UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 131-154
ISSN: 1815-0640

Dinamización matemática

Propuesta didáctica para las traslaciones en el plano cartesiano con el uso de planilla de cálculo

Diego Cheuquepán, Joaquim Barbé Farré.

Introducción

Las transformaciones isométricas ocupan un lugar importante en los programas de Matemática de la educación chilena. Estas son estudiadas en la educación general básica y la educación secundaria, e incluyen aprendizajes esperados relacionados con simetrías, rotaciones, traslaciones y teselaciones.

La propuesta didáctica que se presenta está en el marco del proyecto de incubación científica PIC-201010 "*Enseñar traslaciones en el plano en primer año medio incorporando Tics. Propuesta didáctica para su estudio con apoyo de planillas de cálculo*" de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile.

1. El contexto del problema

1.1. La enseñanza de la geometría en Chile

El estudio de la geometría ocupa un lugar importante dentro del curriculum nacional de matemática, sin embargo, es una de las áreas que presenta mayores dificultades para ser enseñada y aprendida.Esto se evidencia en los diversos estudios de cobertura curricular en educación básica y media realizados por la unidad de curriculum y evaluación del ministerio de educación.

Los resultados obtenidos en educación básica dan cuenta de que los docentes de estos niveles asignan una cantidad de tiempo considerablemente menor para el estudio de los contenidos geométricos respecto de otros temas como números y operaciones aritméticas. Por lo tanto, el problema se agrava aún más, si consideramos que el marco curricular asigna al área de geometría muchos más contenidos mínimos obligatorios que al área de números. Además, han observado que las actividades de geometría se centran exclusivamente en el reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos, lo que finalmente impide a los alumnos desarrollar habilidades de orden superior.

Frente a estas condiciones, Espinoza et al. (2007) afirma que esta dificultad de ir más allá de una enseñanza de la geometría centrada en la clasificación rígida y formal de figuras y cuerpos, se debe a la escasa formación matemática y didáctica de los profesores de estos niveles educativos. Más aún, el que tiendan frecuentemente a postergar la enseñanza de la geometría para finales del año escolar, provoca que su tratamiento sea completamente superficial.

Por otro lado, los resultados obtenidos en enseñanza media no son muy diferentes. Tal como ocurre en educación básica, la cantidad de tiempo asignado por los docentes al estudio de los contenidos de geometría es considerablemente menor respecto de otros temas como algebra y funciones. En efecto, los estudios concluyen que los docentes de matemática de enseñanza media, destinan en promedio, casi un 21% del tiempo disponible en este sector para el tratamiento de los contenidos mínimos obligatorios definidos para este eje temático.

Además, Carrasco (2004) plantea que existe un quiebre entre el trabajo geométrico que se realiza en educación básica y el que se realiza en educación media, lo que provoca que en ambos niveles la geometría se estudie de manera desarticulada. Como evidencia, el autor argumenta que el estudio de la geometría en básica tiene un carácter fuertemente experimental, basado en la observación y en la experiencia, mientras que en media se incorpora el discurso deductivo-argumentativo.

Por último, Fuentes y Garate (2003) evidencian que aunque los estudiantes deben argumentar afirmaciones en educación básica y media, la forma de alcanzar este objetivo es distinta en cada nivel. Mientras que los estudiantes de segundo ciclo básico argumentan sus afirmaciones basándose en hechos empíricos, es decir, comprobando que los fenómenos matemáticos ocurren y no demostrándolos matemáticamente, los de enseñanza media se basan en la lógica matemática y argumentos abstractos, sin embargo, los estudiantes de estos niveles no poseen las herramientas necesarias para abordar una demostración matemática formal.

Estos antecedentes nos permiten afirmar que la geometría es en Chile una de las áreas del curriculum de matemática que presenta mayores problemas. Sin embargo, estas deficiencias responden a una problemática mucho más compleja en la que intervienen diversos factores, y por tanto, no pueden ser atribuidas únicamente a la falta de preparación docente o a dificultades cognitivas de los alumnos.

1.2. El estudio de las transformaciones isométricas

Las transformaciones isométricas son estudiadas en distintos niveles del sistema educativo y forman parte del área denominada geometría. En educación media son estudiadas en primer año (etapa en que los alumnos tienen edades que fluctúan entre los 14 y los 16 años). La unidad aborda entre otros objetos, las traslaciones, rotaciones, simetrías y teselaciones de figuras planas. Sin embargo, su estudio presenta las mismas dificultades expuestas en la sección anterior.

Respecto de la atención pedagógica que reciben los contenidos de geometría, el estudio de cobertura curricular en primer año medio, da cuenta de que la unidad de transformaciones isométricas es la menos abordada por los docentes de matemática. Sólo el 32,9% de los docentes que formó parte del estudio afirmó haber estudiado la unidad con sus estudiantes.

Más aún, el estudio realizado por el CEOC-UTAL (2010) con estudiantes que finalizaban la enseñanza media, concluye que el 40% de los alumnos de la investigación afirma no recordar que le hayan enseñado los contenidos asociados a esta unidad.

Por último, Carrasco (2004) observa que el estudio de las isometrías en primer año medio se centra en el reconocimiento de los tipos de movimiento rígido, como se construyen y las propiedades que poseen. En síntesis, los estudiantes se ven enfrentados a un discurso tecnológico-teórico primero, y luego, estudian los problemas y sus técnicas.

1.3. Procesadores geométricos en la enseñanza de las isometrías

Se han realizado algunos estudios para determinar el grado de incidencia que los medios tecnológicos tienen en el aprendizaje de las isometrías.

Galaz (2005) realizó una exploración para estudiar las condiciones bajo las cuales el procesador geométrico Cabri Geometre II, permitía a estudiantes de primer año de enseñanza media obtener aprendizajes significativos en la unidad de transformaciones isométricas. Sin embargo, la investigación concluye que el uso del procesador geométrico como apoyo instruccional, no incide en que los estudiantes que formaron parte del estudio, obtuvieran aprendizajes significativos respecto de aquellos que no utilizaron este medio.

Dartnell (2008) investigó el efecto de entregar las herramientas matemáticas y de TIC adecuadas para entender los conceptos de traslación, rotación y simetría de figuras planas. Los recursos tic utilizados por el grupo experimental fueron una plataforma moodle, el software game maker y el software conexiones mágicas, junto con una tutoría que cada estudiante debía estudiar.

Entre las conclusiones del estudio destacan que los resultados obtenidos por el grupo experimental superan en un 65% a los resultados del grupo control, el programa de tutorías tiene un impacto positivo sobre el rendimiento de los estudiantes y el concepto vector es fundamental en el tratamiento de las isometrías del plano.

Aunque los resultados obtenidos por ambos autores no permiten concluir que el sólo uso de medios tecnológicos mejore los aprendizajes de los estudiantes, ambos concuerdan en que el aspecto dinámico de las isometrías propicia el uso de tecnologías lo que permite crear instancias donde los estudiantes puedan observar, interactuar y manipular dicho dinamismo.

2. Planteamiento del problema

Estos antecedentes nos permiten afirmar que el estudio de las isometrías presenta las siguientes dificultades:

1- Su estudio queda desplazado al final del año académico donde muchas veces se limita a unas pocas clases impidiendo un tratamiento coherente de los contenidos propuestos por el curriculum nacional.

2- Su tratamiento se enfoca en el reconocimiento de los tipos de movimiento rígido, como se construyen y las propiedades que poseen, sin profundizar en la resolución de problemas y en la adquisición de técnicas.

3- El uso de medios tecnológicos no garantiza mejoras en los aprendizajes de los estudiantes, pero permiten mostrar el aspecto dinámico de las isometrías.

4- Los alumnos de primer año medio no están adquiriendo las destrezas y habilidades esperadas para esta unidad.

Por lo tanto, nos situamos en la problemática general de la enseñanza de la geometría en educación media, centrándonos específicamente en primer año medio (14-16 años).

Considerando el estudio de las isometrías, en particular, de las traslaciones en el plano, nos enfrentamos a la problemática de diseñar, construir y validar[1] una secuencia didáctica para la transformación isométrica traslación, que incorpore como soporte principal las planillas de cálculo.

Postulamos que parte importante de las dificultades que evidencia la enseñanza de las isometrías, y en particular, de las traslaciones; están relacionadas con el tipo de actividad matemática que se propone, en el programa de estudio oficial y libro de texto, para que los estudiantes realicen. Más aún, propugnamos que existe una escasa articulación, a nivel curricular, en las propuestas de enseñanza oficiales en torno a las traslaciones en primer año medio.

Además, consideramos que nuestra propuesta didáctica permitirá superar las dificultades descritas y logrará que los estudiantes desarrollen un auténtico trabajo matemático. La justificación de este trabajo se basa en que el estudio de las transformaciones isométricas es fundamental para el tratamiento de la matemática, dado que “las isometrías se pueden emplear como elemento unificador, debido a que la geometría euclídea plana consiste en el estudio de las figuras del plano, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones que se genera por las traslaciones y rotaciones en el plano (Boyer, 1996)”. Más aún, la importancia del estudio de las traslaciones radica en que son biyecciones que conservan la incidencia, es decir, son isomorfismos de conjuntos ordenados. Por lo tanto, las traslaciones conservan las propiedades de la geometría afín.

Marco Teórico

2.1. La teoría antropológica de lo didáctico

Utilizamos como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard 1999) que se enmarca en el enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas iniciado por Brousseau en la década de los setenta.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) plantea que la actividad matemática debe ser modelizada como una actividad humana, y por tanto, no se la debe considerar exclusivamente como un sistema de conceptos o como un proceso cognitivo.

Además, la TAD identifica lo didáctico con todo lo relativo al estudio, inclusive, conteniendo las nociones de enseñanza y aprendizaje. Así en el caso de la matemática, la noción de estudio aparece como una noción integradora que permite analizar bajo un mismo prisma el trabajo que realiza el matemático

[1] La experimentación de la propuesta se realizó con un grupo de estudiantes de primer año medio en el periodo noviembre-diciembre de 2010, sin embargo, los resultados obtenidos en dicha experiencia de aula escapan la extensión de este artículo.

investigador, el que realiza el profesor cuando enseña matemáticas o el del alumno que las aprende en la escuela.

Uno de los principios de la TAD es que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, surgiendo como el producto de un proceso de estudio. Dicho proceso, en cuanto actividad que conduce a la construcción (o reconstrucción) de conocimiento matemático, forma parte de la actividad matemática, es decir, las matemáticas son a la vez una actividad y el producto de dicha actividad.

La TAD propone la noción de Organización Praxeológica Matemática, Praxeología Matemática o simplemente Organización Matemática como modelo para describir el conocimiento matemático.

La noción de Organización Matemática (en adelante OM) corresponde a la concepción del trabajo matemático como estudio de tareas problemáticas, lo que implica, caracterizar, delimitar e incluso clasificar los problemas en “tipos de problemas”, junto con, entender, describir y caracterizar las técnicas que utiliza para resolverlos hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso. Más aún, propone establecer las condiciones bajo las cuales éstas técnicas funcionan o dejan de ser aplicables. En última instancia, busca construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder.

Por lo tanto, una OM esta compuesta por cuatro categorías de elementos: tipo de tareas no rutinarias, técnicas matemáticas, elementos tecnológicos y elementos teóricos, que denotamos como **OM = [T, τ, θ, Θ]**.

2.2. El uso de planillas de cálculo

Además, se utilizaron planillas de cálculo como soporte principal para las diversas situaciones fundamentales construidas. Las razones para usar esta herramienta polivalente fueron las siguientes:

a. La hoja de cálculo permite construir un ambiente que permite la modelación de diversas situaciones geométricas, permitiendo la visualización de estos fenómenos.
b. La hoja de cálculo es una herramienta adaptable a una gran variedad de disciplinas, áreas y temas (Henao 1996), en particular, para ser usada en matemática (Liguori 1995).
c. La hoja de cálculo es usada por la mayoría de los docentes únicamente como una herramienta que permite realizar cálculos, tabular datos y graficarlos. Sin embargo, permite crear simulaciones que ayudan a los estudiantes a crear puentes entre las ideas intuitivas y los conceptos formales (López et al. 2006).
d. Para utilizar la herramienta no es necesario poseer conocimientos en un determinado lenguaje de programación, contratar programadores que desarrollen una aplicación o destinar diversos recursos en cursos de capacitación.
e. La herramienta permite que los alumnos y alumnas puedan interactuar con objetos matemáticos (puntos, segmentos, rectas, figuras, vectores) de forma simple y natural.

Sin embargo, consideramos que el sólo uso de las planillas de cálculo como medio tecnológico de enseñanza no garantiza que los estudiantes desarrollen destrezas o adquieran aprendizajes asociados a las traslaciones del plano. La calidad de este medio depende, más que de sus características dinámicas y técnicas, de una correcta articulación y coherencia de las tareas matemáticas que componen la obra a construir por los estudiantes.

3. Metodología de la investigación

La base metodológica de nuestra investigación, son los estudios exploratorios e interpretativos que se enmarcan en el paradigma cualitativo, pero que complementaremos con métodos cuantitativos.

Considerando que el estudio busca diseñar una secuencia de estudio en torno a las traslaciones del plano se consideraron tres etapas bien definidas:

I) Reconstrucción de un MER.

II) Análisis de la dimensión curricular.

III) Diseño y construcción de la secuencia didáctica.

Luego de determinar el estado del arte en torno al estudio de las isometrías, nos enfocamos en fijar un punto de vista epistemológico que nos permitirá realizar análisis de procesos didácticos concretos. Este punto de referencia lo denominamos Modelo Epistemológico de Referencia (en adelante MER) y es el resultado de un estudio histórico-epistemológico en torno a la traslación.

El MER construido es una posible reconstrucción racional de la OM en torno a las traslaciones en el plano, y por ende, es provisional. Este MER debe considerarse una hipótesis de trabajo que deberá contrastarse con los datos empíricos, y por tanto, está sujeta a modificaciones permanentes.

En este sentido, la TAD nos enseña que no existe un sistema privilegiado desde el cual analizar las organizaciones matemáticas.

A continuación, teniendo en consideración el MER, realizamos un análisis de la dimensión curricular para determinar el tipo de OM que la institución oficial propone a través del marco curricular, planes y programas, y libros de texto, buscando hallar su grado de completitud, coherencia y articulación.

Luego de caracterizar y comprender el problema de la enseñanza de las traslaciones en el plano, elaboramos una propuesta de enseñanza que permitiera superar las dificultades encontradas y cuyo soporte principal fueran las planillas de cálculo.

Para esto, seguimos los principios fundamentales de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau 1983) y para cada proceso elaboramos una situación fundamental que permitiera el primer encuentro y la exploración de los estudiantes de una problemática que involucra alguna noción o propiedad fundamental de la geometría en estudio. Todas las situaciones propuestas en la secuencia estarán soportadas en planillas de cálculo, entorno que nos permitirá dar dinamismo al estudio de las traslaciones en el plano.

4. Análisis y discusión de los principales resultados

4.1. Modelo Epistemológico de Referencia

Un MER fija una posición desde donde observar el sistema didáctico, permitiendo explicitar un punto de vista sobre el contenido matemático en juego en los procesos didácticos que se diseñan, implementan, analizan y evalúan.

Esta reconstrucción es producto de un análisis histórico-epistemológico en torno al objeto traslación. El MER que presentamos a continuación debe considerarse como una primera aproximación de carácter provisional, sujeta a continuas modificaciones, y por ende, dinámica.

Hemos caracterizado en cuatro estados la evolución del objeto traslación, las que hemos denominado: sintética, analítica, vectorial y afín. Es posible distinguir en este MER el desarrollo histórico de las nociones de: plano, vector, movimiento y punto.

Respecto de la noción de plano, constatamos que este concepto sirve como ente unificador y generalizador, dado que no es una herramienta para resolver problemas, sino que permite unificar y generalizar las técnicas existentes de cada modelo. Además, es importante destacar, que el desarrollo de la noción de plano conduce de manera progresiva a la noción de espacio vectorial. Esto se evidencia en que el estudio de las isometrías conduce a la demostración de la existencia de un isomorfismo entre el plano euclídeo y el plano cartesiano. Finalmente, la introducción de las coordenadas, permite definir el espacio cartesiano como un espacio vectorial de dimensión dos dotado de una forma bilineal definida (Artin 1963). Para resumir la evolución de cada modelo presentamos el siguiente esquema.

Modelo Sintético	Modelo Analítico	Modelo Vectorial	Modelo Afín
Una traslación del plano geométrico en la dirección de la recta u y a una distancia d, envía un punto A en un único punto A’ de tal manera que: - La longitud del segmento AA’ es d. - El segmento AA’ es paralelo a la recta u. - El punto A’ esta en el mismo semiplano en que se encuentra A respecto a la recta u.	Sea ā un vector y P un punto, ambos en el plano cartesiano. La traslación de vector ā sobre un punto P, es una aplicación del plano en sí mismo tal que: $T_{\vec{a}}(P) = P' \Leftrightarrow \overrightarrow{PP'} = \vec{a}$	Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Dado $u \in V$, la traslación de vector u es una aplicación tal que: $T_u :\ V \to V$ $x \to T_u(x) = x + u$	Sea (A, E, φ) un espacio afín. Dado $u \in E$, llamaremos traslación de vector u a la aplicación: $T_u :\ A \to A$ $p \to \varphi_p^{-1}(u)$

Tabla 1. OM de referencia

4.2. Análisis de la dimensión curricular

Utilizando la OM a enseñar caracterizada por Carrasco (2003), en torno a las isometrías del plano, procuramos mejorarla enfocándonos exclusivamente en la traslación. Para esto, analizamos el contenido matemático oficial en torno a las traslaciones en primer año medio[2], identificando en cada OM los cuatro tipos de elementos que la componen.

Finalmente, utilizando mapas de organizaciones matemáticas, describimos la relación e interacción entre los elementos que constituyen la OM de primer año medio.

A continuación, mostramos la descripción de los tipos de tarea y el mapa de la OM a enseñar obtenido del plan y programa oficial para primer año medio.

T_1: Aplicar una traslación a una figura geométrica dado el vector de traslación en el plano geométrico.

T_2: Aplicar una traslación a una figura geométrica dado el vector de traslación en el sistema de coordenadas cartesianas.

T_3: Aplicar composiciones de traslaciones sencillas para embaldosar el plano.

T_4: Reconocer traslaciones en la naturaleza.

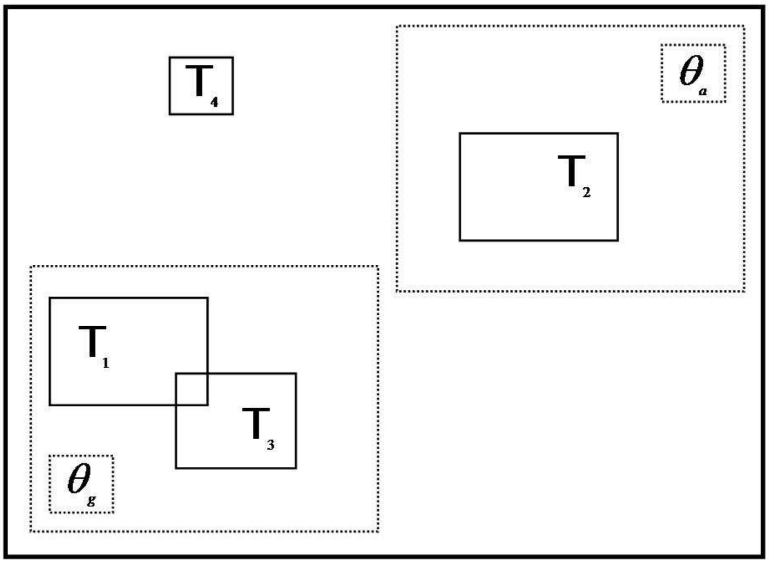

Figura 1. Mapa de la OM a enseñar en torno a las traslaciones en primer año medio.

La lectura que podemos realizar de este mapa es la siguiente:

1- Las tareas de mayor importancia son T_1 y T_2, y están referidas a la aplicación de una traslación sobre una figura geométrica dada.

2- Las tareas T_1 y T_2 están asociadas a planos distintos; el plano euclídeo (de la geometría sintética) y el plano cartesiano.

[2] Se utilizó el plan y programa de estudio oficial (sin ajuste) de matemática para primer año medio vigente al año 2010. Actualmente, por decreto 1358 se aprobaron nuevos planes y programas de estudio para primer y segundo año medio asociados al marco curricular ajustado correspondiente al decreto 254.

3- Las tareas T_1 y T_2 no comparten técnicas para su resolución, lo que refleja una discontinuidad entre las técnicas sintéticas y analíticas.
4- La tarea T_4 aparece aislada de las otras tareas matemáticas y no posee tecnologías asociadas.
5- Se evidencia un predominio de tareas asociadas a un trabajo de carácter sintético.
6- Conviven de manera desarticulada, elementos tecnológico-teóricos que componen dos modelos praxeológicos distintos.

A continuación, mostramos la descripción de los tipos de tarea obtenido del libro de texto oficial para primer año medio año 2010 de la editorial MC Graw Hill.

T_1: Aplicar una traslación a una figura geométrica en el plano cartesiano en un vector dado.

T_2: Determinar el vector de traslación dado un punto imagen y su punto homólogo en el plano cartesiano.

T_3: Reconocer la característica isométrica en la traslación de dos puntos.

T_4: Aplicar una composición de traslaciones a una figura geométrica en el plano cartesiano.

Por último, presentamos el mapa de tarea que refleja el recorrido que realiza el libro de texto respecto del mapa de tarea de la OM presente en el plan y programa de estudio de primer año medio.

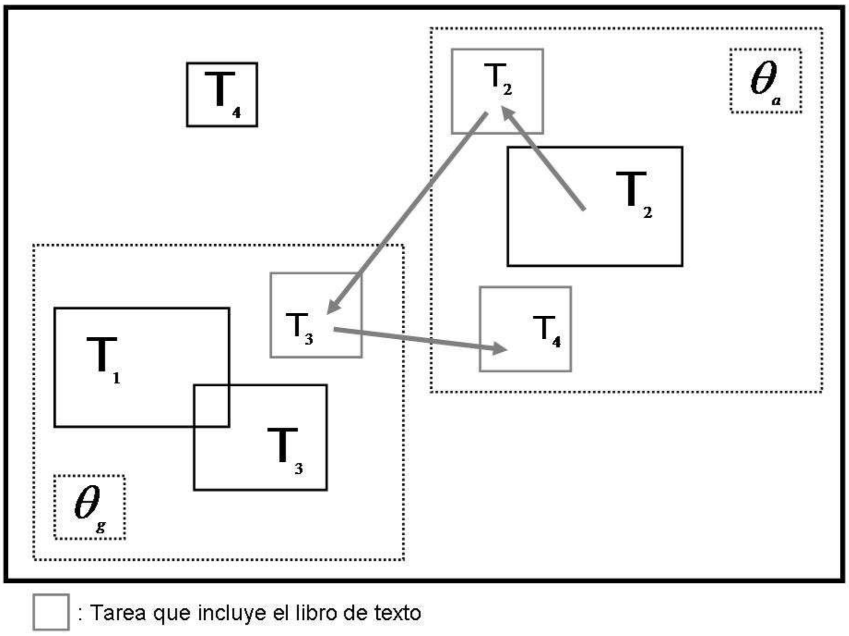

Figura 2 Recorrido del mapa de tarea

Del mapa de tarea y el recorrido de este observamos una clara desarticulación a nivel curricular respecto de las propuestas para la enseñanza de las traslaciones en primer año medio. Esto se refleja en que:

- El libro de texto aborda tareas matemáticas que el programa no propone.
- Las tareas matemáticas poseen distintas tecnologías que explican las técnicas que permiten resolverlas, mostrando la convivencia desarticulada de elementos que componen dos universos de trabajo matemático distintos.
- La OM analítica no es aprovechada como elemento de continuación del trabajo matemático de la organización sintética.
- No se evidencia complementariedad entre las técnicas asociadas al modelo sintético y el modelo analítico, lo que provoca una discontinuidad fruto de un análisis epistemológico superficial (Gascón 2002).

4.3. Diseño y construcción de la secuencia didáctica

Luego de los análisis desarrollados y descritos anteriormente, iniciamos la construcción de una secuencia didáctica que permitiera a alumnos y alumnas, desarrollar un auténtico trabajo matemático en torno a las traslaciones.

Una de las principales decisiones tomadas para el diseño de la secuencia didáctica, fue optar por el modelo analítico, lo que implicó la utilización del plano cartesiano.

Las diversas situaciones construidas han considerado las tareas matemáticas, las técnicas que le dan solución, las tecnologías que las explican y las teorías que las sustentan.

Todas las situaciones son presentadas en planillas de cálculo. Estas contienen un gráfico de coordenadas cartesianas, los elementos de la situación problemática y la barra de trabajo.

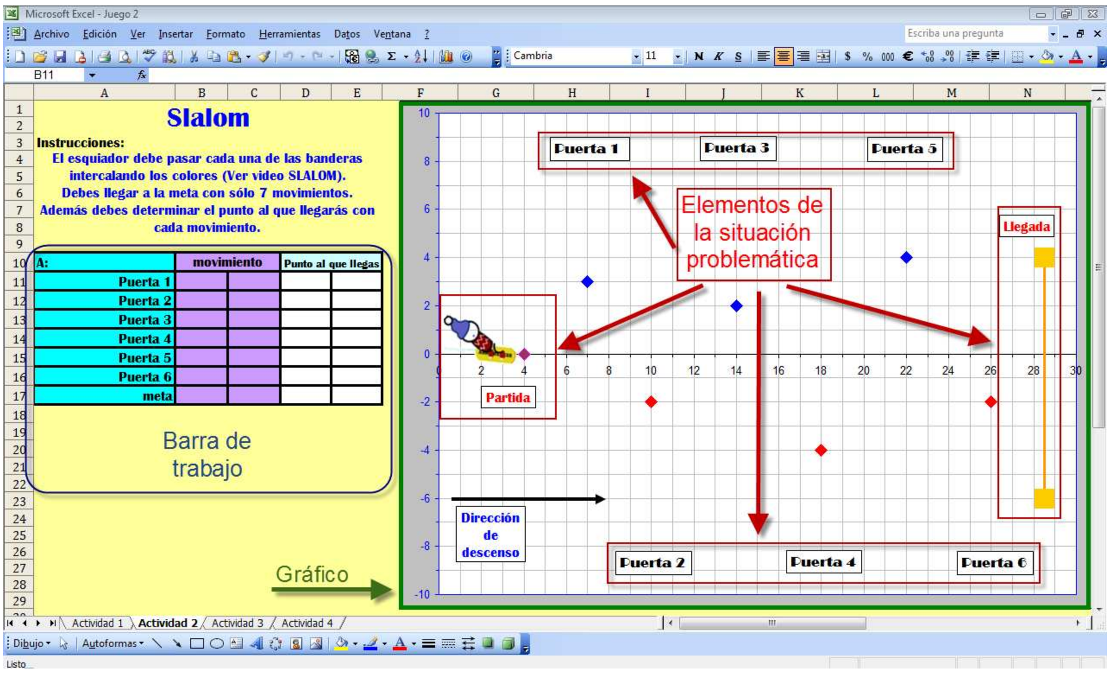

Figura 3: Tarea soportada en planilla de cálculo

La ventaja de usar las hojas de cálculo como soporte para el estudio de las traslaciones es que nos permiten presentar una situación cotidiana de la forma más real posible, es una modelización de la situación que se estudia.

Además, permite que los estudiantes puedan realizar una gran cantidad de intentos en cada actividad.

4.3.1. Tareas matemáticas y técnicas asociadas

Las tareas matemáticas que alumnos y alumnas deben desarrollar son las siguientes[3].

T_1: Determinar las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

T_2: Reproducir un polígono dados sus vértices, mediante puntos expresados como par ordenado.

T_3: Aplicar una traslación a un punto, dado el vector de traslación en el plano cartesiano.

T_4: Determinar el vector de traslación, dada la posición inicial y final de un punto.

Además, los alumnos y alumnas realizan los siguientes procedimientos para desarrollar las tareas matemáticas:

- **En la determinación de las coordenadas de un punto en el plano cartesiano:** En un punto la primera coordenada representa la distancia del punto al eje vertical Y, mientras que la segunda coordenada representa la distancia del punto al eje horizontal X.
- **En la reproducción de un polígono dados sus vértices mediante puntos expresados como par ordenado:** Representan los vértices de un rectángulo a través de un punto y determinan su ubicación en el plano mediante su abscisa y su ordenada. Trazan líneas rectas entre dos vértices consecutivos para reproducir un rectángulo.
- **En la aplicación de una traslación en el plano cartesiano de un punto dado el vector de traslación:** Para trasladar un punto A de coordenadas (x_1, y_1) dado el vector de traslación $\overrightarrow{BC}$ de componentes (a,b), se suma a la abscisa x_1 del punto A la componente a del vector $\overrightarrow{BC}$ y se suma a la ordenada y_1 del punto A la componente b del punto $\overrightarrow{BC}$.
- **En la determinación del vector de traslación, dada la posición inicial y final de un punto:** Dado un punto P y su homólogo P', determinan las coordenadas (x_1, y_1) de P y las coordenadas (x_2, y_2) de su punto homólogo P'. Restan la abscisa x_2 del punto P' con la abscisa x_1 del punto P y se resta la ordenada y_2 del punto P' con la ordenada y_1 del punto P.

[3] La propuesta didáctica construida plantea 6 tareas matemáticas, sin embargo, se han eliminado las tareas de la cuarta sesión que no se ejecutó.

4.3.2. Variables didácticas

Las variables didácticas que se consideraron para graduar la complejidad de las tareas matemáticas que alumnos y alumnas realizan son:

Contexto de las situaciones

- Geométrico y físico.

Ubicación de un punto respecto de los cuadrantes del sistema de coordenadas

- El punto se encuentra disponible en el cuadrante I o II o III o IV.
- Los puntos se encuentran disponibles en los cuadrantes I y II o I y IV o II y III o III y IV.
- Los puntos se encuentran disponibles en los cuadrantes I-II-III-IV.

Movimiento de un punto

- El punto se mueve horizontal al eje de abscisas.
- El punto se mueve horizontal al eje de ordenadas.
- El punto se mueve diagonal a un eje.

Vector en los cuadrantes del sistema de coordenadas

- El punto origen y el punto terminal del vector se encuentra disponible en el cuadrante I o II o III o IV.
- El punto origen y el punto terminal del vector se encuentran los cuadrantes I y II o I y IV o II y III o III y IV.

Cuadrículas del gráfico de coordenadas cartesianas

- Cuadrículas en los ejes x e y.
- Cuadrículas sólo en el eje x.
- Cuadrícula sólo en el eje y.
- Sin cuadrícula.

Escala del eje de abscisas X

- Se utilizan los intervalos [0,20], [0,30], [-20,0], [-15,15], [-12,12], [-10,10], [-20,20].
- Distancia entre marcas: 2, 3, 4 y 5 unidades.

Escala del eje de ordenadas Y

- Se utilizan los intervalos [0,20], [-20,0], [-20,20].
- Distancia entre marcas: 2, 3, 4 y 5 unidades.

Tipo de situación

Situaciones realizadas experimentalmente por los estudiantes, presentadas verbalmente, presentadas en video, presentadas en planillas de cálculo.

4.4. Breve descripción de las situaciones elaboradas para cada clase

La propuesta didáctica construida posee la siguiente secuencia.

T1(C11, C23, C31, C41)
T1(C16, C23, C31, C41)
T1(C11, C24, C31, C41)

T2(C16, C23, C32, C42)

T3(C15, C23, C31, C41, C51, C65)
T3(C15, C23, C31, C41, C52, C64)
T3(C15, C23, C33, C43,C52,C66)
T3(C16, C23, C32, C42, C54, C67)

T4(C11, C23, C33, C43, C51, C61)
T4(C12, C23, C33, C43, C53, C61)
T4(C16, C24, C34, C44, C57,63)
T4(C16, C24, C34, C44, C58, C68)

Figura 4: Secuencia didáctica construida

Por lo tanto, la secuencia construida es complejizada a través de variables didácticas que nos permite graduar las tareas matemáticas que los estudiantes realizarán durante el proceso de estudio.

4.4.1. Primera Clase

En esta clase alumnos y alumnas determinan las coordenadas de un punto en el plano cartesiano y reproducen un rectángulo dados sus vértices.

Momento de Inicio:

En diversas situaciones de la cotidianeidad surge la necesidad de determinar la ubicación exacta de un objeto.

Para describir la ubicación de un objeto solemos enunciar frases como arriba de, por debajo de, al lado de, junto a.

La actividad 1 busca que los estudiantes ubiquen una serie de objetos que se encuentran en un mueble. El sistema no posee cuadrículas, por tanto la ubicación que los estudiantes determinen no siempre será exacta.

Actividad 1

Pedro está jugando con sus amigos y le ha pedido a su madre que le traiga unos juguetes que están guardados en su closet, pero ella no sabe el lugar exacto donde se encuentran.

Utiliza la lista que Pedro hizo para su madre y en la imagen del closet marca la posición de cada uno de los objetos.

A los estudiantes se les proporciona la lista de juguetes que Pedro le entrega a su madre para que esta los busque.

Figura 5 Actividad 1, Clase 1

Las preguntas que orientan la actividad tienen relación sobre: cuáles formas de determinar la ubicación de los juguetes funcionaron, cuáles no y por qué, y sobre la relación o equivalencia entre ellas.

Momento de Desarrollo:

El estudio continua con la actividad 2, que presenta el siguiente problema:

Actividad 2 Observa la siguiente imagen del closet de Pedro. ¿Cuál es la posición en X y la posición en Y de cada uno de los siguientes objetos?

Al estudiante se le presenta una imagen del closet con los juguetes que almacena. Los juguetes están ubicados en puntos de intersección de las cuadrículas del plano cartesiano.

Figura 6: Actividad 2, Clase 1

Las preguntas que orientan la actividad tienen relación sobre: cuáles formas de determinar la ubicación de los juguetes funcionaron, cuáles no y por qué, y sobre la relación o equivalencia entre ellas.

> *"Se espera que concluyan que, para ubicar un punto en el plano de coordenadas rectangulares cartesianas, es necesario determinar dos números que indican la distancia de ese punto a cada uno de los ejes. La primera coordenada representa la distancia al eje vertical y, la segunda, la distancia al eje horizontal"*

El proceso continua con la actividad 3, donde se propone a los estudiantes determinar el punto que permite determinar la ubicación de unos objetos en el plano.

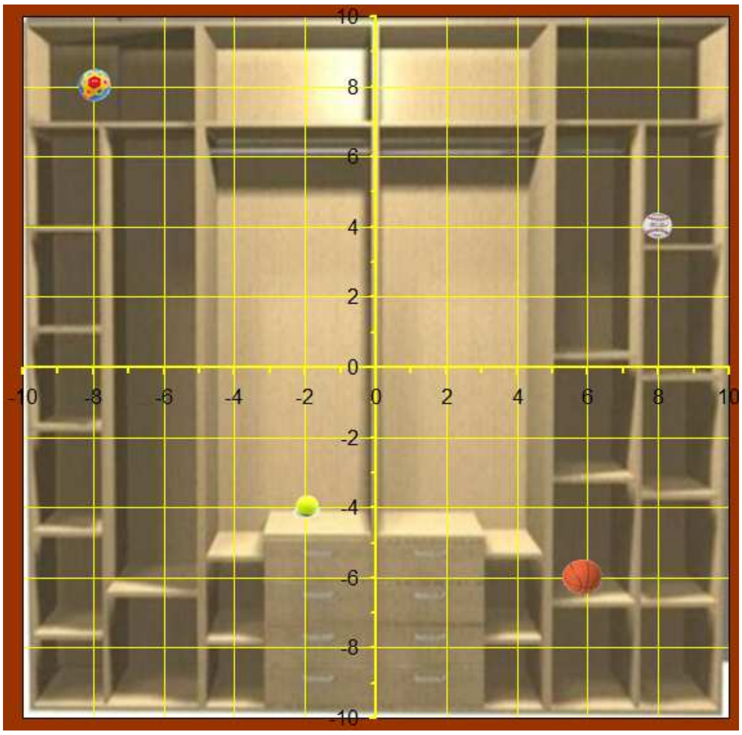

Figura 7: Actividad 3, Clase 1

Para complejizar la actividad anterior, se propone a los estudiantes la tarea de describir, verbalmente y utilizando el sistema de coordenadas ya establecido, la ubicación de un punto que no se encuentra en un cruce del cuadriculado.

Es de esperar que para el desarrollo de este problema, los alumnos reconozcan que para describir el punto en cuestión es necesario recurrir a los números decimales.

Esta actividad se puede realizar dos o tres veces partiendo con puntos cuya ubicación sea más sencilla (por ejemplo (-2.5, 7)) para concluir con un punto cuya ubicación sea más compleja de determinar (por ejemplo (-11.7, 8,1)) para cuyo caso, basta con que identifiquen de manera aproximada su ubicación.

Las preguntas que orientan la actividad tienen relación sobre: qué características poseen los puntos utilizados, cuáles son útiles, cuáles no y por qué.

Momento de Cierre:

La clase finaliza con la actividad 4, donde se plantea a los estudiantes la necesidad de comunicar la ubicación de una figura en el plano.

> **Actividad 4**
> Observa la siguiente imagen del mueble del televisor.
> ¿Cuál es la ubicación en el plano de cada uno de los electrodomésticos?

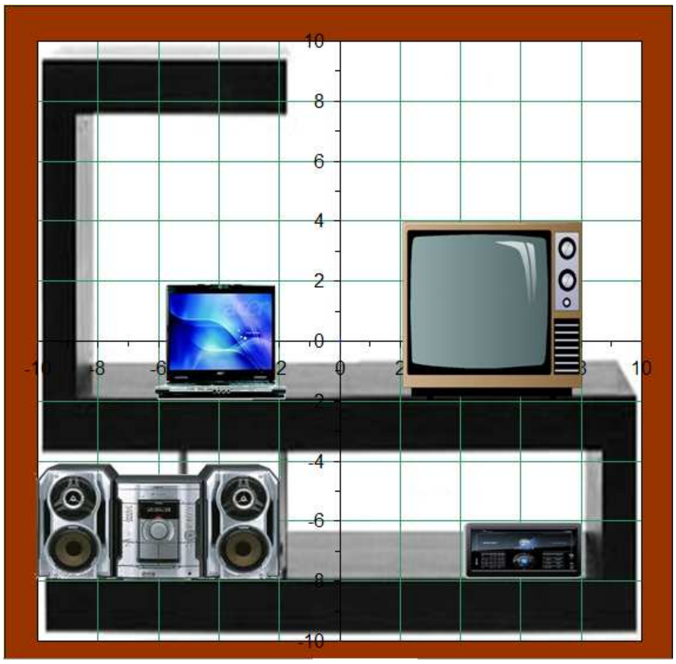

Figura 8: Actividad 4, Clase 1

El profesor conduce a la discusión de los estudiantes mediante la siguiente pregunta:

Para comunicar a un compañero la ubicación de los electrodomésticos en el plano ¿qué información le entregarías?, ¿es suficiente?, ¿Por qué?

> *"Se espera que concluyan que, para ubicar un cuadrilátero en el plano de coordenadas rectangulares, basta con ubicar sus vértices, determinar las coordenadas de cada uno y unirlos mediante rectas"*

4.4.2. Segunda clase

En esta clase alumnos y alumnas aplican una traslación a un punto, dado el vector de traslación, en el plano cartesiano.

Momento de Inicio:

La primera actividad que se propone a los estudiantes consiste en determinar cuánto debe avanzar el esquiador para cruzar la meta.

El estudiante no debe traspasar o tocar las líneas del contorno del camino y sólo puede realizar seis movimientos para llegar a la meta.

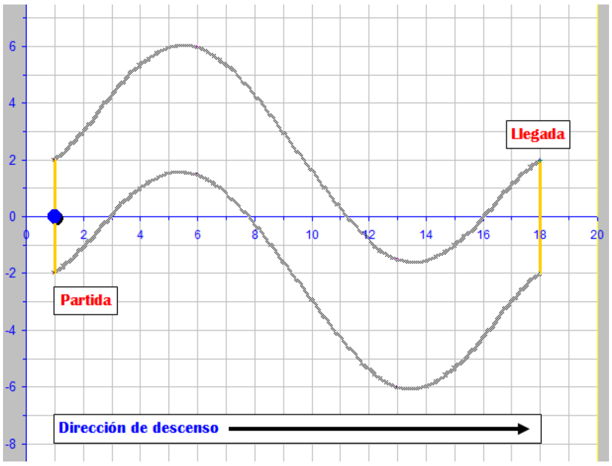

Figura 9: Actividad 1, Clase 2

Se debe especificar a los estudiantes cuál es la dirección de descenso para dar sentido a la problemática y velar por el cumplimiento de las reglas del juego.

Las preguntas que guían el problema tienen relación con: ¿Cuál es la menor cantidad de movimientos que puedes realizar para llegar a la meta? ¿Por qué?

Momento de Desarrollo:

La actividad 2 es acompañada de un video que contextualiza la problemática.

Se debe explicar a los estudiantes que el esquí es un deporte de montaña que consiste en el deslizamiento sobre la nieve.

Una de sus modalidades es el SLALOM, que consiste en descender pendientes muy inclinadas sorteando una serie de obstáculos, denominados puertas, que están cerca uno de otros en disposición zig-zag.

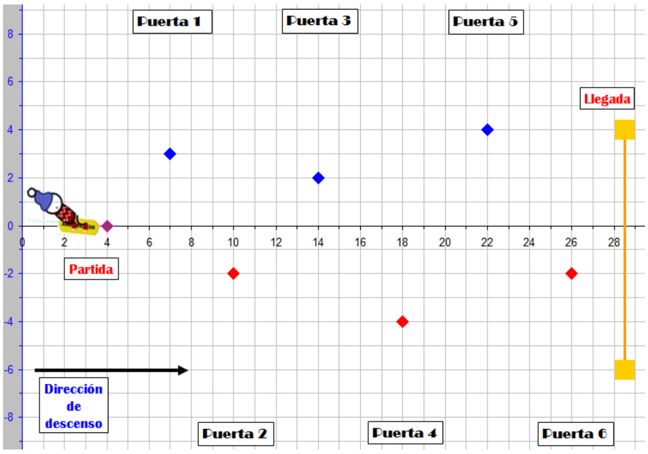

Figura 10: Actividad 2, Clase 2

La problemática busca que los estudiantes anticipen el punto al que llegarán luego de realizar un determinado movimiento.

No basta sólo con determinar cuánto se moverá, en que dirección y sentido, sino además determinar el punto exacto al que se llegará.

"Se espera que concluyan que, un vector se determina conociendo su punto origen (x_1, y_1) y su punto extremo (x_2, y_2). Restan la abscisa x_2 del punto extremo con la abscisa x_1 del punto origen y se resta la ordenada y_2 del punto extremo con la ordenada y_1 del punto origen"

La actividad 3 es una competencia que se realiza entre parejas de estudiantes.

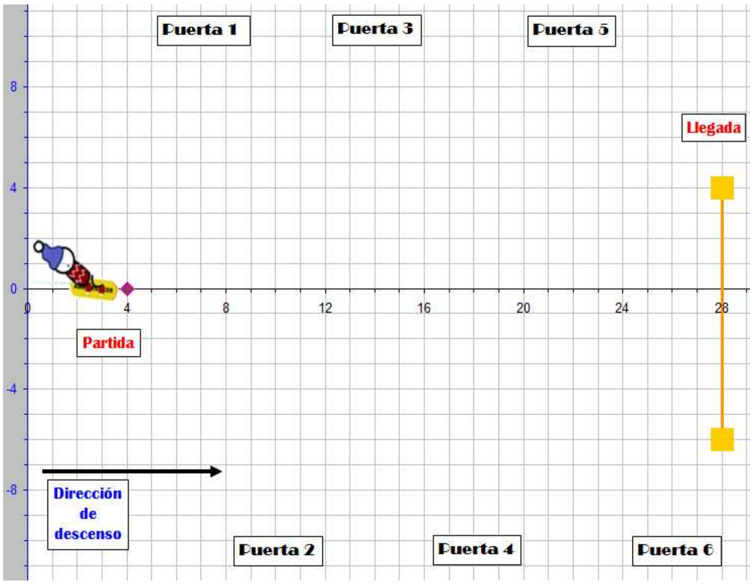

Figura 11 Actividad 3, Clase 2

Se busca que los estudiantes pulan la estrategia hallada en la actividad 2.

La complejidad de la actividad se refleja en que las puertas de slalom son puestas por cada contrincante, por tanto se utilizarán puntos que no se encuentra en un cruce del cuadriculado.

Momento de Cierre:

La última actividad busca que los estudiantes consoliden la técnica que han hallado a lo largo de la sesión. Es clave que los estudiantes comuniquen su estrategia a otros compañeros para dar sentido a la técnica que han desarrollado.

La problemática consiste en realizar una carrera de slalom, pero en un circuito diferente al anterior. En este se utilizan los cuatro cuadrantes en que se divide al plano cartesiano. Además, las puertas no se encuentran en los cruces de las cuadrículas disponibles.

"Se espera que concluyan que, en la aplicación de una traslación en el plano cartesiano de un punto dado el vector de traslación: Para trasladar un punto A de coordenadas (x_1, y_1) dado el vector de traslación $\overrightarrow{BC}$ de componentes (a, b), se suma a la abscisa x_1 del punto A la componente a del vector $\overrightarrow{BC}$ y se suma a la ordenada y_1 del punto A la componente b del vector $\overrightarrow{BC}$".

4.4.3. Tercera clase

En esta clase alumnos y alumnas determinan el vector de traslación, dado un punto y su homólogo. Las cuatro actividades que se presentan giran en torno a un campo de golf.

Momento de Inicio:

La primera actividad planteada a los estudiantes muestra un campo de golf y dos jugadores ubicados en distintos lugares.

Se utiliza el primer cuadrante del plano y las pelotas de golf están ubicadas en el cruce de las cuadrículas. Además el hoyo 1 se encuentra en el cruce de las cuadrículas.

La problemática que se les presenta a los estudiantes es la siguiente:

Actividad 1 ¿Cuál es el tiro que debe realizar cada golfista para enviar la bola al hoyo en uno?

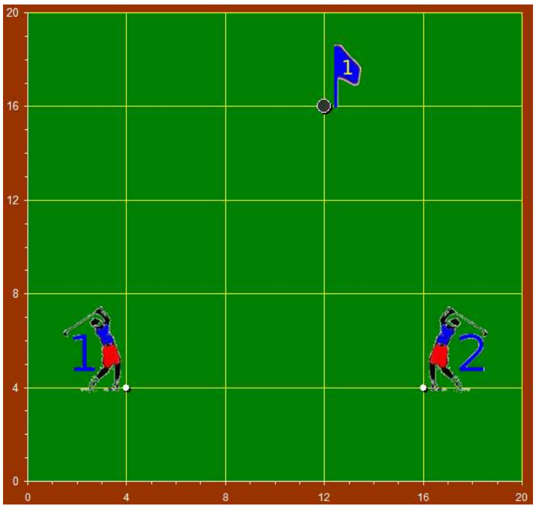

Figura 12: Actividad 1, Clase 3

La problemática se ve complejizada debido a que se solicita que este tiro debe ser un hoyo en uno. Además, las distancias entre las cuadrículas se encuentra a cuatro unidades una de otra en ambos ejes.

Las siguientes preguntas sirven de guía para esta actividad: ¿Cuál es el movimiento (x, y) que lleva la pelota de cada jugador al hoyo 1 con un sólo tiro? Y si cada jugador hace un hoyo en uno, ¿a qué punto (x, y) llega la pelota de cada jugador?

Para que la técnica de los estudiantes pueda ponerse a prueba, se debe ahondar en las siguientes preguntas:

Supongamos que la pelota del jugador 1 cambia de posición y ahora está en el punto (2,6). ¿Cuál es el movimiento que realiza la pelota para que el golfista consiga un hoyo en uno? Y supongamos que la pelota del jugador 2 cambia de posición y ahora está en el punto (18,10). ¿Cuál es el movimiento que realiza la pelota para que el golfista consiga un hoyo en uno?

En esta instancia, los estudiantes no poseen un apoyo visual que les permita realizar las operaciones.

Momento de Desarrollo:

La actividad 2 es manipulada a través de las variables didácticas para complejizar la tarea.

En esta, ni las pelotas de los jugadores ni el hoyo 2, se encuentran disponibles en el cruce de las cuadrículas. Además, la separación de las cuadrículas está a cuatro unidades una de otra en ambos ejes.

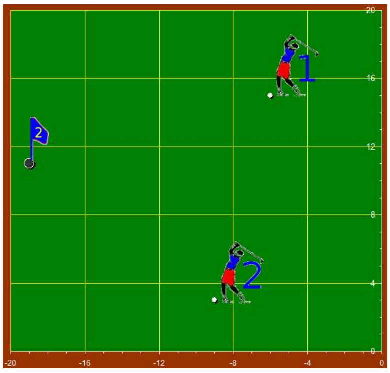

Figura 13: Actividad 2, Clase 3

Para que la técnica de los estudiantes pueda ponerse a prueba, se deben plantear las siguientes preguntas:

Supongamos que la pelota del jugador 1 cambia de posición y ahora está en el punto (-14,7). ¿Cuál es el movimiento que realiza la pelota para que el golfista consiga un hoyo en uno? Y supongamos que la pelota del jugador 2 cambia de posición y ahora está en el punto (-6,13). ¿Cuál es el movimiento que realiza la pelota para que el golfista consiga un hoyo en uno?

La actividad 3 amplia el campo de acción de los estudiantes, ahora se enfrentan al plano completo, nos hay cuadrículas, la marca numérica en cada eje está a cinco unidades una de otra en ambos ejes y los jugadores están en distintos cuadrantes.

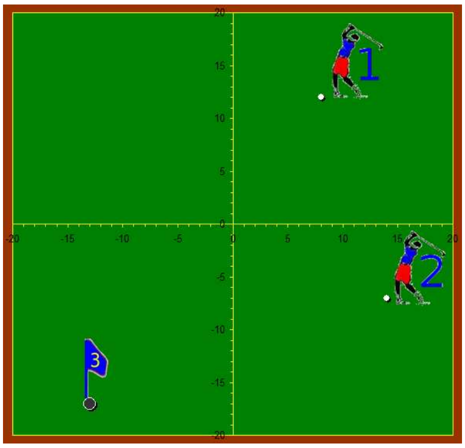

Figura 14: Actividad 3, Clase 3

Momento de Cierre:

Para finalizar la clase, se presenta a los alumnos un juego que deben realizar en parejas.

Los jugadores 1 y 2 están en el green y deben enviar la pelota de golf al hoyo 4 en el menor número de tiros.

Se debe considerar que cada bola de golf asociada a un jugador puede ser cambiada de ubicación. Además el hoyo 4 puede cambiarse de posición hacia cualquiera de los cuadrantes disponibles.

Con esta actividad se busca que los estudiantes puedan consolidar la técnica que han desarrollado a través de la clase, puliéndola y defendiendo su efectividad ante sus compañeros.

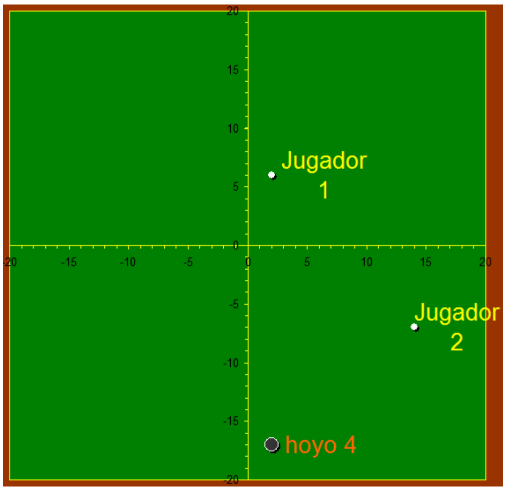

Figura 15: Actividad 4, Clase 3

Para la sesión:

> *"Se espera que concluyan que dado un punto P, determinan sus coordenadas (x_1, y_1) y las coordenadas (x_2, y_2) de su punto homólogo P'. Restan la abscisa x_2 del punto P' con la abscisa x_1 del punto P y restan la ordenada y_2 del punto P' con la ordenada y_1 del punto P"*

5. Síntesis y Conclusiones

El análisis histórico-epistemológico nos permitió realizar una descripción del MER en torno a las traslaciones, sin embargo, debe considerársele como una primera aproximación de carácter provisional. El MER descrito, muestra cuatro estados en la evolución del objeto traslación, y que hemos denominado: sintético, analítico, vectorial y afín.

Al considerar el MER, podemos notar una incoherencia en la OM a enseñar en primer año medio, dado que presenta tareas matemáticas en el plano euclídeo y cartesiano de manera desarticulada, con un disminuido discurso tecnológico-teórico que provoca el estancamiento de la OM a enseñar.

El análisis curricular en torno a las traslaciones en primer año medio ha mostrado una OM que evidencia un predominio de tareas asociadas a un trabajo de carácter sintético, por sobre las tareas asociadas a un trabajo analítico. Esta situación, provoca una ruptura en la continuidad existente entre las geometrías sintética y analítica, generando una desarticulación entre las técnicas asociadas a cada modelo. Más aún, el modelo analítico no es aprovechado como elemento articulador entre los modelos sintético y vectorial. Finalmente, se observa la convivencia desarticulada de elementos tecnológico-teóricos de los distintos modelos.

Estas consideraciones evidencian el fenómeno didáctico denominado desarticulación de la matemática escolar, en particular, la desarticulación en el estudio de las traslaciones en el plano.

Respecto a la utilización de planillas de cálculo como soporte principal para las tareas problemáticas, concluimos que permiten la modelación de diversas situaciones en el plano cartesiano, propiciando que los alumnos y alumnas puedan interactuar con puntos, segmentos, rectas, figuras y vectores de forma simple y natural. Además, es una herramienta conocida por docentes y alumnos, quienes la conciben como cercana y de un entorno amigable. Por último, utilizar esta herramienta polivalente no requiere conocimientos en un determinado lenguaje de programación, ni el trabajo de desarrolladores para construir una aplicación.

Sin embargo, consideramos que el sólo uso de las planillas de cálculo como medio tecnológico de enseñanza no garantiza aprendizajes efectivos en los alumnos. Propugnamos que la calidad de este medio depende, más que de sus características dinámicas y técnicas, de la correcta articulación y coherencia de las tareas matemáticas presentes en la propuesta didáctica que hemos diseñado.

La secuencia de estudio diseñada y construida ha considerado el modelo analítico. Esto debido a que la OM a enseñar en primero medio, es la continuación de la OM a enseñar en educación básica y que tiene relación con la OM sintética. Por lo tanto, la propuesta busca utilizar el modelo analítico como elemento articulador que permita avanzar hacia el modelo vectorial. Sin embargo, la propuesta puede ser mejorada, en el sentido de propiciar el surgimiento de la noción de espacio vectorial a partir de la noción de plano cartesiano.

Bibliografía

Artigue, M; Douady, R; Moreno, L; Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics* 59, 235-268.

Becerra, R. (1989). *Introducción a la geometría euclidiana*. Santiago: USACH.

Berenice, A. (2006). *Geometría: Desarrollo Axiomático*. Cali: ECOE Ediciones.

Berenice, A. (2002). *Notas de clase: Geometría en el plano y en el espacio*. Cali: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial El zorzal.

Carrasco, A. (2004). *La geometría en el paso de la básica a la media: Un análisis de las discontinuidades entre ambos niveles*. Presentada en la Universidad de Santiago de Chile para obtención del grado de Licenciado

CEOC-UTAL. (2010). Terremoto y PSU 2010.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE/Horsori, Barcelona. España.

Cid, F; Muñoz, V. (2003). *Libro de texto oficial educación matemática primer año medio*. Santiago: Editorial Arrayán.

Dartnell, P. (2008). Innovando con transformaciones geométricas. Enlaces. Centro de educación y Tecnología. Chile.

Escobar, M; Soto, J. (2006). Geometría.cl/emtp. *Aprender geometría creando soluciones*. Santiago: Centro Comenius – USACH.

Espinoza, L; Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas en torno al objeto de límite de función: Una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las ciencias*, 18(3), 355-368.

Espinoza, L; Barbé, J; Mitrovich, D; Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Uzès. Francia.

Espinoza, L; et al. (2006). *Ampliación y reducción de figuras. Matemática cuarto año básico*. Segunda unidad didáctica. Santiago: s.n.

Galaz, M. (2005). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en enseñanza media. Un procesador geométrico como medio didáctico. Programa de Magister en Educación. Santiago: Universidad de Chile.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato: ¿Dos mundos completamente separados?. *Revista SUMA*, 39,13-26.

Henao, O. (1996). Las hojas de cálculo como herramienta didáctica. *Revista Informática Educativa* [en línea], 9 (2), 103-121. Recuperado el 1 de octubre de 2011, de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/419

Ligouri, L. (1995). Las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el marco de los viejos problemas y desafíos educativos. En: Litwin, E. (2000). *Tecnología educativa: Política, historias, propuesta*. Ediciones Paidós.

López, M; Lagunes, C; Herrera, S. (2006). Excel como una herramienta asequible en la enseñanza de la estadística. *Revista Teoría de la educación: Educación y Cultura en la sociedad de la información* [en línea], 7 (1). Recuperado 1/10/11 http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1960832

MINEDUC Chile. (1998). Programa de estudio oficial de primer año medio.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Memoria para optar al grado de doctor. Madrid, España.

Sosa, M. (2006). Transformaciones en el plano usando software de geometría dinámica. Revista Números [en línea], 75, 43-70. Recuperado el 1/12/2010 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/75/Monografico_04.pdf

UCE – MINEDUC Chile. (2001). Cobertura curricular en segundo ciclo básico y enseñanza media. Sector matemática.

Vidal, R; Chicharro, M; Montoya, M. (2003). *Matemática primero medio*. Santiago: Editorial Zig-Zag.

Zanocco, P; León, I; Pedreros, A. (2006). Transformaciones isométricas en la educación general básica. *En XIII jornadas nacionales de educación matemática*. Viña del Mar.

Zanocco, P; León, I; Pedreros, A. (2008). Transformaciones isométricas en cuarto año de educación básica: Una propuesta para su enseñanza. *Boletín de Investigación Educacional*, 23(2), 255-270.

Diego Cheuquepán Maldonado: Especialista en Tecnologías Educativas en la Dirección General de Tecnologías de la Información de Universidad de Las Américas. Licenciado en Educación Matemática y Computación por la Universidad de Santiago de Chile (2011).**diego.cheuquepan@udla.cl**

Joaquím Barbé Farré: Coordinador área Informática Educativa del Centro Félix Klein de investigación, experimentación y transferencia en didáctica de la matemática y la ciencia, perteneciente a la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile. Doctor en Física por la Universitat Autònoma de Barcelona (2003). **quimbarbe@gmail.com**