REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2011, Número 25, páginas 63-72
ISSN: 1815-0640

Equações quadráticas e a fórmula de Bhaskara: Sucesso garantido?

Rosana Nogueira de Lima

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma análise do trabalho de 77 alunos de ensino médio com uma situação não-familiar: a solução de uma equação quadrática escrita na forma fatorada. Os dados são analisados à luz de um quadro teórico que considera três diferentes mundos da Matemática e a influência dos "já-encontrados" derivados de experiências anteriores. Concluímos que ter a fórmula de Bhaskara como o único já-encontrado para resolver equações quadráticas pode não ajudar os alunos a trabalharem situações que as envolvem. Conjecturamos que o aluno deve se envolver com situações relacionadas a pelo menos dois mundos, o corporificado e o simbólico, mas de formas que também permitam considerar características do mundo formal, sem o qual alunos podem criar suas próprias técnicas inapropriadas.

Abstract

In this paper, we present an analysis of 77 14-15 year-old students' work with a non-familiar situation: the solution of a quadratic equation, written in a factorized form. Data is analysed in the light of a theoretical framework that considers three different worlds of Mathematics and the influence of 'met-befores' derived from learning experiences related to them. We show that having the quadratic formula as the only met-before to solve quadratic equations may not help the students to face all kinds of situations involving such equations. In addition, we claim that it is necessary to present to students learning situations that involve at least two worlds, the embodied and the symbolic, but in ways which also allow consideration of characteristics of the formal world, without which students may create their own inappropriate techniques.

Resumen

En este artículo, presentamos un análisis del trabajo de 77 alumnos de nivel medio con una situación no familiar: la solución de una ecuación cuadrática escrita en forma factorizada. Los datos son analizados a la luz de un cuadro teórico que considera tres diferentes mundos de la Matemática y la influencia de los "ya-encontrados" en experiencias anteriores. Concluimos que tener la fórmula de Bhaskara como la único para resolver ecuaciones cuadráticas puede no ayudar los alumnos a trabajar situaciones que se les presenten. Conjeturamos que el alumno debe encontrarse con situaciones relacionadas a por lo menos dos aspectos, el corporificado y el simbólico, pero de forma que también permitan considerar características del mundo formal, sin el cual los alumnos pueden crear sus propias técnicas inapropiadas.

1.Introdução

> **"***olha, muitas [das equações] aí eu já olhei e pensei em Bhaskara, eu não sei por que. Pode tá até errado, eu não sei, né, mas eu olhei e pensei. Porque, assim, a outra professora que eu tive, ela colocava muito assim, fórmulas, que*

nem Bhaskara, né. Eu olhava e ela falava assim, 'ó, você olhou para isso daqui, você já tem que pensar na fórmula de Bhaskara'. (...) eu lembro que a professora disse que Bhaskara precisava ter um [a incógnita] ao quadrado, aqui o a, aí aqui o b, que seria o número com o t [a incógnita], no caso, e o número sozinho [o coeficiente independente]."

(Trecho de entrevista com aluno da segunda série do Ensino Médio)

Em nossas experiências de trabalho com professores de Matemática da rede pública do Estado de São Paulo, freqüentemente ouvimos que eles preferem mostrar aos alunos o que chamam de métodos *"mais fáceis"* e *"mais gerais"* de resolver equações. Isso inclui "regras" para transpor um número para o outro lado do sinal de igual no caso das equações lineares; e a fórmula de Bhaskara para equações quadráticas. Tal prática, de acordo com eles, garante que os alunos serão bem sucedidos em resolver equações. Entretanto, pesquisas sugerem (Lima, 2007) que os conceitos matemáticos por trás das regras e fórmulas não estão claros para os alunos. Ao invés disso, eles tomam tais regras como verdades matemáticas, ou criam meios de trabalho para resolver equações. Especificamente no caso da fórmula de Bhaskara, Thorpe (1989) sugere que ela pode apresentar valores para a incógnita, tais como $1 \pm \sqrt{6}$, que podem não ter significado para os alunos, além de a fórmula ser um método que não pode ser generalizado para equações polinomiais de graus maiores.

Neste artigo, apresentamos uma análise de dados coletados em três grupos de alunos de primeira e de segunda séries do Ensino Médio de uma escola pública e um grupo de segunda série de uma escola particular na Grande São Paulo. Foi pedido aos alunos que discutissem e analisassem uma solução dada para a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$, que não usa a fórmula, uma situação não-familiar para eles. Ao fazê-lo, os alunos mostraram que as suas experiências anteriores usando a fórmula têm grande influência no trabalho deles com esse tipo de equação. Estas experiências podem ser positivas, já que a fórmula garante sucesso se for usada de maneira apropriada, mas podem também ser prejudiciais se tiverem ênfase em um único procedimento para resolver equações quadráticas, sem considerar os princípios algébricos subjacentes a tal procedimento.

Os dados foram analisados usando um quadro teórico de aprendizado a longo prazo, que considera a existência de pelo menos três diferentes tipos de conceito em Matemática, habitam três diferentes mundos (Tall, 2004; Lima; Tall, 2008): o *mundo conceitual corporificado*, o *mundo proceitual simbólico* e o *mundo formal axiomático*. Experiências relacionadas com diferentes conceitos nesses três mundos geram construtos mentais chamados, por Tall (2004) de *"já-encontrados"*[1], e que influencia o trabalho atual dos alunos.

Ter conhecimento de apenas um tipo de já-encontrado, por exemplo a fórmula de Bhaskara, pode impedir que os alunos tenham flexibilidade para escolher o melhor método para resolver um problema ou uma situação com a qual se deparam, o que poderia ter possibilitado que eles fossem bem-sucedidos na tarefa que apresentamos.

[1] Do inglês "met-before", tradução feita por Lima (2007).

2. Diferentes Mundos da Matemática

A análise dos dados coletados foi feita à luz de um quadro teórico que analisa o desenvolvimento cognitivo da matemática a longo prazo, fundamentado no entendimento de que existem pelo menos três diferentes tipos de conceito (Gray; Tall, 2001), que são baseados nas atividades humanas de percepção, ação e reflexão, e que habitam três diferentes mundos da Matemática (Tall, 2004; Lima; Tall, 2008):

- Um mundo *conceitual corporificado* das percepções, no qual os indivíduos observam um objeto, suas propriedades, dão sentido a ele e o descrevem.
- Um mundo *proceitual simbólico*, no qual entidades matemáticas são simbolizadas, e ações podem ser efetuadas sobre eles com o uso de procedimentos que podem ser flexivelmente vistos como um procedimento e como o produto desse procedimento, o conceito, numa dualidade dos *proceitos* (Gray; Tall, 1994).
- Um mundo *formal axiomático* dos axiomas, propriedades, definições e teoremas, que possibilitam construir o corpo axiomático da Matemática por meio de demonstrações.

No caso das equações, acreditamos que abordagens de ensino baseadas no modelo da balança (Vlassis, 2002) ou no modelo geométrico (Filloy; Rojano, 1989) representam exemplos de meios corporificados de se lidar com equações. De acordo com Vlassis (2002), o modelo da balança é efetivo para que alunos consigam entender a idéia de igualdade entre os dois membros de uma equação, mas não é um método apropriado quando números negativos são envolvidos. O mesmo pode ser dito sobre o método geométrico e números racionais (Filloy; Rojano, 1989).

Dadas as dificuldades que ambas as abordagens corporificadas podem trazer para os alunos, faz-se necessário relacioná-las com o mundo simbólico, de forma a representar os pesos de uma balança de dois pratos ou as áreas de figuras geométricas por símbolos algébricos aos quais podem ser dados valores negativos e racionais. Este mundo também exige o uso de procedimentos, para resolver equações, relacionados com o princípio algébrico de “efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação”. Um uso apropriado de símbolos e de procedimentos inclui entendimento de que o foco deveria ser no *efeito* (Watson, Spyrou, Tall, 2003) do procedimento, e não no próprio procedimento. É essencial que um aluno saiba que, não importa qual método ele use para resolver, por exemplo, uma equação quadrática, o efeito de qualquer método – no caso os valores da incógnita – será o mesmo. Nesse sentido, o mundo simbólico é poderoso porque permite que os alunos sejam flexíveis em entender símbolos algébricos como processos e conceitos, e em perceber a possibilidade de uso de um procedimento apropriado para cada situação que eles têm em mãos.

Nem sempre o mundo simbólico é usado em toda sua potencialidade. Alunos podem usar procedimentos sem entender sua dualidade e flexibilidade, aplicando procedimentos como “regras sem razão” (Linchevski; Sfard, 1991), ou regras relacionadas com as frases usadas para se referir a eles (Freitas, 2002; Cortés; Pfaff, 2000), tais como “passar o número para o outro membro da equação e mudar o sinal”. A falta de razões para o uso de procedimentos pode gerar *mal-rules*

(Sleeman, 1984; Payne; Squibb, 1990) ou meios de trabalho (Lima; Tall, 2008) com equações baseados na aplicação errônea das regras conhecidas, possivelmente porque elas não estão conectadas ao princípio de efetuar a mesma operação em ambos os membros (Lima, 2007). Por estas razões, acreditamos que os mundos corporificado e simbólico deveriam estar conectados e relacionados durante o aprendizado de equações nos Ensinos Fundamental e Médio e que, enquanto o mundo formal em sua totalidade é apenas discutido em nível superior, quando a construção da Matemática é estudada a partir de axiomas, definições, teoremas e demonstrações, algumas características desse mundo deveriam ser apresentadas durante o aprendizado de equações na matemática escolar, pelo menos as que estão por trás das "regras" que os alunos usam para resolvê-las.

2.1. O que já encontramos

Não se pode esperar que todos os indivíduos percebam e entendam características de cada um dos três mundos da Matemática, referentes a um dado conceito, da mesma forma. A jornada pelos mundos pode ser diferente para cada um, de acordo com as experiências anteriores que eles tiveram durante experiências de aprendizado dentro ou fora da escola.

Tall e Vinner (1981) definem imagem de conceito como

> "... *a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos a eles associados. Ela é desenvolvida durante os anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece*."
>
> (Tall; Vinner, 1981, p. 152, tradução nossa)

Um indivíduo desenvolve a sua própria imagem de conceito a partir das experiências anteriores. Acreditamos que tais experiências são de grande importância, já que elas afetam o aprendizado do indivíduo. Lima e Tall (2008) definem *"já-encontrado"* como "... um construto mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente." (p. 6). Os já-encontrados fazem parte da imagem de conceito de um indivíduo.

Quando um indivíduo se depara com uma situação similar a uma já encontrada anteriormente, ele é compelido a usar um conhecimento antigo, um já-encontrado, para resolvê-la. Nesse sentido, uma experiência antiga de aprendizado influencia uma nova. Tais influências podem ser tanto positivas quanto negativas, dependendo se o já-encontrado é matematicamente válido ou não, e se é adequado ou não para a nova situação. Por exemplo, a partir do fato de que $3 + 4 = 7$, um conhecimento prévio em Aritmética, um indivíduo pode concluir que $3x + 4x = 7x$. Entretanto, em face de $3 + 4x$, ele pode, erroneamente, concluir que o resultado é $7x$, usando um já-encontrado inadequado para a situação. Dependendo da experiência de aprendizado, um já-encontrado pode ter suas bases em qualquer um ou em todos os mundos da Matemática, isto é, qualquer tipo de experiência, corporificada, simbólica ou formal, pode interferir no aprendizado. Em nosso ponto de vista, já-encontrados são de grande importância no aprendizado de qualquer conteúdo de Matemática, especialmente em equações, nosso caso, porque eles explicitam que tipo de experiências estão interferindo no aprendizado atual e que tipo de experiências os alunos ainda necessitam.

3. A Pesquisa

Os dados coletados neste artigo são parte de nossa pesquisa de doutorado, desenvolvida na PUC/SP e na Universidade de Warwick (UK). Nesta pesquisa, três grupos de alunos do Ensino Médio, um com 32 alunos de primeira série, um com 26 alunos da segunda série, ambos de uma escola pública em Guarulhos/SP, e um grupo de 19 alunos de segunda série de uma escola particular em São Paulo/SP, participaram, e trabalharam com três instrumentos de coleta de dados: um mapa conceitual, um questionário e uma tarefa de resolução de equações. Cada instrumento foi aplicado pelo professor da sala durante uma aula de 100 minutos. Quinze alunos foram selecionados para entrevistas, conduzidas pela pesquisadora, na presença de um observador, e áudio-gravadas para análises posteriores.

Neste artigo, nos concentraremos particularmente nos dados de uma das questões do questionário, na qual pedimos aos alunos para discutir a solução dada a uma equação quadrática (uma análise detalhada do restante dos dados pode ser encontrada em Lima; Tall, 2006a; Lima; Tall, 2006b; Lima, 2007; Lima; Tall, 2008; Lima; Healy, 2010).

3.1. A Questão

Na Questão 8 do questionário, foi pedido aos alunos que analisassem e comentassem uma solução dada para a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$ (veja Figura 1). Esta é uma tarefa não familiar, considerando que usualmente pede-se para os alunos resolverem equações, e não que discutam uma solução apresentada, ou decidam se ela está ou não correta. Esta questão foi incluída no questionário porque os professores de nossos sujeitos de pesquisa acreditavam que eles usariam a fórmula de Bhaskara para resolver qualquer tipo de equação quadrática. Estávamos interessados em determinar se eles reconheceriam o princípio algébrico que afirma que, se um produto é zero, então um dos fatores deve ser zero, ou o procedimento que faz com que cada um dos fatores seja igual a zero para resolver a equação na forma apresentada na questão. Em outras palavras, queríamos investigar a extensão na qual estes alunos teriam acesso a diferentes procedimentos de resolver quadráticas, se eles mostravam flexibilidade em lidar com procedimentos diferentes para resolvê-las, ou se eles apenas usavam a fórmula. Como pedimos para eles justificarem as soluções dadas por meio de propriedades matemáticas, poderíamos observar se características do mundo formal estariam presentes no entendimento que eles tinham de equações.

Questão 8: Para resolver a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$ no conjunto dos números reais, Joãozinho respondeu em uma linha:

"$x=3$ ou $x=2$"

A resposta está correta? Analise e comente a resposta de Joãozinho.

Figura 1: Enunciado da Questão 8 do Questionário

4. Resultados e Análise

Em geral, análises de todos os instrumentos mostraram que estes alunos entendem equação como uma conta, similar a uma adição ou multiplicação. Para resolver equações quadráticas, eles usam a fórmula, ou tentam "transformar uma equação quadrática em linear", usando o expoente da incógnita no coeficiente dela, ou simplesmente retirando esse expoente, e então, usam as mesmas técnicas que usam em equações lineares. A Tabela 1 apresenta acertos e erros referentes à resolução das equações quadráticas da atividade de resolução de equações.

Tabela 1: Resolução das equações quadráticas na atividade

Equação	$a^2 - 2.a - 3 = 0$	$r^2 - r = 2$	$3.l^2 - l = 0$	$m^2 = 9$
Correto	5	3	3	1
Uma das raízes	-	9	-	15
Incorreto	40	31	40	27
Total	23	25	25	25

De tais resultados, evidenciamos que os alunos têm a fórmula de Bhaskara como um já-encontrado para resolver equações como o único procedimento matematicamente correto que eles conhecem. Mesmo assim, poucos alunos usam a fórmula de maneira apropriada. Somente *sete* alunos resolveram corretamente pelo menos uma das equações de todos os instrumentos de coleta de dados. A Tabela 2 apresenta quantidade de alunos que resolveram correta ou incorretamente as equações da atividade de resolução de equações por meio da fórmula de Bhaskara.

Tabela 1: Uso da formula de Bhaskara em cada equação

Equação	$a^2 - 2.a - 3 = 0$	$r^2 - r = 2$	$3.l^2 - l = 0$	$m^2 = 9$
Correto	4	2	3	1
Incorreto	6	5	3	2
Total	10	7	6	3

Aparentemente, o mundo simbólico é o que está em foco no trabalho deles com equações; entretanto, uma flexibilidade de escolher um procedimento apropriado para cada situação está ausente, dado que eles apenas conhecem a fórmula como um procedimento. Relações entre os mundos corporificado e simbólico podem ser vistas apenas quando os alunos usam o que chamamos de *"corporificações procedimentais"* (Lima; Tall, 2008; Lima, 2007). Elas são evidentes quando eles resolvem a equação $m^2 = 9$ como apresentado na Figura 2, explicando que eles "pegam o 2 e colocam do outro lado", com uma mágica adicional de transformá-lo em uma raiz quadrada (Lima, 2007). Como resultado, técnicas são procedimentos mágicos com significados relacionados com movimentos ao invés de relações matemáticas.

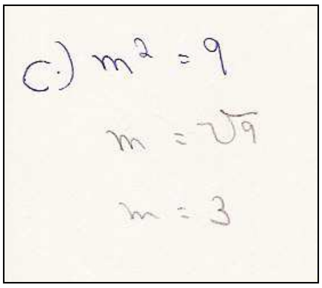

Figura 2: Resolução do aluno [SP205]

Especificamente para a Questão 8, encontramos que 30 alunos disseram que a resposta do Joãozinho está correta. Eles dão tais respostas baseados em diferentes (ou nenhuma) razões. Nenhum deles disse que a resposta de Joãozinho estava correta por causa de um princípio algébrico que garante que, quando um produto é igual a zero, então um de seus fatores deve ser zero. Na realidade, nenhum dos alunos parecia ter tal princípio como já-encontrado, nem mesmo o procedimento de tomar cada fator como igual a zero para obter os resultados. As respostas dos alunos foram similares às apresentadas na 12 e na **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**:

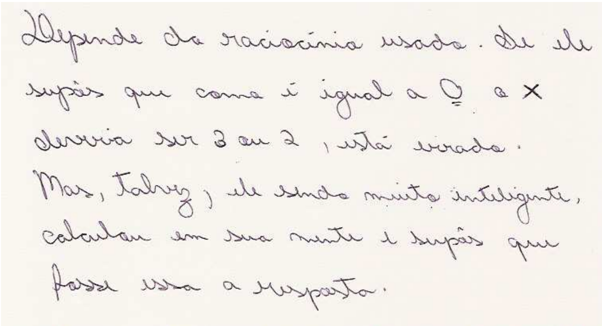

Figura 3: Resposta do aluno [SP204] para a Questão 8

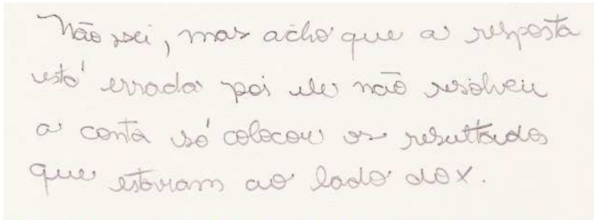

Figura 4: Resposta do aluno [SP214] para a Questão 8

Para muitos, a formula de Bhaskara parece ser o único já-encontrado válido que eles conhecem para resolver equações quadráticas. Onze alunos declararam que “Joãozinho não resolveu a equação” porque ele não usou a fórmula, e outros três acreditam que “ele usou a fórmula, mas ele não mostrou seus cálculos”. De fato, apenas quatro alunos usaram a fórmula para resolver a equação e comparar resultados com os de Joãozinho. Um aluno que cometeu erros ao usar a fórmula, obteve valores diferentes dos de Joãozinho e disse (Figura 5):

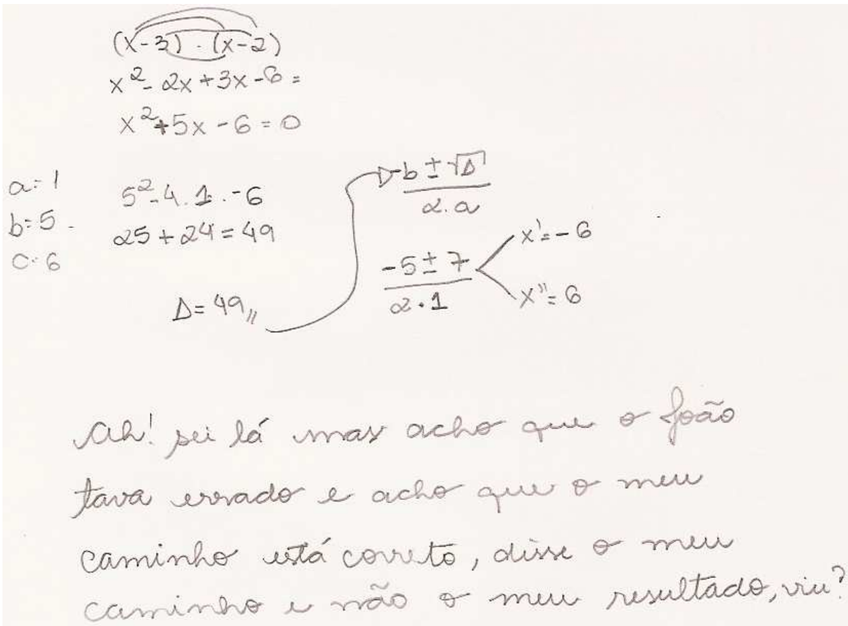

Figura 5: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 8

"O jeito dele" de resolver equações é a fórmula, e é o jeito correto. Outro aluno, em entrevista, disse que *"está errado porque Joãozinho não usou a fórmula"*.

Outra maneira de resolver esta questão apresentada por quatro alunos foi substituir os resultados de Joãozinho na equação. Um deles disse (Figura 6):

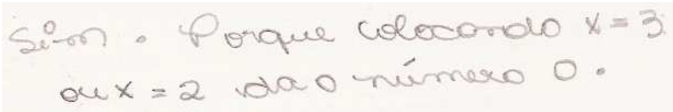

Figura 6: Resposta do aluno [GU122] para a Questão 8

Dois alunos deram respostas similares a esta, apresentadas na Figura 7 e o quarto aluno respondeu como na Figura 8.

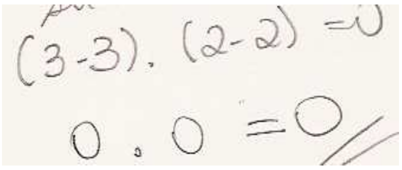

Figura 7: Um aluno substitui ambos os valores de x de uma vez.

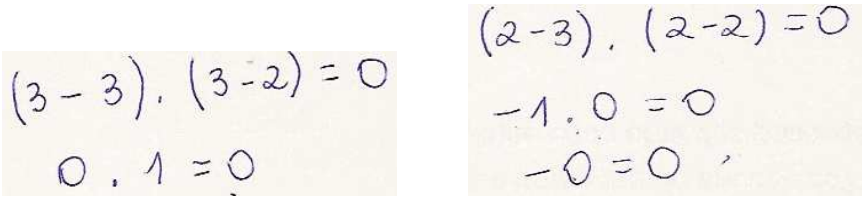

Figura 8: Um aluno substitui um valor de x por vez.

No caso da Figura 7, apesar de os alunos substituírem ambas as raízes ao mesmo tempo, eles mostram um entendimento de equação que não foi anteriormente apresentado na análise dos dados de todos os instrumentos: que os valores de *x* deveriam fazer com que a equação inicial fosse verdadeira. Na Figura 8, o aluno está consciente de como substituir a incógnita para o valor dado de forma a testá-lo e ter certeza de que ele é correto. Tal comportamento, em ambos os casos, pode também ser explicado como uma corporificação procedimental, quando o aluno "põe" o valor no lugar de *x* e vê o que acontece. Eles podem estar tratando os valores de *x* como entidades físicas que podem ser posicionadas onde a incógnita está. Um outro já-encontrado também está em jogo: o entendimento de que os resultados de uma equação devem satisfazer a inicial.

5. Discussão final

Apresentar um único procedimento para resolver equações não parecer ser uma abordagem bem sucedida, dadas as respostas desses alunos. A fórmula de Bhaskara não provou ser um método significativo entre estes alunos, e parece tê-los inibido de criar diferentes já-encontrados para resolver quadráticas. Em uma situação não-familiar, tal como a apresentada neste artigo, muitos dos alunos tiveram que usar a fórmula para terem certeza de quais eram as raízes da equação. Se eles tivessem a flexibilidade de lidar com símbolos, eles seriam capazes de buscar diferentes maneiras de abordar o problema, e, talvez, serem mais bem-sucedidos. Uma gama de já-encontrados provavelmente ampliaria a visão deles sobre a situação, e eles poderiam explorar características mais gerais de equação.

Por exemplo, os quarto alunos que tentaram substituir *x* pelos valores obtidos (três no questionário e um durante entrevistas), mostraram que um já-encontrado diferente ofereceu uma rota mais suave de resolver e justificar a situação. Além disso, quando eles usam uma corporificação procedimental, é de forma a trazer sucesso, evidenciando que este tipo de procedimento pode também provocar resultados efetivos, e não apenas negativos como se suspeitava anteriormente.

A falta de respostas discutindo o fato de que “se uma multiplicação de números reais é zero, então um dos fatores deve ser zero” mostra que características formais de equação e dos métodos de resolução deles podem não ter sido discutidos durante as experiências de aprendizado. De acordo com Tall (2004), o mundo formal não está em jogo em nível secundário, dado que tal mundo pressupõe a construção da Matemática por meio de demonstrações baseadas em axiomas, definições e teoremas. Concordamos que não é possível lidar com o mundo formal como um todo no nível de escolaridade dos sujeitos desta pesquisa. Entretanto, é nossa conjectura que não é possível evitar o uso de qualquer característica do mundo formal em níveis mais baixos que o superior, e é de fundamental importância que os alunos as conheçam. Isso pode impedir que eles dêem significados corporificados inapropriados para os símbolos, como em algumas corporificações procedimentais; criem novas técnicas, desconectadas de princípios algébricos; e confiem em um único já-encontrado para todas as situações.

Sugerimos que novas pesquisas sejam feitas, para estudar os resultados de apresentar para os alunos situações de ensino que emerjam de pelo menos dois dos mundos, corporificado e simbólico, de forma que um mundo possa complementar o outro, criando uma imagem de conceito mais rica relacionada com equações e os métodos de resolução delas, de forma que uma ampla gama de já-encontrados possa ajudar os alunos a desenvolverem uma maneira flexível de pensar com símbolos, e de ficarem conscientes das características corporificadas e formais que podem estar emaranhadas em tais relações.

Bibliografia

Cortés, A., & Pfaff, N. (2000). Solving equations and inequations: operational invariants and methods constructed by students. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, Hiroshima, Japan: PME, 193-200.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations, the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics , 9* (2), 19-25.

Freitas, M. A. (2002). *Equação do primeiro grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio.* Master Dissertation (Mathematics Education), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education , 26* (2), 115-141.

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *Proceedings fo the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, 65-72. Ultrech: PME.

Lima, R. N. (2007). *Equações Algebricas no Ensino Médio: Uma jornada por diferentes mundos da Matemática.* Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Lima, R. N., & Healy, L. (2010). The didactic cut in equation solving or a gap between the embodied and the symbolic mathematical worlds? *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Belo Horizonte: UFMG.

Lima, R. N., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics , 67* (1), 3-18.

Lima, R. N., & Tall, D. (2006). The concept of equations: what have students met before? *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 233-241. Prague, Czech Republic.

Lima, R. N., & Tall, D. (2006). What does equation mean? A brainstorm of the concept. *3rd International Conference on the Teaching of Mathematics at Undergraduation Level.* Istambul, Turquia: ICTM.

Linchevski, L., & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects - The case of equations and inequalities. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, 317-324. Assisi, Itália: PME.

Payne, S. J., & Squibb, H. R. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science* , 445-448.

Sleeman, D. (s.d.). An attempt to understand students' understanding of basic algebra. *Cognitive Science , 8*, 387-412.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics , 12*, 151-169.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th International Conference of the Group for Psychology of Mathematics Education*, *1*, 281-288. Bergen.

Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What sould we teach and how should we teach it? In: S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4, 11-24. EUA: NCTM.

Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or supprt for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics , 49*, 341-359.

Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education , 1* (2), 73-97.

Rosana Nogueira de Lima Tem mestrado e doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, tendo feito doutorando sanduíche na Universidade de Warwick (Grã-Bretanha). É Pesquisadora e Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, orientando pesquisas principalmente em Álgebra. É Membro de corpo editorial do Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEEM. **rosana.lima@uniban.br**