)$. Sustituyendo $P' = 2a + 2b$ se llega a que $P' = k.P$. El perímetro P se transformó, igual que la base y la altura del rectángulo, a continuación se verá si ocurre lo mismo con las áreas.

$$A = ab \text{ y } A' = (ka)(kb) = k^2ab = k^2A.$$

Si las longitudes se transforman con una escala k, entonces el área se transforma con una escala k^2. Muestre además que la transformada de un polígono como el de la Figura 5 en una semejanza es otro polígono cuyos ángulos son respectivamente iguales a los de aquel y sus lados son respectivamente proporcionales a los del primero.

Véase lo que ocurre con la longitud de una circunferencia y con el área de un círculo, dado en la siguiente figura:

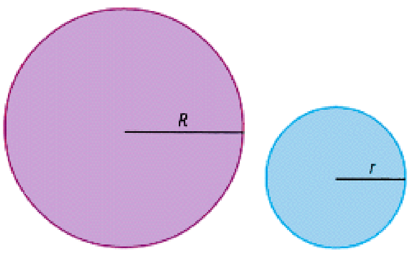

Figura 6: Sabemos que a distancias iguales en una figura corresponden distancias iguales en su transformada, resulta que la figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia: Pues, a puntos que equidistan de uno corresponden puntos que equidistan de su homólogo, se muestra la homotecia entre circunferencias y círculos.

Supóngase que el radio del círculo se transformó con una escala de $k<1$, $r=k.R$, o también $k=\dfrac{r}{R}$, comparando las dos medidas de las circunferencias, se tiene que:

$$\frac{L'}{L}=\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{r}{R}=k.$$

La longitud de la circunferencia se transformó con una escala igual que la de la modificación del radio. Para las áreas se tiene $A=\pi.R^2; A'=\pi.r^2$, luego

$$\frac{A'}{A}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\left(\frac{r}{R}\right)^2=k^2.$$

Nuevamente, se observa que la razón o escala de las áreas es el cuadrado de la escala con la que se transforman las longitudes.

Resumen:

Efecto de las medidas angulares. Siempre que dos figuras o dos sólidos estén a escala, existe semejanza entre ellos; debiendo cumplirse la condición de tener sus ángulos homólogos iguales, pues la medida de un ángulo no la determina la longitud de los lados que lo forman, sino la abertura que hay entre dichos lados; además, sus lados homólogos son proporcionales.

Efecto en las medidas lineales y perímetros. Dos polígonos a escala son semejantes y cumplen, necesariamente, con dos condiciones: Tener sus ángulos homólogos iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Efecto de las áreas. La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la escala dada.

Efecto en los volúmenes. La razón de los volúmenes de dos sólidos semejantes es igual al cubo de la escala dada.

Media Proporcional

Media geométrica es cada uno de los términos medios de una proporción geométrica continua, o sea, cada uno de los términos medios de una proporción geométrica, cuando son iguales,, en la proporción 8:4::4:2 la media proporcional es 4.

Teorema

La media proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos. Sea la proporción continua $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$, se demuestra que $b=\sqrt{a.c}$.

En efecto, ya sabemos por la propiedad fundamental que $a.c=b.b$ o sea, $a.c=b^2$. Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros, tenemos: $\sqrt{a.c}=\sqrt{b^2}$. simplificando: $b=\sqrt{a.c}$ que es lo que queríamos demostrar.

Extensión del Teorema de Pitágoras por medio de homotecias

❖ **Para figuras poligonales**

Motivación: El Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica dice que las áreas A, B y C de los cuadrados que se forman sobre las longitudes de los catetos y de la hipotenusa respectivamente de un triángulo rectángulo cualquiera cumple la relación $A+B=C$.

Esto puede verse como el área debajo de las funciones constantes dadas por: $f(x)=c$, $g(x)=b$ y $h(x)=a$, (a, b, c números reales), las graficas de estas funciones son líneas horizontales. Llamando $A_c = A_b = A_a$ las áreas bajo las curvas[3] de las funciones f, g y h respectivamente, en la siguiente figura:

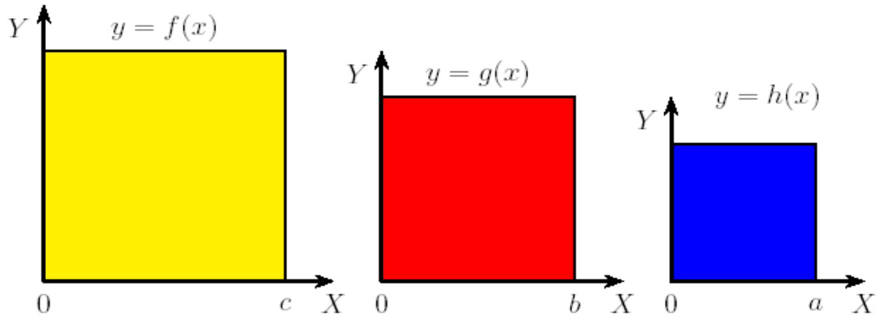

Figura 7: Representación grafica de los cuadrados, a través de una funciones lineales constantes en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor constante en cuestión. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Pero siendo estas funciones Riemann integrables (continuas), tiene sentido:

$A_c = \int_0^c c\,dx$, donde $f(x)=c$ $\quad = c.\int dx = c\left(x\Big|_0^c\right) = c.(c-0) = c^2$

Análogamente, podemos obtener: $\begin{cases} A_b = b^2, \\ A_a = a^2. \end{cases}$ Y se tiene la relación: $A_a + A_b = A_c$.

Es decir, $\quad a^2 + b^2 = c^2$.

Ahora, tomemos sobre los lados del triángulo rectángulo, triángulos isorrectángulos, cuyos lados iguales son precisamente los lados del triángulo rectángulo, veamos la siguiente figura:

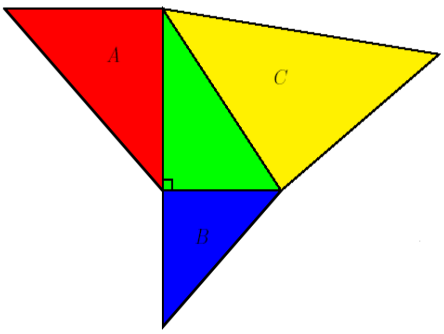

Figura 8: Geométricamente se satisface que $A+B=C$. Y en este caso se cumple el Teorema de Pitágoras al igual que en la Figura 7, lo cual evidentemente se cumple ya que la única diferencia es que estas áreas son la mitad de las otras.

[3] Toda recta es curva (con curvatura nula), pero no toda curva es recta.

Usando la formula para calcular el área de un triángulo, $\acute{A}rea = \frac{Base \times Altura}{2}.$,

obtenemos que: $C = \frac{c^2}{2}$; $B = \frac{b^2}{2}$; $A = \frac{a^2}{2}$, los cuales son la mitad del área de los cuadrados dados al comienzo. Satisfaciendo, $A + B = C$. Reduciendo, tenemos:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Luego podemos formar las siguientes funciones identidades, las cuales son muy importantes para hacer muchas pruebas en diversas áreas de la matemática y nos van a servir para inducir nuestra demostración al momento de hallar las funciones homotéticas entre las funciones implicadas en la demostración general. Las graficas de estas funciones son rectas que pasan por el origen con pendiente unidad, lo veremos en la siguiente figura:

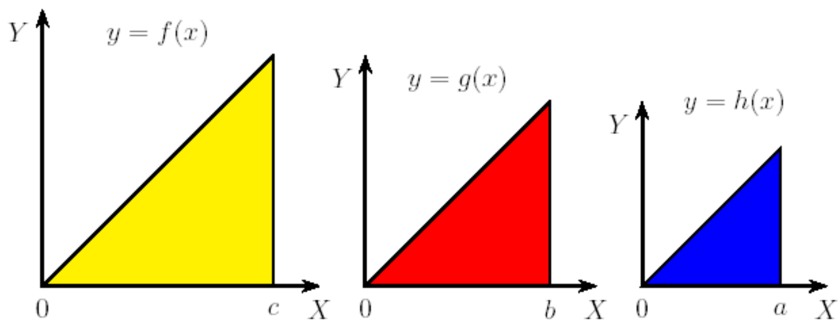

Figura 9: Gráfica de las funciones identidades $f(x) = x,$ entre 0 y $c,$ $g(x) = x,$ entre 0 y b y $h(x) = x,$ entre 0 y $a.$ Además tenemos las correspondientes áreas.

Llamando $A_c = A_b = A_a$ las áreas bajo las curvas[4] de las funciones f, g y h respectivamente y siendo estas funciones Riemann integrables (al ser continúas), tiene sentido:

$$A_c = \int_0^c x dx, \text{ donde } f(x) = x.$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^c \right) = \left(\frac{c^2}{2} - 0 \right) = \frac{c^2}{2}.$$

Análogamente, podemos obtener: $A_b = \frac{b^2}{2}$, $A_a = \frac{a^2}{2}$.

Y se tiene la relación: $A_a + A_b = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2\right) = Ac.$

Luego, notemos que si $0 \le x \le a$, entonces $0 \le \frac{c}{a} x \le c.$ Análogamente ocurre que si $0 \le x \le b,$ entonces $0 \le \frac{c}{b} x \le c.$ Dada la ampliación a escala de $h,$ tenemos:

[4] Toda recta es curva (con curvatura nula), pero no toda curva es recta.

$$\frac{c}{a}h(x) = \frac{c}{a}x, \text{ pues } h(x) = x.$$
$$= f\left(\frac{c}{a}x\right), \text{ pues } f(x) = x.$$

Así, $h(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)$., análogamente, $g(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right)$.

Donde estas funciones g y h se dicen homotéticas con respecto a f.

Ejemplo: En un triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos, esto es:

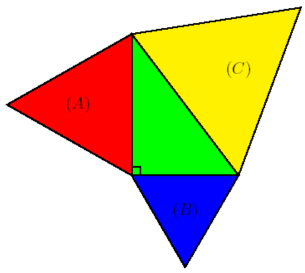

Figura 10: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $(C) = (A) + (B)$.

Una ilustración de la proposición a demostrar es la siguiente:

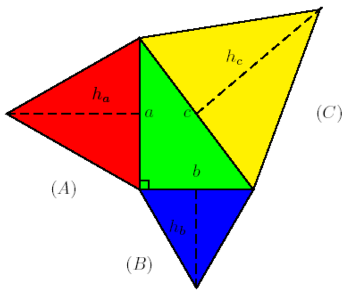

Figura 11: ABC es un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a y b. Aplicamos una *aprehensión operativa de cambio figural* a cada triángulo equilátero.

Si (A), (B) y (C) representan las áreas de los triángulos construidos sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, tenemos entonces que (aplicando la versión usual del Teorema de Pitágoras) tenemos que:

$$(B) = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}b\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}b^2.$$

Análogamente, $(A) = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2.$

Así, $(A) + (B) = \frac{1}{4}\sqrt{3}b^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3}c^2 = (C).$

Luego, Área de (A)+Área de (B)=Área de (C).

Ahora, podemos colocar las funciones siguientes en un eje de coordenadas, donde el triángulo amarillo va a ser nuestra función f, el triángulo rojo va a ser nuestra función g, y el triángulo azul va a ser nuestra función , veámoslo en los siguientes gráficos de la siguiente figura:

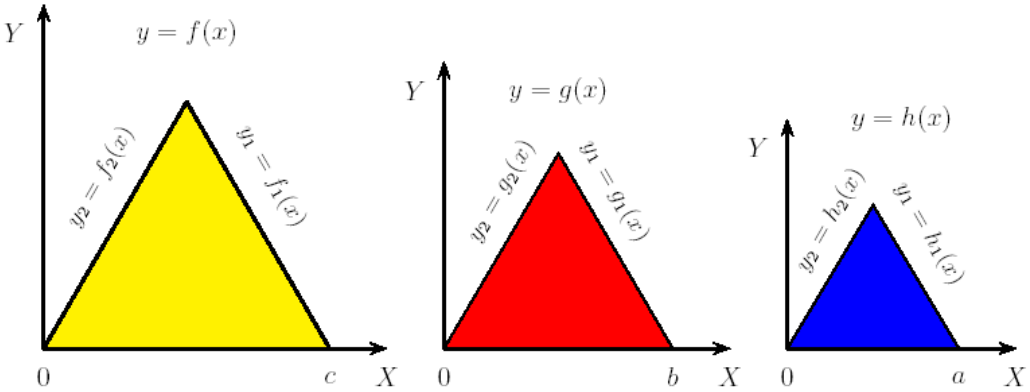

Figura 12: Representación grafica de los triángulos equiláteros, a través de funciones de valor absoluto en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Luego, la función $y = f(x)$ la obtenemos de la siguiente forma:

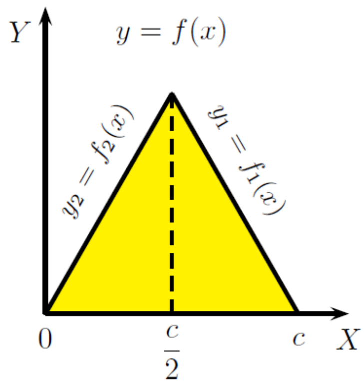

Figura 13: Representación grafica de la función $y = f(x)$.

Ahora sacando algunos cálculos, teniendo en consideración la definición de recta y de valor absoluto, obtenemos:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{si } \frac{c}{2}\le x\le c,\\ f_2(x), & \text{si } 0\le x\le \frac{c}{2}. \end{cases}=\begin{cases} -\sqrt{3}x+\sqrt{3c}, & \text{si } \frac{c}{2}\le x\le c,\\ \sqrt{3}c, & \text{si } 0\le x\le \frac{c}{2}. \end{cases}$$

$$=-\left|\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ \text{si } 0\le x\le c.$$

Denotando por A_c el área entre 0 y c de $y = f(x)$. y siendo esta función Riemann integrable, tiene sentido:

$$A_c=\int_0^c f(x)dx=\int_0^{\frac{c}{2}}\sqrt{3}xdx-\int_{\frac{c}{2}}^{c}\sqrt{3}xdx+\frac{\sqrt{3}c^2}{2}. \qquad (*)$$

Ejercicio: Verificar que la función $y = f(x)$. tiene en realidad esta forma y luego realizar los cálculos de A_c para ver que efectivamente da la parte de arriba. Esta función es Riemann integrable pues tiene un solo punto de discontinuidad en $\frac{c}{2}$.

Análogamente, de acuerdo a la función $y = g(x)$ y $y = h(x)$, obtenemos:

$$g(x) = -\left|\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}b}{2}\right| + \frac{\sqrt{3}b}{2}, \text{ si } 0 \le x \le b.; \quad h(x) = -\left|\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right| + \frac{\sqrt{3}a}{2}, \text{ si } 0 \le x \le a.$$

Y denotemos también el área debajo de $y = g(x)$ y de $y = h(x)$ por $A_b = \int_0^b g(x)dx$ y $A_a = \int_0^a h(x)dx$, respectivamente. Luego, de acuerdo a la ampliación de escala, tenemos que:

$$\frac{c}{b}g(x) = \begin{cases} \frac{c}{b}g_1(x), & \text{si } \frac{c}{b}\left(\frac{b}{2}\right) \le \frac{c}{b}x \le \frac{c}{b}(b), \\ \frac{c}{b}g_2(x), & \text{si } \frac{c}{b}(0) \le \frac{c}{b}x \le \frac{c}{b}\left(\frac{b}{2}\right). \end{cases} = \begin{cases} \frac{c}{b}\left(-\sqrt{3}x + \sqrt{3}b\right), & \text{si } \frac{c}{2} \le \frac{c}{b}x \le c, \\ \frac{c}{b}\left(\sqrt{3}x\right), & \text{si } 0 \le \frac{c}{b}x \le \frac{c}{2}. \end{cases}$$

$$= -\left|\sqrt{3}\frac{c}{b}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c, \quad \text{si } 0 \le \frac{c}{b}x \le c.$$

$$= f\left(\frac{c}{b}x\right).$$

Es decir, $$g(x) = \frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{b}x\right) = -\left|\sqrt{3}\frac{c}{b}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Análogamente, $$h(x) = \frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{a}x\right) = -\left|\sqrt{3}\frac{c}{a}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Ahora, integrando según Riemann tenemos que:

$$\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \frac{a}{c}I_1 + \frac{b}{c}I_2. \qquad (1)$$

Donde calculando I_1 obtenemos: $I_1 = \sqrt{3}\frac{a}{c}\int_0^{\frac{c}{2}} udu - \sqrt{3}\frac{a}{c}\int_{\frac{c}{2}}^{c} udu + \sqrt{3}\frac{ca}{2}$.

Es decir, $$\frac{a}{c}I_1 = \sqrt{3}\frac{a^2}{c^2}\int_0^{\frac{c}{2}} udu - \sqrt{3}\frac{a^2}{c^2}\int_{\frac{c}{2}}^{c} udu + \frac{\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Análogamente, $$\frac{b}{c}I_1 = \sqrt{3}\frac{b^2}{c^2}\int_0^{\frac{c}{2}} udu - \sqrt{3}\frac{b^2}{c^2}\int_{\frac{c}{2}}^{c} udu + \frac{\sqrt{3}b^2}{2}.$$

Por tanto, de (1) tenemos:

$$\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^{\frac{c}{2}} \sqrt{3}udu - \int_{\frac{c}{2}}^{c} \sqrt{3}udu + \frac{\sqrt{3}c^2}{2} = A_c$$ (de acuerdo a (*), pues la variable se dice que es muda).

Así, $A_a + A_b = A_c$. O bien, $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx.$

Ejercicio: Realizar los cálculos anteriores para verificar los resultados.

❖ Para figuras curvilíneas

Cuando son semicírculos los que están en los lados del triángulo rectángulo, veamos el siguiente ejemplo inductivo:

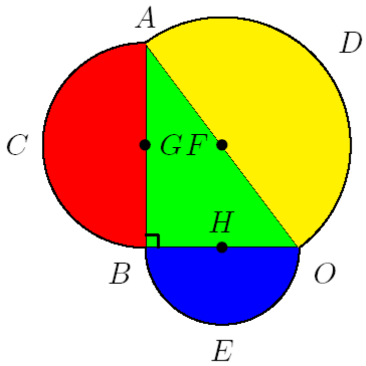

Figura 14: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que el área del semicírculo amarillo es igual a la suma de las áreas de los semicírculos rojo y azul.

Calculando:

- Área del semicírculo de diámetro $\overline{OB}$: $A_{BEOH} = \frac{\pi.\overline{OB}^2}{8}$.
- Área del semicírculo de diámetro $\overline{AB}$: $A_{BCAG} = \frac{\pi.\overline{AB}^2}{8}$
- Área del semicírculo de diámetro $\overline{OA}$: $A_{ADOF} = \frac{\pi.\overline{OA}^2}{8}$

Así, comparando las sumas de las áreas obtenidas en (1), (2) y (3) tenemos que:

$$\frac{\pi\overline{OB}^2}{8} + \frac{\pi\overline{AB}^2}{8} = \frac{\pi}{8}(\overline{OB}^2 + \overline{AB}^2) = \frac{\pi}{8}\overline{OA}^2.$$

O lo que es equivalente: $A_{BEOH} + A_{BCAG} = A_{ADOF}$.

Ejercicio: Ahora bien, lo que queremos ver es que se cumple:

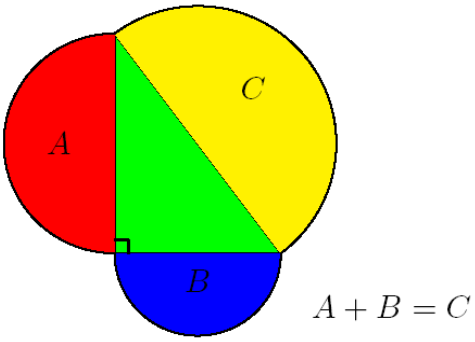

Figura 15: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C = A + B$.

Deduzca las funciones siguientes:

$$f(x)=\sqrt{\frac{c^2}{4}-\left(x-\frac{c}{2}\right)^2}. \qquad g(x)=\sqrt{\frac{b^2}{4}-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}. \qquad h(x)=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Donde las funciones las colocamos en un eje de coordenadas, en el cual el semicírculo amarillo va a ser nuestra función f, el semicírculo rojo va a ser nuestra función g y el semicírculo azul va a ser nuestra h, podemos verlo en los siguientes gráficos:

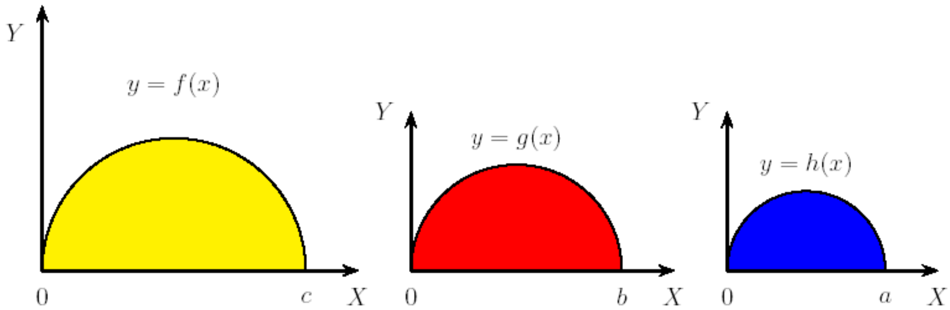

Figura 16: Representación grafica de los semicírculos, a través de una funciones cuadráticas (o inversa de estas como lo son las raíces cuadradas) en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Además tenemos:

$$g(x)=\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{b}x\right)=\sqrt{\frac{c^2}{4}-\left(\frac{c}{b}x-\frac{c}{2}\right)^2}.$$

$$h(x)=\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right), \text{ con } f\left(\frac{c}{a}x\right)=\sqrt{\frac{c^2}{4}-\left(\frac{c}{a}x-\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Denotando por A_c el área entre 0 y c de $y = f(x).$, esto es $A_c = \int_0^c f(x).dx$ y para calcular también el área debajo de $y = g(x)$ y $y = h(x)$ denotemos por $A_b = \int_0^b g(x).dx$

y $A_a = \int_0^a h(x).dx$, respectivamente. Integrando según Riemann, llegue a la conclusión que se cumple: $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx.$

En el caso que sean lúnulas las que están sobre los lados del triángulo rectángulo.

<u>Ejercicio</u>: En este caso veamos que se verifique:

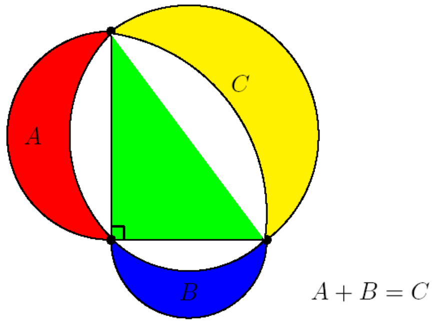

Figura 17: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C = A + B.$

Deduzca las funciones siguientes:

- $f(x) = f_1(x) - f_2(x),$ donde $f_1(x) = \sqrt{\frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2}$ y $f_2(x) = \sqrt{\frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2}.$
- $g(x) = g_1(x) - g_2(x),$ donde $g_1(x) = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}$ y $g_2(x) = \sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}.$
- $h(x) = h_1(x) - h_2(x),$ donde $h_1(x) = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$ y $h_2(x) = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$

Donde las funciones las colocamos en un eje de coordenadas, en el cuál las lúnulas amarilla, roja y azul van a ser nuestras funciones *f*, *g* y *h* respectivamente, veámoslo en los siguientes gráficos:

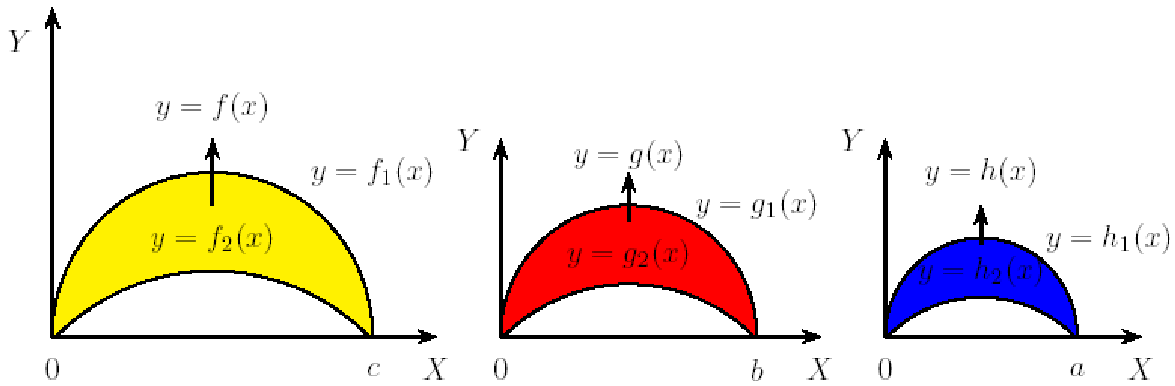

Figura 18: Representación grafica de las funciones cuadráticas como las anteriores o más bien sus inversas, a través de diferencias de funciones cuadráticas en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Además tenemos:

$$g(x)=\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right),\ \text{con}\ f\left(\frac{c}{b}x\right)=f_1\left(\frac{c}{b}x\right)-f_2\left(\frac{c}{b}x\right).$$

$$h(x)=\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right),\ \text{con}\ f\left(\frac{c}{a}x\right)=f_1\left(\frac{c}{a}x\right)-f_2\left(\frac{c}{a}x\right).$$

Deduzca adecuadamente, las funciones:

$$f\left(\frac{c}{b}x\right)=f_1\left(\frac{c}{b}x\right)-f_2\left(\frac{c}{b}x\right)\ \text{y}\ f\left(\frac{c}{a}x\right)=f_1\left(\frac{c}{a}x\right)-f_2\left(\frac{c}{a}x\right)$$

Denotando por A_c el área entre 0 y c de $y=f(x).$, esto es $A_c=\int_0^c f(x).dx$ y para calcular también el área debajo de $y=g(x)$ y $y=h(x)$ denotemos por $A_b=\int_0^b g(x).dx$ y $A_a=\int_0^a h(x).dx$, respectivamente. Integrando según Riemann, llegue a la conclusión que se cumple:

$$\int_0^a h(x)dx+\int_0^b g(x)dx=\int_0^c f(x)dx.$$

*“La estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos...” Donde se entiende imagen mental como el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto (gráfica, numérica, simbólica,...)*Tall y Vinner, 1981.

❖ **Demostración general**

Dado el siguiente problema:

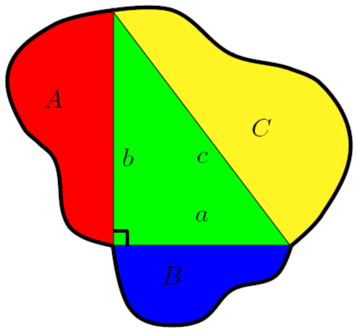

Figura 19: En la figura vemos geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C=A+B$.

Deduzca las transformaciones: $g(x)=\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right)$ y $h(x)=\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right)$.

Donde las funciones homotéticas son:

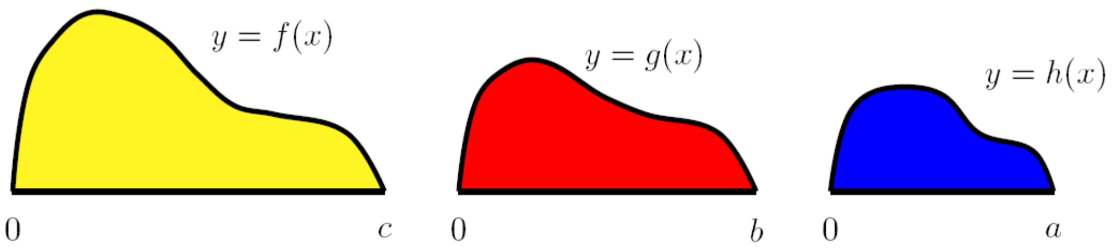

Figura 20: Representación grafica de las generales en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Y pruebe que se cumple lo siguiente: $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx.$

Ejercicio: Hallemos las transformaciones de semejanzas que tienen g y h con f. Primero veamos la transformación de g con respecto a f. Sean las siguientes gráficas de f y g:

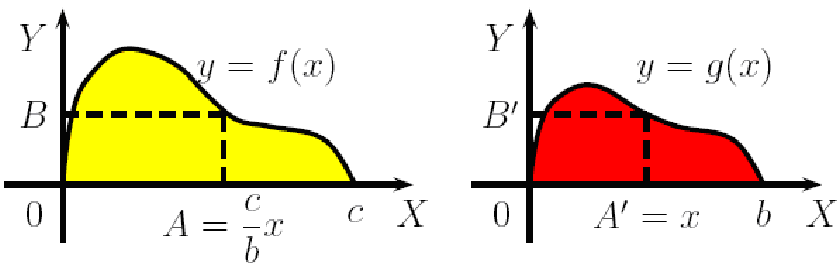

Figura 21: Representación de las funciones f y g, para hallar las correspondientes transformaciones entre ellas.

Definamos por homotecia las transformaciones:

$$g:[0,c] \to [0,b] \qquad x \to g(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right)$$

Y además, $h:[0,c] \to [0,a] \qquad x \to h(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right)$

Ahora, hallemos el área de g y h, y verifique que es igual a $A_b = \frac{b^2}{c^2}A_c$.

Análogamente, podemos obtener que $A_a = \frac{a^2}{c^2}A_c$.

Así, $A_a + A_b = \frac{a^2}{c^2}A_c + \frac{b^2}{c^2}A_c = A_c$ (pues el triángulo es rectángulo)

Por tanto, $\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx$.

❖ Para Regiones en General

En la siguiente figura:

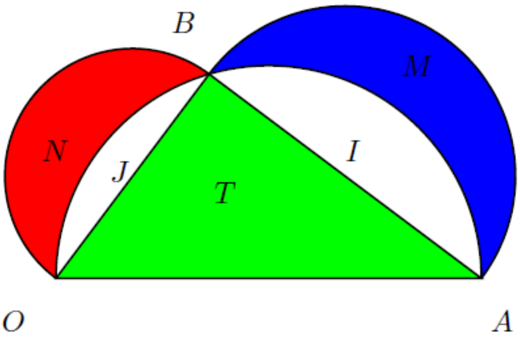

Figura 22: Representación de un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia y las lúnulas construidas sobre sus catetos.

Demostrar en este ejercicio muy particular que:

$$\text{Área } T = \text{Área } M + \text{Área } N.$$

Ejercicio: Deduzca para estas regiones bajo estas curvas y esta recta funciones e intégrelas según Riemann para ver que en realidad se cumple algo parecido a lo anteriormente expuesto. Aplique relación del triángulo rectángulo y haga diferencias entre ellas para llegar al cálculo del área deseada.

Interpretaciones y conclusiones

En el estudio de estas extensiones del Teorema de Pitágoras, nuestros estudiantes aprenderán a expresar las áreas de unas figuras geométricas en función de sus homotéticas, como es el caso del área del cuadrado. Y además aprenderán lo que realmente significa la palabra extensión o generalización en matemática, partiendo de la *deducción* del Teorema de Pitágoras en una acepción geométrica donde son cuadrados los que están sobre los lados de un triángulo rectángulo.

En otro orden de ideas, así como podemos transformar un rectángulo como vimos en la nota histórica, también podemos tener un triángulo equilátero que tenga la misma área que la suma de otros dos triángulos equiláteros de base dada usando este teorema tan importante. Así mismo, podemos hacer con dos semicírculos (o círculos) con diámetros dados, formar un semicírculo (o círculo) de área igual a la suma de estas dos, con las lúnulas, etc. Por lo que puedo decir que si de Leonardo da Vinci tenemos forma de perfecta en la cuadratura humana del hombre de Vitruvio donde en el pensamiento renacentista: *El hombre medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción…* En los Pitagóricos tenemos: *La belleza de las cuadraturas y de las homotecias en las formas geométricas y sobre la hipotenusa la razón áurea de la perfección geométrica en donde descansa la perfección del mundo en general, de acuerdo a sus diferentes formas, patrones y dimensiones…*

Bibliografía

Azcárate, C.; Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Venezuela: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. 10(2), pp. 135-149.

Barreto J,. (2007). Otras deducciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia de la matemática, como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Memorias del VI Congreso Venezolano de Matemática. (pp. 537-546). Maracay: UPEL.

Barreto J,. (2008). Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. Números (69). Recuperado 17/03/2008, en:http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02-php

Barreto J,. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. [Versión electrónica], *Números* (69). Recuperado el 17 de Marzo de 2008.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical thinking processes. En Tall, D(Ed) Advanced Mathematical thinking. Dordrecht. Kluwer, A.P. p. 25-41.

González, F. (2005). Resolución de Problemas. *Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática*. IX Escuela. Mérida, Venezuela, Agosto de 2005.

Mora, D.. (2002). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. Ediciones Biblioteca-EBUC. Caracas, Venezuela.

Torregrosa, G.; Quesada, H. (2007). Coordinación de los proceso cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 10(2), pp. 275-300. México.

Julio César Barreto García, Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado" en Barquisimeto y estudiante de Educación Mención Matemática en la Universidad Nacional Abierta Centro Local Yaracuy, Venezuela. Este artículo es el fruto de: Ponencias presentada con Publicación Arbitrada en la Memorias del evento y Taller dictado en Maracay (VI Congreso Venezolano de Educación Matemática) y Comunicación Científica con Publicación no Arbitrada, Póster, Mini Curso y Relato de Experiencia efectuados en Brasil (IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática). Y últimamente presentada como Ponencia en las XXI Escuela Venezolana de Matemática y como Workshops y Poster Exhibition en México (11th INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION); y una Conferencia en Mérida (XII Escuela Venezolana para la enseñanza de la Matemática).