UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 121-130
ISSN: 1815-0640

Contribuciones didácticas para la comprensión del tema de Sumatoria de Riemann en Cálculo Integral

Luis Siero, Eilen Oviedo Gonzalez, Berenice Fong, Jorge Mata

Resumen

Dentro del área de cálculo Integral, las sumas de Riemann son un método fundamental para aproximar el área total bajo la gráfica de una función. Presentamos una descripción detallada de cómo resolver dichas sumatorias, utilizando un método sencillo y describimos su inmediata implicación en la parte didáctica de las matemáticas. Este resultado es fundamental y tiene importantes consecuencias en muchas áreas del cálculo y el análisis matemático, y se ha generalizado de diversas formas y en distintos contextos en las ciencias e ingenierías.

Abstract

In mathematics teaching, the calculus of the area of a integral, Riemann sums are a fundamental method to approximate the total area under the graph of a function. We present a detailed description of how to resolve these summations, using a simple method and describe its immediate involvement in the teaching of mathematics. This result is fundamental and has important consequences in many areas of computing and mathematical analysis, and has become widespread in various ways and in different contexts in science and engineering.

Resumo

Dentro da área do cálculo integral, somas de Riemann é um método fundamental para aproximar a área total sob o gráfico de uma função. Nós apresentamos uma descrição detalhada de como resolver esses somatórios, usando um método simples e descrever a sua participação imediata no ensino da matemática. Este resultado é fundamental e tem consequências importantes em muitas áreas da computação e análise matemática e tem se tornado comum em várias maneiras e em diferentes contextos da ciência e engenharia

1. Introducción

En la actualidad, las estrategias de enseñanza y aprendizaje dentro de la mayoría de las carreras universitarias se ha ido transformando como consecuencia de la adopción de variantes de las corrientes de conocimiento; como es el caso del Constructivismo, de acuerdo con Barr y Tagg (2002), donde el aprendizaje es considerado como resultado de la actividad del aprendiz. De igual forma, como se plantea en la corriente de las competencias del aprendizaje, como un resultado observable y por lo tanto, como la aplicación de conocimientos a la resolución de problemas de diversa índole (Biggs, 2000). En el caso de las materias del campo de las ciencias formales, como es el de las matemáticas, la adopción de estas corrientes por parte de los docentes ha demostrado una mejora paulatina del modelo didáctico adoptado.

La implementación de los diversos modelos de enseñanza son el apoyo docente para el logro del aprendizaje. Para efectos del presente trabajo nos referiremos al modelo tradicional, como aquel donde se privilegiaba únicamente la exposición docente, la resolución de problemas en el pizarrón y en cuaderno, así como la evaluación a través de formularios y exámenes, es decir el modelo basado únicamente en la enseñanza, considerando al alumno como un ente receptor del conocimiento donde su tarea principal era escuchar en silencio y resolver los problemas planteados de una manera automatizada (Martínez, 2004). En caso contrario, en este trabajo nos referiremos a los modelos actuales, como aquellos, donde el alumno es el protagonista del aprendizaje, y donde el docente es el encargado de diseñar los ambientes de aprendizaje más adecuado, así como no hay un sólo modelo didáctico definido, sino que el maestro va cambiando el modelo conforme lo va considerando necesario, mostrando su versatilidad, pero con los siguientes aspectos como común denominador: el considerar al alumno como un actor central en el proceso, al aprendizaje como resultado de la construcción colectiva de conceptos, del docente como diseñador de actividades diversas que realiza el alumno y demostraciones activas apoyadas en las Tecnologías de la Educación, o simplemente, el de desarrollar materiales didácticos que permitan al docente hacer demostraciones significativas ante los alumnos, y por último, donde la evaluación está basada en la resolución y aplicación de lo aprendido por el alumno, lejos de ser la memorización el único medio para el aprendizaje (Díaz Barriga, F, 2005).

Dentro de las carreras de ingenierías, en el apartado de matemáticas, una materia básica es la de cálculo Integral. Uno de los problemas a los que nos enfrentamos los docentes al impartir esta materia, es que los alumnos tienen un conocimiento confuso y en algunos casos erróneo del tema por lo que es importante explicarlo mediante ejemplos ilustrativos. Dentro de esta área de conocimiento existe el tema básico el cual es la llamada *Suma de Riemann* y es un método para aproximar el área total bajo la gráfica de una curva, la cual es fácil calcular utilizando el teorema fundamental del cálculo mediante una integral definida. Estas sumas son en honor del matemático alemán Bernhard Riemann, quien trabajo en el análisis de ellas.

Por esto mismo, un principio básico en la comprensión del concepto de integral es el de entenderla como una sumatoria de áreas y consiste en vislumbrar en conjunto, el concepto de áreas de Riemann. En la educación tradicional, este contenido por lo general confunde un poco a los alumnos, por lo que surge la necesidad de poder explicarla de una manera más clara y precisa para que el alumno pueda reproducir y aplicar el conocimiento adquirido, por lo que en este trabajo utilizando modelos vanguardistas. Se propone una metodología como material didáctico para desarrollar el concepto de este tema mediante el cálculo de una función sencilla.

A continuación se explica mediante modelos actuales cómo calcular el área de una región plana utilizando sumatorias de Riemman, para desarrollarlo, se escogió la figura de un triángulo rectángulo ya que es muy sencillo obtener el área de él y los alumnos de los primeros semestres de nivel superior saben cómo hacerlo. Una vez comenzado a trabajar con este concepto, se procederá después a extrapolar este análisis (algoritmo) a otro tipo de figuras o regiones y finalmente a calcular dicha área utilizando el teorema fundamental del cálculo.

2. Desarrollo

Primeramente, se traza un triángulo rectángulo de $10\ cm$ de base y $5\ cm$ de altura (figura 1). Calculando el área del triángulo rectángulo nos queda

$$A = \frac{(base)(altura)}{2} = \frac{10 * 5}{2} = \frac{50}{2} = 25\ cm^2$$

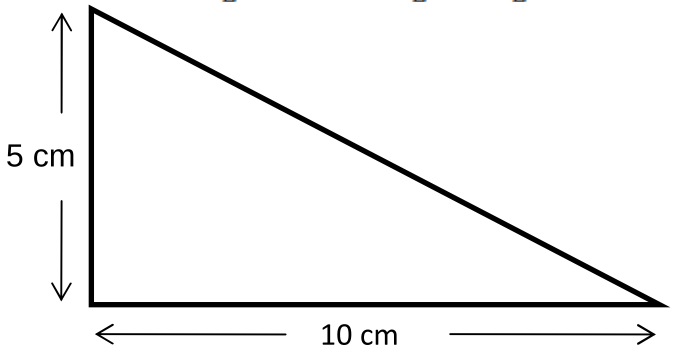

Figura 1: Triángulo Rectángulo con 10 cm de base y 5 cm de altura

Ahora se aproximará el área del triángulo rectángulo por medio de rectángulos inscritos (es decir rectángulos que se encuentran dentro de la figura). Se trazan rectángulos inscritos de $2\ cm$ de ancho a lo largo de la base del triángulo rectángulo como se muestra en la figura 2, después calculamos el área de cada rectángulo, si sumamos estas áreas se obtiene al área total de dicha figura como se muestra a continuación.

$$A_1 = (2)(1) = 2\ cm^2 \qquad A_3 = (2)(3) = 6\ cm^2$$

$$A_2 = (2)(2) = 4\ cm^2 \qquad A_4 = (2)(4) = 8\ cm^2$$

$$A_{T1} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20\ cm^2$$

Se puede observar que la diferencia entre ambos cálculos es bastante significativa ya que el área real del triángulo rectángulo es de $A_{real} = 25\ cm^2$ y la primera aproximación que calculamos es $A_{T1} = 20\ cm^2$, esto se debe a los espacios en blanco que se muestran dentro del triángulo rectángulo en la figura 2.

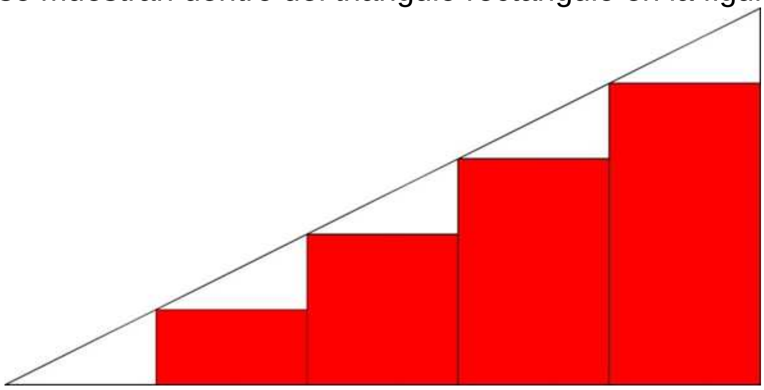

Figura 2. Triángulo con rectángulos inscritos de 2 cm de ancho

Si se quiere obtener un cálculo más exacto, entonces haremos los espacios en blanco más pequeños partiendo los rectángulos a la mitad tendremos rectángulos inscritos de $1\ cm$ de ancho a lo largo de la base del triángulo como se muestra en la figura 3. De igual manera calculamos las áreas de los rectángulos y obtenemos.

$$A_1 = (1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad A_4 = (1)\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{4}{2} \qquad A_7 = \frac{7}{2}$$
$$A_2 = (1)\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{2}{2} \qquad A_5 = (1)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \qquad A_8 = \frac{8}{2}$$
$$A_3 = (1)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \qquad A_6 = (1)\left(\frac{6}{2}\right) = \frac{6}{2} \qquad A_9 = \frac{9}{2}$$
$$A_{T2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \frac{7}{2} + 4 + \frac{9}{2} = \frac{45}{2} = 22.5\ cm$$

Analizando los resultados y observando la figura 3, nos damos cuenta que todavía existe una diferencia amplia entre el área real del triángulo y las dos aproximaciones calculadas, aunque la diferencia entre el área real y la segunda aproximación es menor. Por esta razón podemos inferir que si partimos los rectángulos a la mitad se reducirá el espacio en blanco y por lo consiguiente se obtendrá una aproximación más exacta del área de la región deseada.

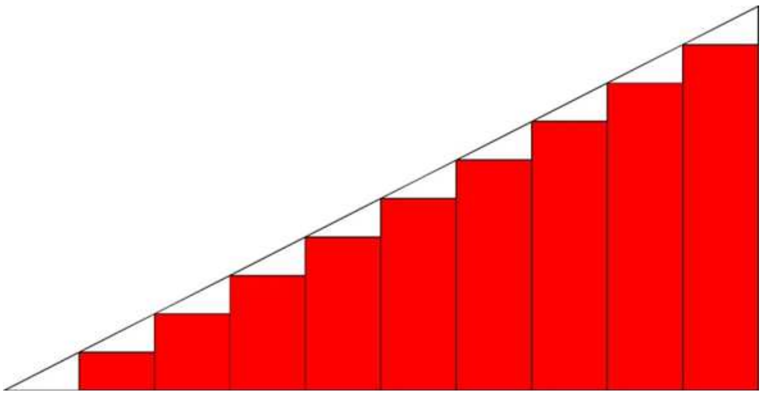

Figura 3: Triángulo con rectángulos inscritos de 1 cm de ancho

Por lo anterior, es que ahora se trazan rectángulos de $\frac{1}{2}\ cm$ de ancho a lo largo de la base del triángulo rectángulo como se muestra en la figura 4, hacemos énfasis en los espacios en blanco que se encuentran dentro del triángulo rectángulo en que son mucho más pequeños que los que están en la figura 2, calculando el área análogamente obtenemos

$$A_1 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \qquad A_6 = \frac{6}{8} \qquad A_{11} = \frac{11}{8} \qquad A_{16} = \frac{16}{8}$$
$$A_2 = \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} \qquad A_7 = \frac{7}{8} \qquad A_{12} = \frac{12}{8} \qquad A_{17} = \frac{17}{8}$$
$$A_3 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \qquad A_8 = \frac{8}{8} \qquad A_{13} = \frac{13}{8} \qquad A_{18} = \frac{18}{8}$$
$$A_4 = \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} \qquad A_9 = \frac{9}{8} \qquad A_{14} = \frac{14}{8} \qquad A_{19} = \frac{19}{8}$$

$$A_5 = \left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} \qquad A_{10} = \frac{10}{8} \qquad A_{15} = \frac{15}{8}$$

$$A_{T3} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \cdots + \frac{19}{8} = \frac{190}{8} = 23.75\ cm^2$$

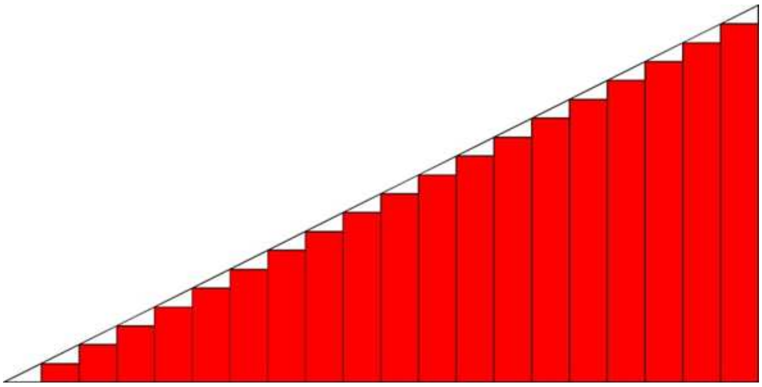

Figura 4 Triángulo con rectángulos inscritos de $\frac{1}{2}$ cm de ancho

Comparando la tercera aproximación del área del triángulo que es $A_{T3} = 23.75\ cm^2$ con el área real del triángulo que es $A_{real} = 25\ cm^2$ podemos observar que es más exacta, siguiendo el mismo razonamiento dividimos los rectángulos inscritos a la mitad obteniendo rectángulos inscritos de $\frac{1}{8}\ cm$ de ancho en la figura 5 y calculamos el área, obtenemos

$$A_{T4} = \frac{1}{32} + \frac{2}{32} + \frac{3}{32} + \frac{4}{32} + \cdots + \frac{39}{32} = \frac{780}{32} = 24.38$$

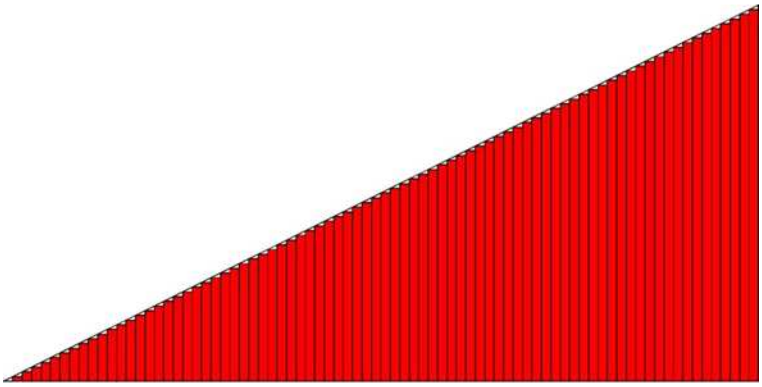

Figura 5. Triángulo con rectángulos inscritos de $\frac{1}{8}$ cm de ancho

Ahora si volvemos a partir los rectángulos inscritos a la mitad obtendríamos un ancho de $\frac{1}{16}\ cm$ por cada uno de los rectángulo y si calculamos obtenemos

$$A_{T5} = \frac{1}{128} + \frac{2}{128} + \frac{3}{128} + \frac{4}{128} + \cdots + \frac{39}{128} = \frac{3160}{128} = 24.69$$

Si observamos que la quinta aproximación está muy cercana al área real podemos inferir que si hacemos los rectángulos inscritos tan pequeños que no exista ningún espacio en blanco podríamos tener una aproximación igual a la del área real del triángulo rectángulo. Resolviendo análogamente, pero tomando rectángulos circunscritos se puede observar que existe un excedente en el área a calcular, conforme el rectángulo se haga más pequeño ese excedente disminuirá como se muestra en la siguiente figura:

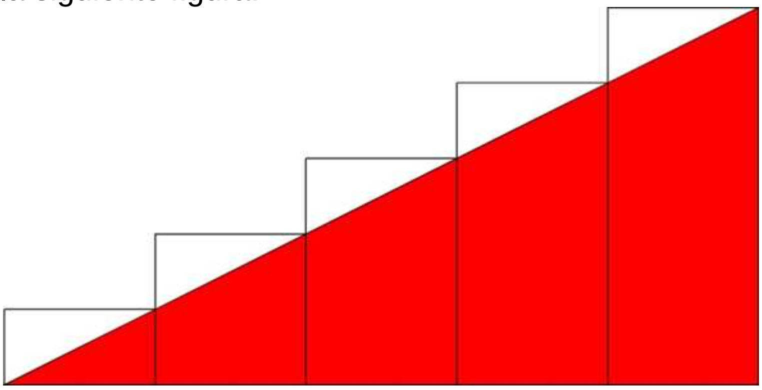

Figura 6. Triángulo con rectángulos circunscritos de 2 cm de ancho

Comparando los cálculos de los triángulos inscritos con los triángulos circunscritos podemos observar conforme vamos haciendo los rectángulos más pequeños más se acerca al valor real del área del triángulo rectángulo de figura 7.

$A_{c1} = 30.00\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $2\ cm$ de ancho.

$A_{c2} = 27.50\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $1\ cm$ de ancho.

$A_{c3} = 26.25\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $\frac{1}{2}\ cm$ de ancho.

$A_{c4} = 25.63\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $\frac{1}{8}\ cm$ de ancho.

$A_{c5} = 25.31\ cm^2$ Rectángulos circunscritos con tamaño de $\frac{1}{16}\ cm$ de ancho.

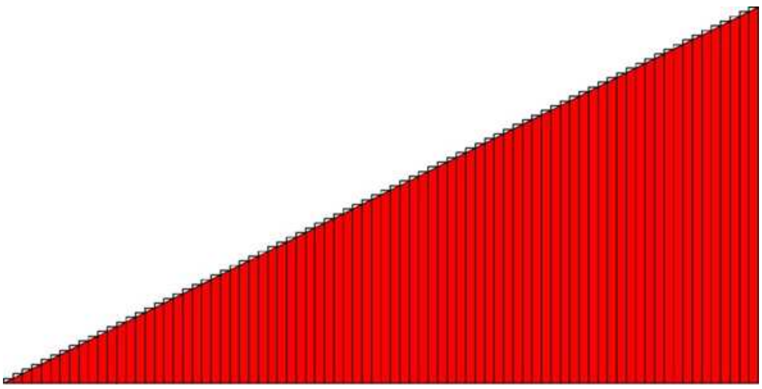

Figura 7: Triangulo con rectángulos circunscritos de $\frac{1}{8}$ cm de ancho

Ahora si seguimos haciendo más pequeños los rectángulos ya sean inscritos o circunscritos podemos darnos cuenta que ambos cálculos tienden a un valor de $25\ cm^2$ el cual es el valor real del área del triangulo rectángulo.

Por esta razón, si tenemos un número infinito de rectángulos tan pequeños como nosotros queramos, podemos encontrar el área de cualquier región con bastante exactitud, por lo que sabemos que el área se obtiene de la siguiente manera,

$$\text{Área de la región} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Donde $f(c_i)\,\Delta x$ en este caso, es la función que describe nuestra recta y la cual es idéntica a la integral definida que sería:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Para la resolución de esta integral, podemos utilizar los métodos tradicionales, pero, al entender la integral como una sumatoria, mediante este ejemplo, vemos que el concepto y el resultado es más comprensible ya que se ha entendido la idea global de la sumatoria y su analogía con la integral definida.

A continuación detallamos parte de la dinámica didáctica que se utilizaría en una educación tradicional que consiste como primer argumento en definir directamente el *Teorema Fundamental del Cálculo* y las propiedades de la llamada Integral de Riemann. Posteriormente está su aplicación en la resolución de problemas, muchas veces sin entender completamente el concepto.

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función integrable definida en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, se define una nueva función:

$$F(x) = \int_x^a f(t)dt$$

Entonces *F* es continua en $[a, b]$. Aparte, si *f* es continua en un punto *c* incluido en el intervalo (a,b), entonces podemos decir que *F* es derivable en *c* y:

$$F'(C) = f(C)$$

Propiedades de las Funciones de Riemann

- Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es Integrable.
- Toda función continua y acotada en un intervalo cerrado y acotado, excepto en una cantidad numerable de puntos, es integrable.
- Recíprocamente, si una función acotada definida en un intervalo cerrado y acotado es integrable, entonces es continua en ese intervalo excepto como mucho en una cantidad numerable de puntos.

- Toda función monótona y acotada en un intervalo cerrado y acotado es integrable. (Courant y John, 1999)

Como podemos ver, un método didáctico moderno basado en una enseñanza en la que participen los alumnos directamente, utilizando cierta información matemática elemental y que les sea familiar, es mucho más completo que el entendimiento generado sólo en conceptos de la antigua educación tradicional. Dentro de las competencias, es importante remarcar, que los actuales métodos didácticos son más eficientes que los utilizados en la enseñanza tradicional, sobre todo en áreas de ciencias exactas.

Aplicaciones

Mencionamos a continuación algunas de las aplicaciones prácticas de la integral de Riemann:

- Cálculo de volúmenes de revolución.
- Cálculo de la longitud de una curva.
- Cálculo del área lateral de una superficie de revolución.

Entendiendo por volumen de revolución el cuerpo tridimensional generado por un área plana que da vueltas alrededor de un eje (eje de simetría del volumen), mencionamos solamente algunos de los volúmenes más conocidos:

- Cilindro de revolución: lo genera el área plana que define un rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus lados. (Apóstol, 1990) y (Courant y John, 1999)
- Esfera: Se genera un semicírculo cuando gira alrededor del diámetro.
- Cono de revolución: lo genera el área plana que define un triángulo rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus catetos. (Apóstol, 1990) y (Courant y John, 1999)

Este último caso es el que aplicamos en nuestro ejemplo. Con esta misma función que es la hipotenusa del triángulo, si la hacemos rotar, generamos un cono de volumen *V.*

El volumen *V* de revolución generado por un área que define una función continua $f(x)$ sobre un intervalo dado del eje de abscisas [*0, h*] y puede considerarse igual a la suma de los infinitos cilindros de altura infinitesimal que pueden ser construidos por cortes perpendiculares al eje de simetría del volumen *V* (el volumen del cilindro infinitesimal: superficie de la base –círculo de radio $f(x)$ por la altura Δx, es decir, está dado por $V_{cono} = \pi \cdot f(x)^2 \cdot \Delta x$ (Courant y John, 1999).

$$V_{cono} = \pi \int_0^h \left(-\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^2\right]_0^h = \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Por lo que el volumen del cono es: $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

3. Conclusiones

En este trabajo mostramos un modelo didáctico actual, como un método de enseñanza ideal para la comprensión del concepto de Integral Definida manejando las llamadas Sumas de Riemann. Utilizamos el ejemplo de un triángulo rectángulo que es por todos conocidos. Dividiéndolo en rectángulos inscritos y mediante sumatorias aproximamos el área bajo la función y con un número finito de sumatorias, logramos aproximar el área buscada y posteriormente lo comparamos con el resultado que nos daría la misma función en una integral definida, llegando al mismo resultado lo que contrastaría con los modelos tradicionales de enseñanza. Consideramos que este método es esencial en la comprensión del concepto de integral. Se muestran a continuación algunas de las aplicaciones prácticas de la integral de Riemann: Cálculo de volúmenes de revolución. Cálculo de la longitud de una curva. Cálculo del área lateral de una superficie de revolución. Es importante remarcar que los actuales métodos didácticos basados en competencias son más eficientes que los utilizados en la enseñanza tradicional, sobre todo en áreas de ciencias exactas.

Bibliografía

Apostol, T. (1990): C*alculus.* Segunda edición. Barcelona: Editorial Reverte.

Barr, Robert, B, John Tagg (2002): *De la enseñanza al aprendizaje, un nuevo paradigma para le educación pregrado*. Coordinación Nacional para la Planeación de la Educación Superior, SEP-ANUIES.

Biggs, John (2005): *Calidad del Aprendizaje Universitario*. Ed. Narcea, Tercera Edición.

Courant, R. y John, F. (1999): *Introducción Al Cálculo y Análisis Matemático*. México: Editorial Limusa.

Díaz Barriga, Frida, et al (2004): *Estrategias Didácticas para promover aprendizajes significativos*., Primera Edición, Ed. Mc.Graw Hill.

Martínez, Valcarcel, Nicolás (2004). *Los modelos de enseñanza y la práctica en el aula*. Recuperado en http//peremarques.pangea.org/dioe/modelosnicolas.doc, el 10 de diciembre del 2010.

Luis Siero. Licenciado en Matemáticas Aplicadas. Maestría en Oceanografía Física. Línea de investigación, "Didáctica de las Matemáticas" y "Prototipos Didácticos". Coordinador del departamento de Matemáticas del Centro de Ingeniería y Tecnología CITEC-UABC. Universidad Autonoma de Baja California. **lsiero@uabc.edu.mx**

Eilen Oviedo Gonzalez. Licenciada en Administración y en Educación Preescolar. Maestría en Educación con especialidad en Formación Docente. Líneas de Investigación: "Formación de Competencias Docentes en Nivel Medio Superior y Superior" y "Nuevas tecnologías y desarrollo de competencias docentes". Administradora del Centro de Ingeniería y Tecnología CITEC-UABC. Universidad Autónoma de Baja California. **eilen.oviedogonzalez@uabc.edu.mx**

Berenice Fong. Ingeniería en Ciencias Computacionales y Telecomunicaciones. Maestría en Electrónica y Telecomunicaciones. Línea de investigación, “Didáctica de las Matemáticas” y “Prototipos Didácticos”. Profesor de tiempo completo de Matemáticas del Centro de Ingeniería y Tecnología CITEC-UABC. Universidad Autonoma de Baja California**.** bfong@uabc.edu.mx

Jorge Mata. Doctorado en Física Universidad de Barcelona España, Profesor de tiempo completo del Centro de Ingeniería y Tecnología CITEC-UABC. Universidad Autónoma de Baja California. jorge.mata@uabc.edu.mx