REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre de 2011, Número 27, páginas 115-129
ISSN: 1815-0640

Estudio de habilidades matemáticas cuando se realizan actividades usando software específico

Betina Williner

Resumen

Este artículo presenta un estudio exploratorio sobre el aprendizaje de habilidades matemáticas cuando los estudiantes trabajan en actividades utilizando software de tipo no didáctico, en este caso el *Mathematica*. La experiencia se realizó en un curso de primer año de la asignatura Análisis Matemático I correspondiente a las carreras de Ingeniería Industrial, Electrónica e Informática de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM).

Abstract

This article presents an exploratory study of learning math skills as students work on activities using non-teaching software, in this case, Mathematica. The experiment was performed in a first-year course of Calculus I in careers of Industrial Engineering, Electronics and Computer Science at the Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM).

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo exploratório de aprendizagem matemática como os estudantes trabalham em atividades utilizadoras de software no ensino não, neste caso, Mathematica. O experimento foi realizado em um curso do primeiro ano do curso de Cálculo I para carreiras em Engenharia Industrial, Electrónica e Informática da Universidade Nacional de La Matanza (UNLaM).

1. Introducción

Enfrentar una sociedad como la actual, en constante cambio, hace que como docentes debamos crear escenarios que posibiliten a cada uno de nuestros alumnos dar, a través de su propio quehacer, una participación responsable, comprometida y creativa en la vida social. Para ello, es indispensable que los estudiantes adquieran no sólo un conjunto de conocimientos, sino también que desarrollen habilidades que les permitan "saber hacer", saber actuar en la resolución de nuevas situaciones. A esto debemos sumarle la introducción de nuevas tecnologías informáticas, las que, sin duda, han enriquecido el proceso de enseñanza - aprendizaje.

La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) declara que el currículo de matemáticas de todos los niveles, debe incorporar la tecnología educativa en pro de un aprendizaje más efectivo y el desarrollo de habilidades por parte del estudiante. Agrega que es función de los docentes prepararse para efectuar decisiones sobre cómo y cuándo los alumnos pueden usar estas herramientas de un modo más efectivo.

Estas dos realidades: competencias-habilidades y uso de tecnología, hacen que como docentes y formadores no podamos conformarnos en presentar el conocimiento en forma lineal y estática. Debemos responder a las demandas actuales de una sociedad tecnológica y cambiante.

Encontramos numerosas experiencias en las que la tecnología se utiliza con el objetivo de favorecer la exploración de distintas situaciones, el trabajo con gráficos para visualizar, la creación de conjeturas, la generalización, entre otras. Por ejemplo: Ángel y Bautista (2001) proponen algunas actividades usando software donde se utiliza la computadora como una calculadora potente y como graficador. Güichal et al (2009) diseñaron actividades de creación de conjeturas y de exploración. El énfasis, en estos casos, está puesto en habilidades de indagación, de visualización, de operatoria con gran cantidad de datos y de aplicación de métodos numéricos.

Por nuestra parte, nos preguntamos: ¿puede fomentarse, con el uso de un software matemático, el aprendizaje de otro tipo de habilidades, como por ejemplo las de argumentación? ¿Contribuye la visualización y rápida operatoria propias de la computadora al desarrollo de este tipo de habilidades?

2. Marco Teórico

Nuestro fundamento teórico está basado en:

2.1. Habilidades matemáticas

Si buscamos en el diccionario sinónimos de habilidad encontramos, entre ellos, capacidad, destreza y competencia. Sin embargo, en el marco educativo, y en particular en Matemática, no todos son utilizados como sinónimos.

Herminia Hernández (1998) define los "procedimientos" (habilidades) como los modos de actuación. Aclara que no puede haber un conocimiento sin un procedimiento bajo el cual funcione, y, viceversa, no puede haber un procedimiento sin que esté asociado a un conocimiento. Estos procedimientos o habilidades son las acciones o tareas que sistemáticamente se ejecutan en matemática para la logro de un objetivo. Zabala (2007) toma las destrezas y habilidades dentro de los contenidos procedimentales, a los que define como conjunto de acciones para lograr un fin. Sánchez (2002), por su parte, discierne al conocimiento como semántico o procedimental. El conocimiento semántico es la información sobre los conceptos, teorías, hechos, principios, reglas que conforman una disciplina o campo de estudio. El conocimiento procedimental se define como un conjunto ordenado de pasos o acciones que acompañan un acto mental o actividad motora.

Si realizamos un paralelo entre todos estos autores, más allá de las diferencias de denominación, consideran por un lado toda la información que recibe una persona (conceptos, teorías, hechos, definiciones, propiedades, atributos) que podríamos englobarlos en "conocimiento", y por otro las acciones y aplicaciones que puede realizar el individuo con ese conocimiento: las habilidades.

Así consideramos que una habilidad matemática es la capacidad de efectuar o realizar una tarea matemática eficientemente o de actuar adecuadamente frente a una situación, en la que la Matemática está involucrada. Son las acciones o tareas que efectuamos en forma sistemática para lograr un objetivo.

En cuanto a la clasificación de habilidades, encontramos en la bibliografía diferentes opciones. Éstas dependen, en cierta medida, del enfoque dado al concepto y de los objetivos que persigue cada autor a la hora de categorizarlas.

Una primera clasificación la encontramos en la "Taxonomía de Bloom", en las habilidades del dominio cognitivo, en la que se establecen seis categorías básicas según la función de la acción en la que la habilidad se manifiesta: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis, evaluación. Por otro lado, Delgado Rubí, citando también a Hernández, Valverde y Rodríguez (Hernández et al, 1998), las agrupa en:

- Habilidades conceptuales: aquellas que operan directamente con los conceptos (Identificar, Fundamentar, Comparar, Demostrar)
- Habilidades traductoras : aquellas que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento (Interpretar, Modelar, Recodificar)
- Habilidades operativas: están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal (Graficar, Algoritmizar, Aproximar, Optimizar, Calcular)
- Habilidades heurísticas: aquellas que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo (Resolver, Analizar, Explorar)
- Habilidades metacognitivas: las que son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas (Planificar, Predecir, Verificar, Comprobar, Controlar)

La que suscribe participó en una investigación (Falsetti, Favieri, Scorzo y Williner, 2009) donde utilizamos la clasificación que realiza Delgado Rubí brindada anteriormente, pero tuvimos la necesidad de involucrar cada habilidad con el conocimiento al cual estaba ligada. A modo de ejemplo, consideramos que no tiene el mismo grado de dificultad *Identificar* el dominio de una función que *Identificar* los puntos críticos de una función. Así obtuvimos una clasificación del tipo habilidad-contenido y sobre la base de ésta realizamos el estudio citado.

Existen también otras clasificaciones: Rodríguez Núñez et al (2005), las dividen en: de auto-educación, operaciones y métodos de pensamiento, lógico-formales, lógico-dialécticas; Formica, González y Rodríguez (2009) hablan de habilidades respecto de la operatoria, habilidades respecto a la lógica y argumentación, interpretación matemática, sujetas al contenido matemático, etc.

2.2. Aprendizaje de la matemática haciendo uso de la computadora

Encontramos varias investigaciones en las que se presentan los cambios en la forma de trabajo y los logros en el aprendizaje obtenidos al incorporar herramientas informáticas a la clase de Matemática (Cuicas Ávila, Debel Chourio, Casadei Carniel y Alvarez Vargas, 2007; Ramos Rodríguez y Baquedano Jer, 2006; Castillo, 2008; Depool y Camacho, 2001). Así como otros (Contreras de la Fuente et al, 2005) exponen que el uso de recursos informáticos no garantiza resultados satisfactorios en la enseñanza-aprendizaje de conceptos como límite, continuidad y derivada de una función. Existen también diversas posiciones ante la incorporación de la computadora en la clase: para algunos es indispensable y todas las prácticas deben hacerse con su uso, otros opinan que no hay que abusar de esta herramienta para así mantener la motivación de los alumnos y también están aquellos que no las integrarían a su clase por temor a los cambios que esto pueda provocar.

En particular, nosotros nos concentraremos en el uso de la computadora como “herramienta”. Jonassen, Carr y Ping (1998) afirman que la tecnología debe usarse como una herramienta de construcción del conocimiento, de manera que los estudiantes aprendan “con” ella y no “de” ella. Agregan que las computadoras pueden favorecer más efectivamente el aprendizaje significativo y la construcción del conocimiento en la educación superior, como herramientas de amplificación cognitiva para reflexionar sobre lo que los estudiantes han aprendido y lo que saben.

Basamos nuestra experiencia en el diseño de actividades usando software *Mathematica,* considerado como una herramienta informática muy poderosa y útil. Este software fue elegido por diversas razones: es el que cuenta la Universidad, tiene gran potencial de cálculo y gráficos, y por la simplicidad de los comandos que dispone. Al respecto, Ávila Guerrera (1998) citado por Vílchez Quesada (2007), opina que el *Mathematica* se convirtió probablemente en el mejor ambiente integrado para realizar computación técnica, cuya mayor ventaja es la integración de tareas específicas como análisis numérico, álgebra lineal y graficación mediante un lenguaje simbólico de fácil manipulación

3. Nuestro contexto

La experiencia se llevó a cabo en uno de los cursos de la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería Informática, Industrial y Electrónica de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). El grupo que participó de la misma está formado por 24 alumnos de ambos sexos, con edades que oscilan entre 18 y 20 años. Cabe aclarar que 8 alumnos cursan la materia por segunda vez.

Nuestra cátedra establece, como uno de los requisitos de promoción o regularización (derecho a examen final) de la materia, la aprobación de trabajos prácticos realizados con software *Mathematica* (que se entregan en soporte impreso) y la defensa individual de los mismos (a fin de cuatrimestre). Es por esta razón, que en el momento de comenzar con las actividades diseñadas, los estudiantes conocían los comandos básicos del programa.

Debido a que toda habilidad está ligada a un conocimiento, el tema que elegimos para llevar adelante la propuesta es “Derivada”. Además de ser uno de los pilares del Análisis Matemático, trabajar con derivadas enriquece nuestro estudio en el sentido que nos permite promover diversas habilidades. Podemos abordarlo desde un enfoque geométrico (como pendiente de la recta tangente), desde un enfoque formal (límite del cociente incremental) o desde un enfoque variacional (velocidad instantánea en Física, tasa de crecimiento instantáneo en Biología, etc.) (Dolores, 2000).

3.1. Objetivos generales

- Diseñar un dispositivo didáctico con uso de software específico (*Mathematica*), con el propósito de fomentar el aprendizaje de habilidades matemáticas, en particular las de argumentación.
- Analizar las producciones de los alumnos respecto al aprendizaje de las habilidades promovidas, una vez realizadas las actividades.

3.2. Metodología

Detallamos a continuación las acciones llevadas a cabo:

3.2.1. Selección de las habilidades a estudiar

Para elegir las habilidades a promover a través de las actividades, y de acuerdo al tema elegido, nos propusimos como objetivo principal la comprensión del concepto de derivada y de sus aplicaciones. Nickerson, Perkins y Smith (1987) consideran que "la capacidad de desarrollar y utilizar modelos conceptuales" es uno de los aspectos a considerar en la competencia intelectual. Inspirados en estos autores, decidimos centramos en *habilidades conceptuales* ("capacidad de desarrollar modelos conceptuales"), *de aplicación* ("capacidad de utilizar modelos conceptuales") y complementamos, de acuerdo a nuestro objetivo, con *habilidades de argumentación*. Presentamos un cuadro con las habilidades que definimos para estudiar:

Tabla 1

Habilidades generales	Habilidades específicas a estudiar en relación con "Derivadas"	Código
Habilidades conceptuales. Consideraremos habilidades conceptuales a aquellas que permiten reconocer el concepto de diferentes maneras: por su definición (formalmente), por sus representaciones semióticas o en su aplicación a otras ciencias. Las simbolizamos con HC	♦Interpretar geométricamente. ♦Reconocer el concepto en otras ciencias u otros contextos (velocidad instantánea en Física, tasa de crecimiento instantánea en Biología, etc.). ♦Extraer o Dar significados de expresiones dadas en forma simbólica o formal.	HC1 HC2 HC3
Habilidades de aplicación. Son aquellas que permiten utilizar el concepto en cuestión, propiedades y resultados teóricos sobre el mismo, en la resolución de ejercicios y/o problemas. Las denotamos HAP	♦Aplicar resultados teóricos (definiciones, propiedades) a problemas prácticos en sentido directo (Por ejemplo hallar la recta tangente una curva en un punto dado) ♦Aplicar resultados teóricos a problemas prácticos en orden inverso al presentado en clase (Por ejemplo: dada la recta tangente a una curva en x = a hallar f(a) y f'(a)) ♦Aplicar técnicas de cálculo, y algoritmos.	HAP1 HAP2 HAP3
Habilidades de argumentación. Son las que nos permiten dar una prueba, demostración o sacar conclusiones a partir de datos. Las designamos HAR	♦Apelar a resultados teóricos para justificar. ♦Usar contraejemplos para probar que una proposición es falsa.	HAR1 HAR2

Con respecto a las habilidades de "Extraer y dar significados de expresiones dadas en forma simbólica o formal" nos basamos en las ideas de Tall y Fusaro Pinto

(2002). Estos autores consideran dos modelos que utilizan los estudiantes en la construcción de definiciones:

- *Dar significado* (construido sobre ideas informales): dar significado a un concepto desde una imagen.
- *Extraer significado* (construido sobre teoría formal): extraer significado desde un concepto realizando deducciones formales.

¿Por qué consideramos a éstas habilidades relevantes para ser estudiadas? Autores como Stewart (1999) consideran que la meta primaria en la reforma en la enseñanza del Cálculo debe ser *"Enfocarse en la comprensión conceptual"*.

Consideramos que si el alumno logra desarrollar las habilidades seleccionadas, será indicativo de la comprensión del concepto.

3.2.2. Diseño de actividades sobre los temas elegidos poniendo especial énfasis en que promuevan las habilidades seleccionadas.

Diseñamos seis actividades (cada una con varios ejercicios) para ser realizadas en uno de los laboratorios de la Universidad cuyas computadoras están cargadas con software *Mathematica.* En el momento que los alumnos desarrollaron la actividad presentada en este artículo (sobre el Teorema del Valor medio), ya habían tenido dos encuentros previos:

- <u>Actividad 1</u>: cuyos objetivos fueron: Identificar el cociente incremental como razón de cambio promedio, predecir el valor de la razón de cambio instantánea en un punto a partir de los valores de la razón de cambio promedio, aplicar el concepto de límite para hallar la razón de cambio instantánea, identificar a la derivada en un punto como razón de cambio instantánea, interpretar el cociente incremental como pendiente de la recta secante, interpretar la derivada en un punto como pendiente de la recta tangente y aplicar reglas de derivación.
- <u>Actividad 2</u>: con los siguientes objetivos: Identificar (gráficamente y analíticamente) puntos que no tienen derivada, interpretar geométricamente el concepto de derivada, identificar la definición formal de derivada, identificar la relación entre la derivabilidad y continuidad de una función en un punto, reconocer que la recta tangente a una función en un punto y el gráfico de dicha curva pueden intersecarse en más de un punto.

Diseñamos las actividades para fomentar el desarrollo de habilidades conceptuales, de aplicación y de argumentación elegidas para ser estudiadas en la investigación. En el caso de las habilidades conceptuales, como explicamos anteriormente, abordamos el concepto de derivada en forma geométrica, aplicada y formal. Las habilidades de aplicación las promovemos cuando diseñamos actividades que fomentan el empleo de resultados teóricos estudiados en clase y las presentamos ya sea con la secuencia que fueron tratados o en orden inverso. En otros ejercicios el alumno debe utilizar algoritmos para derivar, calcular rectas tangentes, hallar raíces de las derivadas primera y segunda, etc. En la mayoría de los trabajos solicitamos al estudiante la justificación de los pasos realizados o de las elecciones efectuadas, de manera tal de poder evaluar las habilidades de argumentación.

3.2.3. Análisis preliminar de las actividades propuestas

Realizamos un análisis preliminar de cada una de las actividades. Es decir, pensamos qué habilidades (de las seleccionadas) son promovidas por cada uno de los ejercicios. Presentamos aquí los dos primeros ejercicios correspondientes a la Actividad 3 y su análisis preliminar de habilidades:

Ejercicio 1

a) Graficar la función $f(x)=x^3-2x$ en el intervalo [-2,2] (en la pantalla el gráfico debe verse en el rectángulo: $[-3,3]x[-5,5]$)

b) ¿Cómo puedes mostrar en el gráfico que se cumple el teorema del valor medio en el intervalo [-2,2]?

c) Calcular los valores exactos de los números c que satisfacen la conclusión del teorema.

Ejercicio 2

a) Dada $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, hallar valores de a y b en el intervalo (0,2) para los cuales existe c tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Exhibir c en cada caso. Verificar si en cada caso se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange.

b) Para cualquier par de números reales a y b en el intervalo (0,2), con a < b ¿es posible hallar c en el intervalo (a, b) tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

c) Demostrar que no hay un valor de c tal que $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$ ¿qué sucede con el resultado del teorema del valor medio? Justificar.

Tabla 2

Ejercicio	Habilidad	Acción
1	HC1	Identificar la derivada como pendiente de la recta tangente y el cociente incremental como la pendiente de la recta secante.
	HAP1	Aplicar la interpretación geométrica del teorema de Lagrange para poder mostrarlo gráficamente
	HAR1	Justificar que se cumplen las hipótesis del teorema
	HAP3	Calcular el o los puntos c que satisfacen la tesis del teorema.
2 a)	HC3	Dar y/o extraer significado de la expresión formal dada.
	HAP2-HAR1	Buscar intervalos donde se cumpla el teorema (es en sentido inverso porque, en general se da el intervalo de aplicación y el alumno debe estudiar condiciones y encontrar, en lo posible, el punto intermedio c). Justificar las hipótesis del mismo en esos intervalos
	HAP3	Calcular el punto intermedio c en los intervalos hallados.
2b)	HC3	Dar y/o extraer significado de la expresión formal dada.
	HAP2-HAR1	Buscar un intervalo en donde no se cumpla el teorema y justificar los pasos seguidos
2c)	HC3	Dar y/o extraer significado de la expresión formal dada.
	HAP2	Identificar que no se cumple la tesis del teorema
	HAR1	Justificar por qué el no cumplimiento de la tesis no contradice el teorema en cuestión.

Aclaramos que en estos ejercicios no encontramos la habilidad HC2 definida anteriormente. No agregamos el ejercicio que la involucraba por cuestión de espacio en el artículo.

3.2.4. La experiencia

La experiencia se llevó a cabo en un curso de la asignatura Análisis Matemático I de las carreras de Ingeniería Electrónica, Informática e Industrial de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM). El régimen de cursada de la asignatura es cuatrimestral. Luego que la docente a cargo explicó en forma expositiva tradicional el concepto de derivada, los alumnos comenzaron a asistir a uno de los Laboratorios de Computación de la Universidad para trabajar con las actividades. Formaron equipos de dos o tres personas, trabajaron bajo la modalidad taller con la guía de un docente y en espacios de dos horas cada uno. Esta tarea fue alternada con las clases teóricas y prácticas de la materia, siguiendo el cronograma establecido por la cátedra. La ejercitación consistió en actividades de refuerzo, que invitan a reflexionar y revisar los temas ya expuestos en clase.

3.2.5. Análisis de las producciones de los alumnos

Los alumnos se agruparon en 12 equipos de dos personas cada uno. Analizamos las producciones, realizadas en archivo *Mathematica*, que los estudiantes guardaron en la computadora en la que efectuaron la ejercitación.

Ejercicio 1

En este ejercicio dimos una función cúbica que los alumnos debían graficar en un determinado cuadro. Luego les preguntamos cómo podían mostrar, en el gráfico, que se cumple el teorema del valor medio. Después solicitamos los valores exactos del o los puntos intermedios “c”. Recordemos que esta fue la tercera actividad realizada por el grupo. Si comparamos el comportamiento reflejado en las primeras actividades, es notable la independencia adquirida respecto al docente (fue menor la cantidad de consultas que realizaron) y respecto a guiarse en forma auxiliar con lápiz y papel (prácticamente no lo usaron).

La primera acción que evidenciamos en todas las producciones estudiadas fue la de graficar la función en el cuadro solicitado. En esta oportunidad vimos actitudes como poner una regla en la pantalla para ver dónde estaban los puntos buscados, entre otras. El *Mathematica* no es un software educativo, no permite con un cursor crear líneas. Para poder mostrar gráficamente hay que ingresar las expresiones analíticas de lo que queremos graficar. De todas formas podían responder cuáles eran los pasos a seguir, pero solo dos equipos lo intentaron. Transcribimos sus respuestas:

Cuadro 1

“Se puede demostrar gráficamente el teorema debido a que la función es continua en el intervalo [-2,2] (es un polinomio) y es derivable en el intervalo (-2,2) (no existen puntos angulosos). Por lo tanto existe al menos un valor de c perteneciente a (-2,2) que cumple las condiciones del Teorema de Lagrange”   “Como f es continua en el intervalo [-2;2] y derivable en (-2;2), deducimos que existe un c en el cual la función es derivable. Se puede obtener la tangente en ese punto y comprobar de esa forma (según teorema de Lagrange) que la misma es paralela a la recta secante que une a con b.

Observemos que el primer equipo no contestó cómo mostrarían el resultado, sino que prácticamente enuncian el teorema en el intervalo dado. El segundo trató de expresar cómo lo haría, aunque no es del todo claro en la redacción. Seis de los doce equipos indican que se cumplen las hipótesis del teorema (HAR1). La mayoría justifica la continuidad y la derivabilidad por ser una función polinómica. Todos calcularon (con diferentes maneras de ingresar los datos), la pendiente de la recta secante y utilizan el comando *Solve* para calcular los puntos c, igualando la derivada de la función a dicha pendiente. Es decir que las habilidades de aplicación HAP1 y HAP3, en este caso, se manifestaron en todos los equipos.

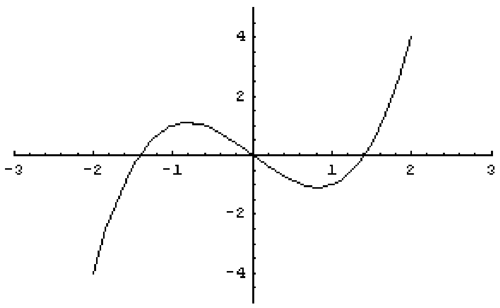
La habilidad HAP3 para hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados así luego graficar la situación, la manifestaron siete equipos. Estos son justamente los que luego pudieron graficar la función y las tres rectas halladas para mostrar gráficamente el resultado del teorema. En cuatro equipos notamos un avance considerable (respecto de las otras actividades) en cómo dejan asentada su producción. Explican más los pasos usando texto, esto evidencia que están adaptándose y aprendiendo a emplear esta nueva herramienta de trabajo. Mostramos una parte de la producción de uno de ellos:

Cuadro 2

$f[x\_] := x^3 - 2\,x$

Graficamos f(x)

$graf1 = Plot[\{x^3 - 2\,x\}, \{x, -2, 2\}, PlotRange \to \{\{-3, 3\}, \{-5, 5\}\}]$



- Graphics -

b) Decimos que se cumple el teorema del valor medio en el intervalo (-2,2) porque cumple con las condiciones especificadas: f(x) es continua en el intervalo [-2,2] porque es un polinomio, y todos los polinomios son continuos. Es derivable en el intervalo (-2,2),
f ' (x)= $3x^2$-2. Ahora pasaremos a calcular que f ' (c) = (f[b]-f[a])/(b-a)

$$\frac{f[2] - f[-2]}{2 + 2}$$

2

Para calcular la tangente de los puntos que cumplen con el teorema y así poder graficarlo, utilizamos la pendiente ya conocida para hallar los puntos c

$$Solve[3\,c^2 - 2 == 2, c]$$

$$\left\{\left\{c \to -\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{c \to \frac{2}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

si la pendiente es 2 en $y=mx+b$

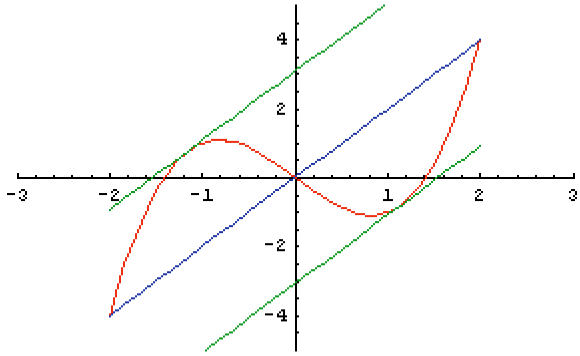
$$\text{Solve}\left[\frac{4}{3\sqrt{3}} == 2 * \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + b,\ b\right]$$

$$\left\{\left\{b \to \frac{16}{3\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

entonces y = 2 x + 16/(3 $\sqrt{3}$)

Luego calcularon la ecuación de la otra recta para poder completar el siguiente gráfico que lo realizan usando el comando *Show*

Cuadro 3



En consecuencia las producciones manifiestan buen desarrollo de las habilidades de aplicación y de interpretación geométrica en todos los equipos y, en la mitad de los mismos, un buen desarrollo de la habilidad de argumentación.

Ejercicio 2

En el ejercicio 2, primer ítem, dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, solicitamos indicar valores de a y b en (0,2), para los cuales existe c tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Luego pedimos calcular el valor de c y estudiar si se cumplen las hipótesis del teorema de Lagrange. Debido a que requerimos el intervalo de aplicación del teorema, consideramos que está puesta en juego la habilidad HAP2 (aplicación de resultados teóricos en orden inverso a lo explicado en clase), ya que usualmente en la ejercitación se da el intervalo y lo que se busca es el punto “c”.

De los doce equipos que participaron de esta actividad, ocho resolvieron este punto. Dos archivos fueron exactamente iguales, por lo que tenemos siete producciones.

En todas se evidenció la habilidad conceptual HC3, ya que asociaron el cociente planteado con el teorema de Lagrange, aunque también estaba indicado en la consigna del ítem.

En la mayoría de las resoluciones el primer paso fue el gráfico de la función (aunque no se pedía) y la explicación que no es continua en x = 1.

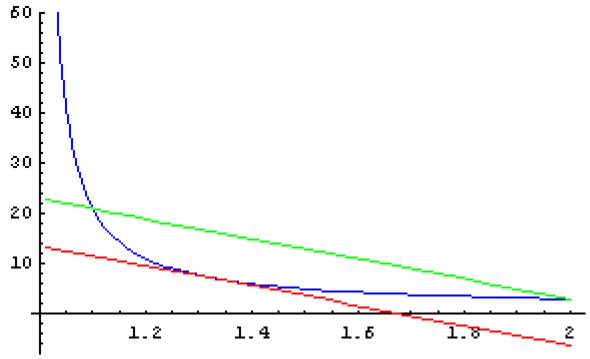
En la elección del intervalo para que se cumpla el teorema, encontramos seis respuestas en las que argumentan el por qué de la selección, manifestación satisfactoria de la habilidad HAR1 y también de HAP2. Transcribimos algunas respuestas:

Cuadro 4

"La función g(x) en x=1 es discontinua, por eso, al tomar valores entre el intervalo (0,2) debo elegir a y b, que dentro de su intervalo no contengan a 1 para que este intervalo sea continuo. El intervalo elegido es [0,1/2], verificaremos que cumple con las condiciones de Lagrange"
"Dado que la función no es continua en x = 1, el teorema se cumple para intervalos que no incluyan al 1. Por ejemplo:
a = 0.5
b = 0.75"
"Como la función presenta una discontinuidad en el intervalo (0;2) no se puede cumplir Lagrange. Sin embargo podemos encontrar un valor de c en dos intervalos cerrados que no incluyan el punto de discontinuidad de primera especie (x = 1).
Los intervalos que tomaremos para que se cumple el teorema son: [0,0.999] y [1.001,2]."
"Se cumple las condiciones del teorema debido a que reducimos el intervalo [0;2] que no cumplía continuidad (Asíntota vertical para x = 1). Utilizamos el intervalo [1.1;2]"

Todos los equipos plantearon correctamente con el comando *Solve* la ecuación que les permite hallar el valor de c en el intervalo que cada uno eligió (HAP3) Todos obtienen dos valores de c, uno sólo de los cuales pertenece al intervalo elegido. Sólo tres aclararon esta situación tomando como respuesta el que pertenece al intervalo. Un equipo también graficó lo hallado:

Cuadro 5



En el ítem b) preguntamos si para cualquier par de números a y b en (0,2) (a < b) era posible hallar c tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ningún equipo respondió bien a este inciso. Mientras pudieron encontrar un intervalo donde se cumplieron las hipótesis del teorema, explicar correctamente por qué y hallar el valor c que verificaba la igualdad, no pudieron hallar un intervalo donde no se cumplía la tesis. No consideramos como respuesta correcta la asignación a = 0 y b = 2, ya que a y b debían pertenecer a (0,2). Transcribimos la respuesta de uno dos equipos

Cuadro 6

“No es posible hallar c en el intervalo (a,b) dentro del intervalo (0,2) tal que:
f' (c)=(f[b]-f[a])/(b-a) mientras el intervalo (a,b) elegido contenga el numero 1 porque es el punto donde la función es discontinua. En conclusión, mientras un intervalo contenga el número 1, no cumplirá con el teorema de Lagrange en dicha función.”

“No, por ejemplo el teorema no se cumple para a = 0 y b = 2, ya que la función no es continua en [0,2]

Notemos que para estos alumnos, el no cumplimiento de una de las hipótesis significa que no se verificará la tesis, operando como si el condicional directo $p \Rightarrow q$ fuera equivalente con contrario $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Por último pedimos demostrar que no hay un valor de c tal que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ y preguntamos qué sucede entonces con el resultado del teorema del valor medio.

Un equipo no resolvió el ítem y los once equipos restantes, como primera medida, plantearon correctamente la ecuación utilizando el comando *Solve* (habilidad de aplicación HAP3). Tres equipos indicaron que el resultado obtenido no era un número real. Transcribimos estas respuestas:

Cuadro 7

“No es aplicable el teorema ya que encontramos resultados imaginarios”
“No existe valor de c en el intervalo (0;2) que cumpla con estas condiciones. Concluyendo, no existe punto en el cual su tangente sea paralela a la secante que une 0 con 2”
“Te da valores fuera del conjunto de los □ al ser el denominador positivo por estar elevado al cuadrado y el numerador negativo es imposible que te de un valor positivo como 2”

Sólo en una de las respuestas advirtieron la relación con el teorema.

Cuatro equipos señalaron la discontinuidad que presenta la función en x = 1 como aclaración de por qué el resultado de la ecuación planteada no era un número real. De acuerdo a la redacción de sus argumentos incurren en el error de considerar que si no se cumple alguna de las hipótesis entonces no se cumple la tesis, es decir, tomar como verdadero el condicional contrario: $\neg p \Rightarrow \neg q$ en vez de observar que si no se cumple la tesis, es porque alguna de las hipótesis no se ha cumplido. Puede ser que se deba a un error de redacción o que la equivalencia entre condicional directo y contrarrecíproco no esté clara. Transcribimos algunas respuestas:

Cuadro 8

“El valor c no está definido en el campo de los reales, debido a que en el intervalo [0,2] existe una discontinuidad esencial en x = 1”

“No existe valor de c en reales, ya que no se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange, o sea, la función no es derivable ni continua**.**

Conclusiones

- Los alumnos manifestaron buen nivel de desarrollo de las habilidades conceptuales. Por un lado todos los equipos interpretaron geométricamente que el cociente planteado es la pendiente de la recta secante que une los dos puntos y que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto de abscisa x = c (HC1). La mayoría acompañó las explicaciones con un gráfico donde visualizaron la recta secante y las tangentes paralelas, situación favorecida por el uso de la computadora. Todos fueron "extractores" de significados cuando identificaron el cociente planteado en el ejercicio 2 con la tesis del teorema del valor medio (HC3)

- Los alumnos manifestaron buen nivel de desarrollo de la habilidades de aplicación HAP1 y HAP3 cuando solicitamos aplicar el Teorema de Lagrange en un intervalo dado, buscando los valores intermedios c. Observemos que evaluamos sólo el planteo de las ecuaciones, ya que la resolución la hace la computadora. La habilidad de argumentación HAR1 que debe manifestarse previamente (estudiar que la función dada cumple con las hipótesis del teorema), tiene un buen nivel de desarrollo en la mitad de los equipos, estando ausente en los demás. Es decir, la mitad de los estudiantes obvia el estudio de las hipótesis del teorema, pasando directamente a la aplicación del mismo mediante el planteo y resolución de la ecuación plasmada en la tesis.
- Muy buen desarrollo de las habilidades HAR1 y HAP2 en los alumnos que resolvieron el ejercicio 2 a) (siete equipos de doce). En este caso no sólo se limitaron a dar el intervalo solicitado (justificando la respuesta) y el o los puntos "c" de la tesis del teorema, sino que también algunos graficaron la situación planteada. En cuanto a la habilidad de argumentación, el gráfico de la función dada ayudó a buscar intervalos donde la discontinuidad esencial no está presente.
- Estas mismas habilidades no se manifestaron en el ejercicio 2 b), donde los alumnos tenían que encontrar un intervalo donde no se cumple el teorema. Pensamos que, cuando el razonamiento lógico es directo, del tipo $p \Rightarrow q$, no trae tantas complicaciones como cuando es del tipo $\neg q \Rightarrow \neg p$.
- Respecto al último ítem del ejercicio 2, los alumnos fueron capaces de plantear la ecuación en cuestión y resolverla (HAP3), pero la mayoría no se da cuenta que la existencia de raíces complejas no contradice el teorema, por lo que consideramos que, en este caso, no se manifiesta la habilidad HAR1.

Pensamos que las habilidades conceptuales y de aplicación son más sencillas de fomentar con el uso de tecnología que las habilidades de argumentación. En ciertas ocasiones existe una ruptura entre lo "que se ve" o se puede "operar fácilmente" y el razonamiento lógico. Esto nos invita a continuar con el diseño de actividades usando software de manera de promover no sólo la experimentación, exploración y visualización, sino también habilidades de argumentación o justificación.

Bibliografía

Ángel, J. y Bautista, G. (2001). *Didácticas de las matemáticas en enseñanza superior: la utilización de software especializado.* Extraído el 15 de julio de 2009 de http://www.uoc.edu/web/esp/art/uoc/0107030/mates.html

Castillo, R. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11 (2),* 171-194.

Contreras de la Fuente A., Font Moll V., García Armenteros M., Luque Cañada L., Marcolini Bernardi M., Ordoñez Cañada L., Ortega Carpio M., Sánchez Gómez C. (2005). Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario*. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM.* 9, 271-282.

Cuicas Ávila M.; Debel Chourio E., Casadei Carniel L., Alvarez Vargas Z. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Actualidades Investigativas en Educación*, *7 (2),* 1-34. Extraído el 7 de julio de 2009 de http://revista.inie.ucr.ac.cr

Depool R., Camacho M. (2001). *Influencias en el uso de las nuevas tecnologías en la actitud y rendimiento académico de los estudiantes de Cálculo*. Extraído el 23 de julio de 2009 de http://tecnologiaedu.us.es/eusXXI/Programa/paginas/regionlarayaracuy/Depol%20y%20Camacho.doc

Dolores C. (2000): “Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada” En R. Cantoral (coordinador): *El futuro del cálculo infinitesimal.* Capítulo V. Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Falsetti, M., Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. (2009). Estudio de Habilidades Matemáticas para el Cálculo Diferencial en estudiantes de Ingeniería. En J. E. Sagula (Ed), Memorias del 10mo Simposio de Educación Matemática (pp. 303-321). Chivilcoy: EMAT. Formato CD ROM

Formica, A.; González, V. y Rodríguez, M. (2009). Habilidades matemáticas en estudiantes avanzados de Profesorado de Matemática. En J. E. Sagula (Ed), Memorias del 10mo Simposio de Educación Matemática (pp.1441-1451). Chivilcoy: EMAT. Formato CD ROM.

Güichal E., Guala G., Malet A., Cornejo Endara R., Pérez Millán C., Oscherov V. (2009) Laboratorio de Matemática: uso de nuevas tecnologías. *VII Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas.*

Hernández Fernández H., Delgado Rubí J.R., Fernández de Alaíza B., Valverde Ramírez L., Rodríguez Hung T. (1998). *Cuestiones de didáctica de la Matemática.* Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones: Rosario (Argentina).

Jonassen D.,Carr Ch., Hsiu-Ping Y.(1998). *Computers as mindtools for enganging learners in critical thinking*. Extraído el 10 de enero de 2010 de http://www.siue.edu/education/techready/5_Software_Tutorials/5_AncillaryPages/Mindtools.pdf

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *The Use of Technology* in *the Learning and Teaching of Mathematics*. Extraído el 4 de agosto de 2009 de http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=6360&itemid=6360&linkidentifie=id

Nickerson R., Perkins D. y Smith E. (1987). *Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual.* Temas de Educación. Paidós. M.E.C.: Barcelona.

Ramos Rodríguez E., Baquedano Jer S. (2006). Uso de tecnología para la enseñanza actual de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 8, 127-131.

Rodríguez Núñez, Y., Acosta, J., Suárez, R., Nicolás, C., Quintana Álvarez, J., Brito González, R. y González Alonso, J. (2005). La matemática en el desarrollo de las habilidades intelectuales. Recuperado el 15 de noviembre de 2009 de http://www.revistaciencias.com/publicaciones/EEkEAAyZuyxkEXvjRd.php

Stewart J. (1999). *Cálculo. Conceptos y contextos.* International Thomson Editores: México.

D. Tall, M. Fusaro Pinto. (2002). *Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning.* Extraído el 7 de agosto de 2009 en http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999g-pinto-pme.pdf

Taxonomía de Bloom (1953) Extraído el 4 de mayo de 2009 de http://josecardenas.media.officelive.com/Documents/taxonomia_de_Bloom_1953.pdf

Vílchez Quesada (2007). Sistemas expertos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 2 (3),* 45-67.

Zabala, A. (2007). Los enfoques didácticos. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé y A. Zabala, (Eds), El constructivismo en el aula (18va. ed, pp.125-161). Barcelona: Editorial GRAÓ.

Betina Williner: Nació en Santa Fe (Argentina). Licenciada en Matemática Aplicada (Universidad Nacional del Litoral: UNL). Posgrado en Educación a Distancia (Universidad CAECE). Alumna de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y naturales, orientación Matemática (Universidad Nacional del Comahue). A espera de defensa de tesis: “Incidencia de la computadora con software específico de Matemática en el desarrollo de habilidades matemáticas”. Directora de tesis: Dra. Marcela Falsetti. Integrante de los proyectos de investigación “Taller de desarrollo de habilidades para el aprendizaje matemático” (2007-2009) y “Entorno de aprendizaje hipertextual y habilidades matemáticas” (2010) en el Departamento de Ingeniería e investigaciones tecnológicas de UNLaM. Profesora Adjunta (UNLaM y UTN regional Haedo). Profesora Asociada (Universidad de Morón).