UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 67. Abril 2023
Páginas 1-22

Niveles de comprensión del concepto de función en estudiantes universitarios
Níveis de compreensão do conceito de função em estudantes universitários

Sergio Pablo Farabello, María Trigueros

Fecha de recepción: 20/07/2022
Fecha de aceptación: 02/09/2022

Resumen

Se realizó una investigación con 25 estudiantes universitarios de un curso de Cálculo con el fin de identificar qué concepción ponen en evidencia los estudiantes sobre concepto de función en el marco de la Teoría APOE. Se realizó un taller según la metodología propuesta por la propia Teoría. Se construyó una descomposición genética inicial que se validó mediante la aplicación de un instrumento diseñado para tal fin. El trabajo constituye una herramienta para elaborar secuencias de enseñanza que permitan refinar la descomposición genética inicial para aproximarnos aún más a los mecanismos de construcción mediante los cuales los estudiantes se apropian del concepto de función.
Palabras clave: Función, descomposición genética, acciones, procesos.

Abstract

A study was carried out with 25 university students of a Calculus course in order to identify students' conception of function in the framework of the APOE Theory. A workshop was held according to the methodology proposed by the Theory itself. An initial genetic decomposition was constructed and validated by applying an instrument designed for this purpose. The work constitutes a tool to develop teaching sequences that allow refining the initial genetic decomposition to get even closer to the construction mechanisms through which students build the concept of function.
Keywords: Function, Genetic Decomposition, Actions, Processes.

Resumo

Foi realizada uma pesquisa com 25 universitários de um curso de Cálculo para identificar qual concepção os alunos evidenciam sobre o conceito de função no marco da Teoria APOE. Um workshop foi mantido de acordo com a metodologia proposta pela própria Teoria. Uma decomposição genética inicial foi construída e validada por meio da aplicação de um instrumento desenvolvido para esse fim. O trabalho constitui uma ferramenta para desenvolver sequências de ensino que permitem refinar a decomposição genética inicial para se aproximar ainda mais dos mecanismos de construção por meio dos quais os alunos se apropriam do conceito de função.
Palavras-chave: Função, Decomposição Genética, Ações, Processos.

1. Introducción

A menudo, los docentes nos enfrentamos con el desafío de decidir qué actividades proponer a nuestros alumnos, situados en un espacio y tiempo determinados, para enseñar un tema específico. Resolver "*qué hacemos*" se vincula firmemente con cómo debemos emplear el tiempo destinado a la clase de modo que los alumnos participen de alguna actividad que, ante nuestra mirada, dé cuenta de un proceso que conduce a aprender aspectos del tema en cuestión.

La planificación de una clase de Matemática implica una serie de factores que el docente debe tener en cuenta como, por ejemplo: el tema a enseñar, la guía de estudio, la guía de ejercitación, el material audiovisual a emplear, los recursos TIC a incorporar, el tiempo de exposición, el diseño de actividades para resolver en grupo, etc. El objetivo principal de la planificación es, aunque no se lo manifieste explícitamente, lograr que el alumno aprenda. Por ello se habla comúnmente de estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Pero son pocos los profesores que se preguntan cómo se genera el aprendizaje de un determinado tema de Matemática en sus estudiantes, qué procesos llevan a cabo para lograrlo, o cómo influye en ellos el entorno del aula (López Acosta, 2011).

La falta de aprehensión conceptual de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes se ha puesto de manifiesto porque en las prácticas docentes se favorecen aspectos relacionados con la memorización de definiciones, fórmulas y algoritmos, la automatización de procesos y la enseñanza de técnicas de resolución que, según López Acosta (2011), han favorecido que los estudiantes se limiten a imitar técnicas y procedimientos que el profesor muestra durante su clase como si se tratara de "*seguir una receta*".

Para poder comprender el aprendizaje matemático, es necesario tener en cuenta cómo se conforman los sistemas conceptuales de las personas. Resulta importante —para cualquier proceso educativo que se pretenda encarar— explicar, por ejemplo, por qué los estudiantes se diferencian unos de otros en la forma en que actúan o aprenden. Contar con esa información implicaría estar en mejores condiciones para diseñar estrategias didácticas orientadas al aprendizaje matemático en forma orgánica, tendientes a abandonar paulatinamente las ideas simplistas que reducen la complejidad del aprendizaje a formas de "*trasmisión matemática*".

2. Fundamentación del problema

En un estudio preliminar sobre las dificultades que tienen los estudiantes a la hora de trabajar con las transformaciones de funciones (Farabello y Trigueros, 2020) se encontró que tanto las transformaciones rígidas como las no rígidas presentaban dificultades similares.

Para poder caracterizar esas dificultades, es necesario indagar aún más en el concepto de transformación de funciones, para lo cual se planteó una investigación, actualmente en proceso, en el marco de la Teoría APOE, con el fin de dar respuesta a cómo los estudiantes construyen el concepto de transformación de funciones.

Para la construcción de la descomposición genética inicial, se definió que es necesario que los estudiantes tengan conocimientos previos sobre el concepto de función, distinguiendo las concepciones Acción, Proceso y Objeto que tengan sobre él (López Acosta, 2011).

En este trabajo se pretende dar respuesta a la pregunta ¿qué concepción ponen en evidencia los estudiantes sobre concepto de función en el marco de la Teoría APOE?

3. Marco teórico

Se adopta como marco teórico la *Teoría APOE* (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) desarrollada por Dubinsky y un grupo de colaboradores del *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC).

Dubinsky y Lewin (1986) proponen la *“abstracción reflexiva”* de Piaget como base teórica para el análisis de la comprensión de los conceptos matemáticos y, plantea que el origen de la teoría APOE se encuentra en la reformulación de la teoría Piagetiana de la Abstracción Reflexiva para ser aplicada al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

En la teoría APOE se define un ciclo de investigación que consta de tres componentes: 1) análisis teórico; 2) diseño e implementación de enseñanza, y 3) observación, análisis y verificación de datos.

Para construir un concepto matemático, el individuo comienza ejerciendo *Acciones* sobre objetos previamente construidos. Estas acciones responden a un estímulo externo y generalmente son realizadas paso a paso por el individuo. La concepción *Acción* se encuentra limitada por la aplicación de algoritmos mecánicos y no se ejerce mucho control sobre los elementos involucrados.

Una vez que el individuo reitera una acción y reflexiona sobre ella, pero no tiene la necesidad de ejecutarla en forma explícita, puede interiorizarla en un *Proceso*. A veces es necesario que, una vez construido un proceso, éste tenga que coordinarse con otros para generar nuevos procesos.

Cuando un individuo logra reflexionar sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma consciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones sobre él —ya sean acciones o procesos— y puede construir esas transformaciones, entonces el proceso ha sido encapsulado por el individuo en un *Objeto*.

Una vez que un individuo ha logrado construir un objeto, puede ser capaz de regresar sobre los procesos que lo generaron a través del mecanismo de desencapsulación. De esta manera, podrá ir y venir entre el objeto y el proceso cada vez que sea necesario.

Los *Esquemas* se definen como una colección coherente de acciones, procesos y objetos —a la que pueden sumarse también otros esquemas y las relaciones existentes entre ellos— asociados a un concepto particular (Asiala et al., 1996). Los esquemas que forman la estructura matemática de un individuo no están acabados, son estructuras dinámicas que evolucionan constantemente cada vez que nuevas relaciones se construyen entre sus componentes. Un esquema puede ser tematizado en un nuevo objeto sobre el cual pueden hacerse nuevas acciones.

En los estudios llevados a cabo con la teoría APOE se caracteriza el nivel de conocimiento que demuestran los estudiantes en términos de concepciones, no para clasificarlos, sino para determinar aquellas construcciones que son necesarias para apoyar su desarrollo del conocimiento. Cuando un estudiante responde a distintas situaciones problemáticas utilizando mayoritariamente Acciones da evidencia de haber construido una concepción o nivel Acción. Asimismo, las concepciones Proceso u Objeto se caracterizan por el hecho de que el estudiante muestre mayoritariamente la construcción de dichas estructuras en sus respuestas a diversos problemas relacionados con el concepto en cuestión.

La descripción idealizada de las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas esperados Matemáticamente, y asociados al concepto estudiado, recibe el nombre de *Descomposición Genética* (DG).

Roa-Fuentes y Oktaç (2010) refieren que los trabajos publicados en el marco de la teoría APOE han ido fortaleciéndola y enriqueciéndola, en la medida en que los análisis reflejan un mejor entendimiento sobre las construcciones y mecanismos usados para explicar la construcción del conocimiento matemático. Pero, generalmente, las investigaciones publicadas proponen una DG terminada y, en algunos casos, muestran cómo se refinó según los datos empíricos, pero no hay estudios que muestren de manera explícita el camino que se puede seguir en su construcción, aunque mencionan que el análisis se basa en la experiencia, resultados anteriores, análisis de la literatura existente sobre el concepto y, en ocasiones, el análisis de la historia del desarrollo de o de los conceptos.

Varios autores han investigado sobre las concepciones de los estudiantes universitarios sobre el concepto de función en el marco de la teoría APOE (Dubinsky y Harel, 1992; Evangelidou, Spyrou, Elia & Gagatsis, 2004; Quintanilla Cóndor, 2009; Vivas, 2009).

4. Análisis teórico

La DG constituye la primera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE. Describe las construcciones (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, acomodación, asimilación y tematización) que puede realizar un estudiante para construir un concepto matemático determinado (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; Arnon et al., 2014).

Debido al interés enunciado en la fundamentación de este trabajo, nos limitaremos a la descripción de las construcciones Acción, Proceso y Objeto del concepto de función.

Una Acción es una operación sobre un Objeto previamente construido que un estudiante realiza utilizando estímulos externos –mirar o recordar una fórmula o tabla; utilizar un algoritmo determinado– para operar sobre objetos previamente construidos. Cuando el estudiante repite la Acción y reflexiona sobre ella, esta Acción o Acciones se interiorizan en un Proceso. Este se caracteriza porque el estudiante no requiere de estímulos externos para realizar la operación e incluso puede saltar pasos o anticipar el resultado de su aplicación (Dubinsky, 1996, Arnon et al. 2014).

En una investigación realizada sobre el concepto de función, Breindenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992) lograron identificar algunas diferencias entre las construcciones de Acción y Proceso, estableciendo como la diferencia principal la necesidad de contar –en un nivel Acción– con una receta o fórmula explícita que describa la transformación. Expresan además que, en una Acción se tiende a pensar sobre la transformación en forma "*paso a paso*" con la relación entre ellos establecida solamente por la receta.

Para comenzar el ciclo de investigación, en el presente trabajo, se definió una Descomposición Genética Inicial (DGI) en base al análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos, con el fin de diseñar un camino viable en la construcción del concepto matemático de función.

4.1. Prerrequisitos

Se establecieron una serie de prerrequisitos o conocimientos previos que los alumnos deben haber construido en instancias anteriores de aprendizaje.

- Conjunto como Objeto
- Pares ordenados como Objeto
- Plano cartesiano como Objeto
- Variable como Objeto

4.2. Acciones, Procesos y Objetos

La construcción del concepto de función comienza con la realización de ***Acciones*** sobre dos conjuntos.

Usualmente, los dos conjuntos están formados por números y la relación entre ellos se formula a través de una expresión algebraica. Pero pueden estar constituidos también por pares ordenados, por elementos no numéricos —expresiones algebraicas, expresiones literarias, elementos de la lógica proposicional, etc.—; de la misma manera, las relaciones pueden estar expresadas a través de representaciones gráficas, proposiciones, tablas, etc.

Dados dos conjuntos, un individuo realiza ***Acciones*** tales como:

- Reconocer la pertenencia de determinados elementos en cada uno de los conjuntos.
- Establecer relaciones entre ambos conjuntos, construir un diagrama de Venn, una gráfica en un plano cartesiano, o una tabla con la intención de representarlos.
- Tomar un elemento de un conjunto aplicando estrictamente la regla definida por la relación entre los dos conjuntos, para asignarle un elemento del segundo conjunto.
- Conociendo una expresión algebraica que defina la relación entre ellos, sustituir la variable en la expresión y realizar algún tipo de manipulación.
- Evaluar numéricamente la expresión de la relación dada.
- Reconocer las variables que intervienen, sin identificar cuál es la independiente y cuál la dependiente.

Un estudiante puede realizar Acciones sobre los diferentes tipos de conjuntos y relaciones, reflexionar sobre ellas y percibirlas como una transformación dinámica, mostrando que ha interiorizado dichas Acciones en ***Procesos***.

Un individuo puede *interiorizar* las Acciones descriptas anteriormente dando lugar a diferentes ***Procesos***:

- Identificar todos los elementos que en general pertenecen a cada conjunto, mediante alguna característica que tengan en común dentro del conjunto.
- Reconocer la relación entre dos conjuntos, expresando esa relación a través de una representación de cualquier tipo que indique una correspondencia entre ellos.
- Evaluar en una variable general la expresión de la relación dada, sin realizarlo en números específicos.
- Explicar el comportamiento de una variable en función de la otra, aún sin darle valores específicos a la segunda.
- Ubicar en el plano cartesiano diferentes puntos correspondientes a la gráfica de una función sin tener que realizar las Acciones de reemplazar en la expresión algebraica los valores de la variable de entrada.
- Modificar la expresión —analítica o gráfica— de una relación para transformarla en una función.

Un individuo puede *coordinar* dos o más Procesos dando lugar a un nuevo ***Proceso***:

- Establecer la relación entre dos conjuntos identificando las variables independientes y dependientes sin recurrir a Acciones específicas.
- Obtener los valores de entrada a partir de la aplicación, a los valores de salida, de una relación invertida definida entre dos conjuntos (inversión).

Cuando el estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un Proceso en particular y toma consciencia del proceso como un todo, se produce la *encapsulación* del Proceso en un ***Objeto***, lo cual le permite al estudiante realizar nuevas acciones sobre él.

El estudiante puede dar cuenta de la encapsulación de procesos en el objeto función e incluso en la desencapsulación del objeto función en los procesos que le dieron origen, cuando realiza la manipulación de funciones o analiza sus propiedades.

Dada una función, un individuo puede *encapsular* Procesos dando lugar a la creación de ***Objetos*** los cuales pueden ponerse en evidencia cuando los estudiantes hacen Acciones sobre ellos.

Por ejemplo, podemos reconocer que la función ha sido encapsulada como Objeto si el estudiante realiza algunas de las siguientes Acciones sobre las funciones:

- Reconocer funciones inyectivas, biyectivas y sobreyectivas.
- Aplicar operaciones algebraicas a las funciones (suma, resta, producto y cociente).
- Determinar la continuidad y discontinuidad de una función.
- Analizar la derivabilidad de una función, entre otras.

5. Diseño e implementación de la enseñanza

La implementación de este estudio se llevó a cabo entre los meses de setiembre y noviembre de 2020 con los alumnos que cursaban Matemática II, asignatura correspondiente al segundo semestre del primer año del Ciclo de Cursado Común de la Facultad de Bromatología de la Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina, con los estudiantes que habían terminado exitosamente un curso de Cálculo Diferencial en el semestre anterior, cuyo contenido incluía el tema de transformación de funciones.

Se diseñó una actividad del tipo Taller en modalidad virtual —como consecuencia del aislamiento social en que nos encontrábamos debido a la pandemia— consistente en 10 encuentros en los que se trataron los siguientes temas:

- Tema 1: GeoGebra. Gráfica y análisis de funciones
- Tema 2: Relaciones y funciones
- Tema 3: Transformación de funciones

Los estudiantes fueron invitados a participar del Taller y se les informó que en el mismo tenían que realizar actividades que no tenían carácter evaluativo, sino que formaban parte de una investigación en Enseñanza de la Matemática. Se aclaró que la participación en el Taller era voluntaria, pero quienes lo realizaran y enviaran todas las actividades tendrían un certificado para agregar a su currículo.

El Taller se estructuró de acuerdo con método de diseño de la enseñanza sugerido por la Teoría APOE, a través del Ciclo de Enseñanza ACE, compuesto por tres etapas: A) *actividades*, C) *discusión en clase* y *E) ejercicios* (Arnon et al., 2014).

Los estudiantes realizaron en total dos actividades prácticas que tuvieron que subir al Aula Virtual del Taller. La primera actividad *–etapa A–* fue entregada al finalizar el Tema 1. Luego se desarrolló el Tema 2 *–etapa C–* y al finalizar esa etapa realizaron la segunda entrega *–etapa E–*. La tercera actividad se realizó al finalizar el Taller y no forma parte de esta publicación.

Las dos primeras entregas de actividades fueron completadas por 25 estudiantes, y contaron con un tiempo de 5 días para resolverlas.

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas en base a los criterios definidos en este trabajo, con el fin de clasificar a los alumnos según hubiesen evidenciado la construcción del nivel de Acción o el de Proceso conforme al marco teórico adoptado.

De las 25 evaluaciones completadas se descartaron 8 por no haber cumplimentado más del 30% de la actividad, quedando en total un conjunto de 17 instrumentos resueltos —en 2 instancias cada uno— para analizar.

Para poder realizar luego el análisis en profundidad de los 17 instrumentos, se hizo una selección de 3 estudiantes que mostraron la estructura Proceso en la mayor cantidad de las actividades realizadas.

5.1. Diseño del instrumento

Para la primera actividad se aplicó un instrumento diseñado en base a la tesis de Quintanilla Cóndor (2009), adaptado en función de los objetivos de la investigación. Consta de 22 situaciones, numeradas desde S01 hasta S22, y clasificadas en 7 categorías: expresiones algebraicas, gráficas, tablas, proposiciones, ecuaciones, pares ordenados y sucesiones.

5.1.1. Expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas incluidas en el instrumento corresponden a tres tipos de funciones: explícitas —S01, S07 y S12—, implícitas —S17— y definidas por partes —S09 y S22—.

Un estudiante puede evidenciar una estructura mental de Proceso si logra:

- identificar las variables que intervienen y explicar el comportamiento de una de ellas en función de la otra, aún sin darle valores específicos a la segunda;
- representar gráficamente las expresiones en el plano cartesiano;
- identificar el dominio y el rango;
- modificar la expresión de una relación para transformarla en una función.

Un estudiante puede dar cuenta de una estructura metal de Objeto si puede:

- determinar la continuidad de una función
- analizar la derivabilidad;
- clasificar las funciones en inyectivas, biyectivas y sobreyectivas.

5.1.2. Representaciones gráficas

La presentación de una gráfica busca que el estudiante pueda reconocer si corresponde o no una función. En caso de no corresponder a una función, el estudiante tiene que expresar qué condiciones deberían darse para que efectivamente la gráfica dada corresponda a una función.

Para resolver estas situaciones, el estudiante tiene que ir más allá de su memoria, deberá tener una mente creativa. En una investigación reportada por Dubinsky y Harel (1992) algunos estudiantes reconocieron una gráfica como una función solamente a través de la memoria. No fueron capaces de expresar con ejemplos, y analizaron el dominio basándose siempre en el eje horizontal, aun cuando era necesario hacer uso del eje vertical para identificar al dominio.

Un estudiante puede evidenciar una estructura mental de Proceso si logra:

- identificar el dominio y el rango;
- obtener la expresión algebraica —S02 y S11—;
- modificar la gráfica para transformarla en una función —S02 y S07—.

5.1.3. Tablas

La presentación de una tabla en dos filas debe proporcionar al estudiante, tras analizarla, un conjunto de pares ordenados que pueden constituir una relación o una función.

Un estudiante muestra una estructura mental de Acción si puede:

- reconocer la pertenencia de determinados elementos en cada uno de los conjuntos;
- establecer relaciones entre ambos conjuntos, construyendo por ejemplo un diagrama de Venn con la intención de representarlos;
- reconocer las variables que intervienen, sin identificar cuál es la independiente y cuál la dependiente.

Si un estudiante reflexiona sobre esas Acciones y las interioriza, puede dar cuenta de una estructura mental de Proceso. Esto se pone en evidencia si logra:

- identificar todos los elementos que en general pertenecen a cada conjunto, mediante alguna característica que tengan en común dentro del conjunto;
- reconocer la relación entre dos conjuntos, expresando esa relación a través de una representación de cualquier tipo que indique una correspondencia entre ellos;
- establecer la relación entre dos conjuntos identificando las variables independientes y dependientes sin recurrir a Acciones específicas.

5.1.4. Proposiciones

Para Dubinsky y Harel (1992), las proposiciones son vagas descripciones de situaciones físicas o geométricas, y constituyen expresiones sin límites.

En las situaciones presentadas —S08, S15 y S19— el estudiante debe identificar si la proposición es cierta o falsa, o si es necesario relacionarla con alguna definición con lo que determinaría una estructura funcional; si este es el caso, entonces el estudiante dará cuenta de una estructura mental de Acción.

Si un estudiante reflexiona sobre esas acciones y las interioriza, puede dar cuenta de una estructura mental de Proceso, lo que se pone en evidencia si logra:

- reconocer la relación entre dos conjuntos, expresando esa relación a través de una representación de cualquier tipo que indique una correspondencia entre ellos;
- evaluar en una variable general la expresión de la relación dada, sin realizarlo en números específicos;
- ubicar en el plano cartesiano diferentes puntos correspondientes a la gráfica de una función sin tener que realizar las acciones de reemplazar en una expresión algebraica los valores de la variable de entrada.

5.1.5. Ecuaciones

Dubinsky y Harel (1992) argumentan que una ecuación de dos variables puede ser considerada como una función si una variable afecta en la obtención del valor de la otra variable, esto como una igualdad de una expresión en la otra variable. Esto es una ecuación explícita en la cual una variable está expresada en términos de otra variable.

Una ecuación de una sola variable también puede ser considerada como una función de manera tal que, al ingresar un valor correspondiente a la variable de la ecuación, retorna un valor que puede ser falso o verdadero, dependiendo de si la ecuación es o no satisfecha.

Un estudiante puede dar cuenta de una estructura mental de Acción si:

- conociendo una expresión que defina la relación, sustituye la variable en la expresión y realiza algún tipo de manipulación;
- evalúa numéricamente la expresión de la relación dada.

Si un estudiante resuelve la ecuación y reflexiona sobre el significado del conjunto solución hallado, muestra una estructura mental de Proceso.

5.1.6. Pares ordenados

En las situaciones presentadas los estudiantes tienen que identificar el dominio bajo ciertas condiciones, teniendo en cuenta además que el primer miembro de un par ordenado no siempre es el dominio.

Quintanilla Cóndor (2009) afirma que los estudiantes generalmente tienen la idea de función cuando el par ordenado tiene la forma de (x, y) o $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio y el rango es $y = f(x)$.

Los pares ordenados presentados en las situaciones requieren un análisis para identificar el dominio y el rango; algunas veces, puede coincidir con la presentación clásica —S04— pero, en otras el dominio se encuentra en la condición de la situación y el rango son pares ordenados —S10 y S18—.

Cuando un estudiante logra identificar correctamente el dominio y el rango, da muestras de una estructura mental de Proceso.

5.1.7. Sucesiones

Dubinsky y Harel (1992) manifiestan que una sucesión por sí misma no representa una función; sin embargo, si se realizan ciertas operaciones, sí.

Entonces, el estudiante debe asignar valores enteros de acuerdo con la condición, dando valores al primer término, al segundo y así sucesivamente, y hacer corresponder el conjunto de partida con el conjunto de llegada. En este caso, el estudiante dará cuenta de una estructura mental de Acción (Quintanilla Cóndor, 2009).

Si el estudiante logra identificar el dominio y evaluar la veracidad o falsedad de la situación S05 planteada, mostrará una estructura mental de Proceso.

6. Observación, análisis y verificación de datos

Las construcciones que se describieron en la DG no siguen necesariamente un orden progresivo o lineal, porque el estudiante puede regresar del Proceso a la Acción o hacer las Acciones en un orden distinto al que se elige para escribir la DG. Sólo para facilitar el análisis de los resultados se realizó una lista de las construcciones descritas en la DG y se las numeró en forma correlativa (Tabla 1), pero debe tenerse en cuenta que ese número asignado no tiene necesariamente ninguna relación con un orden de aparición de esas construcciones en los estudiantes.

ACCIONES	
A1	Reconocer la pertenencia de determinados elementos en cada uno de los conjuntos
A2	Establecer relaciones entre ambos conjuntos, construir un diagrama de Venn, una gráfica en un plano cartesiano, o una tabla con la intención de representarlos
A3	Tomar un elemento de un conjunto aplicando estrictamente la regla definida por la relación entre los dos conjuntos, para asignarle un elemento del segundo conjunto
A4	Conociendo una expresión algebraica que defina la relación entre ellos, sustituir la variable en la expresión y realizar algún tipo de manipulación
A5	Evaluar numéricamente la expresión de la relación dada

A6	Reconocer las variables que intervienen, sin identificar cuál es la independiente y cuál la dependiente
PROCESOS	
P1	Identificar todos los elementos que en general pertenecen a cada conjunto, mediante alguna característica que tengan en común dentro del conjunto
P2	Reconocer la relación entre dos conjuntos, expresando esa relación a través de una representación de cualquier tipo que indique una correspondencia entre ellos
P3	Evaluar en una variable general la expresión de la relación dada, sin realizarlo en números específicos
P4	Explicar el comportamiento de una variable en función de la otra, aún sin darle valores específicos a la segunda
P5	Ubicar en el plano cartesiano diferentes puntos correspondientes a la gráfica de una función sin tener que realizar las Acciones de reemplazar en la expresión algebraica los valores de la variable de entrada
P6	Establecer la relación entre dos conjuntos identificando las variables independientes y dependientes sin recurrir a Acciones específicas
P7	Obtener los valores de entrada a partir de la aplicación, a los valores de salida, de una relación invertida definida entre dos conjuntos
P8	Modificar la expresión —analítica o gráfica— de una relación para transformarla en una función
OBJETOS	
O1	Reconocer funciones inyectivas, biyectivas y sobreyectivas
O2	Aplicar operaciones algebraicas a las funciones (suma, resta, producto y cociente)
O3	Determinar la continuidad y discontinuidad de una función
O4	Analizar la derivabilidad de una función

Tabla 1. Estructuras mentales que conforman la DGI

6.1. Análisis general de los resultados

Para validar la DGI propuesta, se procedió a realizar el análisis de los datos empíricos y compararlos con el teórico, con el objeto de realizar un análisis fino y veraz sobre la manera como los estudiantes pueden construir el concepto de función.

Todas las Acciones, Procesos y Objetos definidos en la DGI aparecieron, en mayor o menor medida en las producciones de los estudiantes.

Las estructuras mentales Acción que aparecieron con mayor frecuencia fueron:

- Establecer relaciones entre ambos conjuntos, construir un diagrama de Venn, una gráfica en un plano cartesiano, o una tabla con la intención de representarlos —ecuaciones—.
- Tomar un elemento de un conjunto aplicando estrictamente la regla definida por la relación entre los dos conjuntos, para asignarle un elemento del segundo conjunto—pares ordenados—.

Las estructuras mentales Proceso que aparecieron con mayor frecuencia fueron:

- Modificar la expresión —analítica o gráfica— de una relación para transformarla en una función —expresiones algebraicas definidas en forma explícita—.
- Ubicar en el plano cartesiano diferentes puntos correspondientes a la gráfica de una función sin tener que realizar las Acciones de reemplazar en la expresión algebraica los valores de la variable de entrada —expresiones algebraicas definidas en forma implícita—.

Las estructuras mentales Objeto que aparecieron con mayor frecuencia fueron:

- Aplicar operaciones algebraicas a las funciones (suma, resta, producto y cociente) —expresiones algebraicas definidas en forma explícita—.
- Determinar la continuidad y discontinuidad de una función —expresiones algebraicas definidas en forma explícita—.

6.2. Análisis de los resultados

Para poder realizar este análisis se seleccionaron las actividades realizadas por tres estudiantes, denominados E05, E06 y E09.

Para cada conjunto de situaciones planteadas, se consideró el conjunto de respuestas dadas por cada estudiante con la intención de poner en evidencia la construcción de un nivel Acción, Proceso u Objeto, lo cual suministra información acerca de cuáles tipos de situaciones resultan presentar una mayor dificultad para los estudiantes.

6.2.1. Expresiones algebraicas definidas en forma explícita

Situación 01	Situación 07	Situación 12
$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ $g(x) = x - 3$	$y = \frac{x^2+1}{x}$	$y = \sqrt{x-2}$

Figura 1. Situaciones correspondientes a expresiones algebraicas definidas en forma explícita

El estudiante E05, en la primera entrega, no advirtió que la primera expresión correspondía a una función racional, sino que la consideró como una función lineal. Pero en la segunda entrega se dio cuenta que se trata de una función racional, analizó correctamente su dominio y la representó gráficamente (P4, P5, P6). Además, planteó la diferencia entre las dos funciones dadas, analizando la discontinuidad evitable que presenta la primera expresión (O3).

El estudiante E06 se da cuenta —en la segunda entrega— que la primera función es racional e indica que hay un valor de “x” que anula el denominador. Pero *“al graficar la función dada, me da como en la primera vez que hice este trabajo una función lineal”*. Existe aquí una confusión generada por haber analizado la gráfica de la función obtenida con el GeoGebra. Tal es así que el estudiante expresa que *“hay un engaño visual por así decirlo, que hace que nos confundamos y digamos que es una función racional sin probar con GeoGebra”*.

Este mismo estudiante, en la situación S07 continúa aferrándose a la gráfica que construye erróneamente en GeoGebra (P5) y coincide el análisis que efectúa para obtener el dominio con la gráfica de la función, resolviendo la situación sin mayores dificultades.

Dos estudiantes evidenciaron haber construido una concepción Proceso, mientras que el tercero dio muestras de haber construido una concepción Acción para este tipo de situaciones.

6.2.2. Expresiones algebraicas definidas por partes

Situación 09	Situación 22
$y = \begin{cases} x & si & x \leq -1 \\ 1 - x^2 & si & -1 < x \leq 1 \\ 0 & si & x \geq 1 \end{cases}$	$y = \begin{cases} 1 & si & x^2 - 4x + 4 > 0 \\ 0 & si & x^2 - 4x + 4 = 0 \\ -1 & si & x^2 - 4x + 4 < 0 \end{cases}$

Figura 2. Situaciones correspondientes a expresiones algebraicas definidas por partes

En la situación S09, el estudiante E09 expresó que *“en $x = 1$ la función parece presentar un problema, siendo que este valor pertenece a dos tramos distintos de la función, pero si analizamos la gráfica o vemos los valores que toma x=1 en ambos tramos, podemos ver que el único valor de “y” que se corresponde a $x = 1$ es $y = 0$”.*

Situación 17
$y^3 = x^2$

Figura 3. Situaciones correspondientes a expresiones algebraicas definidas en forma implícita

En la misma situación, el estudiante E05 halló correctamente el dominio y el rango de la función (P6), graficó en forma correcta (P5) y advirtió la existencia de una discontinuidad en $x = -1$, pero la clasificó mal, como evitable (O3).

En la situación S22 el estudiante E09 se da cuenta que el intervalo definido como dominio de la tercera parte de la función presenta un problema y expresa que, debido a ello, *“la función no puede completarse en su tercer tramo”*. No llega a definir completamente el dominio, no analiza la imagen ni realiza una representación gráfica.

En cambio, el estudiante E05 solo expresó que *“no corresponde a una función debido a que no se cumple una de las dos condiciones necesarias para que una relación sea función: existencia”*, sin aclarar a qué parte de la función se refiere concretamente.

Dos estudiantes evidenciaron la construcción de una concepción Acción, mientras que el restante la construcción de una concepción Proceso para este tipo de situaciones.

6.2.3. Expresiones algebraicas definidas en forma implícita

El estudiante E06 en la primera entrega tuvo inconvenientes para reconocer la función. Indicó que *“pareciera ser por partes idénticas”* y más adelante agregó que *“se puede ver claramente que no llegan a cortarse en 0 ambas, se aproximan, pareciendo que las corta una recta horizontal/vertical”*. Definió incorrectamente el dominio y la imagen, indicando que ambos conjuntos estaban formados por todos los reales excepto el cero. Utilizó GeoGebra para graficar, pero ingresó la expresión dada como la ecuación $-x^2 + y^3 = 0$ obteniendo la gráfica que se muestra en la Fig. 4.

En la segunda entrega, logró transformar la función en la forma explícita $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, pero al utilizar el GeoGebra escribió mal la función, representando $f(x) = 3\sqrt{x^2}$, obteniendo dos líneas rectas oblicuas (Fig. 5). A pesar de haber hallado la expresión analítica correcta, confió más en la gráfica obtenida, lo que lo llevó a analizar incorrectamente la función (P3, P5 y P6).

Los tres estudiantes evidenciaron la construcción de una concepción Proceso para este tipo de situaciones.

6.2.4. Representaciones gráficas

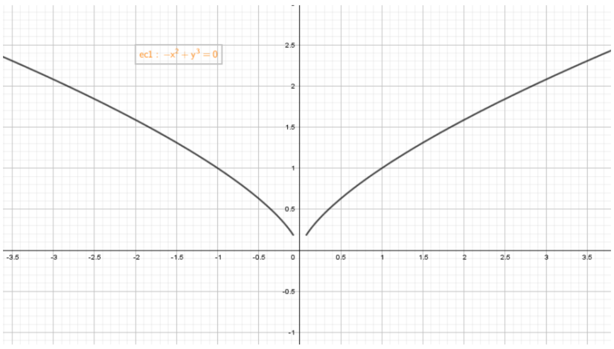


Figura 4. Primera entrega de la actividad S07 realizada por el estudiante A06

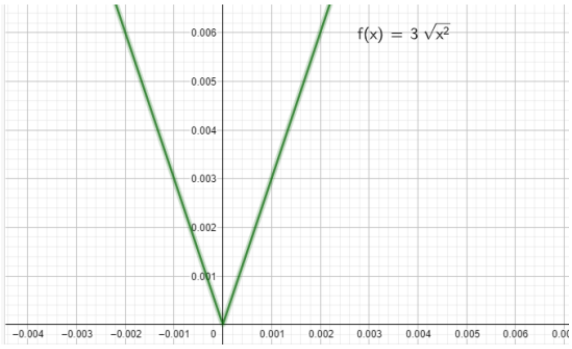
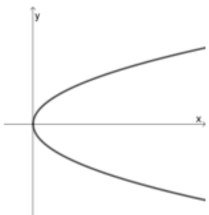
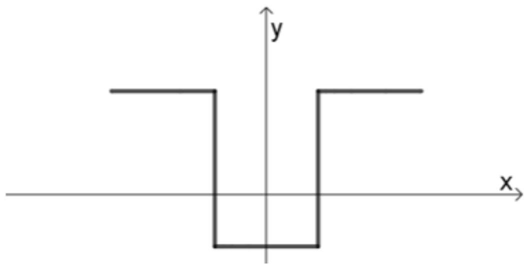
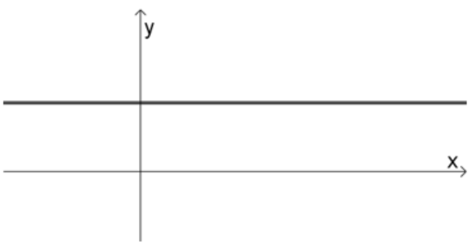
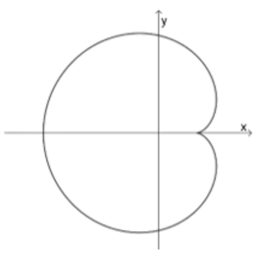


Figura 5. Primera entrega de la actividad S07 realizada por el estudiante

Situación 02	Situación 06
	
Situación 11	Situación 21
	

Situación 16
Electrocardiograma 

Figura 6. Situaciones correspondientes a representaciones gráficas

En la situación S02, los estudiantes E05 y E06 expresaron —correctamente— que la gráfica dada no correspondía a una función por no cumplir con la condición de unicidad, pero no pudieron avanzar más.

El estudiante E09 en la primera entrega expresó lo mismo que los otros estudiantes, pero indicó que la gráfica pertenecía a una curva paramétrica. En la segunda entrega advirtió que podría tratarse de una función de "$y\ en\ x$" pero no aclaró nada al respecto.

En la situación S06, el estudiante E05 propuso eliminar los dos tramos verticales, transformando la función en una definida por partes (P8).

El estudiante E09 en su primera entrega expresó que no se trataba de una función por no cumplir la condición de unicidad en los tramos rectos verticales, pero no propuso ninguna modificación. En su segunda entrega propuso convertir los dos tramos rectos en una curva, pero sin eliminar los tres tramos horizontales (P8). Al no realizar la representación gráfica de la modificación propuesta, no advirtió que seguiría sin cumplirse la condición de unicidad.

El estudiante E06, en su primera entrega de la situación S11, no justificó por qué se trataba de una función, a pesar de haber identificado que se trataba de una función constante y definir su dominio e imagen. Pero en la segunda entrega apareció la idea del cumplimiento de las condiciones de existencia y unicidad. Los tres estudiantes analizaron la continuidad de la función propuesta (O3).

Para resolver la situación S16, los tres estudiantes realizaron una búsqueda para informarse qué variables se encuentran presentes en la gráfica de un electrocardiograma, e indicaron el dominio e imagen teniendo en cuenta el contexto (P1, P4, P6).

En la situación S21, el estudiante E05, en su primera entrega, indicó que no correspondía con una función por no cumplirse la condición de unicidad, sin profundizar un poco más. Pero en la segunda entrega advirtió que se trataba de una curva paramétrica y pudo definir la función como el par ordenado $(x = f(t); y = g(t))$, indicando que el dominio es $\{t/t \in \mathbb{R}\}$ (P4).

El estudiante E09 propuso eliminar la parte de la gráfica que se encuentra por debajo del eje "x" para que se cumpla la condición de unicidad. Advierte que se trata de una curva paramétrica pero no logra identificarla como función. En la segunda entrega la compara con la gráfica de una circunferencia y propone eliminar una parte para que pueda definirse como función.

Los tres estudiantes evidenciaron la construcción de una concepción Proceso para este tipo de situaciones.

6.2.5. Tablas

Situación 3
En la Tabla se indican las notas obtenidas por los estudiantes de Matemática I en un examen parcial (escala de 1 a 10).

Marcos	Elisa	Luis	Marcelo	Analía	Lucas	Carola	Magdalena
7	5	2	7	8	10	8	7

Figura 7. Situaciones correspondientes a tablas

El estudiante E05, en su primera entrega, indicó que se trataba de una relación entre los alumnos y las notas obtenidas, pero que no se cumplía la condición de unicidad porque *"hay alumnos que tienen la misma nota"* y tampoco la de existencia porque *"hay notas que los alumnos no sacaron"*.

Al realizar la segunda entrega, analizó además la posibilidad de que los nombres estén relacionados con las notas. Expresó entonces que *"si la variable 'x' fueran los nombres y la variable 'y' las notas, la situación sería una función (… porque) se cumplirían las condiciones de existencia y unicidad"* (P1).

El estudiante E06 explicó en qué caso correspondería a una función y en cuál no.

El estudiante E09 expresó que *"esta situación no representa una función ya que no hay dos conjuntos que se relacionen para darnos un único resultado que pueda predecirse usando una expresión matemática"*. Pudo identificar solo un conjunto, el de las notas, pero no logró darse cuenta de que el segundo conjunto estaba formado por los alumnos.

Dos estudiantes —E05 y E06— dieron cuenta de una concepción Proceso para este tipo de situaciones, mientras que el estudiante E09 no pudo realizar la actividad.

6.2.6. Proposiciones

Situación 08	Situación 15	Situación 19
La relación existente entre el área del círculo y su radio	Un nadador sale de una orilla y cruza al otro lado del río	El bateador impacta la pelota. La trayectoria de la pelota de béisbol, tanto sin considerar la resistencia del aire como considerando una determinada resistencia, es proporcional al cuadrado de la rapidez de la pelota

Figura 8. Situaciones correspondientes a proposiciones

El estudiante E05, en su primera entrega, expresó que *"se ve una relación existente entre el área del círculo y el radio del mismo mediante la siguiente fórmula*

$a = pi.r\text{^}2$, *por lo tanto, ambos varían en conjunto, es verdad que a la hora de graficar la circunferencia y plantear la regla de la vertical no es función…”*. Se confunde y no puede encontrar gráficamente la relación entre el área y el radio.

En la segunda entrega se da cuenta del error cometido y afirma que la relación entre el radio y el área es una función, analizando correctamente los valores que ambas variables pueden tomar. No explicita cuál es el dominio y cuál la imagen, pero se puede comprender que lo entendió analizando el escrito y la gráfica presentados (P2, P3, P5).

En la situación S15 los tres estudiantes plantearon dos relaciones: distancia recorrida en función del tiempo y velocidad en función del tiempo, definiendo en ambos casos el dominio y la imagen. En la Fig. 9 se muestra la respuesta del estudiante E06 en la segunda entrega.

En la situación S19 los estudiantes E05 y E06 buscaron información y subieron imágenes de la trayectoria de una pelota de béisbol, pero relacionaron la trayectoria —y no la velocidad— con el tiempo. No obstante, de la lectura de la consigna supusieron que la gráfica tenía que corresponder a una función cuadrática. El estudiante E09 no pudo realizar la actividad.

> Es claramente una función y nos ponemos en detalle, como sale desde la orilla y cruza hasta el otro lado del rio, vemos que lo hace de manera constante sin ir y bajando (pondré una imagen que muestre a que me refiero con esto) por ende, si queremos ver la relación con respecto a que tiempo transcurrido llegada a su meta el nadador, claramente estaríamos en presente tanto de una relación como de una función, ya que habría una imagen única para cada elemento del dominio. entonces planteamos esa relación entre el tiempo (t) y la velocidad (v) del nadador, pero si imaginemos que va a velocidad constante, entonces seria una función constante, pero si aumentara la velocidad en ciertos tramos que en otros descendería y claramente si queremos graficarlo sería totalmente distinto. También si fuera a una velocidad constante su dominio claramente seria todos los números reales y si queremos ver tanto el dominio o imagen, si su velocidad cambiaría habría que realizar dichas gráficas.

Figura 9. Respuesta del estudiante E06 correspondiente a la situación S15

Teniendo en cuenta las tres situaciones en conjunto, podemos afirmar que los tres estudiantes dieron cuenta de una concepción Proceso en este contexto.

6.2.7. Ecuaciones

De una sola incógnita		Paramétricas
Situación 14	Situación 20	Situación 13
$sen\, x + cos\, x = 0$	$x^2 - \sqrt[3]{x^2} - 8 = 0$	$\begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$ siendo $\boldsymbol{t}$ un número real

Figura 10. Situaciones correspondientes a ecuaciones

Los estudiantes E05 y E06 resolvieron, utilizando GeoGebra, las ecuaciones de las situaciones S14 y S20, pero se confundieron al analizar la gráfica que el software le mostraba —rectas verticales para los valores de x que eran solución de la ecuación dada— e interpretaron que dicha gráfica era la representación de la relación o función definida por las ecuaciones.

En la situación S13, el estudiante E05 definió a "*x y a y como funciones de una tercera variable y (llamada parámetro) mediante las ecuaciones $x = f(t)$ e $y = g(t)$*". Además, indicó que "*cada valor de t determina un punto (x, y) que se puede representar en el plano coordenado"* obteniendo de esta manera la curva paramétrica C (P4).

El estudiante E06 indicó que "*x y a y son las variables independientes y t es nuestra variable dependiente*" (P3). Luego definió la curva paramétrica de la misma manera que el estudiante E06.

A pesar de ello, ninguno de los dos pudo graficar la curva paramétrica, sino que se limitaron a graficar las expresiones $x = f(t)$ e $y = g(t)$.

El estudiante E09 graficó, utilizando GeoGebra la curva paramétrica, pero analizó la gráfica como una función del tipo $y = f(x)$, razón por la cual indicó que "*incumple la condición de unicidad*" y en consecuencia no se trata de una función (Fig. 11).

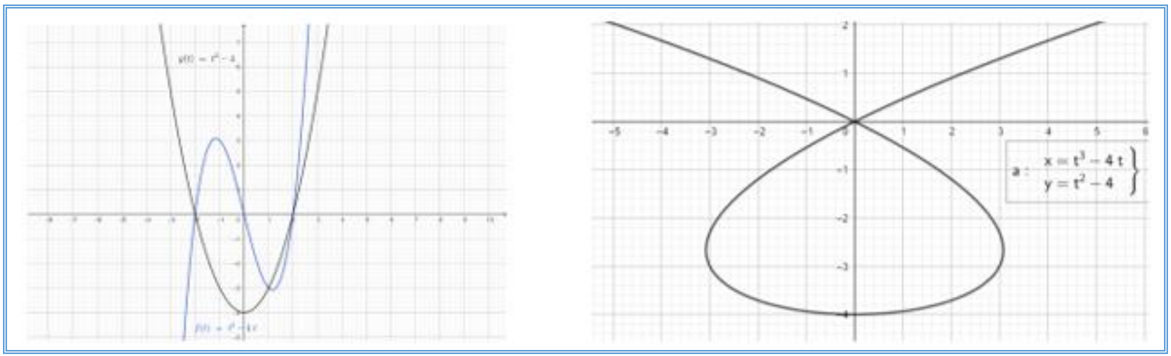


Figura 11. Respuesta de los estudiantes E05 (izquierda) y E09 (derecha) correspondiente a la situación S13

Los tres estudiantes evidenciaron la construcción de una concepción Acción para este tipo de situaciones.

6.2.8. Pares ordenados

Situación 04	Situación 10	Situación 18
Sea: a) $F = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / y^2 = x^2\}$, definido de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / y^2 = x^2\}$, definido de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$	$\{(3x; 3x) / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 20\}$	$\{(3; 2x) / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 20\}$

Figura 12. Situaciones correspondientes a pares ordenados

Al realizar la situación S04, los tres estudiantes pudieron diferenciar las partes a) y b), indicando que la primera corresponde a una función mientras que la segunda no porque no se cumple la condición de unicidad. Definieron correctamente dominio y rango (P1, P4, P6), y representaron gráficamente ambas funciones (P5).

> 10) La expresión mostrada es una función en la que sus puntos están definidos por una variable x que se multiplica por 3 para dar las coordenadas de cada punto, perteneciendo x a los naturales menores o iguales a 20. Esto quiere decir que cuando x toma el valor 1, la función tiene un punto en (3,3), cuando x toma valor 2 la función tiene su punto en (6,6) y así hasta x=20 donde se encontrará el punto (60,60). Su dominio y su imagen serán todos los múltiplos de 3 entre 3 y 60.

Figura 13. Respuesta del estudiante E09 correspondiente a la situación S10

En la situación S10, el estudiante E09 da indicios de haber comprendido que para cada valor de $x \leq 20$ existe un par ordenado. Pero, al definir el conjunto imagen fuerza la situación a obtener la segunda componente del par ordenado, dejando sin efecto el razonamiento realizado al principio (Fig. 13).

Los tres estudiantes evidenciaron la construcción de una concepción Proceso para este tipo de situaciones, dependiendo la complejidad del problema planteado.

6.2.9. Sucesiones

Ninguno de los tres estudiantes pudo plantear la relación existente entre la expresión dada y su falsedad o veracidad.

El estudiante E05 no pudo resolver porque "*existe únicamente una variable*".

Situación 05
$\{2^n > n^2 + 3n / n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 20\}$

Figura 14. Situaciones correspondientes a sucesiones

El estudiante E06 intentó resolver la situación planteada, pero interpretó que el dominio estaba dado por los números naturales menores o iguales que 20 y se confundió con la expresión $2^n > n^2 + 3n$ interpretando que se trataba de dos conjuntos diferentes, por lo cual no pudo resolver correctamente.

El estudiante E09 advirtió que se trataba de una inecuación planteada para los números naturales menores o iguales que 20, pero no logró identificar dos conjuntos entre los cuales establecer una relación.

7. Discusión y conclusiones

En las situaciones que se encontró la mayor cantidad de estudiantes que evidenció la construcción de una concepción Proceso fueron las relacionadas con gráficas (88%; n=15), proposiciones (82%; n=14) y expresiones algebraicas (76%; n=13).

En las situaciones correspondientes a ecuaciones de una incógnita y a sucesiones no se encontró ningún estudiante con evidencias de la construcción de una concepción Proceso. En 41% (n=7) y el 12% (n=2) mostró la construcción de una concepción Acción en las ecuaciones de una incógnita y en las sucesiones, respectivamente.

En todas las situaciones que involucraron expresiones algebraicas definidas en forma explícita o por partes, uno o dos estudiantes evidenciaron la construcción de una concepción Objeto.

Al considerar la actividad en su totalidad, el 59% (n = 10) de los estudiantes mostró la construcción de una concepción Proceso.

Cuando los estudiantes se enfrentaron a situaciones habituales, que les resultaban más cercanas, pudieron dar cuenta de haber construido un nivel de comprensión de Proceso.

Cuando resolvieron situaciones menos habituales o poco conocidas, los estudiantes dieron cuenta de haber construido un nivel de Acción. Tal el caso de las ecuaciones paramétricas y las relaciones presentadas a través de pares ordenados o sucesiones.

Esta apreciación se condice con un estudio sobre la concepción de función por parte de estudiantes universitarios (Evangelidou, Spyrou, Elia & Gagatsis, 2004) en el que los autores afirman que la mayoría de los estudiantes parecen identificar como funciones las formas estereotipadas que les son familiares desde la escuela secundaria.

Al tomar en cuenta todas las respuestas dadas por los estudiantes a la totalidad de las situaciones planteadas en el instrumento, podemos concluir que los tres estudiantes seleccionados para realizar un análisis detallado de sus desarrollos dieron cuenta de haber construido una estructura de Proceso.

La realización del Taller en el cual se desarrollaron, en el Tema 2, conceptos teóricos y prácticos sobre relaciones y funciones posibilitó una mejora general en el nivel de comprensión del concepto de función por parte de los estudiantes.

Creemos necesario entonces, de cara a nuevos procesos de enseñanza y aprendizaje que se lleven a cabo, incluir en las planificaciones situaciones que no resulten habituales para los estudiantes e incluso poco conocidas o desconocidas para ellos, con el fin de darles una mayor oportunidad de construcción del concepto de función.

Además, de acuerdo con los resultados obtenidos en esta investigación, podemos sugerir la implementación del Ciclo ACE, lo cual posibilitará que los estudiantes puedan mejorar el nivel de comprensión del concepto de función.

Esto contribuirá también a mantener “vivo” en los estudiantes el concepto de función, para tratar de lograr que a medida que avancen en sus estudios, los conceptos se consoliden satisfactoriamente en lugar de que tiendan a olvidarse (Vivas, 2009).

El trabajo realizado con los estudiantes posibilitó que ellos pudieran construir estructuras más sólidas del concepto de función, lo que permitirá avanzar con la investigación sobre la construcción del concepto de transformación de funciones.

La DGI diseñada, puede servir como herramienta para describir y predecir el conocimiento matemático de un estudiante que reúna las características generales del grupo en el que se desarrolló este trabajo, y puede constituir también una herramienta para elaborar secuencias de enseñanza que, tras ser analizadas a la luz de la teoría APOE permitan realizar un refinamiento de la DGI para obtener una nueva DG que nos aproxime aún más a los mecanismos de construcción mediante los cuales los estudiantes se apropian del concepto de función.

8. Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York, NY: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II*, 6, 1–32.

Breindenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285

Dubinsky, E. y Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and Mathematics education: the genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior, 5*, 55-92.

Dubinsky, E. y Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 85-06. MAA Notes N° 25. Washington DC: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/10056/1/Aplicacion1996Dubinsky.pdf

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I. & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. *Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 351-358

Farabello, S.P., Trigueros, M. (2020). La Transformación de Funciones en el aula de Física. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(58), 25-47. Disponible en: https://union.fespm.es/index.php/U-NION/article/view/82/23

López Acosta, L.A. (2011). *Etapas de aprendizaje asociadas al concepto función. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis inédita de licenciatura). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México.

Quintanilla Cóndor, C.N. (2009). *Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la Teoría APOS*. (Tesis inédita de maestría). Escuela de Posgrado, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. Disponible en: https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/1194

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (1), 89 – 112. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v13n1/v13n1a5.pdf

Vivas, V. (2009). La comprensión de conceptos básicos del cálculo, de estudiantes de la UNELLEZ – San Carlos. *Revista Memoralia, 6*, 9-14. Disponible en: http://opac.unellez.edu.ve/index.php?lvl=author_see&id=6744

Farabello, Sergio Pablo. Especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y la Matemática. Facultad de Bromatología, UNER, Argentina. Estudiante del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Mención Matemática. UNICEN, Argentina. Codirector del Proyecto de Investigación 25D/057 denominado "Estrategias heurísticas para la resolución de problemas matemáticos vinculados al perfil profesional en el primer nivel de las carreras de grado". Años 2013/2017. Integrante del Proyecto de Investigación denominado "Exploración de las dificultades en el aprendizaje de las ciencias experimentales para obtener elementos que configuren estrategias de enseñanza". Años 2002/2005. ORCID: 0001-9870-2753. sergio.farabello@uner.edu.ar

Trigueros, María. Lic. en Física UNAM, México. M. en C. Física, UNAM, México y Doctorado en Educación en la Universidad Complutense de Madrid, España. Investigadora en Educación Matemática y profesora de Matemáticas en el ITAM, México. Miembro de la Academia Mexicana de Ciencias y del Sistema Nacional de Investigadores de México, Sus temas de investigación incluyen uso de la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas; la enseñanza y el aprendizaje del concepto de variable en el álgebra elemental, y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la universidad. ORCID: 0001-7527-6704. mtriguerosg@gmail.com