UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 155-160
ISSN: 1815-0640

# El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado

Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

## *Jarras, vasos, agua y funciones*

### Problema[1]

*Se tiene una jarra vacía cuya forma es de tronco de cono circular recto, con base inferior de mayor radio que la base superior. Con un vaso, se va llenando de agua a la jarra. Determinar la función que expresa cómo va cambiando la altura del nivel del agua en la jarra, conforme se le va añadiendo agua con el mismo vaso.*

---

El no tener datos numéricos en este problema, orienta a pensar en una solución de carácter general, para lo cual es importante considerar sus aspectos intrínsecos. Como suele hacerse, siguiendo las recomendaciones de Polya, podemos pensar en un problema más sencillo para tener mejores elementos para resolver el problema propuesto. Así, pensemos en la siguiente situación:

> *Se tiene una jarra vacía cuya forma es de cilindro circular recto. Con un vaso, se va llenando agua a la jarra. Determinar la función que expresa cómo va cambiando la altura del nivel del agua en la jarra, conforme se le va añadiendo agua con el mismo vaso.*

Una primera observación, obvia, es que el nivel del agua en la jarra irá subiendo conforme se vaya vaciando agua con el vaso. Así, podemos afirmar que la función pedida es una función creciente, que parte del origen. Por la forma de la jarra, el nivel del agua se irá incrementando en un número igual de unidades de longitud, por cada vaso de agua que se vierta en la jarra. Si asumimos que ese número de unidades de longitud, digamos centímetros, es $m$, tendremos entonces:

| Número de vasos | Altura del nivel del agua en cm |
|---|---|
| 1 | $m$ |
| 2 | $2.m$ |
| 3 | $3m$ |
| ….. | …. |
| $v$ | $vm$ |

Y podemos concluir que la función correspondiente es $f(v) = mv.$

En rigor, deberíamos precisar que la variable independiente, $v$, varía sólo en los números enteros no negativos por estar representando número de vasos; o más

[1] Expreso mi agradecimiento al amigo y colega Emilio Gonzaga, por haberse dado el tiempo para resolver con entusiasmo este problema con valores específicos y estimularme a escribir el artículo para este número de UNION tratando este tema.

precisamente, cantidad de agua correspondiente a número de vasos llenos de este líquido. Sin embargo, es natural hacer la extensión a los números reales, considerando cantidades de agua correspondientes a porciones del vaso. Con esta aclaración, podríamos decir que tenemos una función lineal, restringida a los números reales no negativos:

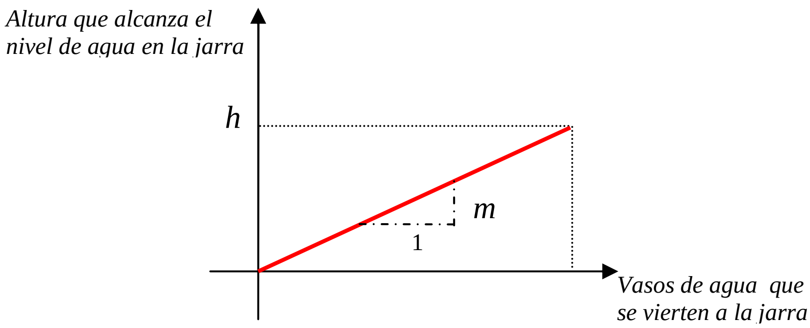
$$f(v) = mv, \text{ con } \quad v \geq 0\,.$$

Sin embargo, asumiendo que se vierte agua solo hasta que se llena la jarra, deberíamos restringir más la variable *v*. Si consideramos que la jarra tiene una altura *h,* la restricción se obtiene resolviendo la ecuación *mv* = *h*. Así, la función pedida es:

$$f(v) = mv, \text{ con } \quad 0 \leq v \leq \frac{h}{m}\,.$$

El problema es suficientemente ilustrativo como para explotarlo más para el estudio de las funciones y en particular de las funciones lineales.

Pasemos al registro gráfico:

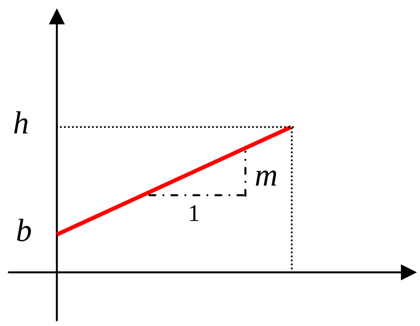



Por lo asumido en el problema, por cada vaso de agua que se vierte en la jarra, el nivel del agua sube *m* centímetros y esto significa gráficamente que estando en un punto cualquiera de la recta roja, al avanzar una unidad horizontalmente, se tendrá que subir verticalmente *m* unidades para encontrar a otro punto de la recta roja. Esta es la idea básica en el concepto de *pendiente de una recta*.

Como es muy frecuente el uso de las funciones lineales afines, podemos relacionar éstas con el contexto dado por el problema. Una función lineal afín es de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

En términos del problema, interpretamos *b* como la altura que tiene el nivel de una cantidad de agua en la jarra, antes de iniciar a verter agua con el vaso. Así, cuando se han vertido 0 vasos de agua, el nivel de agua en la jarra es de *b* cm. La gráfica correspondiente es:



Resulta interesante observar que si la cantidad inicial de agua en la jarra cambia, pero se sigue usando el mismo vaso, la consecuencia en la gráfica de la función será una traslación paralela a sí misma de la recta roja; es decir, habrá un nuevo punto de intersección con el eje de ordenadas, digamos $(0; b_1)$, donde $b_1$ es la nueva altura que tiene el nivel del agua inicial en la jarra. La traslación paralela será hacia arriba o hacia abajo, según el nivel de la cantidad inicial de agua sea mayor o menor ($b_1 > b$ ó $b_1 < b$). En la expresión algebraica correspondiente sólo cambiará la constante $b$ por la $b_1$:

$$f(x) = mx + b_1$$

Por otra parte, si se mantiene la misma cantidad inicial de agua en la jarra, pero se usa otro vaso de agua, de diferente volumen, para llenarla, la consecuencia gráfica será que la recta roja mantendrá su punto de intersección con el eje de ordenadas en $(0; b)$, pero cambiará su inclinación; es decir, si con el nuevo vaso el nivel de agua en la jarra crece $m_1$ centímetros por cada vaso lleno de agua que se vierta, la nueva recta roja será más empinada si $m_1 > m$ ó menos empinada si $m_1 < m$. En la expresión algebraica correspondiente sólo cambiará la constante $m$ por $m_1$:

$$f(x) = m_1 x + b$$

En términos coloquiales podríamos decir que al usar un vaso más grande, la altura del nivel del agua en la jarra crecerá más rápidamente (el segmento de recta que lo representa será más empinado) y al usar un vaso más pequeño, la altura del nivel del agua en la jarra crecerá más lentamente (el segmento de recta que lo representa será menos empinado.)

## Comentarios

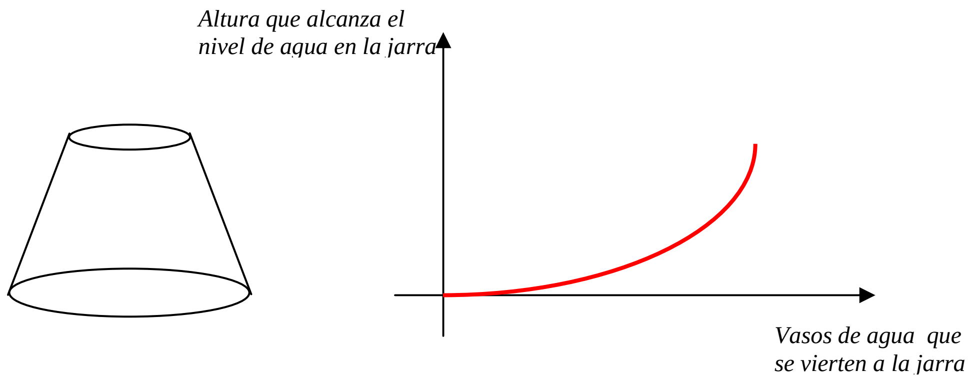
1. Al resolver un problema más sencillo que el original, nos hemos encontrado con uno que permite tratar las funciones lineales de modo que se facilita el tránsito entre los registros verbal, gráfico y algebraico, como recomienda Duval[2]. Mis experiencias al considerar este problema para la enseñanza-aprendizaje de funciones lineales con alumnos de humanidades, del primer ciclo universitario, han sido muy fructíferas.
2. La situación puede afrontarse de manera muy práctica, con una jarra y un vaso concretos, haciendo las mediciones correspondientes y sus registros en una tabla. No es indispensable que la forma de la jarra sea la de un cilindro circular recto; basta con que sea cilindro recto.
3. Las experiencias obtenidas al resolver el problema con la jarra en forma de cilindro circular recto, nos dan una base importante para la familiarización con el problema inicial y para intuir la forma de la gráfica de la función que se pide.

## El problema inicial

Volviendo al problema inicial, encontramos que la diferencia esencial con el problema que hemos resuelto, radica en que a medida que se vayan vaciando vasos

[2] Duval, R. (1993) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. Traducción DME- CINVESTAV, 1997, México

de agua en la jarra con forma de tronco de cono circular recto, con base inferior más grande que la base superior, el nivel del agua en la jarra irá subiendo *pero cada vez el incremento de la altura será mayor*, pues conforme el agua sube de nivel, es mayor la altura de la nueva porción de cono que se llenará con el siguiente vaso de agua. Es decir, con cada vaso de agua que se vierte a la jarra, se obtiene una porción de tronco de cono que cada vez tiene una altura mayor que la anterior, por tener bases inferior y superior más pequeñas, respectivamente. En pocas palabras podemos decir que la función que expresa la altura del nivel de agua, conforme se añaden vasos de agua, es una función creciente, pero que cada vez crece más. En este tipo de funciones, los economistas suelen usar la expresión "crecimiento a tasas crecientes". Evidentemente, la representación gráfica de tal función ya no es una semirrecta. Por lo dicho anteriormente, podemos intuir que es una curva creciente, con concavidad hacia arriba, similar a la rama de una parábola en el primer cuadrante del sistema de coordenadas, con eje vertical y vértice en el origen, que se abre hacia arriba.




A fin de verificar cuantitativamente esta apreciación cualitativa – muy importante en el manejo del concepto de función – consideramos una situación concreta, con datos numéricos que son coherentes con la información esencial que se da en el problema. Asumamos que el radio de la base inferior es 10 cm, el de la base superior es 5 cm y la altura de la jarra es 20 cm. Con esta información, la generatriz del cono tiene ecuación $y = 40 - 4x$ y el tronco de cono es parte del cono cuyo vértice está a 40cm de altura respecto a su base.

Así, cada tronco de cono con agua, que se va formando en la jarra al verter agua con el vaso, tiene base inferior de radio 10 cm, base superior de radio $x$ cm y altura $y$ cm. En consecuencia su volumen, en centímetros cúbicos, está dado por

$$V = \frac{\pi}{3}\left[100 \times 40 - x^2(40 - y)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left[4000 - \left(\frac{40 - y}{4}\right)^2(40 - y)\right]$$

$$V = \frac{\pi}{48}\left[64000 - (40 - y)^3\right]$$

Si asumimos que con el vaso se vierte cada vez 100 centímetros cúbicos de agua, la cantidad de vasos de agua en este tronco de cono será

$$v = \frac{\pi}{4800}\left[64000 - (40 - y)^3\right]$$

Ahora, despejando $y$, que expresa la altura del tronco de cono en centímetros, tenemos:

$$y = 40 - (64000 - \frac{4800}{\pi} v)^{\frac{1}{3}}$$

Asumiendo continuidad, es fácil verificar que una función de este tipo ( $y = K_1 - (K_2 - K_3 v)^{\frac{1}{3}}$, con las constantes $K_1$, $K_2$ y $K_3$ positivas) tiene primera y segunda derivadas positivas, lo cual se refleja gráficamente en una curva creciente, cóncava hacia arriba, similar a la curva roja que se había adelantado, intuitivamente. Ciertamente, también se puede verificar que la gráfica de la función tiene esa forma usando un software matemático adecuado, como Mathematica o Derive.

## Comentarios finales

1. Resulta natural considerar un problema similar al propuesto con una jarra en forma de tronco de cono con base inferior de radio menor que el de la base superior e imaginar que la curva correspondiente a la función que exprese el cambio de la altura del nivel del agua en la jarra conforme se vaya vaciando agua con un vaso, será también creciente, pero ahora cóncava hacia abajo, pues cada vez el nivel del agua subirá menor número de unidades de longitud. Queda como ejercicio para el lector resolver el problema, considerando, por ejemplo, una jarra con radio de 5 cm en la base, radio de 10 cm en la "boca" y altura de 20 cm, y un vaso con el que se vierte cada vez 100 $cm^3$ de agua.
2. Es un ejercicio interesante proponer diferentes formas de jarras y esbozar las correspondientes formas de las gráficas de las funciones que expresan la altura que va alcanzando el nivel de agua en la jarra, conforme se le va añadiendo agua con un vaso[3]. Siempre se tendrán funciones crecientes, pero la concavidad de las curvas correspondientes dependerá de la forma de la jarra. Hay casos de cambio de concavidad y resulta ilustrativo relacionar el punto de inflexión con la parte correspondiente en la jarra.
3. Considerar que hay una cantidad inicial de agua en la jarra, tiene un correspondiente gráfico: una traslación vertical hacia arriba, de la curva que corresponde al caso de una jarra vacía.
4. Es particularmente importante este tipo de problemas en la enseñanza y aprendizaje de funciones, pues, lamentablemente es frecuente reducir su estudio a definiciones formales, seguidas de expresiones algebraicas, reglas para graficar y determinación de dominios y rangos, sin enfatizar en ideas intuitivas y la representación de los cambios mediante funciones. Recomiendo tratar seriamente las funciones, con una metodología activa, basada en la resolución de problemas, en el marco de una configuración epistémica

[3] Este ejercicio ya lo proponía nuestro recordado amigo y colega Miguel de Guzmán en el libro de Matemáticas para Bachillerato, en coautoría con José Colera y Adela Salvador.

empírica y teniendo en cuenta los criterios de idoneidad que considera el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Esto implica, en términos prácticos, no encasillarse en el formalismo, estimular las percepciones intuitivas y fomentar tránmsitos frecuentes entre lo gráfico, lo verbal, lo algebraico, lo intuitivo y un contexto adecuado[4].

[4] Un trabajo amplio en esta línea puede encontrarse en el capítulo 6 de Malaspina, U. (2008) *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. www.pucp.edu.pe/irem/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf