UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 161- 172
ISSN: 1815-0640
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Quais as soluções da equação $\left(x^2-5x+5\right)^{\left(x^2-9x+20\right)}=1$?

José Manuel Dos Santos Dos Santos

Resumen

Este trabajo presenta los procesos de resolución de una ecuación por estudiantes del último año de educación secundaria, de un curso profesional, en Portugal. Con base en el constructivismo social, como marco teórico para el aprendizaje, y el uso de los mediadores como sea el grupo de alumnos y la tecnología, en particular el GeoGebra 3.0, se eligieron las tareas propuestas a los estudiantes y se gestionó el trabajo en el aula. Los datos fueron analizados e interpretados a través de un paradigma cualitativo interpretativo. La tarea se sitúa en el contexto de la utilización de la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas. El profesor-investigador estaba interesado en aprender cómo los estudiantes respondieron a estas tareas, así como entender las estrategias desarrolladas y el tipo de tecnología por ellos utilizada para resolver el problema. A partir de estas premisas se analizan e interpretan los resultados obtenidos

Abstract

This paper reports the processes of solving an equation by students of the Vocational Education of the last year of secondary education in Portugal. Based on social constructivism theory, as a theoretical framework for learning, and the use of mediators as a group and technology, in particular with GeoGebra 3.0, were chosen tasks proposed to the students and guided the management of work in the classroom. Data were analyzed and interpreted through an interpretive qualitative paradigm. The task was placed in the context of using the methodology of Problem Based Learning. The teacher-researcher was interested in learning how students responded to these tasks, as well as understand the strategies developed and the type of technology used by students to solve the problem. From these assumptions are discussed and interpret the results obtained

Resumo

Neste texto se relata os processos de resolução de uma equação por alunos do Ensino Profissional do 12º ano de escolaridade em Portugal. Partindo da teoria do construtivismo social, como marco teórico para aprendizagem, e do recurso a mediadores como o grupo e a tecnologia, nomeadamente o GeoGebra 3.0, foram escolhidas as tarefas propostas aos alunos e se orientou a gestão do trabalho em sala de aula. Os dados foram analisados e interpretados através de um paradigma qualitativo interpretativo. A tarefa foi colocada no contexto da utilização da metodologia da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas. O professor-investigador tinha interesse em apreender o modo como os alunos reagiam a estas tarefas, bem como, entender as estratégias desenvolvidas e o tipo de tecnologia usadas pelos alunos para a resolução do problema. A partir destes pressupostos discutem-se e interpretam-se os resultados obtidos

1. Introducción

Para este trabalho partimos do pressuposto que: (1) a actividade humana é mediada pelo uso de ferramentas; (2) a actividade social organizada é fundamental para a formação da consciência; (3) a aprendizagem associada a processos elaborados decorre em dois planos: em primeiro lugar o interpessoal, através da interacção social, e em segundo lugar o intrapessoal levando aos processos de internalização; (4) a diferença entre conceitos científicos (académicos) e conceitos quotidianos (espontâneos) (Vygotsky, 1978). Deste modo a teoria da aprendizagem de Vigotsky suporta à corrente socioconstrutivista da aprendizagem (Vasconcelos, 2011). O conceito de mediação é um dos factos centrais na teoria da aprendizagem proposta por Vygotsky, que considera a utilização de dispositivos, social e culturalmente construídos, com efeitos sobre as concepções e as aprendizagens dos indivíduos que os utilizam, dispositivos estes que dependem dos contextos de interacção (Cole & Wertsch, 1996). Assim optamos pela organização do trabalho dos alunos em grupo, dispondo de diversos recursos tecnológicos de que podiam dispor para realizarem as tarefas propostas.

Considerando o currículo de matemática a experiência de ensino que aqui é objecto de análise, enquadra-se no desenvolvimento do módulo Funções de Crescimento, numa turma do 12º ano do curso profissional de Técnico de Gestão de Ambiente, pretendendo-se trabalhar o tema da resolução de problemas, visando desenvolver:

- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados.

(Carvalho, 2005, p 47-48)

Relativamente ao conteúdos disciplinares, pretendia-se:

- usar as regras das exponenciais e as calculadoras gráficas ou um computador para encontrar valores ou gráficos que respondam a possíveis mudanças nos parâmetros;
- interpretar uma função e prediga a forma do seu gráfico;
- resolver problemas simples e de aplicação usando diferentes modelos de funções de crescimento.

(Carvalho, 2005, p. 48)

Dadas as características do currículo e os objectivos dos cursos profissionais, optou-se num conjunto de quatro semanas de aulas seguir a metodologia da aprendizagem baseada na resolução de problemas (ABRP). Esta metodologia e designada na literatura inglesa por *problema-based learnig* (PBL), surge em 1969, por Jonh Evans, na Escola de Medicina na Universidade de McMaster em Ontario, Canada (Haslett, 2001).

ABRP é uma metodologia de ensino, centrada no aluno que parte de um problema para as aprendizagens autónomas e consistentes dos alunos em colaboração com os seus pares. Visa a autonomia do aluno, desenvolvendo a sua criatividade e sentido critico num ambiente colaborativo. A metodologia suporta-se nas teorias da aprendizagem do construtivismo cognitivo de Piaget e do construtivismo social de Vigotsky. O papel do indivíduo passa por um papel activo na sua aprendizagem auxiliado pelos pares e mediado pelo professor.

Nesta metodologia, o professor assume uma visão racionalista contemporânea da ciência, à semelhança no que acontece no ensino por pesquisa, como uma forma de construir teorias para melhor compreender o mundo (Lucas citado por Clara Vasconcelos, 2010), sendo ele um facilitador e um amigo-critico do trabalho dos alunos.

Os problemas devem promover o pensamento flexível, conter alguma interdisciplinariedade, pouco-estruturados e abertos, para apoiar a motivação intrínseca, e devem ser realistas e em consonância com as experiências dos alunos. Um bom problema de feedback permite aos estudantes avaliar a eficácia dos conhecimentos que possuem, promovendo a formulação de novos problemas, o raciocínio e estratégias de aprendizagem. Os problemas também devem promover a conjectura e argumentação. A formulação dos problemas deve ser complexa o suficiente para exigir a inter-relação de vários conhecimentos e deve motivar os alunos para conhecerem e aprenderem mais. (Hmelo-Silver,2004)

Um dos axiomas desta metodologia é o trabalho colaborativo, dai o cuidado que se deve ter na monitorização do trabalho dos grupos no sentido em que estes tenham práticas de questionamento, partilha de opiniões, formulação de hipóteses ou conjecturas e a capacidade de as refutar ou de as confirmar. A comunicação e o trabalho dentro do grupo é essencial, tanto como a partilha dos resultados em plenários entre os resultados dos grupos, de modo que as conclusões possam ser validadas com o conhecimento construído. Deste modo os plenários são essenciais discutindo-se o que foi aprendido, os conceitos e os princípios com o trabalho (Savery, 2006).

Segundo Lambros (2002), citada por Vasconcelos 2010, a ABRP depende de uma estrutura própria, passando por fases bem determinadas: “após os alunos terem apreendido o problema, devem: (i) elaborar uma lista com os factos fornecidos pelo problema; (ii) elaborar uma lista do que precisam de saber para entender o problema; e (iii) definir uma lista do que têm que pesquisar para resolverem o problema. Após esta sequência, o processo prossegue com a listagem das possíveis soluções. Esta lista trará algumas possíveis formas de resolver o problema e deve exigir a elaboração de uma nova lista de conteúdos a aprender. Esta ultima lista deve permitir aos alunos reunir informação para defender, ou não, as possíveis soluções encontradas.”

Esta metodologia mostra-se prometedora tendo surgido várias alterações quer na forma quer nos contextos. Um aprofundamento desta metodologia baseia-se em projectos mais abrangentes, ao contrario dos problemas mais restritos, estando a ser aplicadas em vários graus de ensino e propiciando uma abordagem interdisciplinar. Alguma investigação revela que o sucesso desta abordagem está intimamente relacionada com a formação do professor e as suas próprias concepções (Hmelo-Silver, 2004, p. 261).

Na educação matemática o conceito de problema é amplamente discutido, uma tarefa pode ou não ser um problema dependendo de um conjunto de factores relacionados com quem desenvolve a tarefa, contudo é consensual que a resolução de um problema implica necessariamente uma actividade que pode conduzir a realização de uma aprendizagem. Segundo Ponte (2005), há dois factores que determinam a aprendizagem: a actividade que os alunos desenvolvem e a reflexão que sobre a actividade realizam. A actividade resulta da realização de uma determinada tarefa, isto é, a tarefa é o ponto de partida para uma actividade matemática; contudo, perante uma tarefa, um aluno pode não desenvolver qualquer actividade matemática (Ponte, 2005).

As tarefas podem ser diferenciadas pelo seu grau de estrutura e pelo grau de dificuldade que apresentam para o aluno, na perspectiva deste. Em termos de grau de estrutura, distinguimos tarefas fechadas de tarefas abertas. Nas primeiras, é dito de forma clara no respectivo enunciado o que é dado e o que é pedido, ficando a cargo de quem as resolve o caminho para chegar à solução (ou soluções); nas tarefas abertas, existe um grau de indefinição considerável, deixando a quem as resolve um papel importante na determinação do que é dado ou do que será possível descobrir (Ponte 2005). No que concerne ao grau de dificuldade, podem as tarefas podem representar um desafio reduzido, ou constituírem-se num desafio elevado.

Assim entre as tarefas abertas temos as explorações e as investigações constituindo-se, respectivamente, desafios reduzidos ou elevados. As tarefas de estrutura fechada podem variar entre exercícios, como tarefas de grau de desafio reduzido, e os problemas com um grau elevado de desafio.

Contexto da experiência

Durante quatro semanas de trabalho foram propostas várias tarefas aos alunos variando o grau de estrutura, entre tarefas abertas e fechadas, e sendo todas de grau de desafio elevado de modo a implementar a metodologia da Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) proposta por Ann Lambros.

Quais as soluções da equação $\left(x^2-5x+5\right)^{(x^2-9x+20)}=1$?

Figura 1: Tarefa em análise – Problema

O problema da figura 1, que aqui se analisa, foi implementado na última semana de aula de uma planificação de quatro semanas de trabalho, utilizando a metodologia da ABRP. Esta questão consta de um extracto das Normas Profissionais para o Ensino da Matemática (NCTM, 1994). As três semanas anteriores foram geridas seguindo a mesma metodologia variando o tipo de tarefas. Nestas o seu grau de estrutura foi variado mas mantendo o grau de desafio elevado, isto é, as tarefas propostas contemplaram investigações e problemas.

Opções metodológicas

Optou-se por desenvolver a metodologia da ABRP durante um período de tempo. A planificação contemplou investigações e problemas. Os alunos puderam dispor de protocolos, manuais, registos pessoais e de tecnologia. O foco da atenção do professor residiu nas estratégias usadas pelos alunos e na tecnologia que utilizavam para realizarem as tarefas propostas.

O trabalho de análise dos dados recolhidos suporta-se numa investigação qualitativa, de acordo com a perspectiva de Bogdan e Biklen (1994). O investigador é o principal agente de recolha e interpretação dos dados. Estes dados têm uma natureza fortemente descritiva, o que permite ao investigador analisar acções e factos com pormenor.

A opção pelo paradigma interpretativo resulta da necessidade de explorar, interpretar e compreender os factos do ponto de vista dos intervenientes no estudo, tendo em conta as suas particularidades e a ecologia do ambiente onde o estudo decorre. O foco da atenção são as aprendizagens conseguidas pelos envolvidos em relação às acções em que se envolvem.

Aplicação da tarefa

A tarefa foi apresentada durante uma aula de 90 minutos, inserida numa experiência que decorreu ao longo de quatro semanas de aula, em 135 minutos por semana, distribuídos em 90 e 45 minutos. Destaque-se que esta tarefa, a última, foi realizada num menor espaço de tempo, não sendo necessários os 135 minutos inicialmente previstos, pelo que os 45 minutos do tempo restante foi destinado a uma avaliação global do trabalho desenvolvido por parte dos alunos e do professor.

Os dezassete alunos da turma foram divididos em quatro grupos, três grupos integravam quatro alunos (grupos B,C, e D) e o quarto grupo integravam os restantes cinco alunos (grupo A).

Os alunos dispunham de acesso ao manual em papel, a um portátil com ligação a Webb (C), recurso ao GeoGebra (GGB) e duas máquinas de calcular gráficas (MCG) por grupo, e obviamente o recurso a interacção com o professor sempre que o solicitassem.

Descrição da aula

Depois de apresentada a tarefa aos alunos, iniciou-se o trabalho. A presença de polinómios do 2º grau, levou a que estes procurassem no caderno a fórmula resolveste para equações do 2º grau. Numa segunda fase aperceberam-se que o segundo membro da equação era igual a 1. As perguntas dos elementos dos grupos sucederem-se, sendo bastante semelhantes, pelo que optou-se por realizar um pequeno plenário, que a seguir se descreve:

<u>Professor</u>: Afinal o que fizeram até ao momento e quais são as vossas dúvidas?

<u>Porta-voz do GA</u>:Tentamos utilizar a formula resolvente.

<u>Professor</u>: Sim ...

<u>Elemento GA</u>: Mas a equação tem uma base e um expoente como fazemos?

<u>Professor</u>: Que tipo de funções temos usado nos trabalhos das ultimas aulas?

<u>Elemento do GA</u>: Exponenciais mas esta é complicada!

<u>Professor</u>: Revejam as propriedades das exponenciais que já fizemos e mesmo os métodos que já utilizaram e m tarefas anteriores.

Apercebi-me que os alunos não realizaram o registo dos factos, da informação conhecida e dos assuntos necessários conhecer para o desenvolvimento da tarefa, como o tinham feito nas outras três tarefas anteriores. Parece-me que devia ter insistido em que mantivessem a rotina do registo inicial pois poderia ter evitado esta minha primeira intervenção. Contudo, está tarefa tinha uma estrutura mais fechada, sem outro contexto, ao contrario das tarefas anteriores, de estrutura mais aberta, parecendo que os alunos assumiram que não seria um trabalho em PBL.

A intervenção realizada no pequeno plenário anterior levou a que alguns grupos passassem a ensaiar outras estratégias para resolver a tarefa. No caso do Grupo D a indicação dada levou a que reconhecessem as propriedades das exponenciais chaves para a resolução da tarefa e aplicando a formula resolvente para a resolução das duas equações do segundo grau envolvidas, porem o grupo não tinha a certeza de ser essa a solução.

Porta-Voz GD: Professor é isto que se pretende? (O porta-voz apontava para os registos realizados, figura 1)

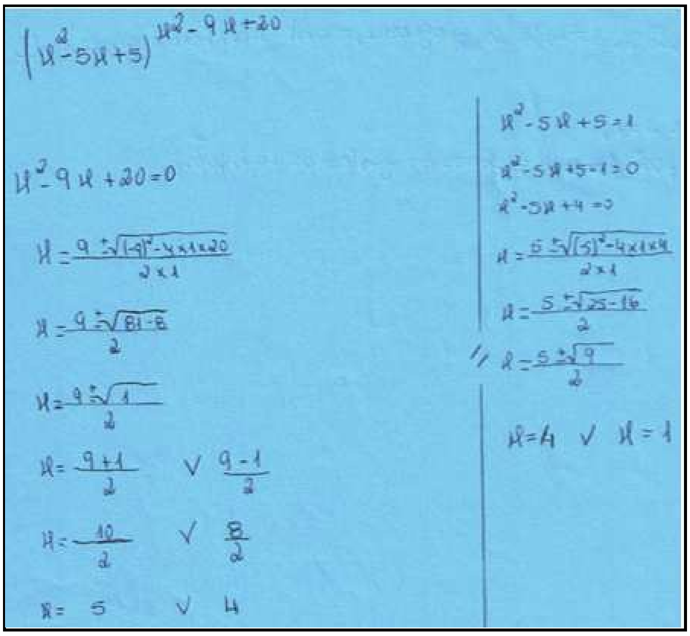


Figura 1: Estratégia apresentada pelo grupo D.

Professor: Já discutiram a resposta, o que vós parece?

Porta-Voz GD: Sim discutimos, e parece-nos que está resolução responde a questão.

Professor: Tinham de resolver uma equação e apresentam-me a resolução de duas equações, podem explicar-me?

Porta-Voz GD: Vamos pensar! Obrigado.

Apesar de já ter decorrido três semanas onde o meu trabalho era mais fazer perguntas do que dar respostas, os alunos solicitavam a minha intervenção, esta visava sempre servir de mediador da aprendizagem dos alunos, abrindo algumas pistas para manter o ritmo de trabalho, não levando ao desanimo dos alunos. Nos cursos profissionais a autonomia e confiança dos alunos é algo que tem de ser constantemente trabalhada, pois a instalação do desanimo.

Outras estratégias de análise do problema não tardaram a aparecer, bem como, a solicitação dos alunos para encontrarem a validação na autoridade do professor. Vejamos o caso do seguinte dialogo com o grupo A:

Porta-Voz GA: Estivemos a ver a tarefa anterior mas nessa tarefa já nos era dadauma função.

Professor: Sim, mas na tarefa das infecções dos computadores e da colónia de bactérias não era dada.

Elemento GA: A função será o primeiro membro da equação pois tem o x.

Professor: Não sei que vós parece?

Porta-Voz GA: Vamos seguir, usamos o GeoGebra e experimentamos.

Professor: Não se esqueçam que podem usar a máquina de calcular gráfica.

Porta-Voz GA: Temos o computador aqui e tem um écran maior.

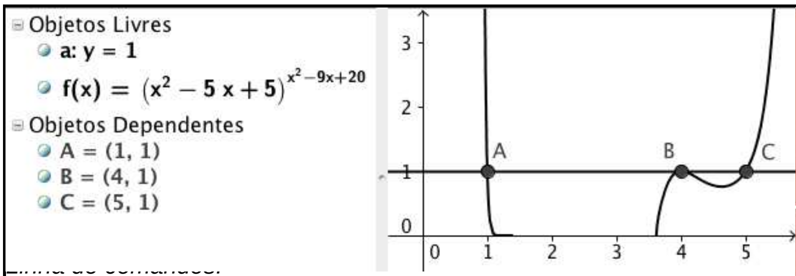
Professor: Ok, não se esqueçam de registar a vossa resposta na folha dada.

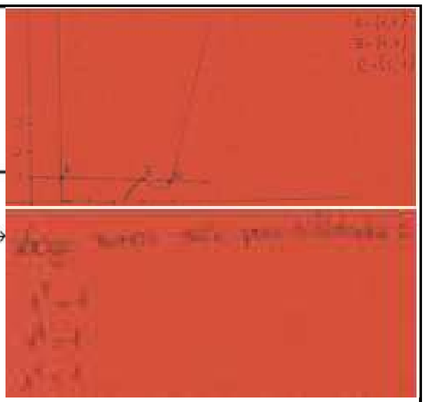
Mais uma vez a minha intervenção, reforçou a observação já realizada pelos alunos. Apesar da estratégia ainda não estar consumada por escrito a ideia de uma resolução gráfica estava pensada e a reflexão falada promovida levou o grupo à acção. A estratégia passou pelo uso do GeoGebra considerando a intersecção dos gráficos de duas funções como o referem explicitamente:

[Colocamos a expressão $\left(x^{2}-5x+5\right)^{\left(x^{2}-9x+20\right)}$ na linha de comandos do GeoGebra onde nos deu uma curva. De seguida colocamos na linha de comandos $y=1$ onde nos deu uma recta. Na barra de ferramentas seleccionamos o "intersectar duas linhas" onde encontramos três pontos.]

Figura 2: Transcrição do cabeçalho da folha de registo do grupo A.

De facto os alunos utilizaram de modo eficaz o software e de um modo autónomo como se pode verificar pelos registos realizados (fig. 3). Apresentando a confirmação das soluções encontradas.





Linha de comandos: *(x² - 5*x + 5)^(x² - 9*x + 20)*

Barra de ferramentas: *y=1*

Intersectar duas linhas

Figura 3: Processos usados no GeoGebra e os registos da estratégia usada pelo grupo A.

Na minha deambulação pela sala reparei que o grupo C resolvia as equações do 2º grau necessárias, enquanto que o grupo B usava o GeoGebra no computador.

Neste momento passavam cerca de 30 minutos do inicio da aula. Sou solicitado pela segunda vez pelo grupo D, e o porta-voz do grupo apresenta-me a conclusão a que tinham chegado, depois da pergunta que lhes tinha deixado.

Porta-Voz GD: Escrevemos a razão pela qual as equações que resolvemos nos dão a solução! (Mais uma vez, o porta-voz apontava para os registos, figura 4)

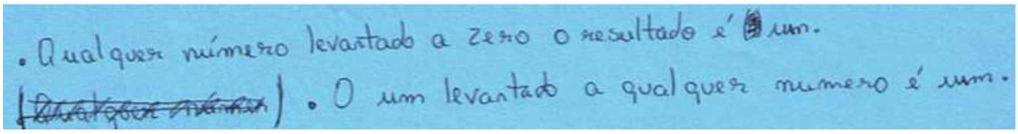


Figura 4: Justificação da estratégia apresentada pelo grupo D

Professor: Em que se baseiam para dizer isto?

Elemento GD: Nas notas de aula e nas propriedades das potências.

Professor: Mas como garantem que são apenas estas as soluções?

Porta-Voz GD: Não vos disse temos de ver graficamente!

Professor: Não sei vejam! Mas não se esqueçam que resta um quarto de hora para o debate.

A afirmação do porta-voz do grupo D - *Não vos disse temos de ver graficamente!* - fez com que os elementos utilizassem o GeoGebra, como se vê na figura 5, confirmando os resultados que já tinham obtido analiticamente e com uma argumentação capaz.

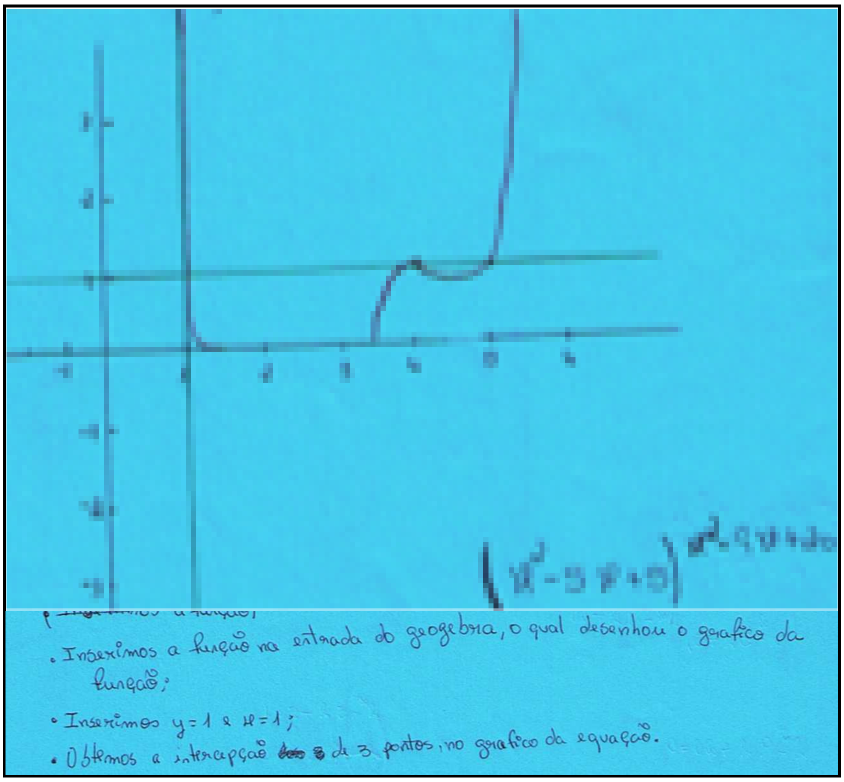


Figura 5: Registos relativos a resolução gráfica com o GeoGebra do grupo D.

Não sendo solicitado pelo grupo B resolvi questionar o que estavam a fazer.

Professor: Então tudo a correr bem! Está a acabar o tempo. *Apressou-se a dizer o porta-voz do grupo*

Porta-Voz GB: Colocamos o primeiro membro da equação na linha de comandos do GeoGebra e apareceu-nos um gráfico da função.

Professor: Para que querem o gráfico?

Porta-Voz GB:Colocamos um ponto no gráfico e deslocamos para ver quais as coordenadas.

Professor: E que fazem com as coordenadas?

Porta-Voz GB: O x dá-nos a solução quando o y é um.

Professor: Se todos concordam …Não se esqueçam que tem de convencer os colegas no debate

Este grupo acabou por apresentar um registo muito detalhado (fig.6). Foram apresentados os comandos utilizados no GeoGebra, um esboço gráfico e a verificação das soluções encontradas.

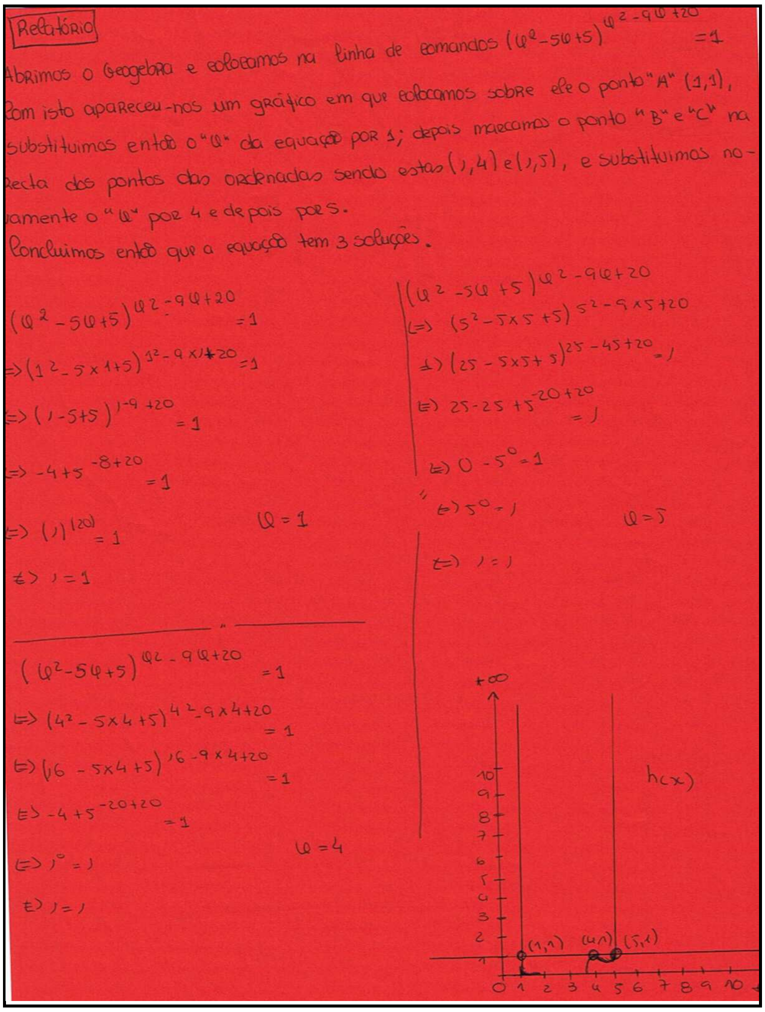
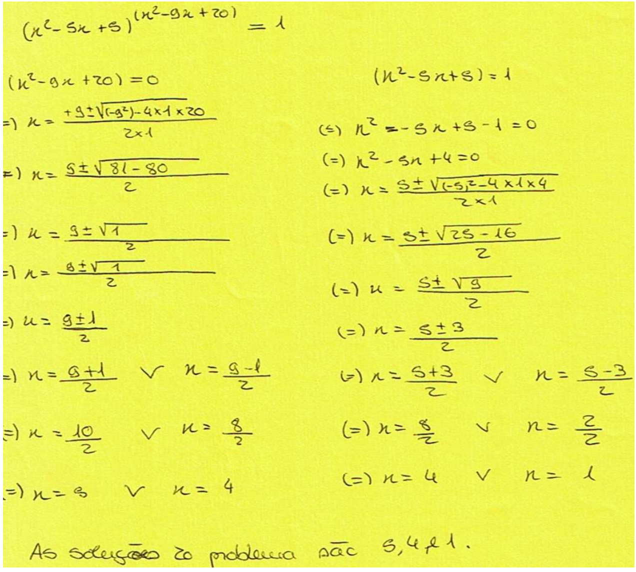


Figura 6; Registo da proposta de resolução da tarefa do grupo B.

As alunas do grupo C conversavam, questionei se já tinham resolvido a tarefa. Disseram que sim. Perguntei ao porta-voz que método tinham utilizado, tendo este referido que tinham resolvido a equação. Os registos realizados (fig. 7) que observei permitia aferir que os alunos tinham encontrado a solução de duas equações do segundo grau. Não havia nenhum tipo de registo que indicia-se a razão desse procedimento. Como os restantes grupos terminavam acabei por não realizar mais nenhuma pergunta a este grupo:


$(x^2-5x+5)^{(x^2-9x+20)} = 1$

$(x^2-9x+20)=0$
$\Rightarrow x = \frac{+9 \pm \sqrt{(-9^2)-4\times1\times20}}{2\times1}$
$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2}$
$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2}$
$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2}$
$\Rightarrow x = \frac{9 \pm 1}{2}$
$\Rightarrow x = \frac{9+1}{2} \vee x = \frac{9-1}{2}$
$\Rightarrow x = \frac{10}{2} \vee x = \frac{8}{2}$
$\Rightarrow x = 5 \vee x = 4$

$(x^2-5x+5)=1$
$\Leftrightarrow x^2 = -5x+5-1=0$
$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$
$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2-4\times1\times4}}{2\times1}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{5+3}{2} \vee x = \frac{5-3}{2}$
$\Leftrightarrow x = \frac{8}{2} \vee x = \frac{2}{2}$
$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 1$

As soluções do problema são 5, 4 e 1.

Figura 7: Registos das equações do 2º grau, estratégia seguida pelo grupo C

Passados cinquenta minutos, todos os grupos tinham finalizado a tarefa e procedeu-se ao plenário. Os alunos apresentaram as suas resoluções, sendo por estes validadas três formas distintas de resolução. Os quatro grupos resolveram a tarefa, encontrando a solução da equação.

Resultados

Em relação ao debate, os alunos apresentaram as suas conclusões, mais do que os resultados, todos coincidentes, as mais valias decorreram do desenvolvimento da comunicação matemática e da percepção que a tarefa podia ser resolvida a partir de três perspectivas diferentes, analiticamente, numericamente e graficamente (veja-se tabela 1).

Tabela 1. Estratégia para a resolução da tarefa

Grupo	Estratégia
A	Resolução gráfica, usando intersecção de gráficos com o GeoGebra.
B	Resolução numérica, com verificação e justificação gráfica usando o GeoGebra.
C	Resolução apenas analítica, sem justificação da estratégia.
D	Resolução analítica, com justificação da estratégia, e confirmação dos resultados por resolução gráfica com o GeoGebra.

Houve ainda a consolidação de conteúdos e métodos de trabalho adequados e fortemente ancorados no uso de tecnologia, em particular o uso do GeoGebra. Registe-se que os alunos preteriram a máquina de calcular gráfica usando com proficiência o GeoGebra na resolução da tarefa.

Os alunos registaram as suas conclusões por escrito, servindo de base a discussão em plenário. Os relatórios foram analisados e os resultados obtidos encontram-se registados, sumariamente, na figura 8.

Grupos		Resolve analiticamente a equação				Resolve graficamente a equação					
		Apresenta razões para resolver a equação através de duas equações do 2º Grau	Usa a fórmula resolvente para equações do 2º grau.	Explicita as soluções	Confirma as soluções encontradas	MCG	GGB				
							Encontra soluções por:		Confirma as soluções encontradas	Esboça Gráfico	Relata os passos da construção
	nº A.						aproximação numérica	Intersecção de rectas com gráfico			
A	5	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
B	4	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
C	4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
D	4	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
	17	**1**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	**3**	**2**

Figura 8: Quadro sumula dos resultados

Conclusões

A implementação do modelo de Aprendizagem Baseadas na Resolução de Problemas proposto por Ann Lambros (2004) mostrou-se menos eficaz nesta última tarefa, quando comparados os resultados com a implementação das tarefas anteriores. O caracter fechado desta tarefa levou a que os alunos não utilizassem os protocolos característicos do PBL. As tarefas anteriores possuíam um enunciado que apelava a um contexto mais amplo. Os alunos passaram a ver a tarefa como a resolução de uma equação, um processo mais tradicional, optando desde logo alguns alunos por ensaiar estratégias mais algébricas de resolução.

A interacção que se estabeleceu entre o professor e o grupo D levou a um aprofundamento do trabalho desenvolvido, que conduziu os alunos a apresentarem várias justificações para validar os seus resultados. Ao analisar as interacções estabelecidas com os alunos parece ter-se evitado um padrão de interacção de matemática dirigida (Tomás Ferreira, 2007, p. 1997), utilizando perguntas provocadoras, evitando-se as perguntas teste, o que acabou por se demonstrar positivo para a aprendizagem dos alunos e a realização da tarefa.

As respostas dos alunos foram interpretadas, dando um feedback que permitiu uma melhor compreensão e entendimento do problema pelos alunos. Nos diálogos e produções dos alunos aqui apresentados observa-se uma evolução na argumentação no trabalho dos grupos. Acresce que no grupo em que a intereção com o professor foi reduzida a produção do grupo é menos rica nas estratégia e na argumentação.

Dos quatro grupos, dois (Grupos A e B) entenderam a resolução da tarefa com uma estratégia que passou pela análise de funções e recorreram de imediato a tecnologia. Os outros dois grupos (C e D) encararam a tarefa como a resolução de uma equação. Este facto reforça a ideia que a multiplicidade de representações e as conexões promovem um conhecimento mais profundo da matemática. Em relação a tecnologia utilizada a maquina de calcular foi preterida, tendo os alunos que recorreram a tecnologia, optado pelo uso do GeoGebra. Este software foi usado de forma diversa pelos grupos. Um dos grupos que ensaiou uma estratégia algébrica para a resolução do problema usou o GeoGebra para confirmar a solução obtida.

Bibliografía

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação. Porto Editora.

Carvalho, J. et al. (2005). *Programas de Matemática do Ensino Profissional*, Direcção-Geral de Formação Vocacional. Lisboa.

Cole, M., & Wertsch, J. V. (1996). Beyond the individual-social antimony in discussion of Piaget and Vygotsky*. Human Development*, 39, 250-256.

Haslett, Lynn (2001). 1969: McMaster University introduces problem-based learning in medical education. In Daniel Schugurensky (Ed.), *History of Education: Selected Moments of the 20th Century* [online]. disponivel em: http://fcis.oise.utoronto.ca/~daniel_schugurensky/assignment1/1969mcmaster.html (date 23-01-2011).

Hmelo-Silver CE (2004) Problem-based learning: What and how do students learn? *Educational Psychology Review* 16(3): 235– 266

Lambros, A. (2004). *Problem-based Learning in Middle and High School Classroom: A teacher's guide implementation*. California: Corwin Press.

NCTM (1994). Normas profissionais para o ensino da Matemática. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Savery, J. R. (2006) Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. *The Interdisciplinary Journal of Problem- based Learning*, v. 1, n. 1, p. 9– 20.

Tomás Ferreira, R. A. (2007). The Teaching Modes: A conceptual Framework for Teacher Education. *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Departamento de Educação da Universidade de Chipre. Larnaca, Chipre. Consultado on-line 22-02-2012.

Vasconcelos, C. (2010) *Notas da Unidade Curricular de Ensino das Ciências.* Programa Doutoral em Ensino e Divulgação das Ciências. FCUP, Porto.

Vasconcelos, C. (2011). *Relatório de Agregação*. Braga: Instituto de Educação da Universidade do Minho.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

José Manuel Dos Santos Dos Santos: É professor de Matemática na Escola Secundária D. Afonso Sanhes (Vila do Conde, Portugal) e colabora com Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto, sendo Chair do Instituto GeoGebra Portugal. É Licenciado e Mestre em Ensino da Matemática e Especializado em Ensino e Divulgação das Ciências pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP). Neste momento realiza na FCUP estudos doutorais, sob o paradigma qualitativo, sobre a influência na aprendizagem da matemática do uso do GeoGebra e da Escrita Avaliativa no contexto do Ensino Profissional Secundário. santosdossantos@me.com