UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 179-194
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Hacia una generalización del Teorema de Pitágoras

José María Sigarreta; Javier González Mendieta

Resumen

La relación que se establece entre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, conlleva a una reflexión sobre el sentido y aplicabilidad del Principio de Aditividad. En este artículo, mostramos como su utilización, sustentada en el método inductivo, favorece la búsqueda, formulación y demostración de una generalización del Teorema de Pitágoras.

Abstract

In any right triangle, the area of the square whose side is the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the squares whose sides are the two legs, implies a reflection on the meaning and applicability of the Principle of Additivity. In this paper, we describe their use, based on the inductive method, for the search, formulation and demonstration of a generalization of the Pythagorean Theorem.

Resumo

A relação estabelecida entre a área do quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo e as áreas dos quadrados construídos sobre as pernas, levando a uma reflexão sobre o significado ea aplicabilidade do princípio da aditividade. Neste trabalho, descrevemos a sua utilização, baseada no método indutivo incentiva a pesquisa, desenvolvimento e demonstração de uma generalização do Teorema de Pitágoras.

1. Introducción

En el artículo se trabaja haciendo énfasis en la situación típica de la metodología de la matemática, denominada “tratamiento de teoremas y sus demostraciones”, el objetivo fundamental de esta situación es que los estudiantes se apropien, en lo fundamental, de determinados teoremas, métodos y técnicas de demostración, para la comprensión o aplicación de una determinada teoría. Además, el tratamiento de teoremas y sus demostraciones, permiten el desarrollo de habilidades matemáticas, tales como: reconocer relaciones, hacer suposiciones, argumentar, comprender la lógica de las demostraciones y generalizar.

En el tratamiento de teoremas y sus demostraciones , se puede estructurar en tres etapas fundamentales: **búsqueda del teorema,** en esta etapa se pretende que el estudiante sea capaz de encontrar una determinada suposición y formular como proposición; **búsqueda de la demostración,** como su nombre lo indica se pretende encontrar los medios para la demostración, en particular en la demostración que se desarrolla se pone al descubierto la cadena de inferencias que conducen de la premisas a la tesis, a través de una serie de etapas intermedias y por último la **representación de la demostración,** pretendiendo aquí escribir correctamente la cadena de inferencias lógicas en un esquema de demostración conveniente y claro.

Para el tratamiento de la generalización del Teorema de Pitágoras, utilizaremos el método inductivo, en lo fundamental, porque con la aplicación de este método los procesos parciales de obtención y aseguramiento del conocimiento, transcurren uno tras otro y la apropiación del conocimiento es subdividido en forma clara para los alumnos , utilizándolo, como elemento esencial para la representación de la demostración en un esquema apropiado.

A lo largo del artículo se ponen de manifiesto los procesos parciales que permiten la instrumentación de cada una de las etapas señaladas. La búsqueda del teorema se desarrolla a través de los siguientes procesos parciales: motivación hacia el teorema; orientación hacia el teorema y formulación del teorema. La búsqueda de la demostración se desarrolla a través de la motivación de la necesidad de una demostración, delimitación de los métodos y medios de demostración y la elaboración de un plan de solución. La representación de la demostración se desarrolla teniendo en cuenta la comprobación de los pasos y las observaciones perspectivas y retrospectivas del método de solución empleado.

Se ha puesto de manifiesto (Ruesga y otros 2007, Ruesga y otros 2008, Sigarreta y otros 2004, Sigarreta y otros 2006) que la aplicación consciente y planificada de la situación típica “tratamiento de teoremas y sus demostraciones” tiene múltiples repercusiones en la formación integral del alumno, por ejemplo, favorece su pensamiento lógico-matemático, permite el desarrollo de cualidades de su personalidad, pone al descubierto la importancia y necesidad de realizar demostraciones, se familiariza con la heurística y las formas de trabajo típicas de la matemática. El esquema de demostración que se desarrolla en el trabajo, permite representar la estructura de la demostración en forma clara, hacer visibles los medios de demostración empleados, la formulación verbal de la demostración y se dejan espacios intermedios que son utilizados como problemas parciales.

No se sabe si los geómetras de la antigüedad pensaron en una generalización del Teorema de Pitágoras, quizás lo intentaron con medias circunferencias y hasta es posible imaginar que hayan pensado en la posibilidad de triángulos esféricos, si fue así, no hubo un geómetra con la capacidad de sistematizar y hacer coherente una teoría con esas ideas. Pappus de Alejandría, (290-350) llevó sus ideas sobre la generalización un poco más allá e instrumentó, una demostración que generaliza la idea del teorema de Pitágoras, tal demostración no fue entendida en su tiempo como una generalización, y por ello, no trascendió. En tiempos más recientes, quizá desde el siglo XIX se han desarrollado generalizaciones con las figuras asociadas a los lados de un triangulo rectángulo: triángulos, rectángulos, círculos, polígonos regulares y hasta no regulares. Tales demostraciones se basan en un análisis trigonométrico y más allá, muchos han conjeturado la posibilidad de asociar otro tipo de figuras. Ahora, después de una reflexión exhaustiva, tenemos la posibilidad de demostrar, que la variedad de figuras asociadas a los lados de un triángulo rectángulo, se puede extender. Esta es la esencia de este trabajo, y por ello, la trascendencia que tiene como un elemento más, para la formalización de los conceptos de la Geometría.

2. Primera aproximación a una generalización del Teorema de Pitágoras

La idea de la equivalencia en áreas del cuadrado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y los cuadrados construidos sobre los catetos, conlleva a la reflexión sobre el sentido del Principio de Aditividad de las Àreas ,y en este caso, a la generalización del Teorema de Pitágoras. Si las figuras dibujadas sobre los lados del triángulo rectángulo resultan ser triángulos equiláteros, entonces el Teorema de Pitágoras es cierto. La demostración es simple y se le deja como ejercicio al lector. El caso de que en cada lado se construye un cuadrado, es el clásico Teorema de Pitágoras, así, que intentaremos llevar estas ideas un poco más lejos.

Ahora, consideremos polígonos regulares construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo ABC. En la Fig. 2 se han considerado pentágonos, como elemento intuitivo e inductivo de la demostración, pero la prueba como se verá tiene sentido para cualquier polígono regular de n lados. Estos polígonos no tienen un tamaño arbitrario, son proporciónales a los lados del triángulo y están inscritos en las circunferencias C_1, C_2 y C_2; entonces, considerando eso y el hecho de que las áreas de los polígonos semejantes son entre sí como el cuadrado de los diámetros de los círculos que los circunscriben, (Proposición 1 del libro XII de LOS ELEMENTOS de Euclides).

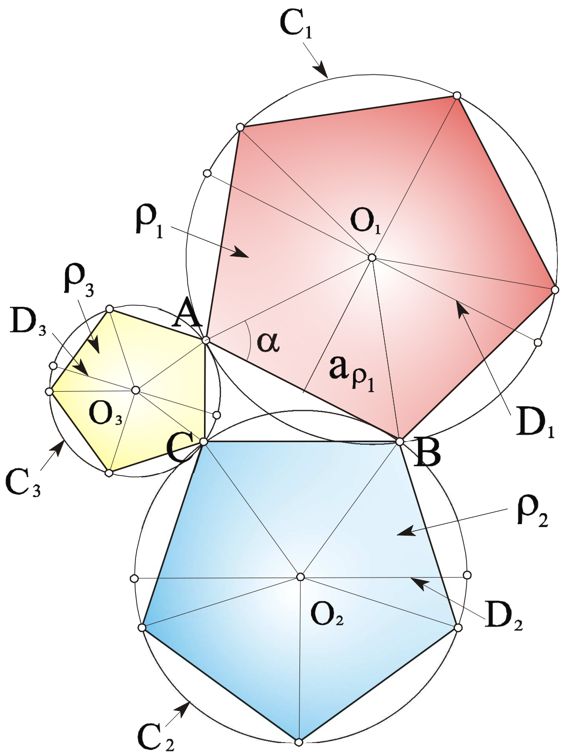


Figura 2: El Teorema de Pitágoras para el caso de polígonos regulares de n lados.

Podemos pensar en el Teorema de Pitágoras para polígonos regulares de cualquier numero de lados. La demostración se basa en las ideas siguientes; primero, consideraremos la proporcionalidad que los polígonos tienen con respecto a los lados del triángulo, segundo, consideraremos la proporcionalidad de los diámetros de las circunferencias con relación a los polígonos y tercero, utilizaremos la proposición 1 del libro XII de Euclides.

Decimos que dos segmentos de recta AB y CD son proporcionales si existe una constante $k > 0$, $k \in \Re$ tal que: $\frac{AB}{CD} = k$, de ahí que, dos polígonos, no necesariamente regulares, $A_1A_2A_3,..., A_{n-1}A_n$ y $B_1B_2B_3,..., B_{n-1}B_n$ son proporcionales si existe la constante $A_1A_2A_3,..., A_{n-1}A_n$, $k \in \Re$ que cumpla con la relación: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = ... = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = k$.

Es decir; cualquier lado del primer polígono guarda la misma proporción al lado homòlogo del segundo; y en el caso de los polígonos regulares decimos que son proporcionales a un segmento AB porque todos sus lados son proporcionales a AB. Tomando eso en consideración construyamos, sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, polígonos regulares ρ_1, ρ_2 y ρ_3 de lados AB, BC y CA con áreas A_1, A_2 y A_3 y circunscritos a las circunferencias C_1, C_2 y C_3; la C_1 pasa por los vértices A y B, la C_2 por B y C y C_3 por C y A, Fig. 2. Esto hace que los polígonos sean proporcionales a los lados del triángulo y, a su vez, los diámetros D_1, D_2 y D_3 también lo son.

Efectivamente, que los polígonos ρ_1, ρ_2 y ρ_3 son proporcionales a los lados del triángulo es evidente; sin embargo, haremos una reflexión más exhaustiva con la finalidad de dar cabida a otras ideas del problema. Consideremos las áreas de cada uno de los polígonos ρ_1, ρ_2 y ρ_3 de n lados; para el polígono ρ_1 de lado AB se tiene: $A_1 = n(AB)a_{\rho_1}/2$ en donde: a_{ρ_1} representa el apotema del polígono ρ_1; en forma similar se tiene que: $A_2 = n(BC)a_{\rho_2}/2$ y $A_3 = n(CA)a_{\rho_3}/2$ siendo a_{ρ_2} y a_{ρ_3} los apotemas respectivos de ρ_2 y ρ_3. Ahora, dado que, para un caso determinado, el número n de lados del polígono es fijo, lo mismo que el apotema, podemos entonces considerar que: $na_{\rho_1}/2 = k_1$, $na_{\rho_2}/2 = k_2$ y $na_{\rho_3}/2 = k_3$ y escribir: $A_1 = k_1(AB)$, $A_2 = k_2(BC)$ y $A_3 = k_3(CA)$, lo que muestra que las áreas A_1, A_2 y A_3 son directamente proporcionales a los lados del triángulo y, por ello, los polígonos también lo son.

Ahora bien, todo polígono de n lados determina n triángulos isósceles, con dos de sus lados iguales al radio r del círculo C que lo circunscribe, a excepción del hexágono que tiene tres. Los triángulos así determinados están en proporción directa del lado l del polígono, en este caso de los lados del triángulo ABC y, por ello, el tamaño del círculo C también lo está.

En efecto, si α es la mitad del ángulo interno del polígono entonces: $\alpha = \pi(n-2)/2n$ y de ahí que: $2.r.\mathbf{cos}\alpha = \mathbf{l}$, lo que demuestra que el lado del polígono es directamente proporcional al radio y, por la misma razón, el lado l del polígono es proporcional al diámetro D del círculo que lo circunscribe, ya que: $D.\mathbf{cos}\alpha = \mathbf{l}$. Si D_1, D_2 y D_3 son los diámetros de las circunferencias C_1, C_2 y C_3 entonces se tiene que: $D_1\cos\alpha = AB$, $D_2\cos\alpha = BC$ y $D_3\cos\alpha = CA$ y, por lo tanto, el triángulo formado por los diámetros D_1, D_2 y D_3 es proporcional al triángulo ABC; y como $\alpha \neq 90°$, es decir, $cos\alpha \neq 0$, para todo valor de n, entonces se debe cumplir que:

$$D_1^2 = D_2^2 + D_3^2 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{(AB)^2}{cos^2\alpha} = \frac{(BC)^2}{cos^2\alpha} + \frac{(CA)^2}{cos^2\alpha} .$$

Ya que el Teorema de Pitágoras se cumple para el triángulo ABC; es decir, ¡La relación pitagórica también se cumple entre los diámetros! Pero sabemos, por Euclides, que: las áreas de los polígonos semejantes son entre sí como el cuadrado de los diámetros de los círculos que los circunscriben, y si consideramos que: A_1, A_2 y A_3 denotan las áreas de los polígonos construidos en proporción a los lados AB , BC y CA , respectivamente, entonces se tiene que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2} \qquad \frac{A_2}{A_3} = \frac{D_2^2}{D_3^2} \qquad \frac{A_3}{A_1} = \frac{D_3^2}{D_1^2} \qquad \frac{A_3}{A_2} = \frac{D_3^2}{D_2^2} .$$

Como: $D_1^2 = D_2^2 + D_3^2$ entonces se tiene que: $\dfrac{D_1^2}{D_2^2} = 1 + \dfrac{D_3^2}{D_2^2}$.

Lo que nos lleva a: $\dfrac{A_1}{A_2} = 1 + \dfrac{A_3}{A_2} = \dfrac{A_2 + A_3}{A_2}$

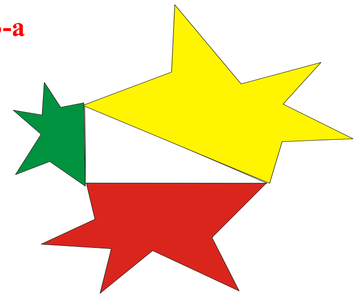
Es decir: $A_1 = A_2 + A_3$ ■

Y, como la demostración no depende del número de lados de los polígonos, se concluye que el Teorema de Pitágoras se cumple para el caso de polígonos regulares de cualquier número de lados. Todo esto nos hace reflexionar y llegar a la conclusión de que todas las partes homólogas lineales de las circunferencias C_1, C_2 y C_3 cumplen el Teorema de Pitágoras; por ejemplo, los tres radios correspondientes cumplen el Teorema de Pitágoras, los apotemas de los polígonos correspondientes, cumplen el Teorema de Pitágoras y las longitudes de los lados de los ángulos inscritos en las circunferencias también.

3. Segunda aproximación a una generalización del Teorema de Pitágoras

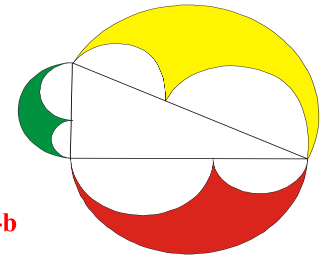
Ahora surge la cuestión siguiente, ¿Se cumple el Teorema de Pitágoras si las figuras dibujadas sobre los lados de un triángulo rectángulo son sólo semejantes? Antes de intentar una demostración de esta pregunta consideremos las 4 ilustraciones de la Figura 3. Todas ellas involucran un triángulo rectángulo y cierta ley de proporcionalidad entre sus partes. Esto debe bastar para hacer ver que si se considera cualquier tipo de figura f plana sobre la hipotenusa y figuras semejantes a f, de tamaño proporcional, en los catetos del triángulo, entonces se tiene el Teorema de Pitágoras Generalizado. El área encerrada por cualquier figura plana, simple y cerrada, listones, globos, anillos y prácticamente cualquier figura que tenga un contorno bien definido tiene su equivalente, en área, en la suma de las áreas encerradas por figuras semejantes y de tamaño proporcional, conceptos que tendremos que formalizar, construidas sobre los catetos del triángulo.

Fig. 3-a



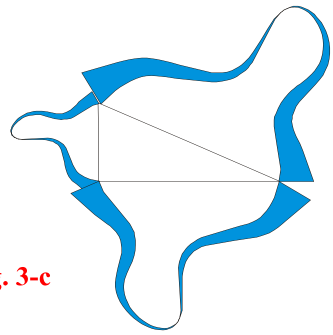
El teorema de Pitágoras con figuras no convexas.

Fig. 3-b



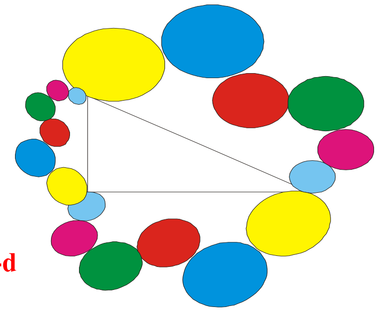
El teorema de Pitágoras con arbelos.

Fig. 3-c



El teorema de Pitágoras con listones.

Fig. 3-d



El teorema de Pitágoras con globos.

Fig. 3. Generalización del teorema de Pitágoras.

En la Fig. 3-a se han considerado figuras no convexas, es difícil de probar el Teorema de Pitágoras en esta situación, no obstante tienen una característica muy especial, se pueden triangular y en esa forma eventualmente puede encontrarse el área de cada una de ellas y comprobar la veracidad que guardan sus áreas. En la Fig. 3-b se han dibujado arbelos proporcionales a los lados del triángulo; es fácil demostrar que sus áreas correspondientes cumplen el Teorema de Pitágoras, se deja como ejercicio al lector. En la Fig. 3-c se han dibujado listones sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo; estos listones determinan la misma forma en cada lado, pero no son del mismo tamaño, cada uno tiene el tamaño justo entre sus puntas para determinar los lados del triángulo, son proporcionales. En la cuarta ilustración, Fig. 3-d se ha considerado una colección de elipses, “globos”, que determinan figuras proporcionales en cada uno de los lados del triángulo; nótese la similitud de las figuras sobre cada uno de los lados, además, estos globos están determinados por curvas simples y suaves, es decir, sin puntas o picos.

Ante esta situación surge otra cuestión, ¿Qué debemos entender por figuras proporcionales? Intuitivamente, lo que debemos considerar para que dos figuras f_1 y f_2 sean proporcionales es que pueda obtenerse una a partir de la otra, mediante una transformación geométrica, cambiar sus dimensiones, ampliándola o reduciéndola. Tal transformación debe determinar el tamaño, y luego, mediante una isometría, debemos acomodarlas para hacerlas coincidir, ya sea mediante una traslación o una rotación.

Una demostración elemental del Teorema de Pitágoras Generalizado, nos lleva a considerar inicialmente un tipo de figuras que llamaremos Curvas Cerradas Simples. Intuitivamente, consideramos una Curva como la trayectoria que describe el movimiento de una partícula en el espacio; en particular, si los puntos que la constituyen están todos en un mismo plano, decimos que la Curva es Plana. La trayectoria puede tener auto intersecciones, pero no saltos, es decir, la partícula no desaparece en un punto determinado y aparece en otra parte. Y algo más, consideremos que la trayectoria es esencialmente suave, ¿Qué quiere decir eso? Pues simplemente que la trayectoria no tenga una cantidad que no podamos contar, de puntas y asperezas, lo que equivale a decir que la curva tiene una tangente bien definida en cada uno de sus puntos. Si particularmente la curva no tiene auto intersecciones, entonces decimos, que es una Curva simple. Si la curva es plana, cerrada y simple se le llama Curva de Jordan, debido al eminente matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922).

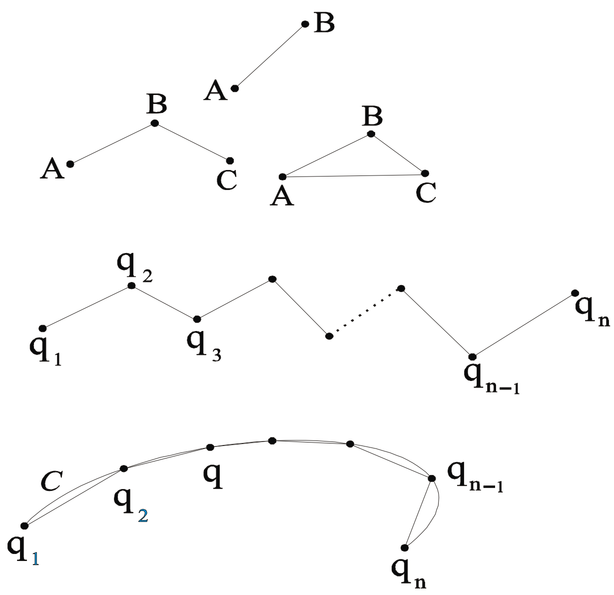


Figura 4: Poligonales y quebradas

Para profundizar más en éstas ideas, consideramos como curvas aquellas trayectorias que puedan aproximarse mediante una poligonal, para ello trataremos primero de introducirnos en la idea de poligonal. Consideremos tres puntos no colineales A, B y C, (Fig. 4), y a los segmentos que determinan. A la unión de los segmentos AB y BC se le llama poligonal de ABC. Los segmentos AB y BC se llaman lados de la poligonal y a los puntos vértices de la poligonal.

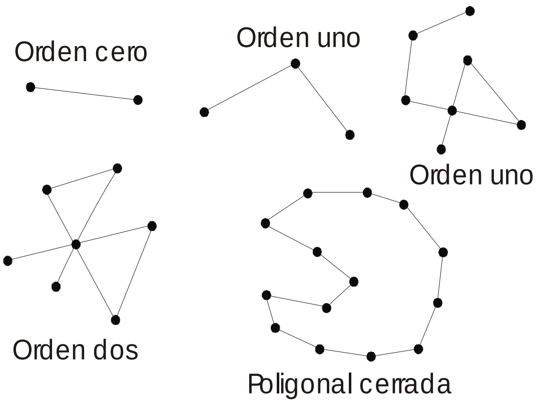


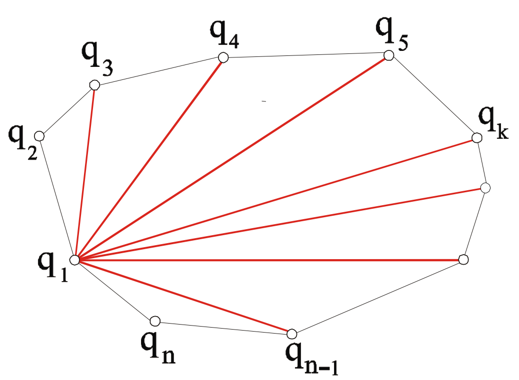
Figura 5: Puntos de ramificación

El punto A es el vértice inicial del lado AB, y el punto B su vértice final. Así mismo, el punto B es el vértice inicial del lado BC y el punto C su vértice final. Así, un vértice, de una poligonal, puede ser inicial para un lado y final para otro. Podemos considerar al segmento de recta AB como el caso extremo de un poligonal con un sólo lado, siendo A su vértice inicial y B su vértice final. Si A=B la poligonal es un punto y su longitud es cero.

En general, llamamos poligonal o quebrada de n puntos $q_1; q_2;...; q_{n-1}; q_n$, a la unión de los segmentos $q_1q_2; q_2q_3;...; q_{n-1}q_n$, de tal manera que el vértice final q_{i-1} del lado $q_{i-2}q_{i-1}$ sea el vértice inicial del lado $q_{i-1}q_i$, i=1,2,3,… n. Además, dos segmentos con un vértice común no pueden pertenecer a la misma recta. Así, una poligonal de n puntos puede representarse mediante la notación: $P(q_1, q_2, q_3,..., q_{n-1}, q_n)$ o simplemente: $P(q_i)$ con i=1, 2, 3,…, n. Los segmentos que constituyen a una poligonal se llaman lados de la poligonal y los vértices de los lados vértices de la poligonal.

Una poligonal es plana si todos los lados, y por ello sus vértices, que la constituyen, están en un mismo plano. Una poligonal se llama Cerrada si el vértice final de su último lado, coincide con el vértice inicial del primer lado, es decir, $q_1 = q_n$; de lo contrario se llama Abierta.

Un punto común a dos o más lados, se llama punto de ramificación; si un punto es común a dos lados, entonces se dice que la ramificación es de primer orden; si es común a tres lados, se dice que es de segundo orden, si es común a cuatro lados, es de tercer orden y así sucesivamente. Un punto que sólo pertenece a un lado, puede ser considerado punto de ramificación de orden cero, por ejemplo, si la poligonal es abierta, entonces sus vértices, inicial y final, son puntos de ramificación de orden cero. (Fig. 5). Si cada lado de una poligonal tiene a lo más dos punto de ramificación de orden uno, se dice que la poligonal es simple. Una poligonal $P(q_i)$ cerrada se llama convexa si ninguna de las rectas q_1q_k, k=2, 3, …, n -1, n se intercepta con alguno de los lados q_2q_3, $q_3q_4,..., q_{n-2}q_{n-1}$, k =3,4,5,…,n–1 más que en los puntos q_k, (Fig. 6).



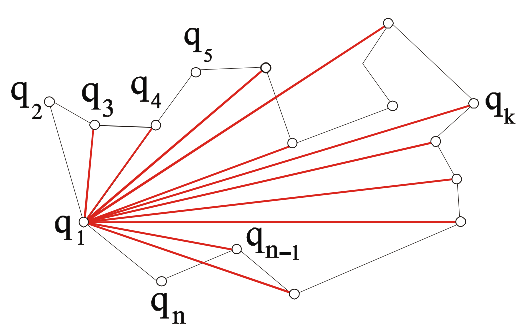


Figura 6. Poligonales convexa y no convexa.

Llamamos longitud de la poligonal $P(q_i)$ a la suma de las longitudes de todos sus lados y la representamos por: $s(P(q_i))$ por lo que: $s(P(q_i)) = \sum_{k=1}^{n-1} q_k q_{k+1}$.

Se llama área de una poligonal simple, cerrada y convexa $P(q_i)$ a la suma de las áreas de los triángulos: $\Delta(q_1q_2q_3)$, $\Delta(q_1q_3q_4)$, $\Delta(q_1q_4q_5)$,…, $\Delta(q_1q_{n-2}q_{n-1})$, $\Delta(q_1q_{n-1}q_n)$, y se representa por: $A(P(q_i))$.

Así tenemos que: $A(P(q_i)) = \sum_{k=3}^{n} A(\Delta(q_1q_{k-1}q_k))$.

En donde: $A(\Delta(q_1q_{k-1}q_k))$, k =3,4,5,…,n–1, representa el área de los triángulos $\Delta(q_1q_{k-1}q_k)$, k =3,4,5,…,n–1.

Si la poligonal $P(q_i)$ no es convexa podemos determinar su área mediante una triangulación de otro tipo, lo que resulta más complejo, pero esencialmente podemos asignar una área a las poligonales cerradas.

El estudio de las técnicas para la determinación del área de las poligonales no convexas, requiere un análisis más extenso y sólo se estudia con la finalidad de las aplicaciones a otras ramas de la matemática, ya que eventualmente se requiere del cálculo y de los conceptos e ideas de la Geometría Diferencial; sin embargo, las poligonales se asemejan mucho a las Curvas Simples, de hecho, podemos aproximar, con un buen grado de exactitud, una curva mediante poligonales; y con todo, la definición de curva es más amplia de lo que puede parecer a primera vista.

No obstante, consideramos como curvas simples, aquellas que no se cortan a sí mismas y con longitud finita. Esta idea, la de curva simple, proviene de la Física, al determinar la trayectoria de una partícula en el espacio, y conllevó mucho tiempo después, a la idea rigurosa de curva en Matemática. Y así, conjugando esas dos ideas, la de curva y poligonal, podemos aproximar la trayectoria determinada por el movimiento de una partícula mediante poligonales.

Se dice que una poligonal $P(q_i)$ aproxima a la curva C si todos los vértices de $P(q_i)$ pertenecen a C, lo que podemos representar mediante: $P(q_i) \approx C$; si en la aproximación de $P(q_i)$ a C se considera un número n de puntos entonces decimos que una partición de orden n constituye a la poligonal, lo que representamos mediante $P_n(q_i)$. Un refinamiento $P_{n+k}(q_i)$, k=1,2,3,… de la partición de una poligonal consiste en la adición de uno o más vértices a la poligonal que aproxima a C.

En este sentido $P_{n+k}(q_i)$, $k \in N$ aproxima mejor a C que $P_n(q_i)$ ya que:

$$(q_i) = \{q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}, q_n\} \subset \{q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_k\} = (q_{n+k}).$$

Los refinamientos determinan un orden en las particiones, es decir:

$$(q_n) \subset (q_{n+1}) \subset (q_{n+2}) \subset \ldots \subset (q_{n+k-1}) \subset (q_{n+k}).$$

Mediante refinamientos sucesivos de una poligonal ,podemos aproximar cada vez mejor a una curva. Nótese que no estamos definiendo una curva mediante poligonales, sino la aproximación por medio de poligonales a una curva. Aún y con todo, podríamos considerar a una curva continua como una poligonal, con un número infinito de vértices, a la que podemos asignarle una longitud, ya sea finita o infinita, e incluir a las curvas clásicas y fractales.

Un ejemplo de una curva clásica, resulta si se considera a un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia C de radio r; ahí podemos ver a los vértices q_i de la poligonal plana $P_n(q_i)$ como los vértices del polígono; además, si el número n de lados tiende a infinito el poligonal tiende a tener la forma de la circunferencia C y, por ello, determina una longitud bien especificada, a saber $2\pi r$, es decir: $C \approx P_n(q_i)$, $\forall n \in N$. Posiblemente el mejor ejemplo de una poligonal con longitud infinita es la Curva de Koch; el matemático sueco Fabian Helge von Koch (1870-1924) la construyó, utilizando un proceso recursivo, como una poligonal cuya longitud crece con cada etapa. Así pues, la teoría de las poligonales puede servir para estudiar curvas clásicas y cierto tipo de figuras fractales constituidas por segmentos de recta.

Si consideramos que una curva C que es aproximada mediante la poligonal $P_n(q_i)$ entonces no es difícil percatarnos que al efectuar una transformación geométrica sobre C, la poligonal puede adaptarse a la curva. Para ello, imaginemos un alambre que pudiera representar a una curva simple y amarremos pequeñas cuerdas elásticas, más o menos a distancias iguales, a lo largo del alambre. Entonces la deformación del alambre conlleva a la deformación de las cuerdas. ¡Pero claro! no siempre las cuerdas aproximan por igual a la curva, pero si pensamos en un gran número de ellas, de longitud pequeña comparada con la longitud total de la curva, entonces la aproximación será cada vez mejor.

Bajo esa idea, la de aproximar una curva por medio de una poligonal $P_n(q_i)$, nos llega el concepto de equivalencia de curvas: Consideremos dos curvas planas y simples C_1 y C_2, es decir, curvas que no tengan auto intercepciones y que puedan ser aproximadas por poligonales simples. Se dice que dos curvas C_1 y C_2 son *Equivalentes* si, mediante una rotación o traslación, pueden sobreponerse, lo que equivale a decir que una misma poligonal $P_n(q_i)$ puede aproximarlas por igual. Con más precisión, C_1 es equivalente a C_2, es decir: $C_1 \approx C_2$, si y solo si $\exists$ $P_n(q_i)$ tal que: $P_n(q_i) \approx C_1$ y $P_n(q_i) \approx C_2$; esto induce una relación de equivalencia. Y debe entenderse que cualquier refinamiento $P_{n+k}(q_i)$, k=1,2,3,… de la poligonal $P_n(q_i)$ aproxima mucho mejor a ambas curvas.

Ahora bien, un concepto más general es el de *Semejanza de Curvas*. Consideremos dos curvas, C_1 y C_2, y pensemos que existen las poligonales $P_n(q_i)$ y $P_n(q_i^1)$ tales que: $C_1 \approx P_n(q_i)$ y $C_2 \approx P_n(q_i^1)$. Si las curvas C_1 y C_2 son semejantes entonces debe existir una razón de semejanza entre los lados correspondientes de las poligonales que las aproxima; podemos entender esto considerando una *Transformación Geométrica* entre los puntos de las poligonales $P_n(q_i)$ y $P_n(q_i^1)$.

La idea de transformación geométrica aparece muy frecuentemente en geometría, desde tiempos muy antiguos se ha utilizado. Una transformación geométrica T en el plano es un mapeo que asocia, bajo una regla determinada, a cada punto $q_i(x_i, y_i)$ del plano $\Re^2$ otro punto bien especificado de $\Re^2$. En otras palabras, si $q_i \in \Re^2$ entonces el transformado $T(q_i)$ también lo está. Todo esto lo escribimos así: $T:\Re^2 \to \Re^2$, $T(q_i) = q_i^1$. Un ejemplo de ello es la *Transformación de Homotecia* especialmente importante en relación con las poligonales.

Consideremos un punto cualquiera O del plano, y una poligonal $P_n(q_i)$ simple, Fig. 7. Si hacemos pasar por cada punto q_i la recta Oq_i y sobre cada una de éstas líneas consideramos, desde O, la distancia $k(Oq_i)$, $k \in \Re$,los puntos así determinados son los vértices de otra poligonal, $P_n(q_i^1)$. A la constante k se le llama *razón de homotecia o semejanza* y a las poligonales homotéticas, semejantes o proporcionales en la razón k. Si $k < 1$, entonces $T(q_i)$ es una contracción; si $k = 1$, una isometría; y si $k > 1$, una dilatación.

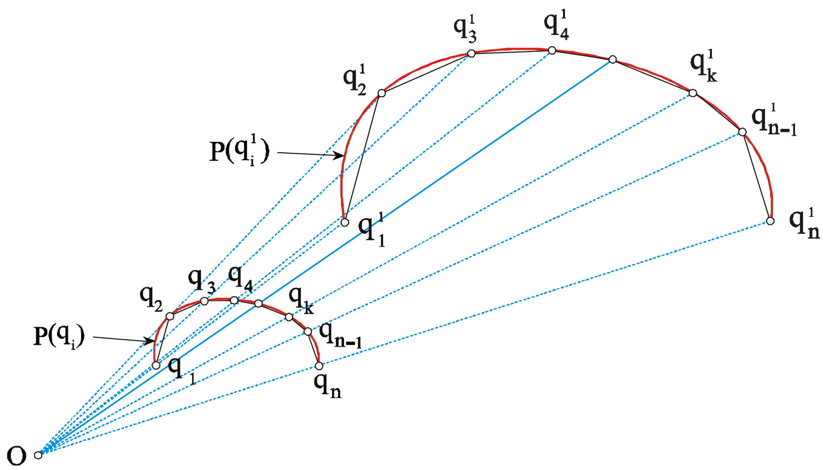


Figura 7. Poligonales homotéticas.

De lo anterior se concluye que si dos poligonales, determinadas por los puntos q_i y q_i^1, son homotéticas entonces se tiene:

$$k = \frac{Oq_1^1}{Oq_1} = \frac{Oq_2^1}{Oq_2} = \frac{Oq_3^1}{Oq_3} = \ldots = \frac{Oq_n^1}{Oq_n}.$$

Esto nos lleva a considerar la semejanza de las curvas C_1 y C_2 siempre que existan poligonales $P_n(q_i)$ y $P_n(q_i^1)$ que las aproximen y que sean proporcionales en la razón k.

Nuestro afán por demostrar un *Teorema de Pitágoras Generalizado,* nos ha conducido a la discusión de lo que entendemos por curva, poligonal y semejanza de curvas; sin embargo, todos sabemos que el Teorema de Pitágoras, nos lleva a considerar la relación entre las áreas de las figuras asociadas a sus lados, entonces, ¿Qué relación tienen las áreas que determinan las poligonales cerradas y homotéticas? ¿Están en la misma razón que las longitudes de sus lados?

Consideremos un cuadrado $ABCD$ de lado $L_1 = 2$ y a su cuadrado homotético $A^1B^1C^1D^1$, cuyo lado ha sido amplificado a lo doble de L_1, es decir $L_2 = 4$. Fig. 8. Entonces, su razón de homotecia viene dada por: $\frac{L_2}{L_1} = k = 2$. Si un cuadrado tiene lado $L_1 = 2$ su área es: $A_1 = 4$, y si un cuadrado es de lado $L_2 = 4$ su área es: $A_2 = 16$, es decir, la longitud aumenta al doble pero el área ha aumenta cuatro veces. Dicho de otra forma, la relación de las áreas es: $\frac{A_2}{A_1} = \frac{16}{4} = 4 = 2^2 = k^2$.

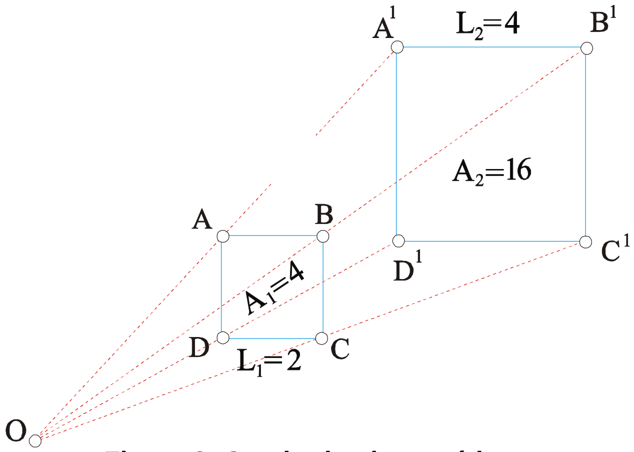


Figura 8: Cuadrados homotéticos

Todo esto nos lleva a considerar que, si a una poligonal cerrada $P_n(q_i)$ podemos asociarle una área $A(P_n(q_i))$ y encontramos, por medio de una homotecia de razón k, la poligonal $P_n(q_i^1)$, con área asociada $A(P_n(q_i^1))$, entonces la razón de sus áreas debe ser k^2, es decir: $A(P_n(q_i^1)) = k^2 A(P(q_i))$; o mejor dicho, las áreas aumentan o disminuye en la razón de k^2.

Esto nos hace pensar que lo mismo sucede en relación de las áreas si en vez de poligonales consideramos curvas de Jordan. Si C_1 y C_2 son dos curvas cerradas que pueden ser aproximadas mediante las poligonales $P_n(q_i)$ y $P_n(q_i^1)$ y son semejantes en la razón k, entonces la razón de sus áreas es k^2 ya que $A(P_n(q_i^1)) = k^2 A(P(q_i))$.

De otro modo tendríamos que: $A(C_2)/A(C_1)$ no se aproxima, en el límite, a k^2, mientras que: $A(P_n(q_i^1)) = k^2 A(P(q_i))$; pero eso no puede ser, ya que los refinamientos de las poligonales aproximan cada vez mejor a las curvas.

Sin mucha dificultad podemos ver que esto es cierto para el caso simple de un círculo de radio $r = 1$; en este caso tenemos que su área es π y su longitud 2π; ahora, si aumentamos el radio a lo triple, $k = 3$, el área no aumenta a lo triple sino que es 9π, es decir, $k^2\pi$, mientras que su longitud sólo aumenta a lo triple, 6π; y es fácil considerar a un polígono de n lados como una poligonal cerrada, plana y simple que aproxima cada vez mejor al círculo.

Ahora podemos echarle un vistazo más de cerca a una demostración elemental del *Teorema de Pitágoras Generalizado*, que, por el momento, sólo incluya figuras convexas limitadas por poligonales planas, cerradas y simples o, en todo caso, por curvas cerradas, planas y simples que puedan ser aproximadas mediante poligonales.

Consideremos una poligonal $P_n(q_i)$ simple y cerrada que determina un área $A(P_n(q_i))$; si sobre los lados de un triángulo rectángulo ABC dibujamos poligonales proporcionales a sus lados en relación a $P_n(q_i)$, entonces se tiene el: Teorema de Pitágoras Generalizado para poligonales convexas:

El área que determina la poligonal cerrada y proporcional a la hipotenusa, es igual a la suma de las áreas que determinan las poligonales cerradas y proporcionales a los catetos.

Todo esto nos lleva a considerar que si el teorema es cierto para poligonales cerradas, aunque no estén unida a los lados, entonces la misma situación se presenta, en los triángulos rectángulos, si se consideran curvas cerradas y proporcionales, las áreas guardan la misma proporción, el área delimitada por la curva cerrada sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas delimitadas por las curvas proporcionales asociadas a los catetos del triángulo.

En efecto, supongamos que tenemos una curva C simple y cerrada a la que podemos aproximar por medio de una poligonal $P_n(q_i)$, es decir, $C \approx P_n(q_i)$. Tal poligonal determina una área $A(P_n(q_i))$, y podemos considerar, sin perder generalidad, que la poligonal $P_n(q_i)$ determina la unidad de área. Fig. 9.

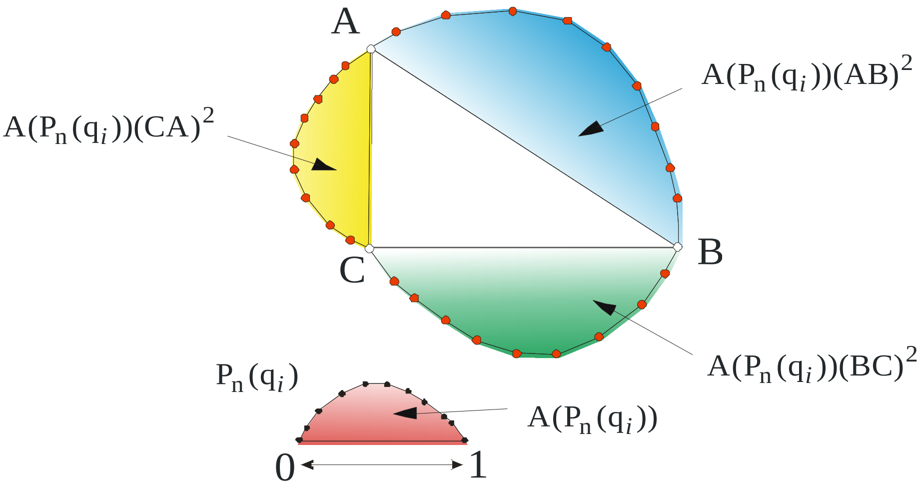


Figura 9: El Teorema de Pitágoras generalizado para poligonales

Ahora, consideremos un triángulo rectángulo ABC, entonces, si multiplicamos la longitud del lado q_1q_n de la poligonal $P_n(q_i)$, y consecuentemente todos los demás, por la magnitud del lado AB su área resultara ser: $A(P_n(q_i))(AB)^2$, lo que sugiere hacer lo mismo con la relación pitagórica para el triángulo rectángulo ABC, es decir, cada uno de los términos de la ecuación $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2$ se multiplica por: $A(P_n(q_i))$, para obtener:

$$A(P_n(q_i))(AB)^2 = A(P_n(q_i))(BC)^2 + A(P_n(q_i))(CA)^2 \qquad \text{------}(*)$$

Pero se tiene que: $A(P_n(q_i))(AB)^2$ representa el área de la poligonal construida, proporcionalmente, sobre la hipotenusa AB del triángulo ABC; y lo mismo sucede con: $A(P_n(q_i))(BC)^2$ y $A(P_n(q_i))(CA)^2$ en relación a los lados BC y CA, lo que significa que cada uno de los términos en la ecuación $(*)$ establece el área de las poligonales construidas sobre los lados del triángulo ABC. Ello demuestra que la suma de las áreas de las poligonales proporcionales construidas sobre los catetos es igual al área de la poligonal proporcional construida sobre la hipotenusa.

Una reflexión más exhaustiva sobre la relación que guardan las poligonales con las curvas y sus áreas nos hará ver cómo puede el Teorema de Pitágoras ser cierto para curvas. Efectivamente, la poligonal $P_n(q_i)$ se aproxima cada vez mejor a la curva C si el número n de sus vértices se considera muy grande, y, por ello: $\lim\limits_{n\to\infty} A(P_n(q_i)) = A(C)$. De otro modo no se entiende cómo es que la poligonal $P_n(q_i)$ se aproxima cada vez mejor a la curva C y no así su área y, por ello, debemos considerar que si se dibujan curvas proporcionales y convexas sobre los lados de un triángulo rectángulo la proporción de sus áreas está en relación a los lados del triángulo, es decir, cumplen la relación pitagórica.

De esta forma llegamos a conjeturar que el Teorema de Pitágoras no sólo es verdadero para el caso de las curvas que delimitan una región convexa, también debe serlo para las curvas cerradas y no convexas, asociadas a los lados del triángulo, ya que las curvas cerradas y no convexas, dibujadas proporcionalmente sobre los lados del triángulo, pueden ser aproximadas mediante poligonales proporcionales y, en el límite de las particiones, las áreas determinadas por las curvas también deben satisfacer el Teorema de Pitágoras. Ante ello las cuestiones no se hacen esperar ¿Se puede generalizar aún más el tipo de regiones asociadas a los lados en el Teorema de Pitágoras? ¿Cuáles son las restricciones que se deben imponer a una curva que delimita una región para que se cumpla el Teorema de Pitágoras? ¿Cómo probamos esto?

Si ABC es un triángulo rectángulo y f, g y h son curvas semejantes, cerradas, simples y no necesariamente convexas asociadas proporcionalmente a los lados del triángulo, entonces se debe cumplir que: $A(f) = A(g) + A(h)$; (Fig. 10).

Una demostración de esta aseveración utilizando poligonales se hace sumamente complicada y laboriosa, debemos utilizar el concepto de integral, pero no olvidemos que, en última instancia, la integral de Riemann, para determinar la longitud de una curva, es una suma infinita de longitudes que constituyen una poligonal. Luego, se deben hacer las consideraciones necesarias para poder incluir, en el Teorema de Pitágoras, regiones con agujeros, es decir, regiones conexas y múltiplemente conexas y con ello ampliar el conjunto de regiones que cumplen el teorema.

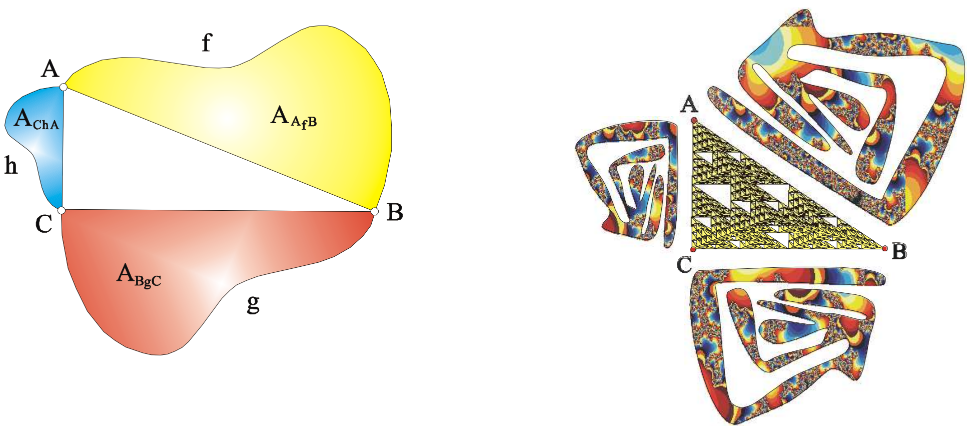


Figura 10. El teorema de Pitágoras para regiones no convexas.

Bibliografía

Altshiller, N. *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle.* Ed. Barnes Noble, Inc. 1952.

Allman, G, J. (1989) *Greek geometry*: *From Thales to Euclid*. Ed. Dublín University Press.

Boltyanskll, V. G. (1973). *Figuras equivalentes y equidescomponibles.* Ed. Limusa Wiley. Méx.

Bracho, J.. (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. Ed. Fondo de Cultura Económica. Méx..
Caniff, P. (2004). *Pitágoras*. Colección Grandes Biografias. Edimat Libros S. A. España.
Euclides (h. 300 a.C.): *Stoicheia*. Traducido al español en Euclides: Elementos. Editorial Gredos.
Gómez Pérez, M. (2002). *Pitágoras*. Ed. Grupo Editorial Tomo S. A. de C. V. México.
Pogorélov, A. V. (1974) *Geometría Elemental.* Ed. Mir. Moscú.
Ruesga, P.; Breda, A.; Sigarreta, J. M. and Rodríguez, J. M. (2008) Geometry and problems solving. Appl. Math. Sciences, Vol 2, 213-221.
Ruesga, P.; Sigarreta, J. M. and Valls, F. (2007). *Diagrams of logical relations in transformational task*. Far East Journal of Mathematical Education. Volume 1, Issue 2, 95-124.
Sigarreta, J.; Ruesga, P. (2004). Evolución de la geometría desde su perspectiva histórica. Bol. Aso. Mat. Ven. XI 85 -95.
Sigarreta, J. M.; Ruesga, P. and Rodríguez J. M. (2006). La solución de problemas una visión histótico-didáctica. Bol. Aso. Mat. Ven. XIII (1) 53- 67.
Yakoliev, G. N. (1985). *Geometría*. Ed. MIR. Moscú.

José María Sigarreta Almira. Es Catedrático de Matemática en la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Doctor en Ciencias Pedagógicas (Cuba) y Doctor en Ciencias Matemáticas (España). Ha publicado más de 70 artículos de investigación. josemariasigarretaalmira@hotmail.com

Javier González Mendieta. Es Profesor de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Master en Ciencias y estudiante del Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. jgmendieta@hotmail.com