Diciembre de 2011, Número 28, páginas 143-157
ISSN: 1815-0640

Explorando erros na resolução de equações: um caminho para a formação do professor de Matemática

Helena Noronha Cury, Alessandro Jacques Ribeiro, Thaísa Jacintho Müller

Resumen

En este trabajo, presentamos el análisis de los errores cometidos por estudiantes de cursos de Licenciatura en Matemáticas en la solución de una cuestión acerca de ecuaciones. Los datos son analizados utilizando como marco teórico algunas investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y el concepto de conocimiento pedagógico del contenido. El pequeño número de respuestas correctas proporcionadas por participantes de la encuesta, además de mostrar una falta de conocimiento acerca de las ecuaciones y sus procesos de resolución, alerta sobre la importancia de que los formadores de profesores de matemáticas también tienen en cuenta el conocimiento pedagógico del contenido. Es necesario dar a los futuros profesores la oportunidad de discutir las causas de los errores, para que puedan anticiparse a las dificultades de sus alumnos y cómo superarlas

Abstract

In this paper, we present the analysis of errors made by students of mathematics teaching courses when they are solving a question about equations. Data were discussed using as framework some researches on algebra teaching and learning, as well as the concept of pedagogical content knowledge. The small number of correct answers provided by survey participants, as well as the lack of knowledge about equations and their resolution processes, point out to the importance of also take into account the pedagogical content knowledge, by the mathematics teaching courses professors. It is necessary to provide to the future teachers opportunities to discuss the causes of errors, to enable them to anticipate students' difficulties and how to overcome them..

Resumo

Neste artigo, é apresentada a análise de erros cometidos por alunos de cursos de Licenciatura em Matemática na resolução de uma questão sobre equações. Os dados são discutidos utilizando-se como referencial teórico algumas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra, bem como o conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo. O pequeno número de respostas corretas, apresentadas pelos participantes da pesquisa, além de mostrar a falta de conhecimento sobre equações e seus processos de resolução, alerta para a importância de que os formadores de professores de Matemática também levem em conta o conhecimento pedagógico do conteúdo. É necessário proporcionar aos futuros mestres oportunidades para discutir as causas dos erros, para habilitá-los a antecipar as dificuldades dos seus alunos e saber como superá-las.

Introdução

Entre os conhecimentos sobre os quais os professores devem ter domínio, merecem destaque os que formam o núcleo principal da formação matemática - Álgebra, Análise e Geometria. Dificuldades apresentadas pelos docentes, em especial em conceitos como o de equação, que são ensinados na Educação Básica, constituem-se em entraves para os cursos de Licenciatura em Matemática, pois tais dificuldades podem acarretar consequentes problemas na compreensão de Matemática por parte de seus alunos.

Desde 2010, está sendo desenvolvido um projeto de pesquisa[1] que tem como objetivo geral aprofundar os estudos sobre as possibilidades do uso da análise de erros como abordagem de pesquisa e de ensino em Educação Matemática, em cursos de formação inicial e continuada de professores. Um dos objetivos específicos do projeto consiste em investigar erros cometidos por alunos ou por professores de Matemática e, para atendê-lo, foi planejado e aplicado um teste a alunos de cursos de Licenciatura em Matemática de dez Instituições de Ensino Superior (IES) do Brasil, escolhidas de forma intencional. O teste é composto por cinco questões de Matemática, sendo uma delas referente à resolução de equações algébricas.

Neste artigo, trazemos a análise das respostas dos licenciandos a essa questão e as discutimos à luz de pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra e das ideias de Shulman (1986) sobre conhecimento pedagógico do conteúdo, aprofundadas por Ball, Thames e Phelps (2008).

Revisão de Literatura

Ao analisar e refletir sobre resultados de diferentes pesquisas em Educação Matemática, em particular aquelas que discutem o ensino e a aprendizagem de Álgebra, observa-se que o debate contempla diversos enfoques e pontos de vista. No presente artigo, interessa-nos discutir aquelas que investigam o conhecimento dos professores sobre Álgebra e sobre equações (Dreyfus e Hoch, 2004; Attorps, 2003; Ribeiro, 2008; Barbosa, 2009).

Attorps (2003) desenvolveu uma pesquisa com 10 professores secundários na Suécia, sendo cinco deles recém graduados e cinco, experientes, por meio de entrevistas e questionários. Na análise das respostas dos professores, a autora observou que muitos deles partem do pressuposto de que seus alunos já conhecem o conceito de equação e preocupam-se em ensinar procedimentos mecânicos de resolução.

Attorps (2003) observou que grande parte dos professores têm uma concepção de equação muito ligada à questão procedimental – às técnicas e procedimentos para sua resolução. Outra questão relevante à temática aqui apresentada está no fato de essa pesquisadora ter observado, durante as entrevistas, que muito do que havia sido apresentado nos questionários e nos discursos de seus professores, em relação às suas concepções de equação, tinha como origem a forma como eles aprenderam – suas experiências enquanto alunos – a trabalhar com o processo de resolução de equações.

[1] Processo CNPQ 310947/2009-0

Ribeiro (2008) identificou diferentes formas de compreender e de utilizar o conceito de equação. Para ele, os “multisignificados de equação” são diferentes formas de ver, de interpretar e de tratar o conceito de equação, identificadas e categorizadas conforme o quadro 1, a seguir:

Quadro 1 – Multisignificados de equação
Fonte: Adaptado de Ribeiro, 2008, p. 112

Significado	Características
Intuitivo-Pragmático	Equação concebida como noção intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades. Utilização relacionada à resolução de problemas de ordem prática originários de situações do dia-a-dia.
Dedutivo-Geométrico	Equação concebida como noção ligada às figuras geométricas, segmentos e curvas. Utilização relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas.
Estrutural-Generalista	Equação concebida como noção estrutural definida e com propriedades e características próprias, considerada por si própria e operando-se sobre ela. Utilização relacionada com a busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza.
Estrutural-Conjuntista	Equação concebida dentro de uma visão estrutural, porém diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos.
Processual-Tecnicista	Equação concebida como a sua própria resolução – os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Diferentemente dos estruturalistas, não enxergam a equação como um ente matemático.
Axiomático-Postulacional	Equação como noção da Matemática que não precisa ser definida, uma ideia a partir da qual outras ideias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Utilizada no sentido de Noção Primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana.

Dando continuidade aos estudos desenvolvidos por Ribeiro (2008), a pesquisa de Barbosa (2009) teve por objetivo identificar se e como os diferentes significados de equação, categorizados por Ribeiro, se manifestavam nas concepções de professores de Matemática. Foram elaboradas situações matemáticas específicas para a coleta de dados e os professores foram entrevistados por Barbosa (2009), seguindo um roteiro fundamentado em tais situações matemáticas. Dentre os principais resultados foi identificada incidência dos significados Intuitivo-Pragmático e Processual-Tecnicista nas concepções dos professores entrevistados. Esses docentes encontraram dificuldades para tratar as situações matemáticas propostas, quando não se recordavam de uma fórmula ou de um algoritmo de resolução.

Embora tais professores também utilizassem o significado Intuitivo-Pragmático, pareciam não se sentir tão à vontade como os alunos para usar "estratégias aritméticas" (Dorigo, 2010). Vale ressaltar, dentre os resultados apontados por Barbosa (2009), no que se refere à imagem de conceito (Tall; Vinner, 1981) dos professores por ele investigados:

> Percebemos em nossa pesquisa que a presença de diferentes significados de equação na imagem de conceito dos professores ainda é bastante limitada, estando muito vinculada à ideia do princípio de equivalência e principalmente a técnicas de resolução e à existência de incógnita. (Barbosa, 2009, p. 177)

À parte das pesquisas acima discutidas – que contemplam os conhecimentos dos professores que ensinam Álgebra – Doerr (2004) destaca a importância de se planejar e desenvolver (novas) pesquisas que tenham a preocupação de investigar os conhecimentos do professor de Matemática que ensina Álgebra. Ela aponta a "carência de um corpo substancial de pesquisas sobre o conhecimento e a prática do professor no ensino de Álgebra*"*. (Doerr, 2004, p. 268)

Exemplos de investigações sobre conhecimentos de Álgebra, desenvolvidas por pesquisadores de diferentes nacionalidades, sob diferentes referenciais teóricos, são as análises de dificuldades apresentadas por estudantes de qualquer nível de ensino. (Booth, 1984, 1995; Tirosh; Even; Robinson, 1998; Ribeiro, 2001; Ben Nejma, 2010; Ferreyra et al., 2010). Conforme a expressão usada por Borasi (1996), os erros, analisados pelos professores, podem ser usados como "trampolins para a pesquisa e para o ensino", pois fornecem informações sobre dificuldades dos estudantes e permitem que novas estratégias de ensino sejam planejadas, para auxiliar os alunos na superação de tais dificuldades.

Se não houver discussões sobre erros cometidos por estudantes da Educação Básica, em alguma disciplina ou alguma prática dos cursos de Licenciatura em Matemática, os futuros professores perderão a oportunidade de aprender como lidar com esses erros ou como ensinar o conteúdo correspondente, de forma a superar as dificuldades. Além disso, também há preocupação com os erros cometidos pelos professores em formação, pois, se não forem detectados e discutidos, podem influenciar a compreensão de seus futuros alunos sobre determinado conceito. (Cury; Bisognin; Bisognin, 2011).

Shulman (1986), ao comparar critérios para avaliação de professores em vários estados norte-americanos, no final do século XIX e na década de 80 do século XX, espanta-se com a falta de indicação de categorias relativas a disciplinas e conteúdos. Nas pesquisas desenvolvidas por ele e seus colegas, essa ausência de foco no conteúdo de ensino foi chamado de "problema do paradigma perdido". Nos testes de avaliação de professores, há muitas perguntas sobre o comportamento dos docentes em sala de aula, mas muito poucas sobre o conteúdo das aulas, as questões apresentadas, as explicações fornecidas.

Burrill (1997), ao assistir a uma apresentação de projetos desenvolvidos por professores de Matemática em escolas norte-americanas, também questionou a falta de informações sobre o que os alunos estavam estudando e o que estavam aprendendo de Matemática, pois só lhe eram mostrados os recursos usados em sala de aula.

Ao discutir o conhecimento do professor, Shulman (1986) propõe a distinção entre três categorias de conhecimento do conteúdo: conhecimento do conteúdo da disciplina, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. Das três categorias, a que despertou maior interesse por parte de pesquisadores é a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo (Ball; Thames; Phelps, 2008). Para Shulman (1986), este constructo inclui, entre outras ideias, a compreensão do que faz o ensino de um determinado tópico ser fácil ou difícil e das concepções e ideias preconcebidas que os estudantes trazem para a sala de aula antes do ensino de um determinado conteúdo. Conforme Shulman (1986, p. 10), há um número crescente de investigações sobre "concepções errôneas dos estudantes e sobre as condições de ensino necessárias para superar e transformar essas concepções iniciais"[2].

Ball, Thames e Phelps (2008) revisaram estudos que têm discutido as propostas de Shulman e consideram que houve pouco progresso no tocante a desenvolver uma fundamentação teórica coerente sobre o conhecimento do conteúdo para ensinar. Dessa forma, propuseram uma nova abordagem, enfocando o conhecimento matemático para o ensino, e explicam que resolveram avaliar <u>a forma</u> como os professores precisam saber o conteúdo que ensinam, visto ser consensual a ideia de que eles necessitam conhecer os tópicos e procedimentos ensinados.

Para exemplificar suas ideias, os autores apresentam um exemplo de erro cometido por estudantes de séries iniciais no algoritmo da subtração, em que o aluno diminui sempre o algarismo menor do maior, independente de estar no minuendo ou no subtraendo. Segundo eles, os professores sabem resolver o exercício e sabem que tal resposta é incorreta, mas ensinar envolve mais do que identificar respostas incorretas. O professor deve ser capaz de procurar as fontes do erro. Efetivamente, "a análise de erros é uma prática comum entre os matemáticos no decorrer de seu próprio trabalho; essa tarefa, no ensino, difere somente pelo fato de que enfoca os erros produzidos pelos alunos." (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 397).

A partir de suas investigações, Ball, Thames e Pheps (2008) propõem que o conhecimento do conteúdo, apresentado por Shulman, seja subdividido em *conhecimento comum do conteúdo* (CCK)[3] e *conhecimento especializado do conteúdo* (SCK)[4]; por sua vez, o conhecimento pedagógico do conteúdo pode ser dividido em *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* (KCS)[5] e *conhecimento do conteúdo e do ensino* (KCT)[6].

---

[2] A tradução dos trechos em língua inglesa foi realizada pelos autores.

[3] *Common content knowledge.*
[4] *Specialized content knowledge.*
[5] *Knowledge of content and students.*
[6] *Knowledge of content and teaching.*

Para cada categoria criada, os autores apresentam exemplos. Assim, reconhecer uma resposta errada é um *conhecimento comum do conteúdo* (CCK); buscar padrões nos erros dos estudantes é um *conhecimento especializado do conteúdo* (SCK); ter familiaridade com erros comuns, cometidos pelos alunos, e saber quais desses erros são mais frequentes é um *conhecimento do conteúdo e dos estudantes* (KCS); e selecionar uma abordagem de ensino que seja capaz de auxiliar os alunos a superarem suas dificuldades é um *conhecimento do conteúdo e do ensino* (KCT).

Peng e Luo (2009) consideram que já há muitos estudos sobre conhecimento do professor, em especial aqueles que enfocam o conhecimento pedagógico do conteúdo, mas que ainda há falta de discussões sobre a forma como os professores lidam com os erros de seus alunos. Mas para aprender a lidar com os erros, é necessário que esse conhecimento seja discutido em cursos de formação do professor.

Borasi (1996) apresenta uma experiência de uso de erros em um curso para professores de Matemática em serviço. A investigadora coletou definições de circunferência dadas por alunos de Matemática e apresentou-as aos professores, para que eles as classificassem. Primeiramente os participantes foram separados em três grupos, que enfocaram as definições sob perspectivas distintas.

O primeiro grupo separou as definições de circunferência em “aceitáveis” e “não-aceitáveis”; o segundo grupo evitou avaliar acertos e erros, porque considerou que não havia informações sobre o contexto, e preferiu classificar as definições segundo palavras-chave. O terceiro grupo não chegou a um acordo sobre a classificação possível. Essa primeira atividade já mostrou que não havia consenso sobre a correção das definições.

Em seguida, Borasi propôs aos professores que, a partir da classificação do segundo grupo, aprofundassem o estudo sobre os tipos de definição: baseadas na Topologia, na Geometria Projetiva, na Geometria Analítica, na Geometria Diferencial ou em descrições puramente visuais. Esse trabalho, além de mostrar aos professores os tipos de erros, também lhes permitiu verificar as origens das definições e debater a própria noção de definição.

Essa experiência relatada por Borasi (1996) é um exemplo de como auxiliar os professores a ter familiaridade com os erros dos alunos e a planejar estratégias para discuti-los.

Portanto, nossa opção pela análise dos erros cometidos por alunos de cursos de Licenciatura em Matemática, relatada neste artigo, vem ao encontro das ideias de Borasi (1996) e de Ball, Thames e Phelps (2008): procuramos estabelecer os erros cometidos por esses alunos, buscar os padrões desses erros e a frequência com que são cometidos. Trazendo esses resultados para os docentes desses cursos de formação de professores, por meio da divulgação de nossas pesquisas, estamos mostrando que há problemas relacionados com o conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) e com o conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT). Assim, parece-nos necessário aprofundar as pesquisas, para buscar maneiras de auxiliar os futuros professores a superarem suas dificuldades.

Procedimentos Metodológicos

Das dez IES escolhidas para coleta dos da dos, uma localiza-se na região Norte, duas na região Nordeste do Brasil, três na região Sudeste e quatro na região Sul. Em cada IES, entramos em contato com um professor do curso de Licenciatura em Matemática, solicitando que aplicasse o teste em uma de suas turmas, do segundo ano de curso em diante. Os dez docentes que aceitaram nosso convite ocuparam um ou dois períodos de aula (entre 50 e 90 minutos) para a aplicação. A amostra intencional foi composta de 141 estudantes, aos quais solicitamos autorização para a utilização das respostas na investigação. Não houve identificação dos estudantes nem das IES envolvidas.

A questão referente à resolução de equação, objeto desta análise quanti-qualitativa, tem o seguinte enunciado:

¿Quantos pares (x,y) de números reais existem, tais que $x+y=xy=\frac{x}{y}$*?*

Esperávamos que os participantes, alunos de cursos de Licenciatura em Matemática, cursando pelo menos o terceiro semestre, já tivessem desenvolvido habilidades de resolução de equações que lhes permitissem solucionar a questão. Assim, supúnhamos que suas respostas apresentassem um padrão semelhante ao que descrevemos a seguir, com mais ou menos passos.

Em primeiro lugar, observemos que não podemos ter $x=0$, pois nesse caso seguiria que $x.y=0$, para qualquer y real. Além disso, teríamos $x+y=0+y=0$ e, portanto, $y=0$. Mas y não pode ser zero, pois a expressão $\frac{x}{y}$ não estaria definida.

Então, tomando a segunda igualdade, temos:

$$x.y=\frac{x}{y}\Rightarrow x.y^2=x\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=1 \qquad \text{ou} \qquad y=-1$$

Notemos que a simplificação $x.y^2=x\Rightarrow y^2=1$ é possível porque já sabemos que $x\neq 0$. Substituindo $y=1$ ou $y=-1$ nas outras duas equações, temos:

1) $x+y=\frac{x}{y}\Rightarrow (x+y).y=x$. Se $y=1$, temos: $(x+1).1=x\Rightarrow x+1=x\Rightarrow 1=0$ (absurdo)

Por outro lado, se $y=-1$, então: $(x+1).(-1)=x\Rightarrow -x+1=x\Rightarrow 2.x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

2) $x+1=x.y$. Se $y=1$

Se $y=1$, então: $x+1=x$ ou seja 1= 0 (absurdo)

Por outro lado, se $y=-1$, temos: $x-1=-x\Rightarrow 2.x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Logo, o único par (x,y) que satisfaz a condição dada é $\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

Para a análise dos dados obtidos a partir das respostas dos alunos, empregamos a técnica de análise de conteúdo dos erros, baseada em Bardin (1979) e realizada em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na primeira fase, os testes respondidos foram identificados e fotocopiados, para, em seguida, serem recortadas as soluções para cada questão. As respostas válidas (que não estão em branco) de cada questão foram coladas em folhas em branco, permitindo a leitura conjunta de todas as respostas. Esse conjunto de questões organizadas forma o *corpus*, sobre o qual é realizada a análise das respostas.

Na correção das soluções de cada questão, seguimos os procedimentos adotados na correção de questões de avaliações como o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) e consideramos quatro categorias: resposta correta (código “2”), resposta parcialmente correta (código “1”), resposta incorreta (código “0”) e ausência de resposta (código “9”).

Foi considerada correta a resposta em que o aluno obteve o par (½,-1), a partir do desenvolvimento das duas igualdades e sem erros no decorrer do processo. Como respostas parcialmente corretas, foram consideradas aquelas em que o aluno resolveu corretamente as equações, obteve o par (½,-1), mas concluiu a solução com alguma observação equivocada.

Como respostas erradas, foram consideradas aquelas em que o aluno não conseguiu encontrar um par que satisfizesse a dupla igualdade ou resolveu incorretamente as equações, tendo ou não obtido solução. Finalmente, por ausência de resposta entendemos aquelas em que o aluno deixou em branco o espaço destinado à solução.

Para ilustrar cada classe de resposta, reproduzimos a resolução e referimo-nos ao autor usando uma letra e um número, para evitar identificação, optando, ainda, por indicar cada um pela forma masculina, “o aluno”.

A segunda fase da análise, de exploração do material, envolveu o processo de unitarização e classificação das 89 respostas parcialmente corretas ou incorretas, lidas novamente para definir as categorias de erro. Os critérios de classificação foram determinados *a posteriori*, a partir do próprio material, com o agrupamento das respostas semelhantes. Esse agrupamento foi feito duas vezes: na primeira vez, foi elaborada uma listagem de todos os tipos semelhantes de erro e na segunda, foi feito o agrupamento propriamente dito, com o refinamento das classes de erros.

Já na fase de tratamento dos resultados, foi elaborado um texto-síntese para cada classe, com apoio de exemplos retirados do próprio *corpus*.

Apresentação e Análise dos Dados

As respostas dos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática foram classificadas segundo os critérios acima indicados e o número de respondentes de cada classe é apresentado no Quadro 2, a seguir:

Quadro 2 – Distribuição das respostas por classe

Classe	N.	%
2	18	13
1	3	2
0	86	61
9	34	24
Total	**141**	**100**

Na Figura a seguir, apresentamos um exemplo de resposta considerada correta:

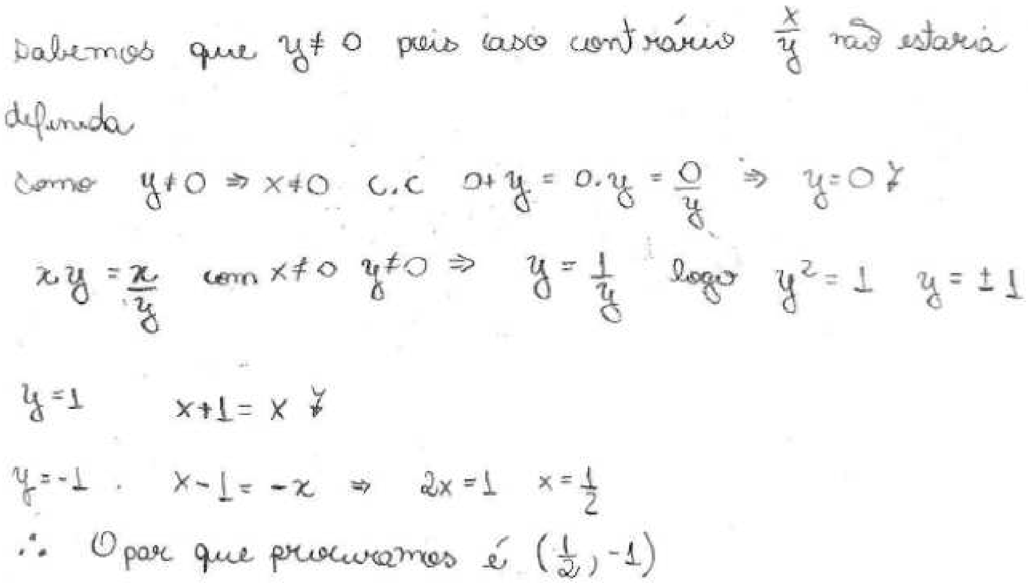

Figura 1. Resposta correta, do aluno A5

Também foram consideradas corretas as respostas em que o participante não fez qualquer suposição sobre os valores de x e y, ou seja, não observou que, para existir solução, deve-se ter $y \neq 0$ e, dessa forma, $x \neq 0$. É o caso, por exemplo, da resposta do aluno A100, indicada na Figura 2:

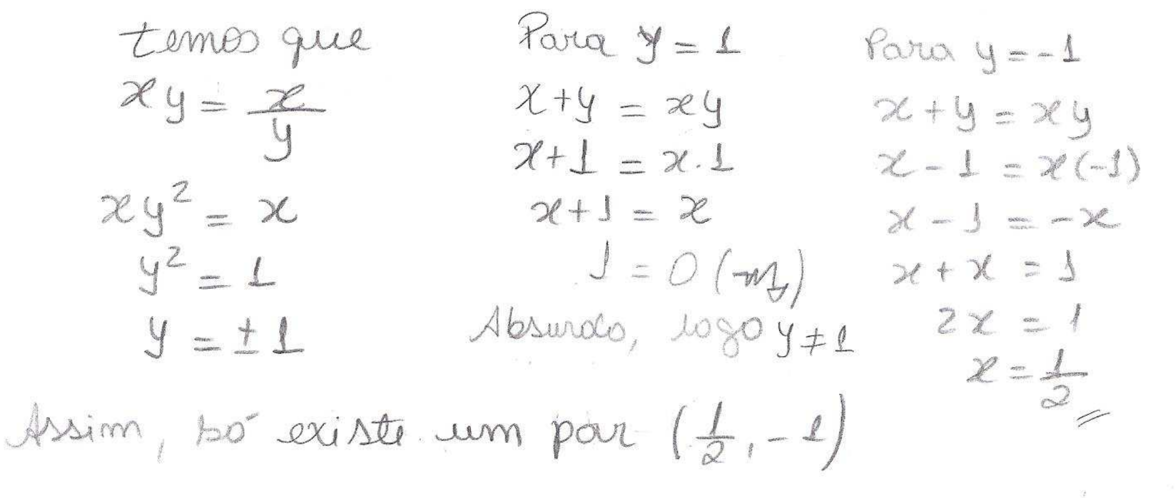

Figura 2. Resposta do aluno A100

As três respostas parcialmente corretas – apresentadas a seguir – têm erros distintos, por isso não foram categorizadas. Nos três casos, os alunos desenvolveram corretamente a questão, trabalhando separadamente sobre cada igualdade, obtiveram o par (½,-1) como resposta, mas acrescentaram alguma observação equivocada.

O Aluno A14 respondeu que a dupla igualdade vale para os pontos (½,-1) e (-1,½). Já o aluno A123 concluiu : “Mas, também k(½,-1), com k ∈ ℕ, será solução. Logo existem infinitos pares ordenados”. O aluno A131 escreveu ao final: “Concluo que todas as frações equivalentes a ½ são soluções, logo a quantidade de pares serão compostos com x tal que x>0 e de frações equivalentes a ½ e y=-1”.

As 86 respostas incorretas foram classificadas em cinco categorias:

A) Compreende as respostas em que o aluno informa que não existem números reais que satisfaçam as equações, sem mostrar cálculos ou testes para justificar essa resposta. Também são incluídos nesta categoria aquelas respostas em que o aluno apenas apresenta (incorretamente) um ou mais pares de reais que seriam solução, mas não os testa ou não desenvolve a solução. É exemplo desta categoria a resposta do aluno A13[7]: “Não existem números reais que satisfaçam essa equação. Portanto, o número de pares é igual a zero”.

B) Compreende as respostas em que o aluno destaca uma, duas ou três das equações, tenta resolvê-las, mas não consegue porque faz algum erro em uma das etapas da resolução ou porque não determina, a partir de uma das equações, valores de x ou y para testar em outra. São exemplos as seguintes respostas, dos alunos A88 e A116:

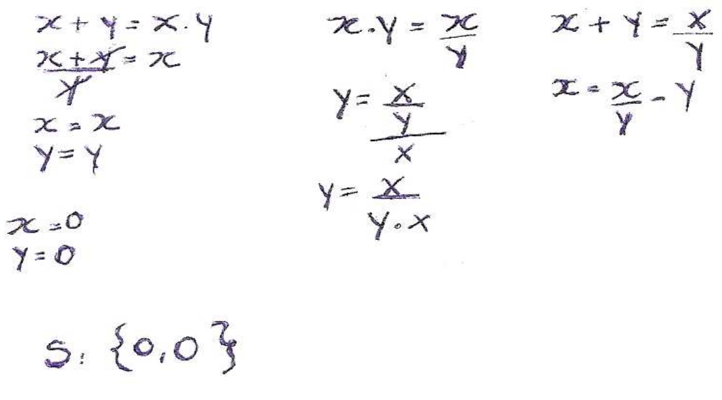

Figura 3. Resposta do aluno A88

[7] Em alguns casos não foi possível reproduzir a resposta, porque foi escrita a lápis e a imagem não ficou nítida.

$$x+y = xy = \frac{x}{y}$$
$$x+y = xy$$
$$x = xy - y$$
$$x - xy = -y$$
$$(1-y)x = -y$$
$$x = \frac{-y}{1-y}$$
$$x = \frac{-y}{1} + \frac{y}{y}$$
$$x = -y$$

$$xy = \frac{x}{y}$$
$$x = \frac{\frac{x}{y}}{y}$$
$$x = \frac{x}{y^2}$$
$$-y = \frac{x}{y^2}$$
$$-y^3 = x$$
$$x = -y^3$$

Figura 4. Resposta do aluno A116

C) Compreende as respostas em que o aluno faz alguma suposição sobre valores de x ou y que satisfazem uma ou mais das equações, mas não desenvolve a solução ou, em alguns casos, sequer testa os valores. É exemplo desta categoria a resposta do aluno A8: “A expressão $x.y = \frac{x}{y}$ só pode ser satisfeita se $y = 1$ ou se $x = 0$. Porém no caso $x + y = x.y$, $y = 1$ não satisfaz a equação logo $x = 0$. Mesmo assim não há nenhum real que utilizado em y satisfaça a equação. Logo S={ }”.

D) Compreende as respostas em que o aluno apenas copia as equações dadas ou faz algum traçado, como é o caso do aluno que esboçou um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

E) Compreende as respostas em que o aluno resolve por tentativa, organizando um quadro com valores de x e y ou tomando pares de inteiros e testando nas equações. Como exemplo, temos a resposta do aluno A38, que escreveu:

(1,2)=1+2=1.2=1/2 (F)

(2,1)=2+1=2.1=2/1 (F)

(1,1)=1+1≠1.1=1/1 (F)

(2,2)=2+2=2.2= 2/2

Outro exemplo de tentativa de substituição é a construção de um quadro, para testar valores, como fez o aluno A6: $y = 1$

Quadro 3 – Resposta do aluno A6

x	y	$x+y$	xy	x/y	*Resultado*
0	0	0	0	0	V
1	1	2	1		F
2	2	4	4	1	F
0	1	1	0		F
1	2	3	2		F

Além do quadro, o aluno escreveu: "Se usar números maiores que 1, a soma resulta diferente da multiplicação (na casa do nº 2, a divisão é diferente) e para nº entre zero e um, a multiplicação tende a diminuir e a divisão a aumentar."

Esse tipo de justificativa mostra que o aluno não tem claros os conceitos que menciona: em primeiro lugar, confunde a denominação do resultado de uma operação com o resultado ("soma" tinha que ser comparada com "produto"). Em segundo lugar, como usa apenas valores inteiros, não fica claro o que significa "nº entre zero e um". Também não se entende a razão pela qual o aluno não completou o resultado da divisão nas linhas em que $x=1$ e $y=1$, $x=0$ e $y=1$ ou $x=1$ e $y=2$.

Feita essa categorização, ainda na fase de tratamento dos resultados, determinamos o número e porcentagem de erros de cada tipo. Das 86 respostas erradas, 38 (44%) foram do tipo A, 33 (38%) foram do tipo B, 9 (10%), do tipo C, 4 (5%), do tipo D e 2 (2%), do tipo E.

Considerações Finais

Notamos, ao concluir a análise dos dados, as grandes dificuldades apresentadas por esses alunos, futuros professores de Matemática, para resolver a questão que envolvia três equações algébricas. Apenas 13% deles conseguiu encontrar o par (½,-1) como solução. Vinte e quatro por cento desses participantes sequer tentaram resolver a questão e 61% erraram. Entre as categorias de erros, apresentadas acima, vemos que os tipos A e B constituem 82% das respostas erradas.

As soluções dadas parecem indicar que os alunos não visualizaram, nas duas igualdades apresentadas, a possibilidade de separar em três equações e resolver cada uma delas, para utilizar os dados em outra. Não estando a equação apresentada na forma mais usual (dois membros separados por um sinal de igualdade), os alunos tentaram apenas indicar um par ordenado de reais que, em sua opinião, satisfazia a alguma das equações ou então concluíram que não existia resposta.

Nos casos em que tentaram desenvolver a solução, os alunos fizeram erros relacionados às propriedades das operações com números reais, como, por exemplo, a distributiva da multiplicação em relação à adição. Também notamos que alguns alunos parecem ter introjetado a ideia de que, ao "passar para o outro membro deve-se trocar o sinal", sem entender se essa "propriedade" vale quando se está somando ou subtraindo a mesma quantidade dos dois lados da equação, mas não quando se está multiplicando ou dividindo ambos os membros por um mesmo valor.

Observamos, nos alunos por nós pesquisados, dificuldades semelhantes às encontradas por Barbosa (2009). Em nossa pesquisa, ao se depararem com uma situação matemática que remete ao significado processual-tecnicista (Ribeiro, 2008) – uma equação escrita na forma algébrica simbólica – os alunos não se utilizaram de alguma técnica ou processo que conheciam para buscar a solução para a questão. Pelo contrário, vários alunos – como A6 e A38 – utilizaram tentativas de substituição de valores para buscar a resposta ao problema.

Pode-se supor então que, se esses problemas não forem discutidos no curso de Licenciatura, serão levados adiante, para a própria sala de aula do futuro professor, trazendo como consequência um ensino frágil, que pode levar seus alunos a erros do mesmo tipo.

Assim, observamos em nossa pesquisa situações semelhantes àquelas encontradas por Barbosa (2009) e por Dorigo (2010), nas quais, embora a situação matemática remetesse a um determinado significado, professores e alunos utilizavam-se de outros significados para buscar solução aos problemas apresentados, obtendo ou não uma resposta correta.

Baseado nessas evidências compartilhamos as reflexões apontadas em Ball, Thames e Phelps (2008) sobre a importância de que os futuros professores dominem – além do conhecimento específico do conteúdo – conhecimentos relacionados ao conteúdo e aos estudantes, e ao conteúdo e ao ensino. Nesse sentido, os futuros professores poderão ser capazes de compreender as diferentes formas de resolução e diferentes erros cometidos pelos alunos, bem como buscar estratégias de ensino que sejam adequadas para a superação de tais dificuldades e para a ampliação/aprofundamento dos conhecimentos que os alunos têm de determinados conceitos matemáticos, como é o caso do conceito de equação.

Nossas análises e reflexões acima discutidas nos parecem adequadas no sentido de romper com um paradigma que observamos em muitas salas de aula da Educação Básica, paradigma este que é ratificado pelos resultados de Attorps (2003), qual seja, futuros professores reproduzem a forma como eles aprenderam quando estão ensinando Matemática.

Outro ponto que nos parece relevante de ser destacado aqui, em nossas discussões, vem ao encontro das considerações apresentadas anteriormente no que se refere a uma lacuna nas pesquisas sobre os conhecimentos do professor que ensina Álgebra (Doerr, 2004). Nesse sentido, o presente artigo tem o propósito de trazer, para a formação do professor de Matemática, resultados de pesquisas que envolvem erros e dificuldades que licenciandos apresentam quando estão resolvendo equações como a apresentada em nossa pesquisa. A análise dos erros e a compreensão das dificuldades desses estudantes deve servir como alerta para que todos nós – formadores de professores – tomemos consciência da importância de se discutir, nos cursos de licenciatura, conceitos matemáticos elementares, de um ponto de vista avançado.

Bibliografia

Attorps, I. (2003). *Teachers' images of the 'equation' concept*. Em: Proceedings of the Third Conference of the European Society in Mathematics Education, Bellaria, Itália. Recuperado em 12 out. 2011, de: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_attorps_cerme3.pdf

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Barbosa, Y. O. (2009). *Multisignificados de equação:* uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Ben Nejma, S. (2010). Les difficultés rencontrées dans la résolution algébrique des problèmes du premier degré. *RADISMA*, 5. Recuperado em 10 de setembro de 2011, de http://www.radisma.info/document.php?id=879.

Booth, L. R. (1984). Erreurs et incomprehensions em algebre elementaire. *Petit X*, 5, 5-7.

Booth, L. R. (1995). Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. Em Coxford, A. F.; Shulte, A. P. (Orgs.). *As idéias da álgebra,* 23-37. São Paulo: Atual.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction*: a focus on errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Burrill, G. (1997). Show me the math. *NCTM News Bulletin*, 33 (8), 3.

Cury, H. N.; Bisognin, E.; Bisognin, V. (2011). Uma discussão a respeito de resoluções de professores em formação continuada a uma questão sobre equação polinomial de 2º grau. Em: Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife, Brasil.

Doerr, H. M. (2004). Teachers´knowledge and the teaching of algebra. Em: Stacey, K.; Chick, H.; Kendal, M. (Eds.). *The future of the teaching and learning of algebra*: the 12th ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Press. 267-290.

Dorigo, M. (2010). *Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Dreyfus, T.; Hoch, M. (2004). Equations: a structural approach. Em: *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, 152-154.

Ferreyra, N. et al. (2010). De La aritmética al álgebra: experiencia de trabajo con estudiantes universitarios. *Unión*, 21, 59-67.

Ribeiro, A. J. (2001). *Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Ribeiro, A. J. (2008). *Multisignificados de equação e o ensino de Matemática: desafios e possibilidades*. São Paulo: Blucher Acadêmico.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tirosh, D.; Even, R.; Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 51-64.

Helena Noronha Cury. É licenciada e bacharel em Matemática, mestre e doutora em Educação, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. Trabalha há mais de 30 anos com cursos de formação de professores de Matemática, em instituições de ensino superior. Atualmente, é professora do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática, do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, RS, Brasil. Seus interesses de pesquisa centram-se na formação de professores e na análise de erros. Organizou e publicou livros, artigos e comunicações na área de Educação Matemática. **curyhn@via-rs.net**

Alessandro Jacques Ribeiro. É licenciado em Matemática, mestre e doutor em Educação Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil. Tem atuado em cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática há mais de 10 anos. Atualmente é professor na Universidade Federal do ABC (UFABC), junto ao Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC). É credenciado como docente e orientador no Programa de Pós-Graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática (PEHFCM) na mesma instituição. Principais interesses de pesquisa relacionam-se ao Ensino e Aprendizagem de Álgebra na Educação Básica, bem como à Formação de Professores que Ensinam Matemática. Santo André, São Paulo, Brasil. **alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br**

Thaísa Jacintho Müller. É licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul e mestre em Matemática Pura pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil. Já atuou como professora de Matemática no Ensino Fundamental e Médio e como tutora à distância em curso de especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática, oferecido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Atualmente, é professora da Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), São Leopoldo, RS, Brasil, onde atua no curso de Licenciatura em Matemática, no curso de Especialização em Educação Matemática e em disciplinas de Cálculo para Engenharia e áreas afins. Seus interesses de pesquisa centram-se na formação de professores e no uso de tecnologias em Educação Matemática. **thaisamuller@gmail.com**