

## La articulación de Saberes Matemáticos en el tema de los sistemas de ecuaciones lineales

Isaías Pérez Pérez; Silvia Soledad Moreno Gutiérrez

### Resumen

La presente investigación de corte sistémico-lógico, aporta resultados experimentales sobre el denominado “proceso de articular saberes matemáticos”, concerniente a lo que se ha denominado como Articulación de Saberes Matemáticos. Para ello, se desarrolló un instrumento basado en los modelos conceptuales, que intenta estimar el nivel de articulación de saberes matemáticos que adquieren los estudiantes sobre el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales.

### Abstract

The present investigation of cuts systemic-logical, contributes experimental results on the denominated “process to articulate knowledge mathematical”, concerning which it has been denominated like Articulation of Knowledge Mathematical. For it, an instrument based on the conceptual models was developed, that try to consider the mathematical level of joint of knowledge which they acquire the students on the subject of Systems of Linear Equations.

### Resumo

A presente investigação de corte sistémico-lógico, contribui resultados experimentales sobre o denominado “processo de articular saberes matemáticos”, concerniente ao que se denominou como Articulación de Saberes Matemáticos. Para isso, se desenvolveu um instrumento baseado nos modelos conceptuais, que tenta estimar o nível de articulación de saberes matemáticos que adquirem os estudantes sobre o tema de Sistemas de Equações Lineales.

### 1. Introducción

La Educación Matemática plantea entre sus objetivos, el que los estudiantes cuando se adentren al estudio de los diversos temas matemáticos, logren articularlos de manera que puedan formar conceptos más complejos y sofisticados. Uno de los beneficios de adquirir esta cualidad de articular saberes, es que permite al estudiante resolver diversos problemas matemáticos presentados por el profesor o inclusive problemas de la vida cotidiana, obteniendo con ello la solución requerida, además de la ganancia intelectual que se alcanza, debido a que lo incentiva para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanza en sus estudios (NCTM, 2000, p.15).

A la anterior actividad, dentro de la Educación Matemática se le conoce como Articulación de los Saberes Matemáticos, que es análoga a la idea de que si se tienen las partes de un todo, lo único que resta por hacer es saber como ensamblar éstas, para lograr armar el enorme rompecabezas que conforma el todo. Por tanto, la Articulación de los Saberes Matemáticos se entiende como la conexión

conceptual entre los diversos saberes matemáticos, conllevando con ello, la comprensión de las Matemáticas como un conjunto de saberes interconectados, que buscan propósitos específicos, como un gran cuerpo unificado de conocimientos.

La Articulación de Saberes Matemáticos de manera inicial, se encuentra presente en la estructuración de los programas y planes de estudio de las matemáticas escolares y en el diseño y estructuración de los libros de texto de matemáticas. Por todas estas razones, el estudio de su definición, el cómo y en quiénes se presenta la Articulación de los Saberes Matemáticos, se convierte en un objeto de investigación en la Educación Matemática.

## 2. Antecedentes

En la era moderna, a finales del siglo XX (principios de los años 90's), los investigadores de la NCTM plasmaron en los Principios y Estándares para la Educación Matemática, el concepto de articulación, debido a que el currículo matemático no solamente debe ser un cúmulo de conocimientos, sino que además debe mostrar las interconexiones existentes y evidentes en el saber matemático escolar.

Pero las ideas sobre articulación, como muchas otras, no son nuevas. Es posible observar su surgimiento y existencia en campos del conocimiento diferentes a la enseñanza actual de las matemáticas. Las primeras referencias que se tienen, es en el terreno de las ideas filosóficas. Se ha identificado la existencia de nociones sobre articulación en:

- a) El pensamiento filosófico del atomismo de Leucipo y Demócrito
- b) La monadología de Leibnitz

El atomismo es un sistema filosófico que surgió en Grecia en el siglo IV a.d.C.; según el cual el universo está constituido por combinaciones de pequeñas partículas denominadas átomos. Según esta corriente filosófica, todo se reduce a la unión y separación de los átomos, partículas primitivas e indestructibles. El atomismo presenta una explicación materialista de lo real: todo es el resultado de la agregación y variada combinación de los átomos (Barrio Gutiérrez y Campos, 1991).

Por otra parte, la corriente filosófica de la Monadología, desarrollada por Leibnitz, con respecto al concepto de átomo, sostenía que hablar de partículas indivisibles no tiene sentido, ya que todo lo extenso es divisible *in infinitud*, siendo la realidad una **realidad anímica**. La realidad es metafísica y la extensión y el movimiento no son sino manifestaciones suyas (fenómenos). Llama "mónadas" a estos infinitos centros de energía: "*Las mónadas o substancias simples son las únicas substancias verdaderas y las cosas materiales no son más que fenómenos, aunque bien fundados y coordinados.*" (Academia de Ciencias Luventicus, 2006).

La complejidad que presentan las ideas sobre articulación de saberes, se ve reflejada en la diversidad de estudios que abordan algunas aproximaciones sobre ella. El estudio de algunos aspectos de la articulación de los saberes, tiene dos vertientes principales:

- a) *Con un enfoque psicológico*, en donde la idea de la articulación de saberes se aborda como un proceso mental. Algunos ejemplos son:

- Los estudios de Greeno (1978), sobre las relaciones existentes entre las operaciones aritméticas de multiplicación y división (Resnick y Ford, 1990, p. 233 a 280).
  - La investigación de Raymond Duval (1999), sobre demostraciones geométricas formales utilizando *grafos proposicionales*, emanados de los textos de demostración de ciertos teoremas formales.
  - El trabajo de Francisco José Anillo Ramos con mapas conceptuales (2004), basados en el concepto de los triángulos (Ontoria et al., 2004, pp. 131 a 133).
- b) *Con un enfoque sistémico*, en donde se concibe al conocimiento como un conjunto sistematizado y articulado de saberes:
- La Organización lógica de las experiencias de aprendizaje de la ANUIES; ésta persigue los propósitos de articular y estructurar los componentes del contenido de las asignaturas (Huerta Ibarra, 2003, p.16).
  - La técnica de Morgannov-Heredia. Esta técnica permite determinar la estructura de un contenido. Consiste en elaborar una tabla de doble entrada y una gráfica, en las cuales se representa, de diversa manera, la dependencia entre los elementos conceptuales (Huerta Ibarra, 2003, pp. 27,28).

Se puede concluir, que la noción de la articulación se encuentra en cierta medida, presente en distintos estudios, en donde por lo regular se abordan algunos aspectos sobre la articulación como la identificación de conceptos, la búsqueda de su estructuración, por mencionar los más relevantes; a pesar de ello, no se explicitan en muchos casos, aspectos también relevantes como el proceso de articular. Se habla muy poco de los beneficios en ganancia de conocimiento que se alcanza con llevar a cabo el acto de articular, la multitud de formas de articular los mismos componentes, la especificación de un objetivo específico para articular las partes, etc. Al parecer, la línea de investigación sobre articulación de saberes empieza su desarrollo.

### 3. Marco teórico referencial

En la presente investigación, hasta el momento se han identificado dos pilares conceptuales que dan cimentación a las ideas sobre articulación: el enfoque de los sistemas conceptuales y las aportaciones conceptuales de la Lógica formal. Ambas corrientes científicas encuentran cabida en el contexto de las investigaciones actuales en Educación Matemática, según Higginson, 1980; Brousseau, 1989 y Godino, 2004.

En la Educación Matemática, el enfoque sistémico es claramente necesario, pues éste se aplica en tres tipos distintos de contexto: a) en el sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto; b) en el conocimiento como un conjunto de sistemas conceptuales; y c) en los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos subsistemas principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado (Godino, 2004). En el presente estudio sólo es de interés abordar el segundo enfoque presentado: el conocimiento como un conjunto de sistemas conceptuales matemático, concepto desarrollado dentro de la Teoría General de los Sistemas.

Si el currículo, según el Principio Curricular de la NCTM, pretende tener características de ser articulado, para evitar verlo como un aglomeramiento de

temas sin ninguna relación entre sí, la Teoría General de Sistemas se convierte en una “metodología” (Bertoglio, 1986) para interconectar las partes que componen al currículo. Por tanto, se puede catalogar al currículo escolar como un sistema conceptual. Sus elementos están relacionados para lograr objetivos concretos, como los que cita el Principio Curricular, y que básicamente son características básicas de todo sistema.

Se puede advertir que los diversos bloques temáticos que constituyen al currículo, entendiéndose este como un sistema conceptual, se pueden considerar también como subsistemas del mismo tipo, debido a que están formados por conceptos; cada uno de estos bloques tienen identidad y características propias, además de que los vínculos entre ellos, conforman al currículo articulado total.

Se puede concluir en este punto que, basándose en la argumentación antes expuesta, el currículo oficial como lo presenta el Principio Curricular de la NCTM, muestra claras evidencias para ser considerado un sistema de tipo conceptual; el Principio Curricular así lo deja entrever: “*Al planificar las lecciones, los profesores deberían esforzarse en organizar los contenidos para que las ideas fundamentales formen un todo integrado.*” (NCTM, 2000, p.15). Por tal razón, los temas se pueden considerar como partes del currículo matemático (subsistemas), que presentan por ende, características propias de sistemas conceptuales.

Por otro lado, otra de las disciplinas científicas que convergen en la Educación Matemática (Higginson, 1980; Brousseau, 1989; Godino, 2004), se encuentra el caso particular de la Lógica, ya que es bien conocido que ésta es una ciencia perteneciente al terreno de la Filosofía (Ibarra Barrón, 1998, pp. 30 a 34). La Lógica es la ciencia que estudia las leyes del pensamiento, su estructura, sus formas y relaciones, así como la estructura de la ciencia y su metodología. También se le conoce como “*la ciencia que estudia las estructuras del pensamiento*” (Ibarra Barrón, 1998, p. 71 y 72).

Es posible que en el ámbito de estudio de la Lógica, se pueda observar coincidencias o aspectos que al parecer, pertenecen a otros campos de estudio, como podría ser el caso de la Psicología. Para distinguir las diferencias sustanciales entre estas dos disciplinas, Lógica y Psicología, se podría mencionar, para comenzar que la Lógica pone en lugar de representaciones, juicios normativos invariantes y pensados e investiga el pensamiento en lo que concierne a su corrección o falsedad; en cambio, la Psicología no se interesa por esta referencia, aunque esté en su campo de investigación en general; la Lógica hace una referencia de valor entre corrección y falsedad, lo que para la Psicología no es trascendente; la Lógica ofrece normas y leyes para explicar y fundamentar el pensamiento, la Psicología deja esta labor a otras ciencias. Los problemas que la Psicología busca resolver, como son el inconsciente, los procesos psico-neurológicos, la conducta, etc., no son los mismos que preocupan a la Lógica ni tampoco sus métodos de estudio son iguales, aunque en última instancia recurran a la razón. A pesar de estas diferencias, la Lógica y la Psicología mantienen estrechas relaciones entre una y otra, y utilizan sus resultados para avanzar en sus respectivos campos, lo que permite ver que su autonomía es relativa, ya que no son ciencias aisladas (Ibarra Barrón, 1998, p. 64).

El estudio de la Lógica permite pasar del conocimiento empírico de las cosas al conocimiento científico, del conocimiento vulgar, fenoménico, de la mera opinión, al

conocimiento fundado, estructurado, a la razón primera, al concepto del todo ricamente articulado y comprendido, a la rica totalidad de las múltiples determinaciones y relaciones. El estudio de la Lógica obliga a pensar de un modo más preciso, logrando que los argumentos sean más exactos y ponderados; se cometen menos errores. Se aprende además el arte de la concentración, de la abstracción, de penetrar en la esencia de las cosas. Enseña la vía del pensamiento correcto y verdadero, el pensamiento de sí mismo, del potencial intelectual, reflexivo, de análisis, de síntesis, así como el de los procesos físicos, químicos, históricos, económicos, matemáticos, etc. (Ibarra Barrón, 1998, p. 72 y 73); de ahí la enorme importancia de la Lógica como guía rectora en la definición del acto de pensar, que se produce cuando los sujetos llevan a cabo el acto de articular saberes matemáticos.

Actualmente, la Lógica y la Matemática tienen un campo de acción, objeto de estudio y problemas diferentes, pero aún así no son antagónicas y se interrelacionan recíprocamente. Una aprovecha los resultados de la otra y viceversa (Ibarra Barrón, 1998, p. 66). Es de notarse que al verse los vínculos que existen entre estas dos disciplinas científicas y los aspectos conceptuales que tienen en común, la presente investigación aprovecha la riqueza conceptual de la Lógica, para definir y enriquecer un concepto con un fuerte contenido matemático, que es la Articulación de Saberes Matemáticos.

Por tal razón, y en base a todo lo antes dicho, de ahí que la Lógica pueda utilizarse en el contexto del presente trabajo, como el otro gran pilar conceptual que conforma el marco teórico presentado. Tanto el Enfoque de Sistemas, como las aportaciones de la Lógica, permitieron dar como resultado las consideraciones teóricas presentadas en la actual investigación sobre la definición y caracterización de lo que se podría entender como Articulación de Saberes Matemáticos.

La articulación, desde el punto de vista de las ciencias de la educación, presenta las siguientes características generales:

- Debe existir la relación y seriación de conocimientos a enseñar
- Los individuos, por sí mismos, deben tener la capacidad de relacionar los conocimientos aprendidos
- Es la forma en que se puedan alcanzar objetivos educativos fijados anteriormente, permitiendo el avance gradual de los estudiantes por los diversos niveles de sofisticación del conocimiento

Se puede decir de manera inicial, que los componentes identificados de la articulación, son: a) los elementos o partes implicadas; b) las relaciones o vínculos entre ellas; c) el propósito u objetivo a alcanzar, previamente especificado; y d) los individuos que realizan las actividades articuladoras.

Cabe aclarar que la NCTM (2000) indica de manera precisa que el currículo escolar debería ser desarrollado de forma articulada, para que el aprendizaje del alumno sea edificado con esa concepción: *“En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras, para que así profundice la comprensión y el conocimiento del alumnado y aumente su habilidad para aplicarlas. Su buena articulación incentiva a los estudiantes para ir aprendiendo*

*ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan en sus estudios” (NCTM, 2000, p.15).*

Continuando con el análisis del Principio Curricular, se puede citar lo siguiente sobre la estructura que debe poseer el currículo matemático: *“El currículo consta de diferentes bloques temáticos pero todos están notablemente interconectados. Las conexiones deberían destacarse, tanto en el currículo realmente como en las lecciones y en el material de enseñanza. Secuenciar coherentemente las lecciones a lo largo de las unidades y los niveles de enseñanza, supone un desafío” (NCTM, 2000, p.15, 16).*

Específicamente, en el Principio Curricular (NCTM, 2000), un currículum matemático en los diversos niveles educativos (básico, medio y medio superior) se propone que deba poseer las siguientes características: ser coherente, articulado y con un fin práctico definido. Esto mismo se debe extender a cada uno de los bloques temáticos que lo integran; éste debe ser estructurado como un conjunto de ideas coherentes entre sí, permitiendo con esto que los estudiantes tengan un mejor entendimiento y comprensión de los conocimientos matemáticos presentados.

Un posible camino para proponer una definición de articulación, la aporta el Estándar de Conexiones de la misma NCTM: *“Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio. Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles” (NCTM, 2000, p.68).*

Esto permite decir en este punto, que la Articulación de Saberes Matemáticos *“se puede entender como la acción de escoger o seleccionar de una multitud de posibilidades, la mejor, la más apta o viable manera de estructurar ideas o conocimientos matemáticos específicos que permitan su estandarización; es decir, el articular es el lograr un proceso de selección y vinculación de conceptos de forma óptima. La articulación es un proceso intelectual, producido por un sujeto que tiene clara concepción sobre el como articular. En el proceso de adquisición de conocimiento por parte de los sujetos, éstos llevan a cabo, entre otras cosas, el proceso de articular” (Pérez Pérez, 2007).*

La acción de realizar el proceso de articular, el cual se entiende *“como la secuencia de fases conceptuales por las que el sujeto evoluciona intelectualmente (Pérez Pérez, 2007), y que le permite llegar a la consolidación del Conocimiento Matemático Articulado, el cual se puede definir como: “el producto de un proceso de pensamiento matemático, fundamentado en el razonamiento lógico matemático (inductivo, deductivo y análogo); éste parte de la identificación de conjuntos de conceptos matemáticos que forman redes o estructuras conceptuales, a las que se les asigna un propósito específico, y que le permiten al sujeto realizar actividades intelectuales complejas de alto nivel de abstracción, como son los procesos de toma de decisiones, de adquisición de conocimiento, y de discernimiento de tipo matemático” (Pérez Pérez, 2007).*

La importancia y beneficios de la adquisición, del denominado Conocimiento Matemático Articulado, son los siguientes: *“Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver*

*conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias. A través de una enseñanza que resalte la interrelación de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura sino que también se dan cuenta de su utilidad.” (NCTM, 2000, p.68).*

Se ha mencionado que el acto de articular se concibe como un proceso. De forma general, se dice que la trayectoria de la sucesión de estados por los que pasa un sistema se llama proceso (Sonntag y Van Wilen, 1991, pp.41). Una definición más robusta la ofrece Wark (1986), al abordar la idea de estados, que también pueden ser entendidos como etapas o niveles, entre los cuales se transiciona de una forma específica: *“Un proceso es cualquier transformación de un sistema de uno a otro estado de equilibrio. La descripción completa de un proceso suele incluir la especificación de los estados inicial y final de equilibrio, la trayectoria (si es distinguible) y las interacciones que tienen lugar a través de las fronteras durante el proceso. La trayectoria se refiere a la especificación de una serie de estados por los cuales pasa el sistema.” (Wark, 1986, pp.10)*

De las anteriores definiciones, se pueden extraer tres consideraciones importantes para definir el proceso de articular:

- Se llama proceso a la sucesión de estados por los que pasa un sistema
- Existe un estado inicial y un final (hay partes que se distinguen unas de otras)
- Se presenta una trayectoria definida, basada en una sucesión de pasos por los cuales pasa el sistema (en el cual esta contenido una estructura)

Es de notarse la evidente relación del concepto de sistema y proceso, ya que éste último especifica los pasos que se siguen para que se de la evolución de los sistemas, los cuales son: a) seleccionar un conjunto de partes o elementos; b) buscar interrelacionar los elementos para que formen una estructura; y, finalmente c) definir un elemento como el inicio y otro como el final, que permita trazar una trayectoria o ruta, para ser recorrida sobre la estructura existente del sistema. Además, se ha mencionado que el proceso de articular se lleva a cabo con la adquisición y comprensión por parte del sujeto que realiza el proceso de articular, de cada una de las partes o elementos conceptuales que se encuentran plasmados en el sistema conceptual matemático.

De tal forma, se propone definir el proceso de articular como *“el paso gradual de un nivel de articulación a otro, permitiendo alcanzar un Conocimiento Matemático Articulado al sujeto cognoscente que lo lleva a cabo” (Pérez Pérez, 2007).*

A los mencionados niveles se les ha denominado aglomerado, estructura y sistema conceptual (niveles 1, 2, 3, respectivamente) (ver figura 1). En el Nivel 1, el aglomerado conceptual, se compone, como su nombre lo dice de conceptos. Cuando estos conceptos establecen vínculos entre ellos, se pasa al Nivel 2, el de la estructura conceptual. Finalmente, cuando esta estructura se define a un concepto como un punto de inicio, y a otro u otros, como fin o propósitos a alcanzar, y se recorre la ruta o camino que se forma desde el que se establece como inicio, a los marcados como finales posibles, se dice que se ha alcanzado el Nivel 3, el del sistema conceptual. Hay que aclarar que no necesariamente existe solo una ruta o

camino; pueden existir varios de ellos: se puede partir de un inicio y recorrer diversas rutas, llegando al mismo término o fin.

Se cree que el proceso de articular busca lograr la interconexión de conceptos matemáticos diversos, con el fin de que le permita al estudiante, lograr adquirir un Conocimiento Matemático Articulado, el cual consiste en un conjunto sistematizado de conocimientos, en forma análoga a como lo hace un matemático profesional y, en donde el proceso de articular ideas forme parte de su pensamiento cotidiano. Por otra parte, el acto de articular es un proceso que llega a definirse y perfeccionarse con el tiempo, debido a que las estructuras cognitivas de las personas tardan en alcanzar la necesaria lucidez o madurez intelectual sobre las ideas adquiridas; éste último aspecto varía en los individuos y en las acciones cognitivas realizadas por éstos (Lachman, Lachman y Butterfield, 1979; Chevallard, 1998; NCTM, 2000).

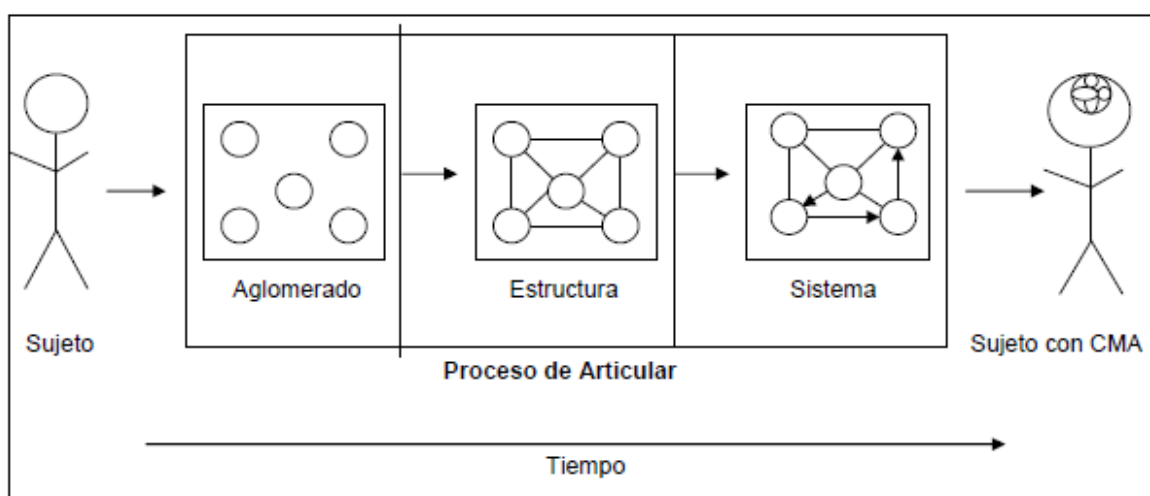


Figura 1. Los niveles del proceso de articular

Por lo dicho anteriormente, el proceso de articular, también concebido como una Jerarquía de Niveles de Articulación, pretende convertirse en un método para elaborar instrumentos documentales que le permitan al docente guiar la construcción de instrumentos articulados para la enseñanza del estudiante, permitiéndole lograr a éste último, el aprender articuladamente.

Por último, se puede decir que el contexto de donde surgió esta llamada jerarquía de niveles, así como se encuentran constituidos y de la forma en como se evoluciona de uno a otro, ha sido producto de la contribución de las ideas de diversas disciplinas, entre las que se pueden mencionar la teoría general de sistemas, algunos elementos conceptuales de la teoría axiomática de sistemas, utilizada con fines de definición; la teoría de la información, la teoría de conjuntos, la teoría de funciones discretas, la teoría de grafos, la lingüística estructural, la lógica y la teoría de la computación, entre las más relevantes.

#### 4. Problema de investigación

El concepto de articulación es mencionado cuando se intenta identificar algunas características del aprendizaje de los estudiantes. La ausencia o falta de articulación, se menciona en toda reunión de profesores, en busca de una respuesta a las problemáticas del aprendizaje. Sin embargo, es poco lo que se ha escrito al respecto; las conceptualizaciones existentes tienen mucho de intuitivo y son escasas



los trabajos de investigación indagando en esta cuestión. Por su parte, el presente estudio, busca ofrecer un panorama general del estado en que se encuentran estas ideas entre los estudiantes, con el fin de aportar más elementos para su adecuada caracterización.

Un elemento para lograr lo anterior, es el de resolver el problema de cómo identificar y medir el grado de articulación en un currículo matemático escolar, pero por razones prácticas, es necesario acotar el estudio de la “medida de articulación”, de un currículo entero a un bloque temático particular de éste. El tema matemático, parte del currículo matemático, seleccionado para el presente estudio que representa aspectos relevantes sobre la articulación, es el de los sistemas de ecuaciones lineales, debido a la importancia que tiene dentro del currículo matemático escolar (Herstein y Winter, 1989).

De tal manera, el problema de investigación del presente estudio es el de estimar o medir el grado o nivel de articulación de saberes matemáticos, en el tema de la definición de los sistemas de ecuaciones lineales, en un grupo de estudiantes universitarios homogéneo (que tenga un solo profesor), de un curso de Álgebra Lineal, con el fin de conocer en que estado se encuentran las ideas sobre Articulación de Saberes Matemáticos entre los estudiantes.

## 5. Preguntas de investigación

En el problema de “medir el grado” de la Articulación de los Saberes Matemáticos, intervienen elementos de diversa naturaleza. En el presente trabajo de investigación, sólo se interesa abordar los aspectos sobre el conocimiento en si mismo. Por esta razón, las preguntas formuladas para el presente estudio, y que se pretende responder son:

¿Qué elementos conceptuales intervienen en la articulación de los saberes que integran los sistemas de ecuaciones lineales?

¿Cómo se puede “medir” o estimar el grado de articulación en el tema de los sistemas lineales?

## 6. Hipótesis y metodología del estudio

Las ideas sobre cómo se enseñan los contenidos, son ignoradas a menudo o se considera que están al margen del espectro de indagación en la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza. Romberg, Small y Carnahan (1979), localizaron cientos de estudios que valoraban la efectividad de casi todos los aspectos concebibles de la conducta docente, pero encontraron pocos modelos de instrucción que incluyeran la componente del contenido. Esto hace reconocer la necesidad de acometer investigaciones que tengan en cuenta el contenido específico y las técnicas didácticas apropiadas para tal contenido (Godino, 2004, p. 27). Sobre este aspecto, se encuentra cimentado el presente trabajo.

En definitiva, se propone responder a las preguntas de investigación presentadas con anterioridad, con una investigación de tipo sistémico-lógico. Las actividades específicas a realizar en el presente estudio, son:

- a) Hacer una exploración documental, para identificar los elementos conceptuales relacionados con la definición de los sistemas de ecuaciones lineales.

- b) Diseñar un test que permita estimar el grado de articulación de los estudiantes, sobre el tema de los sistemas de ecuaciones lineales, utilizando la técnica de los modelos conceptuales (también conocidos como mapas conceptuales), propia de los sistemas del mismo tipo.
- c) Aplicar el test previamente diseñado, con el fin de “medir el grado de articulación”, en una población homogénea de estudiantes que tomen un curso de Álgebra Lineal.
- d) Realizar el análisis cualitativo y cuantitativo de los resultados obtenidos del test aplicado.
- e) Generar las conclusiones y reflexiones respectivas.

## 7. Diseño del test

En primer lugar y para fines de representación y experimentación del presente estudio, los sistemas conceptuales matemáticos se representaran como los llamados modelos conceptuales, también conocidos como mapas conceptuales (López Frías e Hinojosa Kleen, 2001, Hernández Forte, 2006).

Los mapas conceptuales son representaciones diagramáticas que evidencian relaciones significativas entre conceptos bajo la forma de proposiciones. Las proposiciones son llamadas también “unidades semánticas” o “unidades significativas”. Una proposición es la afirmación representada por una relación que conecta dos conceptos. Tratándose de una red de conexiones, el mapa conceptual puede ser también entendido como una red de relaciones entre las relaciones, o como una red de proposiciones, es decir como una organización asociativa dinámica. Los mapas conceptuales o redes semánticas (representación visual del conocimiento) han demostrado ser mucho más cercanos al modo humano de pensar que el texto, las listas o las tablas de datos. Permiten una mejor comprensión del argumento representado (Hernández Forte, 2006).

Además de esto, el mapa conceptual se puede utilizar como instrumento de evaluación, con las siguientes cualidades: a) mide la comprensión y permite diagnosticar la no-comprensión de un tema específico, y b) permite apreciar el bagaje cultural del evaluado, así como el nivel conceptual que alcanza, entre otras cosas. Por lo tanto, las citadas características se consideran adecuadas para desarrollar el test de medida de articulación en los estudiantes de Álgebra Lineal.

Los dos aspectos que se abordan dentro del test, para aplicar a los estudiantes, es la definición del concepto de ecuación lineal (Swokowski, 1975, p. 72 y 73; Baldor, 1992, pp. 5, 6 y Thompson, 1975, p.12) y la definición del concepto de sistema de ecuaciones lineales (Antón, 2002, pp. 23, 24). La estructura básica que sigue el test ésta diseñada en base a la evolución conceptual de las etapas del proceso de articular y las recomendaciones para diseñar instrumentos de evaluación utilizando mapas conceptuales (López Frías e Hinojosa Kleen, 2001).

Como ya se ha mencionado, el test tiene como objetivo el medir el grado de articulación existente en los temas de ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales, en un grupo homogéneo de 26 estudiantes universitarios, que hayan tomado recientemente un curso sobre Álgebra Lineal.

## 8. Resultados obtenidos

Una vez que el test fue aplicado a los estudiantes, se procedió al análisis del mismo, a través del método de evaluación propuesto por Sambrano y Steiner (2000), en cual se basa en observar lo desarrollado por los estudiantes en el test, para después ponderar numéricamente los aspectos cualitativos, en una tabla especialmente diseñada para tal efecto. La tabla específica, utilizada para el presente estudio, se muestra en la tabla 1. Hay que aclarar que dicha tabla, trata de diferenciar claramente el posible progreso entre los tres niveles de articulación mencionados dentro del proceso de articular. Los resultados se obtuvieron a través de llevar a cabo un conteo de las respuestas recabadas en los 26 test aplicados, expresados en porcentaje.

Como lo muestran las graficas de las figuras 2 y 3 respectivamente, los resultados obtenidos sobre la articulación de los preconceptos o términos que conforman el concepto de ecuación lineal y la articulación de los conceptos que conforman el concepto de sistema de ecuaciones lineales, son similares por nivel de articulación en ambos casos. Para el primer nivel de articulación, se presenta un desempeño de intermedio a bajo, ya que en este se trata de identificar los términos y conceptos que se encuentran implicados en la definición del concepto (ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales, respectivamente).

La situación se hace más crítica, cuando se les pide a los estudiantes que avancen a los niveles 2 y 3 de articulación, en donde se trata de buscar la interrelación entre los preconceptos seleccionados, y en el tercer nivel no sólo se busca relacionar los preconceptos seleccionados, sino además, buscar una jerarquización entre estos. Es notorio el bajo índice de rendimiento en estos niveles (ver figuras 2 y 3). En definitiva, se puede observar que el dominio de la actividad de articulación va disminuyendo de manera sustancial cuando se avanza del nivel 1 al nivel 2 y 3 de articulación.

Tabla 1. Tabla evaluadora para los modelos conceptuales presentados en el test

INSTRUMENTO PARA EVALUAR MODELOS CONCEPTUALES			
EVALUACIÓN CUANTITATIVA			
ASPECTOS	DESEMPEÑO ALTO (4 puntos)	DESEMPEÑO MEDIO (2 puntos)	DESEMPEÑO BAJO (1 punto)
CANTIDAD MÍNIMA DE TÉRMINOS O CONCEPTOS			
RELACIONES CORRECTAS ENTRE LOS CONCEPTOS			
SUFICIENTES RELACIONES ENTRE LOS CONCEPTOS			
JERARQUÍA VÁLIDA DE LOS CONCEPTOS			
SUMA INTEGRAL			

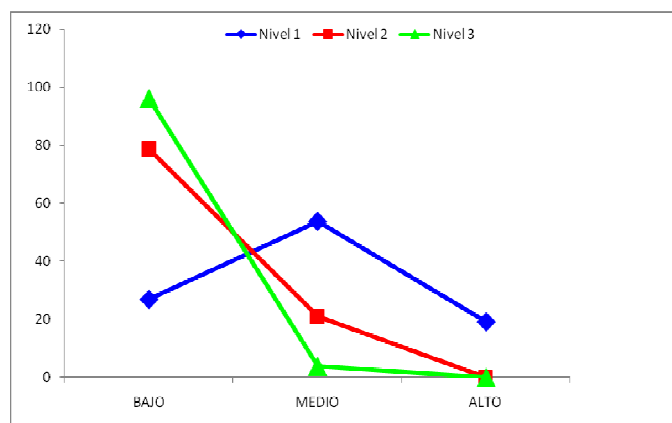


Figura 2. Resultados obtenidos en el test aplicado, referentes al concepto de ecuación lineal

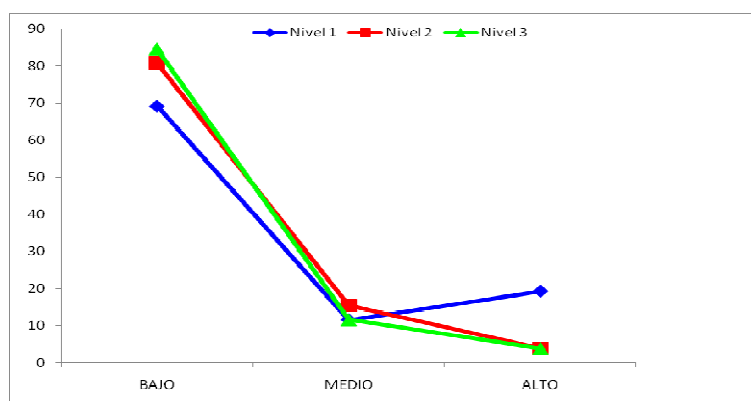


Figura 3. Resultados obtenidos en el test aplicado, referentes al concepto de sistema de ecuaciones lineales

La siguiente tabla, muestra los porcentajes generales encontrados para los dos conceptos estudiados, en cuanto a la capacidad que poseen los estudiantes de lograr llevar a cabo la actividad de articular elementos conceptuales.

Tabla 2. Resultados generales obtenidos en el test

Concepto	Desempeño Bajo (%)	Desempeño Medio(%)	Desempeño Alto (%)
Ecuación lineal	70.2	25	4.8
Sistema de ecuaciones lineales	78.8	13.5	7.7

Al parecer, la mayoría de los estudiantes no son capaces de estructurar y jerarquizar adecuadamente los conceptos matemáticos que ellos mismos pudieron identificar en un principio.

Otro hecho es que, durante más preconceptos o conceptos estén implicados para definir un concepto más grande, mucho más notoria es la desarticulación de sus partes. Finalmente, los resultados muestran que el desempeño en cuanto a la actividad de articular que presentan los estudiantes encuestados, es bajo.

## 9. Conclusiones y trabajos futuros

Se puede observar que de los 26 estudiantes encuestados en esta investigación, los cuales podrían ser considerados como una muestra representativa de estudiantes que pretenden llevar a cabo actividades de articulación y que fueron evaluados de manera objetiva y efectiva, por medio de este test, se podría decir que en promedio, de cada 10 estudiantes:

- 7 estudiantes presentan un bajo nivel en la actividad de articular conceptos matemáticos
- 2 estudiantes presentan un nivel intermedio de articular, el cual consiste en definir estructuras conceptuales (interrelacionar los conceptos seleccionados previamente)
- Sólo 1 estudiante, alcanza un alto nivel de articulación, logrando jerarquizar adecuadamente las estructuras conceptuales construidas

En base a los resultados obtenidos, se puede observar de manera general, que los estudiantes tienen conocimiento de los términos y conceptos que se relacionan con la ecuación lineal y los sistemas de ecuaciones simultáneas. Sin embargo, pareciera que las relaciones y jerarquías existentes entre los conceptos que intervienen en una ecuación lineal y en un sistema de ecuaciones lineales no es suficientemente comprendida, así lo demuestran los resultados obtenidos por el test, lo cual demuestra entre las muchas cosas, que los estudiantes no poseen un conocimiento articulado.

Con el objetivo de mejorar significativamente el avance de los estudiantes, en los niveles 2 y 3 de articulación (estructuración y jerarquización), en la articulación de saberes en temas matemáticos, y al observar la utilidad que ofrece la aplicación de los modelos o mapas conceptuales en este estudio, se propone diseñar y aplicar una serie de secuencias didácticas, basadas en la técnica de los modelos conceptuales, ya que estos, entre sus ventajas, permiten el análisis profundo del tema en cuestión, así como demuestran la organización de las ideas, lo cual es esencial cuando se estructuran y jerarquizan éstas, actividad propia de la articulación de saberes, además de que ayuda a representar visualmente ideas abstractas, cualidad muy común de los conceptos matemáticos (López Frías e Hinojosa Kleen, 2001). Se espera que los estudiantes que utilicen ésta serie de instrumentos didácticos, puedan después de un tiempo de entrenamiento con ellos, lograr organizar sus conocimientos matemáticos de manera articulada.

## Bibliografía

- Academia de Ciencias Luventicus. (2006). *Gottfried Wilhelm Freiherr von LEIBNITZ* (URL: <http://www.luventicus.org/articulos/02A036/leibnitz.html>). Argentina. Fecha de consulta: Octubre del 2006.
- Antón, H. (2002). *Introducción al álgebra lineal*. Editorial Limusa Wiley. Segunda edición. México.
- Baldor, A. (1992). *Álgebra*. Publicaciones Cultural S.A. Novena reimpresión. U.S.A.
- Barrio Gutiérrez, J. (1991). *Demócrito*. [www.mercaba.org/Rialp/D/democrito.htm](http://www.mercaba.org/Rialp/D/democrito.htm). Gran Enciclopedia Rialp. Editorial Rialp. Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- Bertoglio, O. J. (1986). *Introducción a la teoría general de sistemas*. Segunda reimpresión. Editorial Limusa. México.

- Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. Etudes en Didactique des Mathématiques. *Article occasionnel n. 2. IREM de Bordeaux.*
- Campos, R. *Demócrito: la multiplicidad necesaria.*  
<http://www.cibernous.com/autores/astrobiologia/teoria/historia/democrito.htm>.  
Fecha de consulta: Octubre de 2006.
- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Editorial Aique. Tercera edición. Argentina.
- Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle. Buenos Aires, Argentina.
- Godino, J. D., (2004). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica.* (URL: [http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01\\_PerspectivaDM.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf)). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España. Fecha de consulta: 15 de octubre de 2004.
- Hernández Forte, V. (2006). *Mapas conceptuales. La gestión del conocimiento en la didáctica.* Editorial Alfaomega. Primera reimpresión. México.
- Herstein, I. N.; Winter, D. J. (1989). *Álgebra lineal y teoría de matrices.* Grupo Editorial Iberoamérica. Primera edición. México.
- Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 1, n.2 pp. 3-7.
- Huerta Ibarra, J. (2003). *Organización lógica de las experiencias de aprendizaje.* Editorial Trillas. Cuarta reimpresión. México.
- Ibarra Barrón, C. (1998). *Lógica.* Editorial Pearson Educación. Primera Edición. México.
- Lachman, R., J. L. Lachman y E. C. Butterfield. (1979). *Cognitive Psychology and Information Processing: An introduction*, Erlbaum, Hillsdale, Nueva Jersey, U.S.A.
- López Frías, B. S.; Hinojosa Kleen, E. M. (2001). *Evaluación del aprendizaje. Alternativas y nuevos desarrollos.* Editorial Trillas. Primera edición. México. pp:106 a 113.
- NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principios y estándares de la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla, España.
- Ontoria, A.; Ballesteros, A.; Cuevas, M. C.; Giraldo, L.; Martín, I.; Molina, A.; Rodríguez, A.; Vélez, U. (2004). *Cómo ordenar el conocimiento usando mapas conceptuales.* Primera edición. Editorial Alfaomega. México.
- Pérez Pérez, I. (2007). *Articulación de saberes matemáticos y modelos conceptuales.* UAEH. Tesis de maestría. México.
- Resnick, L. B.; Ford, W. W. (1990). *La Enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Primera Edición. Editorial Paidós. España.
- Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a Theory of Mathematics Education. En: H.G. Steiner y A. Vermandel (Eds), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceeding 2nd TME- Conference.* Bielefeld - Antwerp: Dept of Didactics and Criticism Antwerp Univ. & IDM.
- Romberg, T. y Carpenter, T. P. (1986). Research on teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. En M.C. Wittcock (Ed.) *Handbook of research on teaching.* London: Macmillan.
- Sambrano, J.; Steiner, A. (2000). *Mapas mentales. Agenda para el éxito.* Editorial Alfaomega. Primera edición. México. pp: 112 a 115.
- Sonntag, R. E.; Van Wilen, G. J. *Introducción a la Termodinámica clásica y estadística.* Editorial Noriega Limusa. Sexta Reimpresión. México.

Swokowski, E. (1975). *Álgebra universitaria*. Editorial C.E.C.S.A. México.

Thompson, J. E. (1975). *Álgebra*. Editorial UTEHA. Segunda edición. México.

Wark, K. (1986). *Termodinámica*. Editorial Mc Graw-Hill. Cuarta Edición. México.

**Isaías Pérez Pérez:** Licenciado en Computación y Maestro en Ciencias con Orientación a la Enseñanza de las Matemáticas, por la Universidad del Estado de Hidalgo. Profesor asignado a la Licenciatura en Sistemas Computacionales, del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería. [isaiasp@uaeh.edu.mx](mailto:isaiasp@uaeh.edu.mx)

**Silvia Soledad Moreno Gutiérrez:** Profesor investigador asignado a la Licenciatura en Sistemas Computacionales, en la Escuela Superior Tlahuelilpan. Licenciado en Computación y Maestro en Ciencias Computacionales, por la Universidad del Estado de Hidalgo. Ha participado en diversos congresos actividades académicas. [silviam@uaeh.edu.mx](mailto:silviam@uaeh.edu.mx)

