

Dinamización matemática

Relato de una experiencia: Taller de curiosidades geométricas

Teresa Facello; Elsa Osio.

Resumen

Existen objetos interesantes (rompecabezas, teselados y módulos origami) cuyas propiedades y connotaciones matemáticas no se incluyen en los programas académicos por no formar parte de ninguna teoría sistemática. Además es cada vez más difícil motivar a los alumnos en el estudio de temas de Matemática, particularmente de Geometría. Por esto es de gran relevancia el material didáctico utilizado en las clases. Por este motivo es pertinente realizar talleres que permitan convertir en herramientas didácticas novedosas los elementos mencionados al principio.

Abstract

There are interesting objects (puzzles, tessellations and origami modules) whose properties and mathematical connotations are not included in the academic programs because they are not a part of any systematic theory. It is also increasingly difficult to motivate students to study subjects of mathematics, especially geometry. Therefore it is very important to select the educational material used in class. So It is an useful activity to organize workshops that enable create innovative teaching tools from the elements at the beginning.

Resumo

Existem objectos interessantes (rompecabezas, teselados e módulos origami) cujas propriedades e connotaciones matemáticas não se incluem nos programas académicos por não fazer parte de nenhuma teoria sistémica. Ademais é a cada vez mais difícil motivar aos alunos no estudo de temas de Matemática, particularmente de Geometria. Por isto é de grande relevancia o material didáctico utilizado nas classes. Por este motivo é pertinente realizar oficinas que permitam converter em ferramentas didácticas inovadoras os elementos mencionados ao princípio.

1. Fundamentación

Algunas propiedades interesantes no llegan a incorporarse a los programas académicos por no formar parte de ningún cuerpo de conocimientos sistemáticos; sin embargo tienen una justificación matemática rigurosa. Es el caso de las fórmulas de Herón y de Pick. Tampoco es habitual utilizar la expresión determinante de la ecuación de la recta por dos puntos, a pesar del amplio uso de su análoga para el plano por tres puntos. Asimismo, la teselación del plano es un tema frecuente en las actividades artísticas y su justificación geométrica está basada en transformaciones planas. Por su parte el origami

(arte japonés de doblado de papel o papiroflexia) permite la construcción de poliedros y el estudio de sus propiedades.

En general la urgencia por cumplir los contenidos de los programas oficiales impide incluir actividades de aplicación de estas propiedades. Se observa además, que cada vez es más difícil motivar a los alumnos en el estudio de temas de matemática y en particular de la geometría; los docentes muchas veces carecen de medios, materiales educativos y técnicas adecuadas para atraer el interés de los alumnos a fin de guiarlos hacia un aprendizaje significativo. Existe dificultad en la didáctica que el docente imparte. Al respecto, Chevallard (1991) manifiesta que la didáctica es el corazón en la formación de todo maestro.

El material didáctico en las clases cumple un rol muy importante para el aprendizaje ya que bien utilizado motiva a los alumnos al estudio de los temas, entendiéndose por motivación *todo aquello que inicia, sustenta o causa un orden o una fuerza de interés a favor de un comportamiento en particular* (Goog y Brophy, 1990). Por este motivo es pertinente realizar talleres que permitan cubrir la deficiencia de algunos temas y utilizar además para ello las herramientas didácticas mencionadas (rompecabezas, teselados y origami).

2. Experiencia

2.1 Objetivos

- Mediante la generación de teselados periódicos recordar las definiciones y propiedades de las transformaciones planas.
- Divulgar algunas fórmulas y procedimientos poco utilizados en la actividad académica.
- Construir poliedros con materiales de fácil obtención y recordar las propiedades de los poliedros regulares y semirregulares.
- Brindar a los alumnos del Profesorado de Matemática y Licenciatura actividades que fomenten la motivación, dinamismo y creatividad, así como también incentivarlos en la búsqueda de actividades didácticas no tradicionales y más participativas.

2.2. Población y metodología

En el taller participaron 22 estudiantes de Profesorado y Licenciatura en Matemática y se desarrolló en cuatro encuentros de 4 horas cada uno y en un quinto encuentro en el que se concretó la presentación de los trabajos que debieron realizar los asistentes para lograr la acreditación del mismo.

Para el primer encuentro se requirió de una sala de informática ya que se utilizaron distintos programas de geometría dinámica, entre ellos: Cabri, Geogebra y Geómetra. La duración total de este taller, incluyendo las actividades presenciales y no presenciales, fue de 30 horas-reloj.

2.3. Desarrollo de las actividades

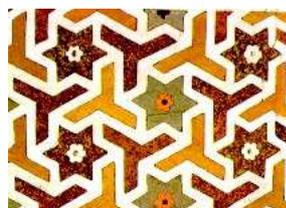
2.3.1. Primer encuentro

Se definió el teselado periódico del plano y se presentaron ejemplos. Se describió el conjunto de condiciones que deben cumplir las figuras que permiten teselar el plano. Asimismo se comentaron algunos antecedentes históricos.

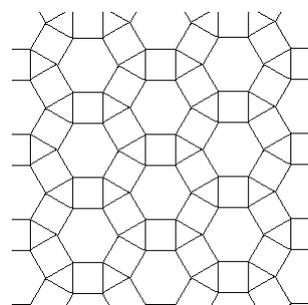
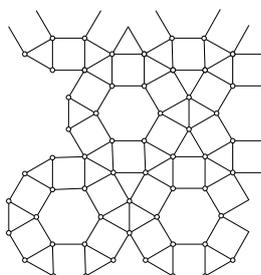
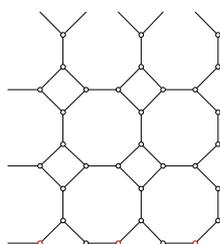
A continuación se propuso la construcción de algún teselado a partir de una figura a elección, aplicando transformaciones planas mediante un programa de Geometría Dinámica, había una computadora por cada participante.

Las actividades sugeridas fueron:

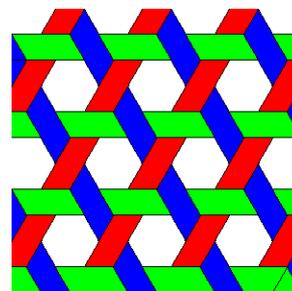
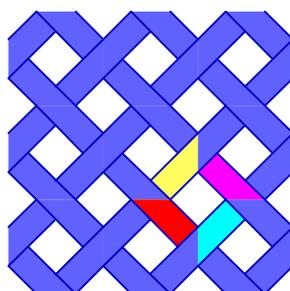
- Reproducir las siguientes figuras, utilizando GD o lápiz y papel:



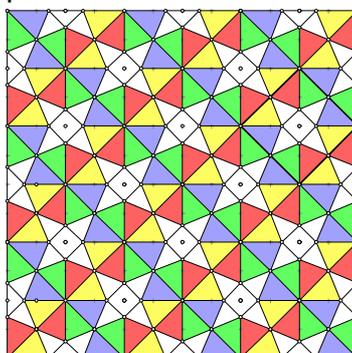
- Reproducir plantillas como las de la figura. Generar dibujos con simetría ajustándose a las plantillas.



- Para la figura adjunta, determinar las piezas generadoras. ¿Existe una *única* pieza que se reproduzca infinitamente "teselando" el plano?



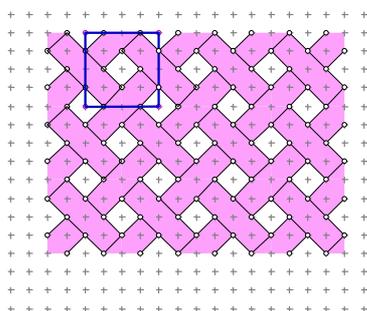
- Generar la figura adjunta a partir de un módulo conveniente:



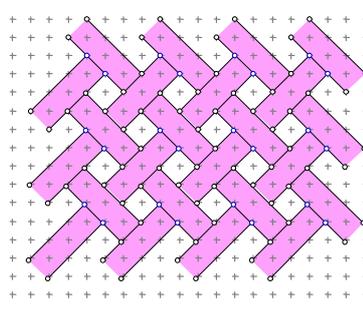
- Sobre base cuadrículada

1º. Construir el ensamblado de la figura con rectángulos aplicando transformaciones planas.

2º: Generar el mismo ensamblado con un módulo único (cuadrado)

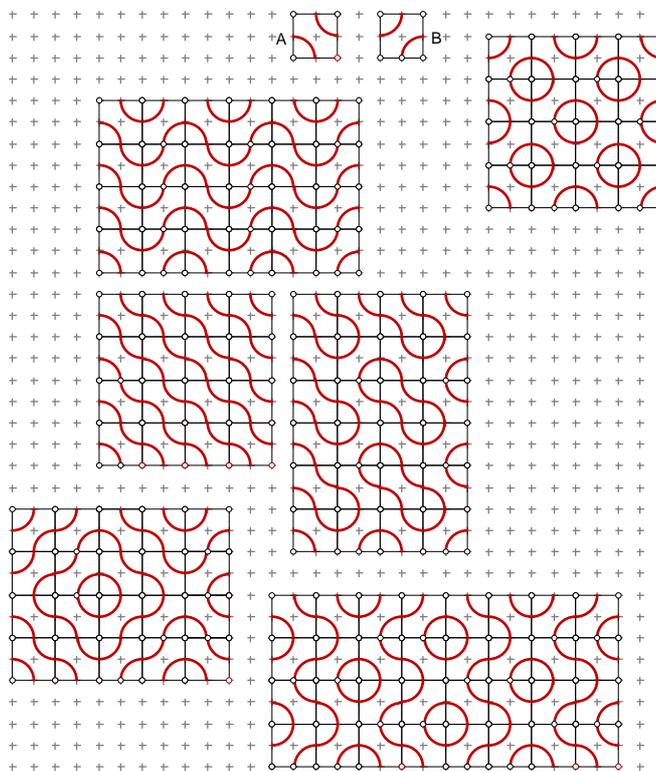


Un solo módulo con diferentes definiciones.



Dos módulos simétricos

- Además de reproducir las teselaciones de la figura siguiente, representar en una matriz el patrón de distribución de los módulos (A y B) de cada caso. Analizar la posibilidad de definir nuevos módulos de teselado como combinación de las piezas originales.



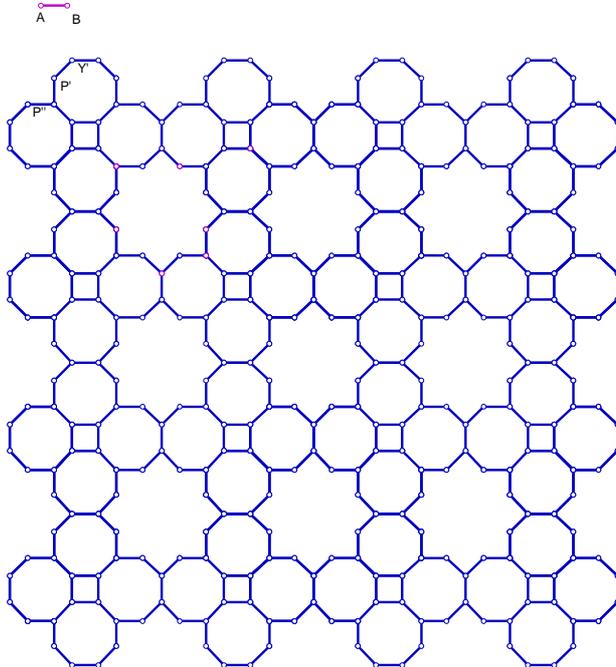
Buscar todas las combinaciones posibles.

Conclusiones del primer encuentro:

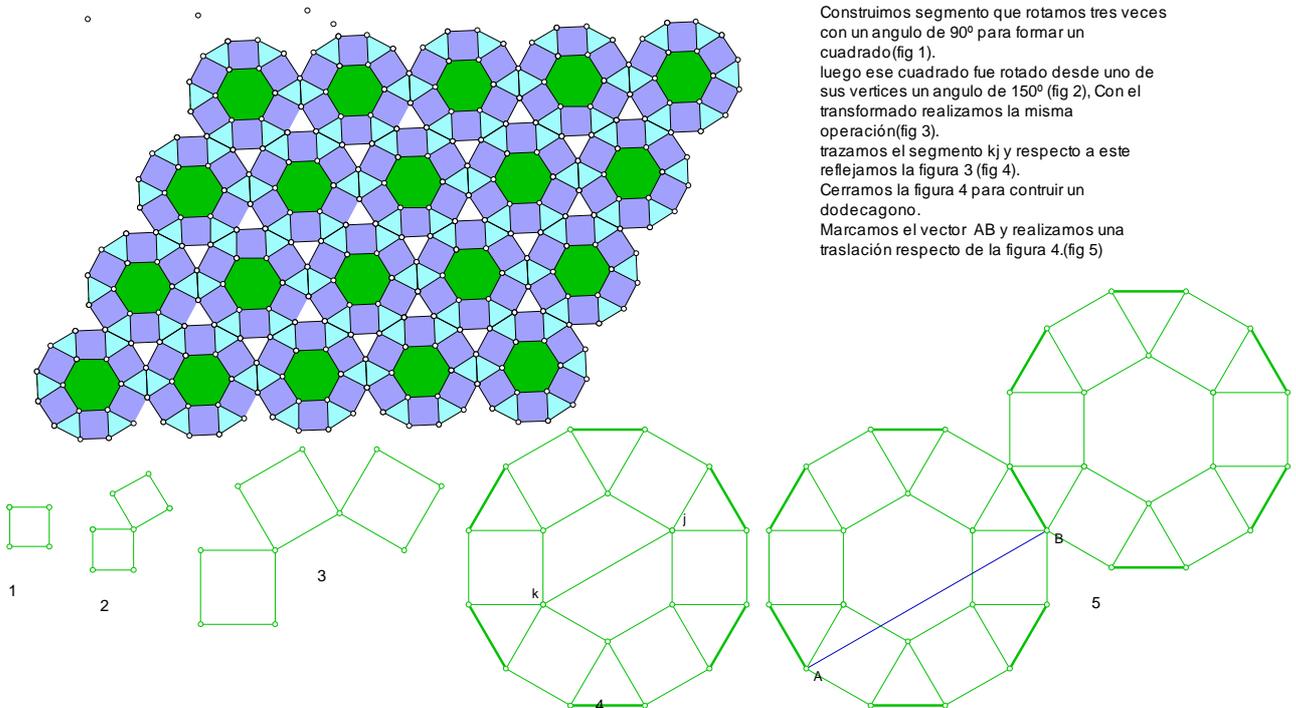
Las respuestas de los participantes superaron las expectativas. Mostraron enorme interés y la clase fue muy dinámica, a pesar de las diferencias en el grado de habilidad en el manejo del programa. Además, manifestaron repetidas veces su curiosidad sobre las capacidades que brindan estos programas, quedando en pie la posibilidad de realizar actividades de entrenamiento en el uso de los mismos.

Las siguientes son algunas de las figuras obtenidas por los alumnos. Cabe destacar que se exigió la presentación del trabajo acompañado con una

descripción de la sucesión de transformaciones utilizadas, se presenta la misma de manera textual:

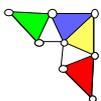


Lo primero que hice fue construir un vector (AB) que me permitiera poder manipular los dibujos del teselado. Luego construí un punto, el cual lo transforme teniendo en cuenta el vector AB, próximo a partir de ese punto construí un segmento (YP), al cual le realice rotaciones dándole origen a un octógono (cada rotación con un ángulo de 135°). Después de construir el octógono fui seleccionando algunos de sus lados (como marca de centro) y los refleje. De la misma manera lo hice para las figuras compuestas por los mismos, dándole genesis a este hermoso teselado; el cual a partir del vector (AB), se puede modificar.

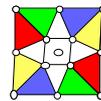


Construimos segmento que rotamos tres veces con un ángulo de 90° para formar un cuadrado (fig 1). luego ese cuadrado fue rotado desde uno de sus vértices un ángulo de 150° (fig 2). Con el transformado realizamos la misma operación (fig 3). trazamos el segmento kj y respecto a este reflejamos la figura 3 (fig 4). Cerramos la figura 4 para construir un dodecágono. Marcamos el vector AB y realizamos una traslación respecto de la figura 4. (fig 5)

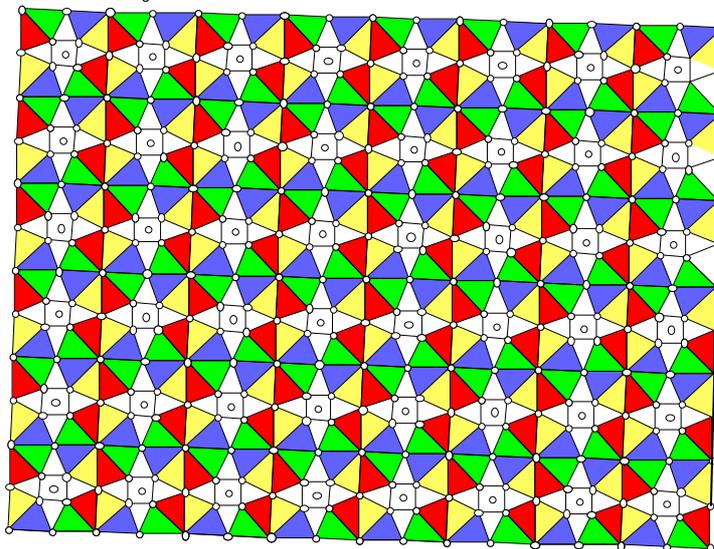
- ○ Primero creamos la siguiente figura, mediante traslaciones y rotaciones del segmento inicial



- Segundo por el punto medio del cuadrado central marcamos el simétrico de la figura anterior

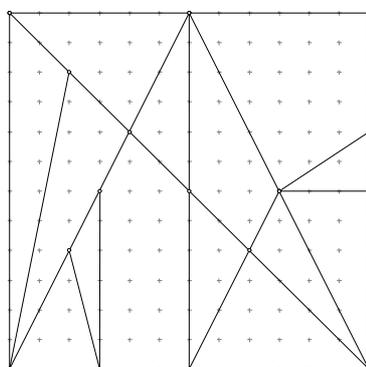


- tercero por traslaciones armamos el teselado

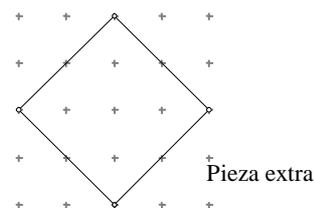
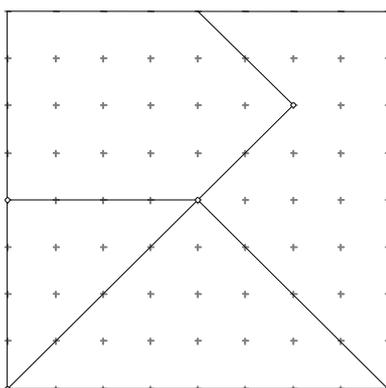


2.3.2. Segundo y tercer encuentros

- Se comenzó con un breve comentario sobre el *Stomachion* de Arquímedes, haciendo notar que su construcción se realiza fácilmente sobre una cuadrícula.



- Se entregaron las cuatro piezas de un rompecabezas (mucho más sencillo que el *Stomachion*) con el objetivo de formar un cuadrado. La resolución fue prácticamente inmediata.



- A continuación se agregó una quinta pieza con el fin de formar *otro* cuadrado. Los participantes se enfrascaron entusiastamente en la resolución del nuevo problema, que resistió durante un buen rato.
- Vencido un plazo razonable, se propuso estudiar la solución sistemáticamente, a partir del cálculo de áreas.
- Como planteo inicial, se reproduce el cuadrado original (cuatro piezas) sobre una cuadrícula, en cuyos nodos coinciden todos los vértices de las piezas dadas. La *cuadrícula* (acotada) se define como:

$$\{(x,y), x, y \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}. \text{ (Unidad: arbitraria)}$$

- En este momento se presenta la *fórmula de Pick*: $\text{Área} = \frac{b}{2} + i - 1$

siendo: b : cantidad de nodos en el borde; i : cantidad de nodos en el interior y la unidad de área el cuadrado de la rejilla.

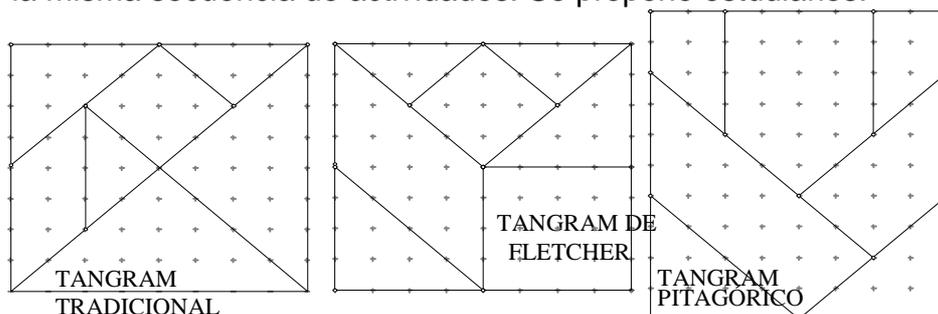
Las condiciones de aplicación: *Todos* los vértices del polígono rectilíneo son nodos de la rejilla. (Nota: ¡No se requiere que el polígono sea convexo!)

- Luego de alguna ejercitación de la fórmula presentada, se aplica al cálculo del área del cuadrado mayor propuesto como rompecabezas, con el fin de deducir posteriormente el *lado* de dicho cuadrado.
- Inmediatamente se propone analizar cuáles segmentos de la figura original servirían para componer los lados del cuadrado mayor a armar. Con este recurso, el problema es finalmente vencido, con gran satisfacción de los participantes.
- En vista de la proximidad con el tema, se presenta la *fórmula de Herón* para el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus lados:

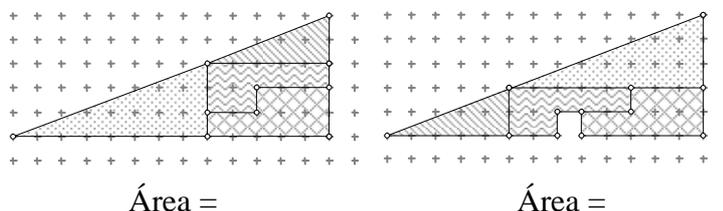
$$\text{Área triángulo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

siendo: a, b, c los lados y p el semiperímetro.

- Con fines de ejercitación se retoma el *Stomachion* y se eligen algunos triángulos para aplicación de la fórmula.
- Como efecto de esta actividad, se ofrecen ejemplos de cálculos entre números irracionales que dan como resultado números racionales.
- Finalmente se ofrecen varios diagramas con los que eventualmente podría realizarse la misma secuencia de actividades. Se propone estudiarlos.



- Se presenta la clásica paradoja del "cuadrado perdido".



Para explicar la aparente contradicción se calculan las pendientes de los segmentos de los dos triángulos, que resultan ser ligeramente diferentes.

- Inmediatamente surge la conveniencia de contar con la ecuación de la recta sostén (en \mathbb{R}^2). Para ello se presenta la fórmula

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Inesperadamente los participantes se enfrascaron con entusiasmo en la justificación de la fórmula, lo que se logró partiendo de la habitual expresión

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ y considerando que } \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = \alpha - \beta.$$

- Se presenta un problema relacionado con la graficación en cuadrículas enteras, que consiste en determinar (sin contar explícitamente) el número de nodos que se encuentran en un segmento dado por sus extremos (dos puntos siempre en la cuadrícula). Contando con la ecuación de la recta, la resolución del problema planteado, geométrico en su origen, se transforma en un problema de divisibilidad de enteros, que los participantes encuentran curioso e interesante.
- Como variante del problema anterior, se propone encontrar algún procedimiento que permita determinar el número de nodos por debajo (encima) de una recta que atraviese la cuadrícula. (Aquí se debe considerar la superposición de la cuadrícula discreta con el plano cartesiano.)
- Otras variantes propuestas son:
 - a) Encontrar un procedimiento para determinar cuántos nodos de la rejilla contiene una recta que pasa por dos puntos dados (dentro de la cuadrícula, siempre acotada)
 - b) Encontrar un procedimiento para determinar cuántos nodos de la rejilla contiene una recta que pasa por un punto con pendiente dada (dentro de la cuadrícula, siempre acotada)
 - c) Encontrar un procedimiento para determinar cuál es el nodo más próximo a uno dado sobre una recta dada.
 - d) Encontrar un procedimiento para determinar cuántos nodos de la rejilla están estrictamente por debajo (encima) de una recta dada.

Si bien el entusiasmo y la curiosidad se mantuvieron durante todo el encuentro, no se lograron soluciones significativas.

Conclusiones del segundo y tercer encuentros

- La propuesta resultó interesante y las fórmulas presentadas en general no eran conocidas por los participantes.
- La presentación a través de rompecabezas resultó sumamente atractiva y novedosa para la mayoría.
- Varios de los asistentes mostraron su inquietud por utilizar esta herramienta como elemento motivador en sus clases cuando fuera oportuno, aunque no pudieron precisar por el momento para qué tema concreto.

El desarrollo de estos encuentros no sólo ha permitido familiarizar a los participantes con las fórmulas presentadas, sino también les ha permitido conocer la utilidad de los rompecabezas como herramienta didáctica motivadora.

Si bien no se llegó a resolver la totalidad de los problemas planteados en la última parte, su presentación quedó como propuesta de estudio para los interesados.

2.3.3. Cuarto encuentro:

El estudio de cuerpos tridimensionales se facilita enormemente si se tiene la oportunidad de manipular modelos físicos que los representen.

Para construirlos, el papel es un material accesible y económico (incluso gratuito si se recicla), además de no necesitar herramientas para trabajarlo.

Por otra parte, la construcción en sí misma resulta para la gran mayoría de alumnos una actividad gratificante.

- Se exhibieron varios modelos de poliedros contruidos con módulos Origami de aristas, y de caras triangulares.
- A continuación se recordaron las definiciones y condiciones de existencia de los poliedros regulares y semirregulares.
- Se explican las características del formato A de papel. Se dan sugerencias para construir rectángulos de formato A de diversos tamaños.
- Se describe la confección de un módulo de cara triangular a partir de un rectángulo A, y la construcción de los sólidos platónicos de caras triangulares, cada uno de ellos con la cantidad de piezas necesarias. A tal efecto los participantes trabajaron en grupos.
- Para completar la colección de regulares por sus caras, se muestra la construcción del cubo de Sonobés y el dodecaedro de pentágonos de nudo de cinta continua (utilizando cinta de registradora)
- Como alternativa se presenta la construcción de módulos de arista, con los que se pueden construir también todos los poliedros semirregulares.
- Finalmente se mencionan algunas construcciones alternativas, como el "trenzado" de poliedros a partir de tiras de papel plegadas. Durante el plegado de tiras de triángulos se menciona un procedimiento de aproximación al ángulo de 60° de los sucesivos pliegues.

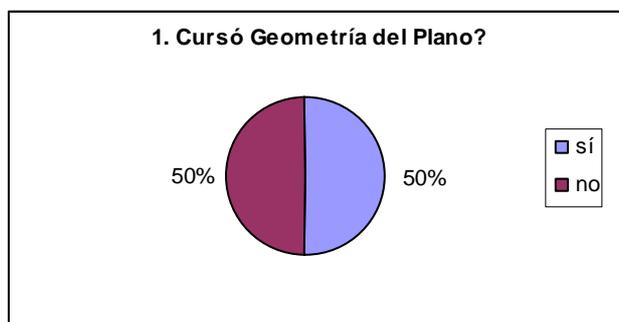
Conclusiones del cuarto encuentro

- Fue evidente el entusiasmo de los participantes en esta etapa.
- Los participantes reconocieron que estas herramientas pueden contribuir a un aprendizaje significativo, en vista del efecto que observaron sobre sí mismos durante la actividad realizada.
- El proceso de "límite" de plegados resultó extraordinariamente interesante y curioso, y varios de los participantes se propusieron justificar la validez del procedimiento.

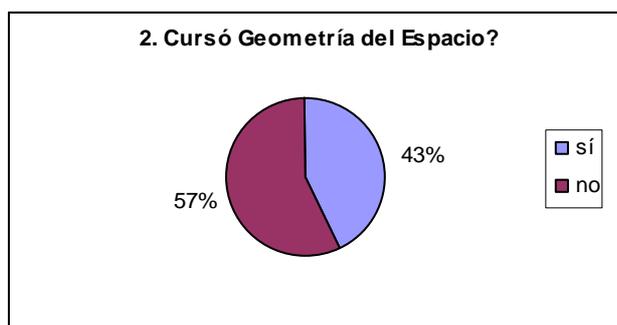
3. Encuesta

Una vez finalizado el taller se distribuyó una encuesta que debían responder de manera individual, se presenta la misma en conjunto con las respuestas dadas por los participantes:

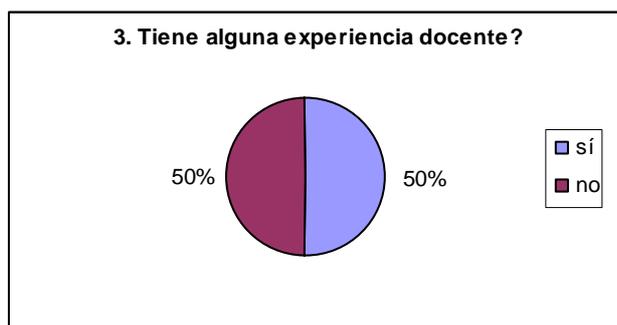
1. ¿Cursó la asignatura Geometría Euclidiana en el Plano?



2. ¿Cursó la asignatura Geometría Euclidiana en el Espacio?

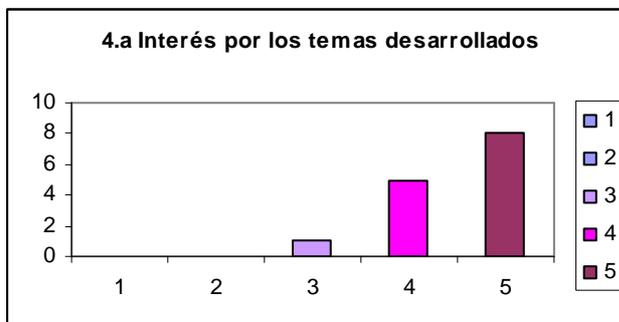


3. ¿Tiene alguna experiencia como docente?

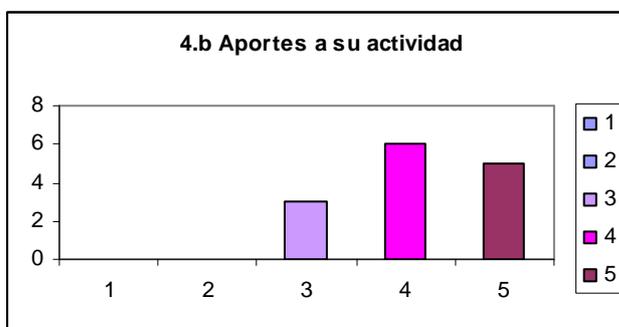


4. Le pedimos ahora, que califique con una valoración de 1 a 5 los aspectos del taller que se detallan a continuación:

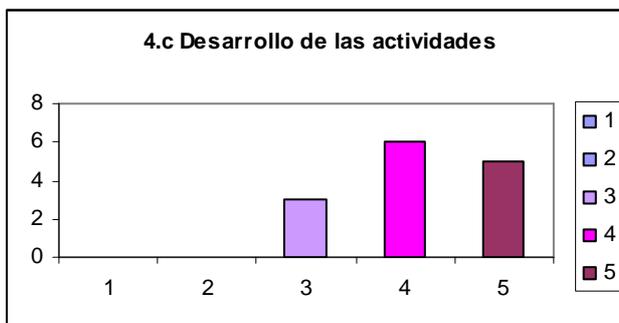
a) Interés por los temas desarrollados.



b) Aportes del taller a su (futura) actividad docente.



c) Desarrollo general de las actividades.



5. ¿Le interesa realizar otras actividades similares?



6. En caso de que su respuesta a la pregunta anterior sea afirmativa, podría sugerir alguna actividad.

Algunas de las actividades sugeridas por ellos se transcriben a continuación: "*Realizar, con programas como el utilizado, moldes para construir los poliedros*", "*Profundizar más el tema de las cuadrículas, y cómo aplicarlas en clase de Geometría.*", "*Trabajar con más programas de computadora, puesto que es muy atractivo para los alumnos.*"

4. Evaluación

La evaluación se realizó mediante la preparación y exposición de un trabajo relacionado con los temas incluidos en el taller. Cada trabajo, individual o grupal (hasta tres integrantes) debía contener elaboraciones personales de cada uno de los temas incluidos en el taller: Teselados/Transformaciones, Polígonos en cuadrículas y Modelos de Poliedros.

Se presentaron cuatro trabajos que evidenciaron un alto grado de elaboración por parte de los integrantes. En la mayoría de los casos, el desarrollo del contenido culminaba con propuestas didácticas.

Los resultados presentados muestran una importante investigación de los temas por parte de los alumnos, lo que demuestra el interés que el taller despertó en ellos.

A continuación se presenta, de manera textual, una de las propuestas presentadas, a misma consta de 4 actividades:

Actividad 1

Situación problemática: *TESELANDO EL PISO DE MI AULA DE CLASES*

Introducción

En el presente proyecto, se pretende que a partir de la situación problemática, el estudiante desarrolle habilidades, realice aprendizajes significativos y elabore una propuesta de solución, valorizando y relacionando conceptos de polígonos y teselación del plano, con la realidad y el arte.

Las capacidades que se esperan desarrollar en el alumno, son:

- Identificar los polígonos que teselan el plano.
- Argumentar utilizando dibujos, la teselación del plano.
- Investigar la relación entre el arte y la teselación del plano.
- Resolver situaciones problemáticas relacionados con su realidad.

Se plantea una situación problemática y a partir de ella se recuperan saberes previos: **¿CÓMO RECUBRIR O DISEÑAR EL PISO DEL AULA DE CLASES?**

¿Cuáles polígonos se pueden usar para hacer teselados regulares?

Para descubrirlo realiza las siguientes actividades:

- Recorta varios triángulos equiláteros iguales.
- De la misma manera, recorta (con la ayuda de un molde) cuadrados, pentágonos, hexágonos y octógonos. Recuerda que todos deben ser polígonos regulares.
- Utiliza hojas blancas. Pega en una de ellas los triángulos tratando de cubrir todo el plano.
- Repite la misma operación para los cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos y octógonos.
- Ahora responde:
¿Cuáles son los polígonos que se pueden usar para hacer teselados regulares?

Se espera que respondan sugiriendo los polígonos que según ellos podrían recubrir el piso (plano). Deben justificar haciendo esquemas o dibujos.

Por ejemplo, deberían poder decir, que el octógono no puede utilizarse para teselar el plano.

También se podría esperar que investiguen sobre la teselación y el arte, y así elaboran un resumen o ensayo sobre el tema.

Forman equipos de trabajo.

Actividad 2

Mide ahora los ángulos interiores de los distintos polígonos regulares y suma la medida de los ángulos interiores de los mismos.

- ¿Qué condición debe existir en cuanto a la suma de los ángulos en un vértice común para poder tener un teselado?
- Se ponen de acuerdo, dan sugerencias para teselar un metro cuadrado de papel (que representaría un metro cuadrado del piso del salón).
- Teselan un metro cuadrado de papel.
- Muestran su trabajo a sus compañeros de clase y explican el razonamiento y procedimiento que realizaron.
- Coordinan con la profesora y demás grupos para realizar una exposición en el patio.
- Elaboran una ficha de auto evaluación y el grupo evalúa a cada uno de sus integrantes.
- Elaboran una ficha de co-evaluación y evalúa el trabajo de los otros equipos.

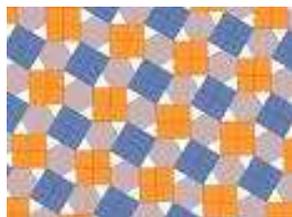
Actividad 3

Ahora, realiza tus propias teselaciones

- Utiliza uno de los polígonos regulares con los que se puede teselar el plano, por ejemplo, un cuadrado.
- Utiliza esta figura como molde para copiarla en una hoja, después trasládala sobre la hoja sin que haya traslapes.
- Hacer cálculos y proponer el tamaño de la baldosa con la que trabajarán (el polígono).
- Elaboran un esquema a escala, del diseño que pretenden realizar, en una hoja de cuaderno, indicando las dimensiones de las losetas, posición, ubicación, colores, etc.

Actividad 4

Observa el siguiente teselado, ¿puedes descubrir el patrón que se repite?



5. Conclusiones y proyección futura

Menos de la mitad de los participantes tenía cursado el conjunto de asignaturas de Geometría de la carrera, a pesar de lo cual los trabajos presentados resultaron muy completos e interesantes, no sólo por el rigor de las fundamentaciones, sino también por la originalidad con que la mayoría de las presentaciones culminaba en una propuesta didáctica pensada para alumnos de nivel medio.

De lo anterior se desprende que:

- Las actividades del Taller presentadas en forma de desafíos (construcción de teselados, demostración de proposiciones relacionadas con cuadrículas) incentivaron a los asistentes a revisar sus conocimientos de geometría, y en muchos casos a investigarlas por iniciativa propia.

- El tradicional esquema Teoría → Aplicaciones no es el único que permite resultados satisfactorios, ya que el hecho de dedicarse a la resolución de un problema incita a la búsqueda de conceptos y propiedades útiles para el caso.

En vista de lo expresado, concluimos que se han alcanzado los objetivos propuestos para el Taller. Por otra parte, a partir de lo manifestado en las encuestas, se plantea la posibilidad de realizar nuevos talleres con los mismos o similares contenidos, para ofrecerlos a docentes de otros niveles y estudiantes de Profesorado y Licenciatura

Bibliografía

- Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de Geometría*. Lisuma-Wiley.
- Keller, J. M. (1987). *Estrategias para estimular la motivación aprender. Funcionamiento e instrucción*. Universidad de Estados de la Florida.
- Lang, S., Murrow, G. (1988) *Geometry*. Springer.
- Novak, J. D., Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca, Barcelona.
- Pazos, M. (1995). *El Tangram: un recurso para la educación matemática*. 7ª JAEM . Madrid.
- Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente*. Editorial Gedisa, Barcelona.
- Puig Adam, P. (1969). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I: Fundamentos. Biblioteca Matemática S. L..
- Santaló, Luis A. (1993). *La Geometría en la formación de profesores*. Red Olímpica.
- Stomachion*. <http://www.juegotangram.com.ar/tipostangram/Stomachion.htm>

Facello, Teresa del Carmen. Docente de Matemática y algunas disciplinas afines en diferentes niveles educativos. Docente del Dpto. de Matemática de la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co.), Argentina. Integrante del proyecto de investigación "Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar" de la (U.N.Co.). tfacello@uncoma.edu.ar

Osio, Elsa Beatriz. Calculista Científica. Universidad Nacional de La Plata, Argentina. Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas. Orientación Matemática. Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co.). Participación en el Proyecto "*Ciencias Básicas y orientación Vocacional de articulación entre la Universidad Nacional del Comahue con escuelas Medias de Río Negro y Neuquén*". Integrante del proyecto de investigación "Enseñanza de la Geometría: Qué dar, qué no dar, qué mejorar" de la U.N.Co. osioe@jetband.com.ar