UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Diciembre de 2010, Número 24, páginas 117-134
ISSN: 1815-0640

Estudio del Cuadrilátero de Saccheri como Pretexto para la Construcción de un Sistema Axiomático Local

**Óscar Molina; Carmen Samper; Patricia Perry;
Leonor Camargo; Armando Echeverry.**

Resumen

Este artículo tiene dos objetivos: describir un enfoque metodológico para la enseñanza de la geometría que propicia la participación de los estudiantes y mostrar que, en el ámbito de los primeros cursos de nivel universitario, dicho enfoque permite gestionar el acercamiento al conocimiento matemático y el uso de las ideas que producen los estudiantes para construir, como comunidad, parte de un sistema axiomático para la geometría plana euclidiana. Para apoyar la afirmación anterior se describen los procesos realizados por dos grupos de estudiantes, que conducen a la construcción de dos sistemas axiomáticos locales diferentes, cuyo núcleo es la relación de rectas paralelas.

Abstract

This article has two purposes: describe a methodological approach for teaching geometry that propitiates student participation, and show that, in the first university level courses, the methodology favors an approximation to mathematical knowledge and the use of student produced ideas to construct, as a community, part of an axiomatic system for Euclidean plane geometry. To support the previous statement, we describe the processes followed by two groups of preservice teachers that led to the construction of two slightly different local axiomatic systems whose nucleus is parallel lines.

Resumo

Este artigo tem dois objetivos: descrever uma abordagem metodológica para o ensino de geometria que estimula a participação dos alunos e mostrar que, no domínio dos primeiros cursos de nível universitário, esta abordagem permite gerenciar o conhecimento matemático eo uso de idéias produzidas por alunos para construir, como uma comunidade, um sistema axiomático para a geometria plana euclidiana. Para apoiar a afirmação prévia se descreve os processos realizadas por dois grupos de estudantes, levando à construção de dois sistemas axiomático locales diferentes, cujo núcleo é a relação de linhas paralelas

1.Introducción

En este artículo queremos ilustrar el efecto de un enfoque metodológico en el proceso de construcción de un sistema axiomático[1] local de la geometría plana euclidiana, relativo al paralelismo, en el marco de la resolución de un problema relacionado con el cuadrilátero de Saccheri. Este enfoque (Samper,

[1] Entendemos por sistema axiomático, relativo a un determinado tema, un conjunto conformado por términos no definidos, enunciados (i.e., postulados, definiciones y teoremas) a través de los cuales se hace hacen afirmaciones sobre los objetos involucrados en el tema, y las relaciones lógicas entre ellos. Por sistema axiomático local entendemos un sistema axiomático referido a un núcleo conceptual, en particular, vinculado con el cuerpo teórico ya construido.

Perry, Camargo, Molina y Echeverry, en evaluación) es el común denominador de la innovación curricular que se ha venido consolidando desde 2004 en los primeros tres cursos de la línea de geometría en el programa de la Licenciatura en matemáticas que ofrecemos en la Universidad Pedagógica Nacional (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007). Es resultado de nuestras reflexiones asociadas a las investigaciones que nuestro grupo ha desarrollado en torno al aprendizaje y la enseñanza de la geometría.

Específicamente, queremos mostrar que es posible adoptar, en el ámbito de los primeros cursos de nivel universitario, un enfoque metodológico en el que la participación de los estudiantes es fundamental en la construcción de un sistema axiomático. Para ello, comparamos aspectos de la implementación del enfoque en dos grupos de estudiantes de un curso de geometría plana que estaban a cargo de profesores diferentes, que nos ayudan a sostener que aun cuando ambos grupos estudian las mismas temáticas, cubren el mismo cuerpo de conocimientos y tienen la misma meta de avanzar en el aprendizaje de la demostración, los sistemas axiomáticos construidos difieren, precisamente como consecuencia de la participación de los estudiantes. Este hecho pone de presente la posibilidad de gestionar, por parte del profesor, el acercamiento a los estudiantes a conocimientos matemáticos desarrollados por la comunidad científica, y la utilización efectiva de las ideas producidas por ellos como miembros de una comunidad de discurso matemático (Ben-Zvi y Sfard, 2007) en un proceso de construcción social de un sistema axiomático.

Después de dar una descripción general del enfoque metodológico que proponemos y del curso mismo, nos centramos en aspectos de la implementación de dicho enfoque describiendo la ruta que se siguió para la construcción de los sistemas axiomáticos específicos originados en el marco de la solución de problema ya mencionado.

2. Descripción general de nuestro enfoque metodológico

Desde el momento mismo en que se inicia el desarrollo de un tema, se involucra a los estudiantes en la resolución de problemas[2] de índole geométrica como medio para lograr que sean ellos quienes descubran, conjeturen y produzcan inicialmente justificaciones informales, todo con el objetivo de que puedan participar activamente en la introducción de nuevos enunciados en el sistema axiomático construido hasta el momento.

Creemos que en un ambiente como el esbozado antes, los estudiantes alcanzan un cierto grado de familiaridad[3] con los objetos geométricos sobre los que versarán los enunciados que harán parte del sistema axiomático que se está construyendo. Cabe mencionar que los estudiantes trabajan en forma individual o en grupos pequeños, apoyados en el uso de la geometría dinámica. Incide en la ganancia de esta familiaridad la posibilidad de modelar una situación en un

[2] Por problema entendemos aquí una tarea para la cual los estudiantes no tienen un patrón de solución; además, en el proceso de solución de la tarea se requiere poner en juego una dosis de creatividad. Por lo regular, la tarea siempre incluye la solicitud de una justificación. (Se encuentran detalles sobre los diferentes tipos de tareas propuestas en el curso en Perry, Camargo, Samper, Molina y Echeverry, 2009).

3 Al iniciar el desarrollo de un contenido, los estudiantes tienen la familiaridad básica requerida para poder comenzar a abordar la pregunta o el problema; sin embargo, la mayoría de resultados geométricos cuyos enunciados llegan a ser parte del sistema axiomático que se construye en el curso son desconocidos para los estudiantes y cuando no lo son del todo, la rigurosidad con la que se enuncian los constituye en enunciados nuevos para ellos.

entorno en el cual están inmersos ciertos conocimientos geométricos; en consecuencia, las relaciones que los estudiantes descubren en la exploración de dicha situación se pueden modelar matemáticamente, esto es, debe existir teoría matemática que las explique (Mariotti, 1997).

Después de la resolución del problema se pide a los estudiantes presentar sus producciones —que por lo general son diversas— ante la comunidad de la clase con el fin de revisarlas y concretarlas en enunciados e ideas que se convierten en material de trabajo de la comunidad para formar el sistema axiomático. En una conversación instruccional —entendida como un discurso en la clase que permite la construcción conjunta de significado entre profesor y estudiantes y que sigue un modelo de conversación, realizada en lengua natural, en la que los miembros más experimentados de una cultura, instruyen a los menos experimentados, a través del diálogo (Tharp y Gallimore, 1988, citados en Forman, 1996)— se llevan a cabo acciones tales como responder preguntas que ayudan a ganar familiaridad y comprensión de los objetos geométricos involucrados, aceptar o rechazar las conjeturas formuladas, presentar contraejemplos cuando se rechaza una conjetura, comparar enunciados de conjeturas para determinar si se refieren o no al mismo hecho geométrico, revisar la formulación misma de las conjeturas y establecer la definición de un término que servirá de núcleo para el sistema axiomático local.

El papel del profesor como conductor de este tipo de intercambio es fundamental sin que esto signifique que los estudiantes no jueguen un papel activo y muy importante. Por ejemplo, en lo que tiene que ver con la presentación de las conjeturas a las que llegan los estudiantes, por lo general, es el profesor quien decide el orden en que se presenten para su revisión; detrás de esta decisión hay razones didácticas que buscan, por una parte, no quitarle sentido a la presentación y revisión de las diferentes conjeturas (e.g., hacer un análisis de tal forma que se estudien, gradualmente, desde las conjeturas menos elaboradas hasta las más completas, o tener en cuenta la inclusión teórica entre las conjeturas propuestas) y, por otra parte, aprovechar la revisión de las diferentes producciones para cubrir una amplia gama de consideraciones.

Teniendo ya elementos para comenzar la construcción del sistema axiomático local, ésta se va llevando a cabo a través de acciones tales como identificar qué elementos teóricos se requieren para establecer una determinada definición y en caso de que éstos no hagan parte del sistema axiomático con el que se cuenta, introducirlos; si hubiera varios enunciados para demostrar, decidir en qué secuencia se intentará hacer sus demostraciones y producirlas; identificar enunciados (postulados y teoremas) que deberían hacer parte del sistema para poder completar una demostración.

La construcción del sistema axiomático está fundamentada, en realidad, en dos prácticas matemáticas: demostrar y definir (Perry, Samper, Camargo, Molina y Echeverry, 2009), las cuales tienen lugar a través de conversación instruccional y de conversación matemática. Entendemos esta última como un diálogo, sobre algún tema matemático, en el que los estudiantes comunican sus ideas, presentan sus propuestas, hacen comentarios ya sea dirigiéndose al profesor o entre ellos de manera directa. En este tipo de conversación, el profesor es un miembro más de la comunidad y, en ese sentido, su papel es diferente al que tiene en la conversación instruccional; la responsabilidad de culminar exitosamente la tarea recae sobre la comunidad en general.

En el curso no se sigue un texto, ni los textos son fuente de consulta de los enunciados que se organizan; sin embargo, el profesor gestiona los contenidos de la clase de tal manera que los elementos que conforman el sistema axiomático global construido, en lo posible, son los mismos que componen el sistema propuesto en el libro Geometría Moderna de E. Moise y F. Downs. Ahora bien, como mecanismo para recopilar lo que se realiza en cada clase y conformar un cuerpo teórico común y sin errores, se asigna en cada clase dos estudiantes que deben tomar apuntes sobre las definiciones, postulados y teoremas (junto con sus demostraciones) que en ella se abordan y enviárselos por correo electrónico al profesor. Él hace la revisión de éstos y se lo envía a los demás miembros de la clase.

Como se vislumbra en la descripción anterior, en nuestro enfoque metodológico tenemos como fundamento que la actividad demostrativa (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007) es una situación social: queremos que los estudiantes se involucren en la demostración de las conjeturas que hicieron sus pares o ellos mismos, lo cual implica un acto social tanto de aceptación de conjeturas como de construcción en comunidad, de su demostración; es importante que los estudiantes tengan una experiencia de aprendizaje como participación, y que se sientan comprometidos en la construcción de conocimiento.

En este sentido, cabe resaltar el papel importante de las normas que rigen tanto la participación de los estudiantes en la actividad matemática desarrollada (es necesario escuchar a los compañeros, se debe respetar el uso de la palabra, toda contribución es importante, la participación es esencial para generar ideas útiles aunque sean erróneas) como la validación del conocimiento matemático que circula en la clase (dar el por qué de toda afirmación que se haga, usar en las demostraciones sólo aquellas afirmaciones que se han validado dentro del sistema). En un contexto de tal naturaleza, tanto el profesor como los estudiantes contribuyen a la constitución interactiva de situaciones que invitan a demostrar y se enfrentan a ellas como eventos de carácter social e individual (Goos, 2004; Graven, 2004; Martin y McCrone, 2005; Mariotti, 2000).

3. Características de los dos grupos

El enfoque metodológico descrito se implementó en dos grupos de un curso de geometría plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. El curso es el segundo de la línea de geometría y está ubicado en el segundo semestre del programa. Cada grupo estuvo a cargo de un profesor diferente; sin embargo, ambos profesores tienen experiencia en orientar el curso bajo dicho enfoque metodológico, pues lo han implementado en varias ocasiones.

Los temas incluidos oficialmente en el programa del curso son los usuales: relaciones entre puntos, rectas, planos, ángulos, propiedades de triángulos, cuadriláteros, circunferencias, y relaciones de congruencia y de semejanza. Pero debido al enfoque metodológico que se utiliza, usualmente no se alcanza a cubrir lo correspondiente a los temas de circunferencia y de semejanza de triángulos; en este caso, tal como lo menciona de Villiers (1986), el tiempo didáctico transcurre mucho más lentamente que si se les presentara a los estudiantes el sistema axiomático ya hecho y ellos sólo tuvieran que obtener algunas deducciones lógicas.

Uno de los grupos estaba conformado por 30 estudiantes y el otro por 34. Conviene señalar que los dos grupos de estudiantes tenían antecedentes académicos similares en lo que se refiere al manejo de un software de geometría dinámica (Cabri), a la familiaridad con el enfoque metodológico, y al contenido geométrico mismo; en particular, en ambos grupos se conocían ciertas características de un sistema axiomático (el significado de definición, postulado y teorema, y sus funciones en procesos deductivos). En particular, para abordar el problema que se les propuso, ellos contaban con toda la teoría relacionada con congruencia de triángulos, desigualdades en triángulos, perpendicularidad de rectas en un plano y las relaciones entre puntos, rectas y planos.

4. Recuento de algunos aspectos de la implementación del enfoque metodológico y presentación de los sistemas axiomáticos locales

En esta sección exponemos el enunciado del problema planteado a los estudiantes, que dio lugar al proceso de construcción de los sistemas axiomáticos locales que presentamos. Precisamos la intención específica que nos movió a plantearlo, algunas previsiones con respecto al contenido geométrico que saldría a relucir, algunos detalles relativos a la implementación del enfoque en lo que tiene que ver con la gestión de dicho contenido y la participación de los estudiantes, y finalmente, mostramos a través de un esquema el sistema axiomático local construido por la comunidad de la clase en cada grupo, cuyos elementos surgieron previamente o en el momento, para dar solución al problema.

4.1. El problema propuesto

El problema que se propone para incentivar las ideas que darán lugar al sistema axiomático local cuyo núcleo será el paralelismo de rectas está basado en el cuadrilátero de Saccheri, un cuadrilátero con dos ángulos consecutivos rectos y dos lados opuestos congruentes cada uno con un extremo en el vértice de uno de los ángulos rectos. Siendo una figura geométrica que visualmente parece ser un rectángulo y que, a partir de la exploración con geometría dinámica, se comprueba que tiene todas las propiedades de un rectángulo, querer demostrar que las tres propiedades que se le exigen al cuadrilátero teóricamente validan esa idea impulsa a los alumnos a emprender el camino para ello. Como sólo es posible hacerlo aceptando como postulado del sistema axiomático aquel que afirma la existencia de una única recta paralela a una dada por un punto externo a ella (V Postulado de Euclides), el problema propuesto ofrece el escenario perfecto para introducir dos elementos al sistema: el concepto de rectas paralelas y dicho postulado. Nuestra expectativa no difiere mucho de lo que experimentó Saccheri (1667 - 1733) cuando estudió ese cuadrilátero con la intención de llegar a una contradicción que permitiera deducir, por reducción al absurdo, el V Postulado de los postulados restantes

(Boyer, sf). Al aceptar como verdaderas las primeras veintiocho proposiciones expuestas en *Elementos* de Euclides, las cuales no requieren del V postulado, la configuración propuesta para el cuadrilátero es construible. Saccheri logra demostrar que los otros dos ángulos del cuadrilátero son congruentes pero no rectos. Él plantea tres hipótesis: son rectos, son obtusos o son agudos y las estudia con el fin de descartar las últimas dos. Saccheri no logra su objetivo, pero a cambio establece varias propiedades geométricas relacionadas con dichas hipótesis. No es nuestro fin estudiar lo que hizo Saccheri sino usar la situación para la intención anteriormente expuesta.

El enunciado del problema difiere un poco para ambos grupos (en adelante Grupo A y Grupo B), sin que ello ocasione un efecto profundo en el sistema axiomático local que se construye.

Problema para el Grupo A. Construya un □*ABCD* [4] con las siguientes características: $\angle A$ y $\angle B$[5] rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$[6]. ¿Qué puede demostrar acerca de $\angle C$ y $\angle D$?

Problema para el Grupo B. Dado un □*ABCD* tal que $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. ¿Qué propiedad especial tiene el □A*BCD*? Establezca una conjetura y demuéstrela.

Aunque en el enunciado para al Grupo B no se solicita construir una representación de la situación, los estudiantes saben que para poder determinar propiedades del cuadrilátero es necesario poder realizar una exploración empírica en un entorno de geometría dinámica que les permitirá, gracias al arrastre, generalizar lo que descubren. Así mismo, aun cuando no se explicita en el enunciado para el Grupo A que deben establecer una conjetura, hace parte del contrato didáctico de la clase hacerlo cada vez que se propone una situación como ésta. Además, es aceptable que los estudiantes propongan conjeturas que provean más información que aquella que da la respuesta a la pregunta que se les plantea.

La forma como se enuncian los problemas que se proponen en el curso tiene como objetivo propiciar que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa que vaya desde la exploración de la situación problema, pase por la formulación de una conjetura y concluya con la demostración de un hecho geométrico que subyace en la situación.

La finalidad de muchos de los problemas es generar la necesidad de extender el sistema axiomático que se ha venido conformando a lo largo del curso para poder expresar lo que los estudiantes descubren y a la vez justificar su validez; es decir, a partir de las propuestas que ellos dan como solución al problema (las cuales se enuncian en calidad de conjetura) se pueden introducir nuevas definiciones, postulados y teoremas que conformarán un sistema

[4] □*ABCD* indica cuadrilátero cuyos vértices son *ABCD*.
[5] $\angle A$ indica ángulo con vértice *A*. $\angle ABC$ indica ángulo conformado por los rayos *BA* y *BC*. Eventualemente, utilizaremos $\angle$ seguido de un número (e.g. $\angle 1$) para indicar un ángulo en el cual no se explictan sus vértices, pero para el cual hay una representación gráfica que lo ayuda a identificar.
[6] $\overline{AD}$ indica segmento cuyos extremos son los puntos *A* y *D*.

axiomático local en torno a un objeto o relación geométrica. En el caso que aquí nos ocupa, el núcleo del sistema axiomático local es la relación de *paralelismo entre rectas.*

4.2. Las conjeturas formuladas y el proceso de su demostración

Al comenzar a abordar el problema, estudiantes de ambos grupos piden introducir la definición de *cuadrilátero* para tener claridad de lo que trata el problema, así que en primera instancia se precisa tal definición. A pesar de que los enunciados de los problemas difieren, los estudiantes de ambos grupos coinciden en tres de las conjeturas formuladas (Conjeturas 1, 2 y 3), pero los del Grupo A, formulan una más; todas ellas, son producto de la modelación y la exploración de la situación en geometría dinámica. Las siguientes son las conjeturas formuladas:

Conjetura 1. Si en un $\square ABCD$, $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle C \cong \angle D$.

Conjetura 2. Si en un $\square ABCD$, $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle C$ y $\angle D$ son rectos.

Conjetura 3. Si en un $\square ABCD$, $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces $\square ABCD$ es un rectángulo.

Conjetura 4. Si en un $\square ABCD$, $\angle A$ y $\angle B$ son rectos y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces $\angle C$ y $\angle D$ son rectos, $\overline{BA} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DB}$.

En el Grupo A, los estudiantes proponen un enunciado relativo a características del cuadrilátero, que son consecuencia necesaria de las condiciones de la situación (lados congruentes, diagonales congruentes y ángulos rectos, Conjetura 4). El hecho de que en este grupo los estudiantes propongan las Conjeturas 3 y 4, ilustra lo dicho anteriormente en relación con la posibilidad que tienen los estudiantes de proponer conjeturas que provean más información que aquella que corresponde a la respuesta de la pregunta. La Conjetura 4 muestra el grado de exploración que realizan los estudiantes, evidencia del efecto del enfoque metodológico.

Además, al explorar la situación en geometría dinámica resulta evidente la Conjetura 3; cabe entonces preguntarse por qué tal conjetura no fue reportada por todos los estudiantes de los dos grupos. Una razón probable es que aunque tenían, por su experiencia del curso anterior, la noción de rectángulo como cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, el sistema axiomático con el que contaban no incluía la definición de rectángulo y, en consecuencia, su conjetura no podía hacer referencia a éste, pero sí a propiedades del cuadrilátero que son consecuencia necesaria de las condiciones impuestas por la situación.

Desde el punto de vista matemático, las conjeturas que se deberían demostrar inicialmente son la 2 o la 3, pues éstas contienen teóricamente a la Conjetura 1 (el hecho de garantizar que $\angle C$ y $\angle D$ son rectos o que $\square ABCD$ es un rectángulo implica necesariamente la congruencia de los $\angle C$ y $\angle D$). No obstante, la gestión del contenido realizada por los profesores difiere gracias a la decisión tomada con respecto a cuál sería la primera conjetura que se demostraría.

En el Grupo B se aborda primero la demostración de la Conjetura 1, decisión que toma el profesor en atención a que un grupo de estudiantes afirmaba tener lista la demostración. En el Grupo A, ante la insinuación de una pareja de estudiantes que afirma haber demostrado la Conjetura 2, el profesor decide comenzar por ella, aunque sabe de antemano que dicha conjetura no se puede demostrar sin introducir nuevos elementos al sistema axiomático. Con tal acción pretende propiciar una discusión, cuando el grupo se percate del error en la demostración, en la que puedan surgir otras ideas que ayuden a enriquecer el sistema axiomático local en construcción. La propuesta de demostración presentada por los estudiantes, aunque no concluye exitosamente, sí demuestra la Conjetura 1.

Como resultado de las dinámicas descritas antes, la Conjetura 1 resulta ser la primera en demostrarse en ambos grupos. Las demostraciones respectivas tienen, en esencia, los mismos pasos, y no se requiere la inclusión de nuevos elementos al sistema axiomático existente hasta el momento. Sin embargo, estudiantes de ambos grupos destacan que la demostración contiene la justificación del enunciado *las diagonales del cuadrilátero son congruentes*, que para el caso del Grupo A, es parte del consecuente de la Conjetura 4.

Una vez demostrada la Conjetura 1, cada grupo toma un rumbo diferente en su intento por demostrar la Conjetura 2. Bien sea por la gestión del profesor, en términos de orientar la discusión a partir de preguntas para generar ideas útiles en la demostración (caso del Grupo A), o bien, por las ideas clave que expresan los estudiantes para iniciar la demostración (caso del Grupo B), los dos grupos se involucran en la tarea usando hechos geométricos diferentes o los mismos en momentos distintos del proceso, circunstancia que lleva a la construcción de dos sistemas axiomáticos locales diferentes relativos a la relación de paralelismo.

4.2.1. El caso del Grupo A

Como se describió antes, el intento de un estudiante por demostrar la Conjetura 2 no tiene los réditos esperados por él. A pesar de varios intentos, los estudiantes no saben cómo seguir la demostración, lo que lleva a que el profesor les plantee una pregunta orientadora: “¿qué otras características del cuadrilátero se evidencian?”. Los estudiantes mencionan el paralelismo de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, hecho que da pie para una discusión en torno a la noción de *rectas paralelas,* y la inclusión de la respectiva definición en el sistema axiomático. Además, al indagar sobre por qué dichos segmentos son paralelos, se introduce y demuestra el *Teorema perpendiculares – paralelas*[7] usando el método indirecto de demostración y el *Teorema del triángulo rectángulo*. En este punto, el profesor cuestiona cómo garantizar la existencia de una recta paralela a una recta dada *m* por un punto externo *A*. Los estudiantes proponen una demostración usando el *Teorema perpendiculares – paralelas*, ya demostrado. Como consecuencia de esta dinámica, se introduce al sistema el *Teorema de la existencia de una recta paralela*.

[7] Todos los enunciados que hacen parte del sistema axiomático se encuentran en el Apéndice.

Se analiza de nuevo el problema del cuadrilátero de Saccheri con el objetivo de ver si los teoremas introducidos permiten demostrar que $\angle C$ y $\angle D$ son rectos, encontrando que la inclusión de tales elementos teóricos no modificaba la posibilidad de hacer la demostración deseada. Entonces el profesor, con el propósito de proveer más herramientas para la demostración, hace un paréntesis dejando de lado la Conjetura 2 y propone investigar la situación *dos rectas y una recta secante a ellas* (Figura 1). A partir de ello se define *recta secante*.

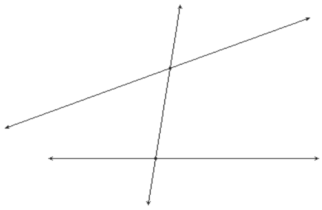


Figura 1

Los estudiantes, quizá producto de su experiencia en el curso anterior, identifican *ángulos alternos internos* y *correspondientes*. Por esta vía, sus definiciones se introducen en el sistema axiomático. Además, los estudiantes proponen las siguientes conjeturas:

Conjetura 5. Si dos rectas son paralelas y están cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes, y los ángulos correspondientes son congruentes.

Conjetura 6. Si los ángulos alternos internos entre dos rectas cortadas por una trasversal son congruentes entonces las dos rectas son paralelas.

Los intentos por demostrar la Conjetura 5 son infructuosos. El profesor sugiere entonces emprender la validación de la Conjetura 6. Así, establecen el *Teorema AIP* mediante el método de prueba indirecta sugerido por un estudiante cuando supone que las rectas *m* y *n* no son paralelas y usa el *Teorema del ángulo externo* y el *Teorema de los ángulos opuestos por el vértice* para llegar a contradecir la congruencia de $\angle 2$ y $\angle 1$ (Figura 2).

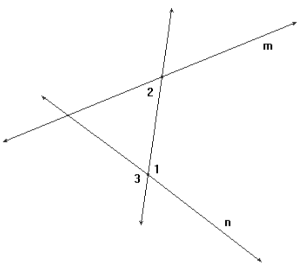


Figura 2

Después reinician la búsqueda de la vía para validar la Conjetura 5. El profesor introduce el *Postulado de la unicidad de las rectas paralelas* y examinan si es útil para la demostración en cuestión. De nuevo, los estudiantes proponen hacer una demostración por contradicción suponiendo que aunque las rectas sean paralelas los ángulos alternos internos no son congruentes. A partir de la suposición de que los ángulos alternos internos, $\angle ABC$ y $\angle 2$, no son congruentes y usando el *Postulado construcción de ángulos*, deciden construir otra recta, por *B*. Ésta resulta ser paralela a *n* debido al teorema AIP (Figura 3). El postulado anteriormente introducido permite mostrar el hecho contradictorio que surge y así concluir la demostración de la Conjetura 5, y por ende introducirla al sistema como el *Teorema PAI*.

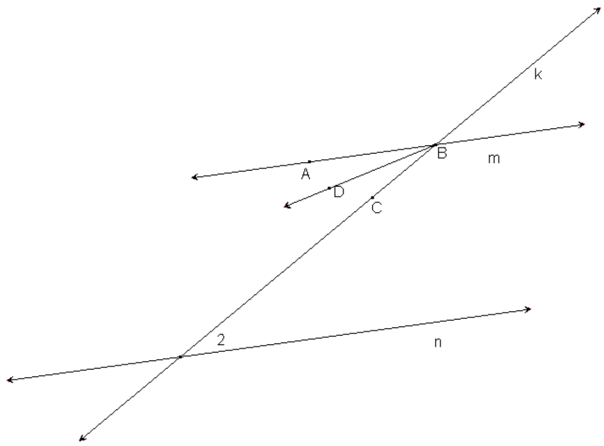


Figura 3

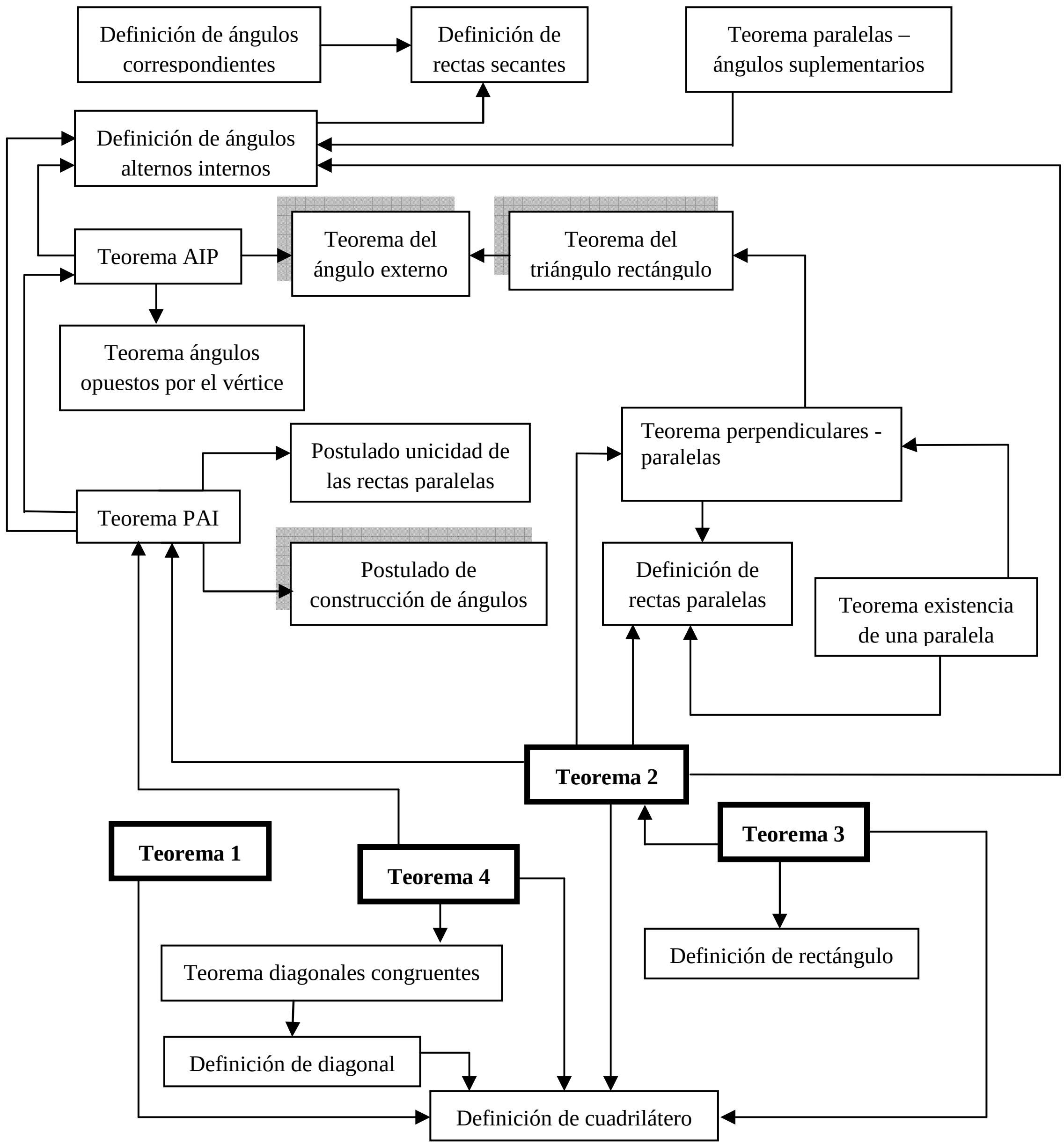
Retoman la Conjetura 2 y el proceso de su validación finaliza cuando un estudiante usa el *Teorema PAI* para demostrar que $\angle C$ y $\angle D$ son rectos. Esa demostración también permite concluir la validez de la Conjetura 4. Garantizado este hecho e institucionalizada, por parte del profesor, la definición de *rectángulo* con base en la noción que los estudiantes tenían de dicho objeto, la Conjetura 3 también fue demostrada por ellos.

Como el *Teorema paralelas – ángulos suplementarios* no surgió durante el proceso, el profesor solicita su demostración en una evaluación parcial, con el objetivo de completar el sistema axiomático. Así, se conforma un sistema axiomático local cuyo núcleo es la *relación de paralelismo* pero que no incluye teoremas sobre las relaciones entre ángulos correspondientes y rectas paralelas.

El Esquema 1 representa el sistema axiomático construido en el proceso que acabamos de recontar. Mediante flechas que vinculan parejas de elementos teóricos indicamos que para definir, postular o demostrar un elemento (origen de la flecha) se requiere el segundo (al cual apunta la flecha).

Se señalan con una sombra las cajas correspondientes a los elementos que hacían ya parte del sistema, fruto de un trabajo previo, posiblemente relacionado con otra axiomatización; los otros elementos surgieron como necesidades teóricas en el curso de la actividad y se introdujeron para poder atender dichas necesidades.

Como las conjeturas fueron demostradas, en el esquema se denotan, respectivamente, como Teoremas 1, 2, 3 y 4.

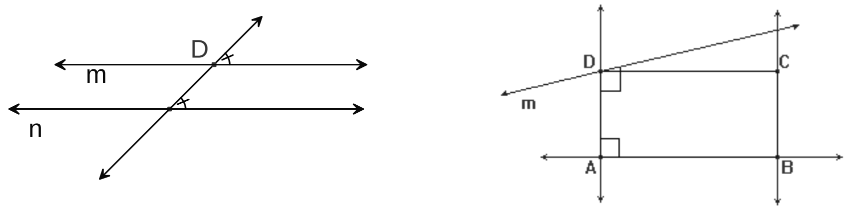


Esquema 1. Sistema axiomático local construido en el Grupo A

4.2.2. El caso del Grupo B

Como mencionamos anteriormente, el camino seguido por el Grupo B en su intento por demostrar que $\angle C$ y $\angle D$, del cuadrilátero de Saccheri, son rectos, es diferente al del grupo A. Uno de los estudiantes, apoyado en su exploración en geometría dinámica, menciona el uso de *rectas paralelas*; su propuesta consiste en construir la recta *m* tal que el punto *D* pertenezca a la recta *m* y ésta sea paralela a la recta determinada por los puntos *A* y *B*. A la vez, hace explícita su noción de rectas paralelas como "aquellas en las que los puntos de una de éstas equidistan de la otra". A pesar de que el profesor reconoce que esta noción puede tomarse como definición de rectas paralelas, decide indagar qué noción de éstas tienen los demás estudiantes. Entre los aportes de los estudiantes, surge como propuesta *dos rectas coplanares que no se intersecan*.

El profesor toma la decisión de adoptar esta última como la definición, con base en el plan de desarrollo de la teoría que tenía configurado. El profesor acepta la propuesta mencionada en relación con la construcción de la recta paralela. La clase adopta dicha idea y usan los pasos de la demostración de la Conjetura 1 como pasos iniciales para el proceso de demostración de la Conjetura 2. Para construir la recta *m* paralela a $\overleftrightarrow{AB}$[8] con $D \in m$, los estudiantes plantean dos alternativas que, a la postre, complementan el sistema axiomático en construcción. Una alternativa consiste en construir ángulos correspondientes congruentes (idea que surge de la construcción con regla y compás que los estudiantes conocen desde el curso anterior) y la otra radica en construir una recta *m* perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$ por *D* (Figura 4).



Alternativa 1 Alternativa 2

Figura 4

En el orden mencionado se estudian ambas alternativas. Para la primera, se hace necesario hacer un paréntesis en la demostración de la conjetura y estudiar la situación generalizada para validar teóricamente la construcción práctica que los estudiantes conocían (dada una recta *n* cualquiera y un punto *D* que no pertenece a ella, construir una recta *m* paralela a *n* con $D \in m$). La validación permite introducir la definición de *recta secante a dos rectas*, y con ella, la definición de *ángulos correspondientes*. Además propicia la inclusión del *Teorema ángulos correspondientes – paralelas* que posteriormente permite validar la construcción. Luego se discute la segunda alternativa que está ligada al cuadrilátero de Saccheri; ésta lleva a incluir en el sistema el *Teorema perpendiculares-paralelas*. Ambos teoremas fueron demostrados indirectamente y para ello se usó el *Teorema del ángulo externo*, proceso que fue similar al desarrollado por el Grupo A para demostrar la Conjetura 5. Después del estudio de ambas alternativas el profesor destaca que con ellas se ha demostrado el *Teorema de la existencia de una recta paralela*. A diferencia de lo que sucedió en el Grupo A, en donde es el profesor quien genera la discusión que lleva a establecer el teorema anterior, en el Grupo B son los estudiantes quienes inician el proceso que lleva a que el teorema se incluya en el sistema axiomático correspondiente. El profesor impulsa ese proceso al insistir en la necesidad de garantizar, desde la teoría, cada una de las construcciones propuestas. En el marco del problema del cuadrilátero de Saccheri, las dos propuestas confluyen en la segunda alternativa, y a partir de ella, los estudiantes continúan el proceso para demostrar la Conjetura 2. El problema ahora es garantizar que la recta *m* interseca a la $\overleftrightarrow{BC}$ en un punto *C'*. La discusión lleva a que algunos estudiantes sugieran ideas que conducen al *Teorema paralelas–secante* y al *Teorema*

[8] $\overleftrightarrow{AB}$ indica una recta que contiene los puntos *A* y *B*.

paralelas–semiplanos, teoremas que no surgen en el Grupo A*.* Una vez resuelto tal problema, los estudiantes explicitan su convencimiento de que $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ tienen la misma longitud (Figura 5). Garantizar desde la teoría este hecho requiere establecer el *Teorema paralelas – equidistancia*, recordando por ello la definición de *distancia de un punto a una recta*. En el intento de demostrar ese teorema, se introduce la definición de *ángulos alternos internos* y la necesidad de contar con el *Teorema PAI*. Con la colaboración de toda la comunidad, se hace un esbozo de lo que sería la demostración de dicho teorema y en ese proceso surgen también las ideas para demostrar el *Teorema AIP.*

En pro de agilizar el proceso de la demostración de la Conjetura 2, el profesor introduce el *Postulado de la unicidad de la recta paralela* y propone, como tarea extraclase, la realización de la demostración detallada de dichos teoremas y la del *Teorema paralelas – ángulos correspondientes*. Esta tarea se analiza en la siguiente clase, cuando ya se han demostrado las Conjeturas 2 y 3. De los seis teoremas aquí nombrados sólo el *Teorema PAI* y el *Teorema AIP* forman parte del sistema axiomático establecido en el Grupo A.

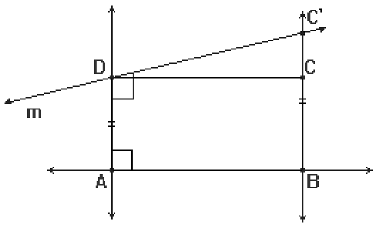
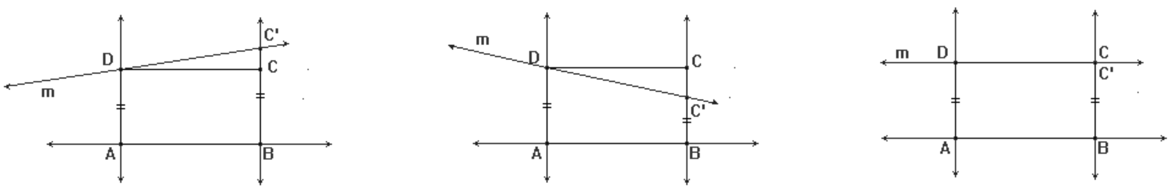


Figura 5

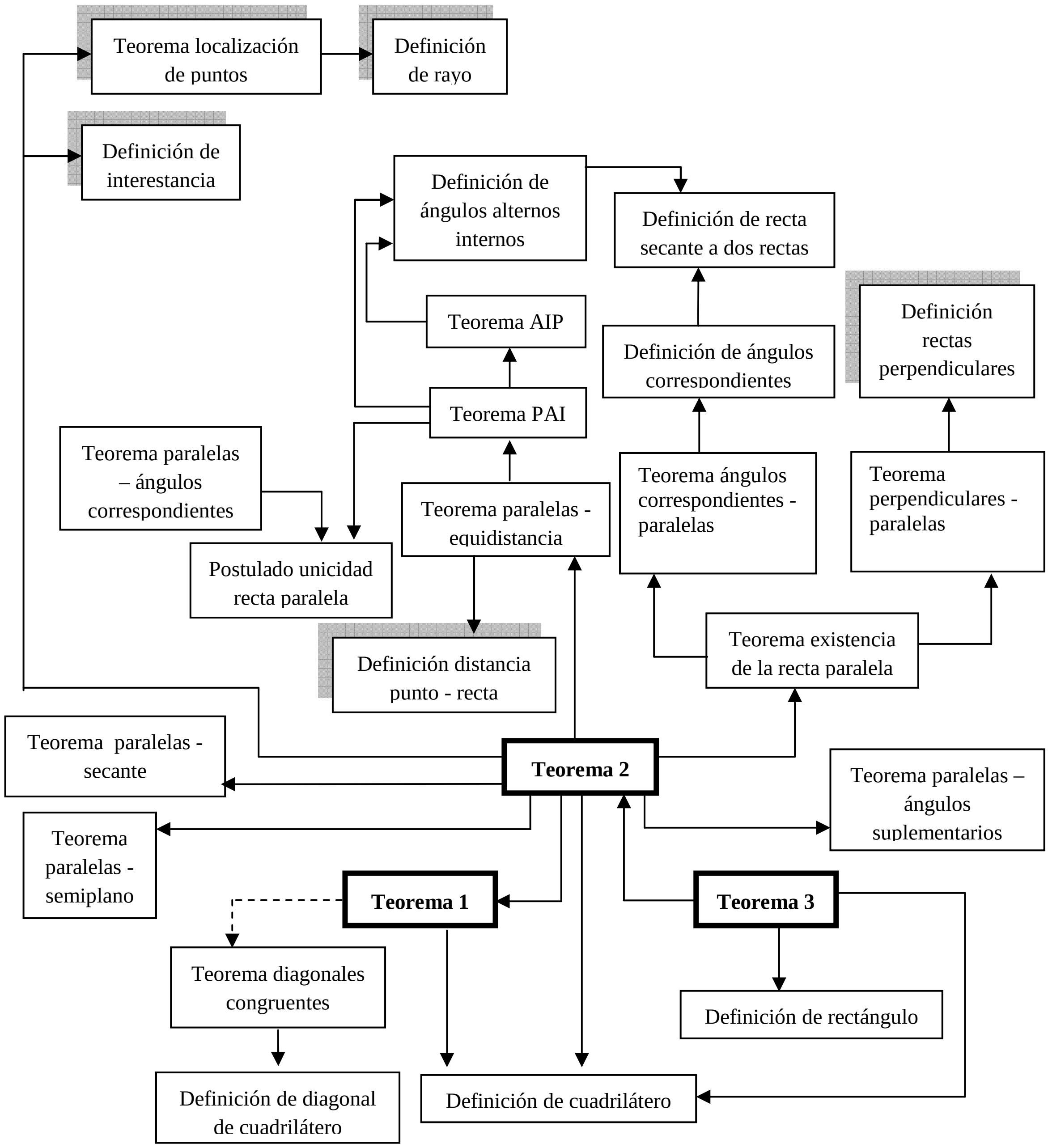
Aceptando como válido el *Teorema paralelas–equidistancia*, a partir de la relación de transitividad, se justifica que el $\overline{BC}$ y $\overline{BC'}$ tienen la misma medida de longitud. Esto conduce a tratar de determinar si C y C' son el mismo punto. Para ello, se mencionan los tres casos posibles de interestancia: (i) *C* está entre *C' y B,* o (ii) *C'* está entre *C* y *B*, o (iii) {*C*} = {*C'*} (Figura 6). De nuevo surgen dos alternativas para analizar la situación: algunos estudiantes usan la *definición de interestancia* para descartar los dos primeros casos; otros optan por demostrar directamente el tercer caso utilizando la *definición de rayo* y el *Teorema de la localización de puntos*. Al demostrar que *C* y *C*' son el mismo punto, se deduce que la recta determinada por *D* y *C* es paralela a la determinada por *A* y *B*. A partir de la inclusión del *Teorema paralelas – ángulos suplementarios*, se concluye que $\angle A$ y $\angle D$ son suplementarios y por ello que el $\angle D$ es recto. Con ello concluye la demostración de la Conjetura 2 pues se tiene que $\angle C$ y $\angle D$ son congruentes.



C está entre *C'* y *B* | *C'* está entre *C* y *B* | {*C*} = {*C'*}

Figura 6

La Conjetura 3 se demuestra una vez institucionalizada, por parte del profesor, la definición de *rectángulo* basada en la noción que los estudiantes tenían de dicho objeto. El proceso en torno a la situación del cuadrilátero de Saccheri culmina con una conversación matemática en la que los estudiantes presentan la solución a la tarea extraclase ya mencionada. Dado que la demostración de la Conjetura 2 depende de la validez del *Teorema paralelas – equidistancia* y éste de la validez del *Teorema PAI*, en tal intercambio los estudiantes destacan la necesidad de contar con el *Postulado de la unicidad de la recta paralela* para demostrar no sólo estos dos teoremas sino también el *Teorema paralelas – ángulos correspondientes*. En el siguiente esquema se muestra cuál fue el sistema axiomático local construido en el Grupo B.



Esquema 2. Sistema axiomático local construido en el Grupo B

5. Algunos comentarios finales

Como se evidencia en el recuento que acabamos de concluir del proceso de construcción del sistema axiomático local realizado por cada grupo, con el que ilustramos el enfoque metodológico implementado en las clases de geometría, los sistemas axiomáticos difieren en cuanto a la estructura de las relaciones deductivas que se establecen entre los enunciados que componen el sistema pues éstos se introducen en momentos diferentes y por razones distintas. Sin embargo, ambos sistemas axiomáticos tienen elementos comunes como el *Postulado de la unicidad de la paralela*, las definiciones de cuadrilátero y rectángulo y los teoremas básicos asociados a la relación de paralelismo. En ese sentido, el contenido en juego es en esencia igual al de un curso que siga otra metodología, pero la experiencia de los estudiantes como partícipes de la producción de conocimiento matemático es notoriamente diferente. No obstante la diversidad entre los estudiantes, las propuestas que surgen, los profesores, los esquemas de los sistemas axiomáticos generados muestran que aun cuando ellos difieren, en ambos grupos se estudiaron las mismas temáticas y se presentó el mismo cuerpo de conocimientos: se partió del mismo lugar, se llegó al mismo lugar, pero los caminos fueron distintos. Son varios los factores que llevan a que el efecto de la implementación del enfoque metodológico, difiera en los grupos, pero en este artículo queremos resaltar dos de ellos. En primer lugar, son las ideas de los estudiantes las que orientan el rumbo del proceso de construcción de las demostraciones de las conjeturas. En el Grupo B, fue un estudiante quien proveyó la idea básica que inició el proceso a partir del problema del cuadrilátero de Saccheri y todos los elementos del sistema axiomático surgen como consecuencia de querer construir una recta paralela por un vértice del cuadrilátero. En el Grupo A, además del análisis de dicha situación, fue necesario que el profesor propusiera dos problemas más para impulsar el proceso. Los elementos del sistema axiomático surgen del reconocimiento de que el cuadrilátero de Saccheri tiene dos lados paralelos y la demostración de la Conjetura 2 se basa en el teorema PAI y la congruencia de triángulos. Pero en ambos grupos, son las propuestas de los estudiantes tanto en sus respuestas a los problemas propuestos y a los obstáculos que iban surgiendo en el proceso de demostrar la conjetura como para las demostraciones de los teoremas, que llevan a la configuración del sistema axiomático.

En segundo lugar, queremos resaltar que aunque hay una oportunidad real para la participación de los estudiantes en la construcción del contenido que se estudia en el curso, eso no implica que el profesor tenga un papel secundario o que su presencia en el aula sea opaca. El profesor juega un papel irremplazable. Él gestiona las propuestas de los estudiantes; controla el uso correcto de los elementos del sistema, en caso de que los estudiantes no lo hagan; institucionaliza el conocimiento; y ayuda a desatascar el proceso en caso de que los estudiantes no encuentren cómo hacerlo. En resumidas, el profesor es el director de una orquesta en donde cada integrante aporta sus conocimientos para que él los armonice, dando las entradas a dichos conocimientos en los momentos oportunos, dinamizando el proceso y logrando cohesionar al grupo para producir una gran obra: la construcción del sistema axiomático local. Tan importante es el papel del profesor, que su gestión es otro factor que influye en la diversidad del efecto de la implementación del enfoque propuesto.

Bibliografía

Ben-Zvi, D. y Sfard, A. (2007). Ariadna's thread, Daedalus' wings, and the learner's autonomy. *Education and Didactics*, 1(3), 123-141.

Boyer, C. (sf). *A history of mathematics.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

de Villiers, M. (1986). The role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching. Stellenbosch: RUMEUS, University of Stellenbosch. mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdfForman (consulta en diciembre 2008), A. (1996).

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35, 4, 258-291.

Graven, M. (2004). Investigating mathematics teacher learning within an in-service community of practice: The centrality of confidence. *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 177-211.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53.

Martin, T., McCrone, S., Bower, M. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., Molina, O. (2007). *Innovación en la enseñanza de la innovación en un curso de geometría para formación inicial de profesores*. Memorias XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, O. y Echeverry, A. (2009). Assigning mathematics tasks versus providing pre-fabricated mathematics in order to support learning to prove. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: *Proof and proving in mathematics education*. (vol. 2, pp. 124-129). Tapiei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Molina, O. y Echeverry, A. (2009). Learning to prove: enculturation or…? En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education. (vol. 2, pp. 130-135). Tapiei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Óscar Molina. Profesor de Planta de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. ojmolina@pedagogica.edu.co

Carmen Samper. Profesora Titular de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. csamper@pedagogica.edu.co

Patricia Perry. Asesora Externa del grupo de investigación A.E.G. pperryc@yahoo.com.mx

Leonor Camargo. Profesora de Planta de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. lcamargo@pedagogica.edu.co

Armando Echeverry. Profesor Ocasional de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. aecheverry@pedagogica.edu.co

Apéndice

A continuación se presenta una lista de los elementos teóricos del sistema axiomático local construido a través de la propuesta que aquí se reporta.

Postulados

Unicidad de la recta paralela	Dada una recta *l* y una recta *m* paralela a la recta *l* por un punto $P \notin l$, entonces *m* es única.
Construcción de ángulos	Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista de alguno de los semiplanos *H* en un plano β. Para cada número *r* entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con *P* en *H*, tal que $m\angle PAB = r$.

Definiciones

Cuadrilátero	Dados cuatro puntos coplanares donde cada trío de puntos no son colineales, un cuadrilátero es la unión de los segmentos tales que: Sus extremos son parejas de dichos puntos. Cada punto dado es extremo de exactamente dos segmentos. Si dos segmentos se intersecan lo hacen sólo en sus extremos. Tales segmentos se denominan lados del cuadrilátero y los puntos vértices del mismo.
Diagonal de un cuadrilátero	Dado un cuadrilátero los segmentos cuyos extremos son los vértices no consecutivos se denominan *diagonales* del cuadrilátero.
Rectas paralelas	Dos rectas son *paralelas* si están en el mismo plano y no tienen puntos en común.
Recta secante	Dadas dos rectas coplanares, una *secante* es una recta que interseca a las dos rectas dadas, y los puntos de intersección correspondientes son diferentes.
Ángulos alternos internos	Dadas dos rectas *m* y *n*, y una recta s tal que $s \cap n = \{Q\}$ y $s \cap m = \{P\}$, $m, n, s \subset \alpha$, α, un plano, entonces el $\angle TPQ$ y $\angle RQP$ son *alternos internos* si: T y R pertenecen a *m* y *n*, respectivamente T y R están en semiplanos diferentes de α, determinados por la recta s
Ángulos correspondientes	Dadas dos rectas y una secante, dos ángulos son *ángulos correspondientes* si no son adyacentes, cada uno tiene un lado sobre la trasversal siendo uno de ellos subconjunto del otro y los otros dos lados de los ángulos, excluyendo el vértice, están en el mismo semiplano determinado por la trasversal.
Rectángulo	Un cuadrilátero es *rectángulo* si tiene cuatro ángulos rectos.
Distancia de un punto a una recta	Sea *m* una recta y P un punto externo a ella. La *distancia* de P a *m* es la medida de la longitud del segmento perpendicular a *m*, con un extremo en P y el otro en *m*.
Interestancia	B está *entre* A y C si 1) A, B, y C son puntos distintos de una misma recta y 2) AB + BC = AC.
Rayo	Sean A y B dos puntos de una recta L. El rayo $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos que es la unión de $\overline{AB}$ y el conjunto de puntos C para los cuales es cierto que B está entre A y C.

Teoremas

Perpendiculares – paralelas	Dos rectas en un plano son paralelas si ambas son perpendiculares a la misma recta.
Triángulo rectángulo	Un triángulo rectángulo no tiene dos ángulos rectos.
Existencia de una recta paralela	Dada una recta *l*, y un punto *P* que no pertenece a *l*, entonces existe una recta *m* paralela a *l* tal que *P* pertenece a *m*.
AIP	Dadas las rectas *l* y *m*, *s* una secante a ellas y los ángulos alternos internos congruentes entonces *l* // *m*.
PAI	Dadas las rectas *l* y *m*, tales que *l* // *m* y *s* una secante a ellas entonces los ángulos alternos internos son congruentes.
Ángulo externo	Un ángulo externo de un triángulo tiene medida mayor que la de cualquier ángulo interno no contiguo.
Ángulos opuestos por el vértice	Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Paralelas – ángulos suplementarios	Si dos rectas paralelas son intersecadas por una secante, los ángulos internos no alternos son suplementarios.
Ángulos correspondientes – paralelas	Se dan dos rectas intersecadas por una secante. Si dos ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.
Paralelas – secante	En un plano, dadas dos rectas paralelas *k* y *m* y una recta *n* que interseca a *k*, la *n* interseca a *m*.
Paralelas – ángulos correspondientes	Dadas las rectas *l* y *m*, tales que *l* // *m* y *s* una secante a ellas entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
Paralelas - semiplanos	Dadas dos rectas paralelas *l* y *m* y un punto $P \in m$. Entonces todo punto de *m* está en el mismo semiplano determinado por *l* en que está P.
Paralelas – equidistancia	Dadas dos rectas paralelas *l* y *m*. Todos los punto de la recta *l* equidistan de *m*.
Localización de puntos	Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo y sea *x* un número positivo. Entonces existe exactamente un punto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que AP = *x*.