UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Marzo de 2012, Número 29, páginas 85-108
ISSN: 1815-0640

Estratégias de generalização de padrões de alunos do 7º ano de escolaridade

Manuel de Sousa Pereira, José António Fernandes

Resumen

Este artículo tiene como finalidad principal describir y comprender las estrategias de generalización utilizadas por estudiantes del 7º año (en promedio, con 12 años de edad) en la exploración de problemas de patrón. El estudio, de carácter cualitativo, se centró en una intervención de enseñanza en una clase y los datos fueron obtenidos mediante la observación del trabajo de los estudiantes y sus producciones escritas. En términos de resultados, entre las diferentes estrategias adoptadas por los estudiantes, se señaló la prevalencia de la estrategia *Explícita*, seguido de las estrategias *Diferencia* y *Contaje*, respectivamente.

Abstract

This paper has as main proposal to describe and to understand the generalization strategies of 7th grade pupils (on average, 12 years old) in the exploration of pattern problems. The study, qualitative in nature, was focused on a teaching intervention in a class and the data were gathered trough observation of the pupils' work and their written productions. In relation to results, among the many strategies adopted by pupils, it was emphasized the predominance of the *Explicit* strategy, followed by *Difference* and *Counting* strategies, respectively.

Resumo

Neste artigo tem-se por principal propósito descrever e compreender as estratégias de generalização usadas por alunos do 7º ano (em média, com 12 anos de idade) na exploração de problemas de padrão. O estudo, de natureza qualitativa, centrou-se numa intervenção de ensino numa turma e os dados foram obtidos através da observação do trabalho dos alunos e das suas produções escritas. Em termos de resultados obtidos, de entre as várias estratégias adotadas pelos alunos, salientou-se a prevalência da estratégia *Explícita*, seguida das estratégias *Diferença* e *Contagem*, respetivamente

1. Introdução

Frequentemente, a abordagem da Álgebra na sala de aula não tem ido além da manipulação simbólica, da aplicação de propriedades no cálculo algébrico e, sobretudo, da memorização de regras e procedimentos, insuficiente para o desenvolvimento da compreensão da matemática e do pensamento algébrico (Kaput, 1999; Ponte, Branco & Matos, 2009a).

A aprendizagem da Álgebra envolve saber trabalhar com símbolos de forma significativa, o que não é um processo fácil nem linear. Muitos alunos sentem dificuldades quando tentam dar sentido a uma expressão algébrica ou a uma letra nessa expressão, quando atribuem significados concretos às letras na transição da linguagem natural para a linguagem algébrica e quando tentam escrever simbolicamente uma generalização. Por outro lado, parece tornar-se cada vez mais evidente a importância do contributo dos padrões para a promoção da compreensão. Segundo Ponte *et al*. (2009a), "a aprendizagem do trabalho com expressões algébricas faz-se em simultâneo com a aprendizagem das sequências, das funções e das equações, procurando-se assim que estas façam sentido para os alunos" (p. 77).

Também nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007) se defende a mesma perspetiva, afirmando-se que os "alunos deverão começar a compreender os diferentes significados e utilizações das variáveis, por meio da representação de quantidades numa diversidade de problemas e contextos" (p. 263).

O programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação [ME], 2007) prevê o tratamento da temática dos padrões de forma explícita ao longo de todo o ciclo de estudos. Dando suporte a esta presença constante dos padrões, há autores (e.g., Vale & Pimentel, 2005) que defendem a ideia de que o trabalho com padrões contribui para melhorar significativamente a compreensão da Álgebra por permitir desenvolver diversas capacidades, como o pensamento algébrico e o raciocínio matemático.

Face a este panorama, a "investigação futura tem de continuar a dar um lugar central ao estudo dos fenómenos da aprendizagem dos alunos quando trabalham com padrões e regularidades" (Ponte, 2009, p. 173). Mais concretamente, no estudo realizado descrevem-se e explicam-se as estratégias de generalização usadas por alunos do 7º ano de escolaridade na exploração de tarefas de padrões.

2. Enquadramento teórico

Na resolução de problemas, a Álgebra deve surgir como uma necessidade resultante da insuficiência dos recursos aritméticos. Deste modo, a produção do conhecimento algébrico surge como uma ferramenta para organizar uma situação e não como objeto primário de estudo (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). No mesmo sentido, segundo a Associação de Professores de Matemática [APM] (1988), "o que se pratica é uma tentativa absurda de impor à partida uma terminologia e uma linguagem que não resultam de qualquer necessidade real nascida da atividade dos alunos" (p. 38).

O trabalho com sequências — de figuras, números ou outro tipo de objetos — conduz naturalmente ao estudo de regularidades. Este trabalho é um excelente veículo para promover o pensamento sobre variáveis e funções. Em particular, permite aos alunos desenvolver a capacidade de estabelecer generalizações, um aspeto fundamental do raciocínio matemático, e favorece o desenvolvimento da capacidade de fazer representações, quer através de diagramas e esquemas, quer usando a linguagem algébrica (Ponte, Matos & Branco, 2009b).

No caso das tarefas propostas aos alunos, elas podem envolver sequências de diversos tipos: algumas podem ter uma lei de formação explícita no enunciado; noutras a lei de formação está implícita, sendo inequívoca pelas condições dadas; e há aquelas em que são dados alguns termos, podendo existir várias leis de formação a descobrir. Descobrir e descrever generalizações está no cerne da atividade matemática. Um dos aspetos da generalização envolve o exame de diferentes quantidades e a descrição das relações entre elas numa situação particular. Desenvolver a compreensão das condições variantes (termos, variável dependente) e invariantes (ordem do termo, variável independente) pode proporcionar significado aos símbolos algébricos (Kaput, 1999).

As generalizações algébricas de padrões não são caraterizadas pelo uso de notações simbólicas, mas sim pela maneira geral como é tratada a generalização. As generalizações algébricas de padrões implicam: (1) a apreensão de uma regularidade; (2) a generalização dessa regularidade a todos os termos da sequência em questão; e (3) a formação de uma regra direta ou um esquema direto que permita determinar qualquer termo da sequência. No entanto, existe alguma dificuldade na ligação destes três aspetos centrais (Radford, 2008).

Por outro lado, também segundo Radford (2010), o processo de generalização desenvolve-se em três níveis: (i) *factual*, onde o foco continua a ser a generalização a nível do material, no plano concreto, e é o gesto e o ritmo que é usado para mostrar a generalização; (ii) *contextual*, onde o foco da generalização é descritivo e mais abstrato (em relação ao anterior), sendo utilizada uma linguagem orientada para explicar a generalização com referências ao contexto; e (iii) *simbólica*, onde a notação algébrica é usada para descrever a generalização.

Os alunos, normalmente, usam uma variedade de estratégias para a construção da relação funcional em que assenta o padrão. As estratégias usadas na resolução de questões envolvendo sequências podem ser *locais*, indicando como passar de um termo para o termo seguinte com base num processo recursivo, ou *globais*, estabelecendo uma relação de natureza geral que descreve toda a regularidade, a qual pode ser representada por palavras ou por uma expressão algébrica, designada por termo geral (Ponte *et al*., 2009b).

Stacey (1989) usa os termos *generalização próxima* e *generalização distante*, referindo-se ao tipo de abordagem adotado na resolução: “a *generalização próxima* é utilizada para designar uma questão que pode ser resolvida passo-a-passo com um desenho ou através de contagem e a *generalização distante* designa uma questão que vai além de limites razoáveis da prática de abordagem passo-a-passo” (p. 150).

Rivera e Becker (2008) estabeleceram três tipos de estratégias empregues pelos alunos: (1) *numérica*, que utiliza apenas estímulos estabelecidos a partir do padrão listando uma sequência de números ou usando uma tabela para derivar a regra a partir daí, procurando relações aritméticas entre os valores das variáveis; (2) *figurativa*, que se aplica apenas quando se descreve a generalização do padrão utilizando diagramas, sendo a regra totalmente obtida a partir de indícios visuais estabelecidos diretamente a partir da estrutura dos dados, podendo-se recorrer à decomposição das figuras (termos); e (3) uma combinação de ambas as abordagens anteriores (numérica e figurativa).

De entre as estratégias numéricas, Bezuszka e Kenney (2008) identificaram três estratégias, que envolvem a recursão: (1) *Comparação*, quando os termos de uma sequência de números dados são comparados com os termos correspondentes de uma outra sequência cujo regra já é conhecida; (2) *Substituição Repetida*, onde cada um dos termos subsequentes de uma sequência numérica se exprime por indicação do termo imediato ao precedente (substituído por este); e (3) método das *Diferenças*, também conhecido das diferenças finitas em matemática (diferença entre termos), que é um algoritmo para encontrar fórmulas explícitas (que são expressões polinomiais).

De entre as estratégias figurativas, distinguem-se as generalizações construtiva e desconstrutiva. A generalização construtiva implica ver os termos de uma expressão algébrica como representando as partes da figura que não se sobrepõem num padrão figurativo (neste caso as fórmulas surgem com "adições"). A generalização desconstrutiva consiste em ver os termos de uma expressão algébrica que se referem às partes sobrepostas da figura num padrão figurativo (neste caso as fórmulas surgem com "subtrações" para excluir os objetos sobrepostos) (Rivera & Becker, 2008; Rivera, 2010). A generalização desconstrutiva é a mais difícil de alcançar e, por isso, a construtiva é a mais utilizada pelos alunos (Rivera & Becker, 2008).

Por outro lado, Chua e Hoyles (2011), além destes dois tipos de estratégia figurativa, apresentam duas outras estratégias. Uma delas ocorre quando um ou mais componentes do diagrama original são reorganizados em algo mais familiar. Esta figura recém-reconfigurada, em seguida, apresenta uma estrutura do padrão que facilita a construção da regra funcional. A outra acontece quando o diagrama original é visto como parte de uma grande figura composta, a partir da qual a regra funcional é gerada subtraindo subcomponentes dessa figura composta.

Stacey (1989), num estudo sobre generalização utilizando padrões lineares da forma $f(n) = a + b$, com $b \neq 0$, em contexto figurativo (pictórico) e em contexto estritamente numérico, analisa e relata as respostas de alunos, com idades entre os 9 e os 13 anos, a questões de generalização, documentando os modelos matemáticos que escolheram, as estratégias utilizadas na sua execução e as explicações que deram. Por exemplo, um dos problemas do estudo era a sequência numérica: 4, 10, 16, 22, ____, ____, ____, sendo pedido aos alunos para completarem os três espaços em branco; depois o centésimo termo e, finalmente, o enésimo termo, $S(n)$. Neste estudo, observou-se uma substancial inconsistência na escolha do modelo adequado e os alunos que tentaram responder adotaram frequentemente um modelo simples, mas incorreto, sobretudo nas questões envolvendo a generalização distante. Já os alunos que tinham realizado um curso de resolução de problemas, usando implicitamente um modelo linear, deram respostas consistentes com mais frequência e explicações mais frequentemente relacionadas com os padrões. Estes alunos pareciam entender de forma mais completa a relação entre os dados e a regra resultante da generalização.

Ao analisar as estratégias usadas pelos alunos, Stacey (1989) organizou-as em quatro categorias: *Contagem* — contagem a partir de um desenho para descobrirem o termo da sequência; *Diferença* — utilização de múltiplos da diferença entre termos consecutivos, multiplicando a diferença comum a entre os termos e assumindo que a adição repetida desse número a conduz à expressão algébrica da generalização $a \times n$; *objeto Inteiro* (*Whole-Object* no original em inglês) — tomar um termo ou um múltiplo de um termo para unidade e usar múltiplos dessa unidade, ou seja, $S(m \times n) = m \times S(n)$, assumindo implicitamente a existência de uma relação de proporcionalidade direta; *Linear* — usando um padrão em que estão envolvidas tanto a multiplicação como a adição e em que os alunos reconhecem a ordem dessas operações, ou seja, usando implicitamente o modelo linear $S(n) = a \quad + b$ para o termo de ordem n.

No estudo de Rivera (2010) verificou-se que, em relação à atividade com padrões lineares figurativos, os alunos do 9º ano, com idade média de 14 anos, revelaram uma disposição para a utilização de uma combinação de estratégias figurativas (visuais) e numéricas. Neste estudo, o autor usa os termos: *aditiva construtiva standard* para o tipo de generalização algébrica que se aplica ao caso de todos os padrões lineares do tipo $y = x + b$, em que o termo de ordem x é y e se adiciona a constante b de figura para figura; *aditiva construtiva não-standard*, que é a versão expandida da expressão da generalização na sua forma não simplificada, incluindo apenas adições de componentes das figuras; *multiplicativa construtiva standard*, em que a expressão da generalização está na sua forma irredutível, $y = a \quad + b$, para um termo y de ordem x; *multiplicativa construtiva não-standard*, que é a versão expandida da expressão da generalização na sua forma não simplificada, incluindo multiplicações e adições de componentes das figuras; e *desconstrutiva*, em que a expressão da generalização pode estar na sua forma irredutível ou não e inclui subtrações para excluir os objectos sobrepostos.

O estudo de Lannin (2005) consistiu numa experiência de ensino com 25 alunos do 6º ano (alunos de 11-12 anos) ao longo de 10 dias. Dos resultados do estudo salienta-se que, nas discussões com toda a turma, os alunos foram, em geral, capazes de apresentar generalizações adequadas e justificar o uso de exemplos genéricos. Os alunos que usaram esquemas geométricos (figurativos) foram mais sucedidos em fornecer argumentos gerais e justificações válidas; no entanto, durante as discussões em pequenos grupos, os alunos raramente justificaram as suas generalizações, recorrendo alguns deles a valores particulares com maior incidência do que a relações gerais. Os alunos tenderam a usar dois tipos de justificação: a justificação empírica e exemplos genéricos. Os 4 alunos-alvo do estudo geralmente utilizaram a justificação empírica para testar as suas regras, e continuaram a fazê-lo, apesar deste tipo de justificação ter ser sido considerada insuficiente durante a discussão com toda a turma. Nestes casos, a justificação empírica era geralmente devida a uma falta de conexão a um esquema geométrico (figurativo) que estabelecesse uma relação com o contexto.

Neste estudo, Lannin ao analisar as estratégias de generalização usadas pelos alunos organizou-as em duas categorias principais: explícitas e não-explícitas. As estratégias explícitas são as que permitem o cálculo direto de um determinado valor da variável dependente conhecido o valor da variável independente, enquanto as estratégias não-explícitas não permitem esse cálculo. Na categoria das estratégias explícitas, o autor incluiu ainda as três subcategorias de estratégias: *Objeto Inteiro*, *Tentativa-e-Erro* e *Contextual*; e na categoria das estratégias não-explícitas o autor inclui duas subcategorias de estratégias: *Contagem* e *Recursiva*. A estratégia do *Objeto Inteiro*, já referida por Stacey (1989), consiste em usar uma unidade como parte, para construir uma unidade maior, utilizando a multiplicação num raciocínio de proporcionalidade direta (por exemplo: 3 maçãs custam 8 dólares, 9 maçãs custam 24 dólares). Neste caso, posteriormente à multiplicação, pode ou não haver necessidade de um ajustamento do resultado, para mais ou para menos (para $a \;\; \pm c$, caso não se trate de uma situação de proporcionalidade direta), tendo em vista adequá-lo à situação. A estratégia *Tentativa-e-Erro* consiste em adivinhar uma regra, sem ter em conta por que essa regra pode funcionar. Normalmente, isso envolve experiências com várias operações e números fornecidos na sequência. A estratégia *Contextual* consiste na construção de uma regra relativa a técnicas de contagem baseada em informações figurativas ou numéricas fornecidas na sequência. A estratégia *Contagem*, também já referida por Stacey (1989), consiste em desenhar uma imagem ou construir um modelo para representar a situação e contar o atributo desejado. A estratégia *Recursiva* acontece quando o aluno descreve uma relação entre termos consecutivos da sequência para determinar os termos subsequentes.

Num estudo posterior, Lannin, Barker e Townsend (2006) relatam as estratégias de generalização algébrica utilizadas por oito alunos do 5º ano (10-11 anos de idade) e os fatores que parecem influenciar essas estratégias. Neste estudo, com base nas respostas dos alunos, foram identificadas quatro categorias de estratégias: *Explícita*, *Objeto Inteiro*, *Partição* (*Chunking*) e *Recursiva*. A estratégia *Explícita* consiste na descoberta de uma regra que permita efetuar o cálculo imediato de qualquer valor da variável dependente (termo), dado o valor da variável independente (ordem). A estratégia *Partição* consiste num raciocínio recursivo com “saltos” (por segmentos), ou seja, em vez de usar um raciocínio termo a termo, o aluno desenvolve um padrão recursivo através da construção de uma unidade para os valores conhecidos do atributo desejado, sendo o recurso a um raciocínio recursivo a forma mais expedita de encontrar o termo pretendido. A estratégia *Recursiva* ocorre quando o aluno descreve uma relação entre valores consecutivos da variável dependente (termos).

Na estratégia do *Objeto Inteiro* os alunos devem aprofundar a compreensão do raciocínio proporcional e reconhecer que este método, muitas vezes, não conduz ao resultado desejado (devendo ser efetuado o devido acerto do resultado para não levar a conclusões erradas). Além disso, as estratégias usadas anteriormente noutros problemas e/ou limitações na perceção da situação-problema podem levar os alunos a continuar a usar estratégias ineficientes ou erradas (Lannin *et al*., 2006).

No estudo de Barbosa (2009), com base nas respostas de alunos do 6º ano (11-12 anos), a autora identificou cinco categorias de estratégias: *Contagem*, *Termo Unidade* (designada *Objeto Inteiro* por outros autores), *Diferença*, *Explícita* e *Tentativa-e-Erro*. Estas categorias de estratégias já foram referidas em diversos estudos anteriores (e.g., Stacey, 1989; Lannin, 2005; Lannin *et al*., 2006). A estratégia *Termo Unidade* (*Objeto Inteiro*) foi subcategorizada em sem ajuste e com ajuste numérico ou contextual. A estratégia *Termo Unidade sem ajuste* consiste em considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade e a estratégia *Termo Unidade com ajuste numérico* consiste em considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade, fazendo-se seguidamente um ajuste do resultado com base em propriedades numéricas. Na estratégia *Termo Unidade com ajuste contextual* o ajustamento do resultado efetua-se com base no contexto do problema. A estratégia *Diferença* foi subcategorizada em recursiva e múltiplo da diferença sem ajuste ou com ajuste. A estratégia *múltiplo da Diferença sem ajuste* consiste em usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ser ajustado o resultado à sequência; enquanto na estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste* se efetua o ajustamento do resultado à sequência.

Dos resultados obtidos, Barbosa (2009) concluiu que as estratégias mais aplicadas pelos alunos foram a *Contagem* e a *Explícita*, sobretudo nas questões de generalização distante. Não se verificou a predominância da estratégia *Diferença*, de forma pouco frequente foi usada a estratégia *Tentativa-e-Erro* e raramente foi utilizada a estratégia *Objeto Inteiro*.

Também no estudo realizado por Branco (2008), com alunos do 7º ano (12-13 anos), os resultados obtidos indicam que nos padrões repetitivos os alunos utilizaram a estratégia *Contagem* e também a estratégia *Explícita*. Nas explorações iniciais verificou-se que a estratégia seguida pela maioria dos alunos foi a *Contagem* e poucos alunos revelaram a capacidade de expressar as regularidades que encontraram utilizando a estratégia *Explícita*.

Nos padrões lineares (em que o termo de ordem n pode ser expresso na forma $a\ \ + b$, com $a \neq 0$) os alunos utilizaram a estratégia *Aditiva*, processo recursivo pouco prático na descoberta de termos de ordem elevada quando apenas se conhecem os primeiros termos da sequência. Após as experiências iniciais, apesar das dificuldades, os alunos usaram a estratégia *Explícita* com base na análise das propriedades das figuras (termos), indicando a relação entre a ordem da figura e o seu número de elementos em linguagem natural e alguns começam a utilizar a linguagem algébrica para traduzir a generalização expressa em linguagem natural. Porém, outros utilizaram a estratégia *Objeto Inteiro*, que não conduziu a uma generalização correta. De entre as várias estratégias usadas pelos alunos, a *Aditiva* e a *Explícita* foram as que mais se verificaram neste tipo de padrão.

No estudo de Matos (2007), agora com alunos do 8º ano de escolaridade (13-14 anos), verificou-se que a exploração de padrões constituiu uma tarefa nova para os alunos e, talvez por isso, as estratégias utilizadas inicialmente foram a *Contagem* e a *Covariação* (análise do modo como a variação dos valores de uma variável produz a variação nos valores da outra). Após algumas experiências, os alunos alargaram o leque das suas estratégias, adotando estratégias aritméticas (designadas por Rivera e Becker (2008) por estratégias numéricas) e também estratégias figurativas, baseando-se numa relação de correspondência entre as variáveis (termos e ordens), o que lhes permitiu generalizar o padrão (estratégia *Explícita*). Inicialmente exprimiam-se em linguagem natural, mas depois do contacto com a Álgebra formal revelaram à-vontade no uso da simbologia.

Finalmente, no estudo de Alvarenga (2006), com alunos do 5º ano (10-11 anos), nas estratégias de generalização, os alunos trabalharam em conjunto informações geométricas (figurativas) e numéricas. Nas diferentes resoluções, os alunos nunca recorreram a abordagens exclusivamente numéricas, separando-se das características específicas das tarefas (as propriedades figurativas) e evitando transformar os problemas em meras sequências numéricas, tendo sido mais utilizado o método das diferenças finitas (designado *Diferença* por outros autores) para descrever o padrão. Esta estratégia revelou-se eficaz na maioria das respostas por não exigirem o cálculo de termos muito distantes. Os alunos também usaram os métodos de contagem, de proporcionalidade direta e linear, e utilizaram essencialmente o método de contagem no cálculo dos termos mais próximos porque a maioria dos padrões das tarefas eram figurativos.

3. Metodologia

No estudo foi usada uma metodologia de investigação qualitativa, seguindo-se o paradigma descritivo e interpretativo de um estudo de caso (Yin, 2009), especificamente uma turma do 7º ano de escolaridade (12-13 anos de idade), para estudar um fenómeno em toda a sua complexidade, no seu contexto natural e com a intenção de analisar e descrever particularidades, como é o caso das estratégias de generalização de padrões usadas pelos alunos. Estas estratégias de generalização foram estudadas numa intervenção de ensino, que teve por principal objetivo proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativa sobre diferentes aspetos da Álgebra, designadamente: desenvolver nos alunos a capacidade de analisar padrões e regularidades; descrever relações e representá-las simbolicamente e promover a compreensão do significado dos símbolos através do estudo de padrões.

Na intervenção de ensino, que se prolongou por 11 aulas do ano de 2010, de 90 minutos cada uma, em que foram exploradas um total de 11 tarefas de padrões, os alunos trabalharam em sete grupos de três elementos e foram acompanhados mais de perto dois desses grupos, designados por grupos-alvo, com o propósito de aprofundar o estudo. As aulas compreenderam dois momentos distintos: (i) num primeiro momento, o trabalho autónomo dos grupos na resolução das tarefas; e (ii) num segundo momento, a apresentação e discussão na turma dos resultados obtidos nos grupos.

Nas aulas intervieram os 21 alunos da turma, designados por Ai, com $1<i<21$, e a sua professora de Matemática. Além destes, o investigador desempenhou o papel de observador participante, dialogando ocasionalmente com os alunos, pedindo-lhes alguns esclarecimentos acerca do que faziam, interagindo no sentido de aprofundar o seu conhecimento através de questões e incentivando-os no desenvolvimento do seu trabalho, o que possibilitou o aprofundamento das perspetivas dos participantes.

Os dados recolhidos resultaram da observação realizada na sala de aula e das resoluções e relatórios escritos produzidos pelos alunos na realização das tarefas. Nos relatórios, os alunos descreveram a atividade desenvolvida na realização das tarefas, descrevendo as dificuldades sentidas e a forma como as superaram, as ideias e os processos de raciocínio que conduziram à generalização, as formas de representação e a validade do modelo encontrado.

No estudo efetuaram-se gravações de todas as aulas em que decorreu a intervenção de ensino, audiogravando o trabalho dos dois grupos-alvo durante o trabalho autónomo e o vídeogravando o grupo-turma quando toda a turma se envolvia na apresentação, discussão e síntese da exploração realizada nos grupos. Os dados relativos às estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de padrão foram organizados por tarefa, conjugando a informação das resoluções escritas, o relatório e as notas do investigador. Essa conjugação, em algumas ocasiões, revelou-se fundamental para o esclarecimento do pensamento e da estratégia envolvida na resolução do grupo. Seguidamente, na classificação das estratégias de generalização recorreu-se às categorias usadas no estudo de Barbosa (2009): *Contagem*, *Diferença*, *Objeto Inteiro*, *Tentativa-e-Erro* e *Explícita*. Por sua vez, a estratégia *Diferença* foi dividida em três subcategorias: *recursiva*, *múltiplo da Diferença sem ajuste* e *múltiplo da Diferença com ajuste*; e a estratégia *Objeto Inteiro* foi dividida em três subcategorias: *sem ajuste*, *com ajuste numérico* e *com ajuste contextual*.

Além da classificação das estratégias de generalização utilizadas pelos grupos na obtenção das suas respostas, foi verificada a natureza da generalização algébrica — categorizando-a em construtiva ou desconstrutiva (Rivera & Becker, 2008; Rivera, 2010), apurou-se o nível da generalização — situando-a na instanciação aritmética ou algébrica, e esta última subdividida em três subcategorias — factual, contextual e simbólica (Radford, 2010).

Finalmente, em termos da apresentação dos resultados, recorreu-se à estatística descritiva, nomeadamente a tabelas de frequências, e também se apresentam, a título de exemplificação, pequenos excertos das palavras, símbolos ou figuras usadas pelos alunos, de modo a tornar a descrição mais viva e permitir ao leitor julgar a adequação das inferências efetuadas.

4. Estratégias de generalização usadas pelos alunos

Em termos de resultados obtidos no estudo, apresenta-se o trabalho dos alunos em três tarefas de padrões (tarefas 4, 9 e 11), que foram realizadas em diferentes momentos da intervenção de ensino, e a síntese das estratégias de generalização usadas pelos alunos em todas as 11 tarefas exploradas.

4.1. Tarefa 4 – Palitos

A Joana utilizou palitos para construir uma sequência de figuras, apresentando as quatro primeiras figuras.

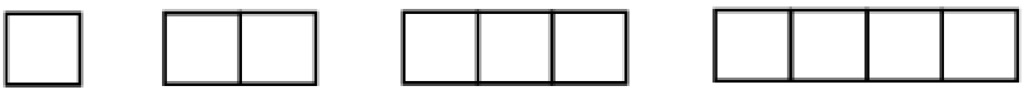

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	…	50
Número de palitos	4							

b) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

c) Existe, nesta sequência, alguma figura com 601 palitos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

d) Escreve uma regra que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

e) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

f) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu perímetro. Completa-a.

Número da figura	1	2	3	4	5	6	…	40
Perímetro	4							

g) Qual é o perímetro da figura 80? Explica como pensaste.

h) Escreve uma regra que permita determinar o perímetro de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

i) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

Tarefa adaptada de Vale e Pimentel (2009).

Na tarefa 4, realizada na aula 4 da intervenção de ensino, apresenta-se um padrão figurativo de crescimento, com questões de generalização próxima e distante. Pretendia-se que os grupos identificassem regularidades e as generalizassem, culminando na descrição da regra ou lei de formação da sequência em linguagem natural e algébrica.

Na Tabela 1 apresentam-se as frequências absolutas das estratégias de generalização usadas pelos grupos e referem-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 1: Estratégias usadas pelos grupos na resolução da tarefa 4

Questões	Tipo de Generalização	Estratégias				
		Contagem	Diferença	Tentativa-e-Erro	Explícita	Outra
a)	Próxima	3	4	—	—	—
	Distante	1	6	—	—	—
b)	Distante	1	6	—	—	—
c)		—	—	6	—	1
d)		—	—	—	4	3
e)		—	—	—	6	1
f)	Próxima	1	5	—	—	1
	Distante	1	6	—	—	—
g)	Distante	1	5	—	—	1
h)		—	2	—	3	2
i)		—	—	—	6	1
Total		8	34	6	19	10

Pela Tabela 1 verifica-se que nesta tarefa houve uma preferência pela estratégia *Diferença*, seguida da estratégia *Explícita*. Nas generalizações próximas e distantes das questões a) e f) e nas generalizações distantes das questões b), g) e h), em todas as respostas obtidas pela estratégia *Diferença*, foi seguida a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

Na questão a) pedem-se vários valores, referindo-se uns a generalizações próximas e outros a generalizações distantes. Ambos os grupos-alvo nas generalizações próximas utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste* ao verificarem a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo e adicionando uma unidade para ajuste do resultado, como se lustra no diálogo seguinte do grupo-alvo G5.

A12: Na Fig. 2 é 7; na Fig. 3 é 10; na Fig. 4 é 13; na Fig. 5 é 16; na Fig. 6 é 19.
A15: É a tabuada do 3.
A12: Mas isto não é os múltiplos de 3 (…)
A19: Tem de se somar mais um.
A12: Nos múltiplos de 3 juntamos mais um. (Aula 4, 10/11/2010)

Ainda nesta questão, na generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

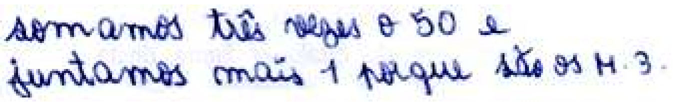
somamos três vezes o 50 e
juntamos mais 1 porque são os M. 3.

Figura 1. Resposta do grupo-alvo G5 à questão a).

Na questão b), envolvendo uma generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.


100 + 100 + 101 = 301

Figura 2. Resposta do grupo-alvo G2 à questão b).

Na generalização distante da questão c) ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Tentativa-e-Erro*, experimentando sucessivos valores até que fossem verificadas as condições pretendidas. Neste caso, pretendia-se encontrar o valor de n tal que $3\times n+1=6$, como se exemplifica no diálogo seguinte do grupo-alvo G5.

A15: Uma figura com 601 palitos.
A12: $2 \quad +2 \quad +2$ é 600; mais um é 601.
A19: É a figura 200. (Aula 4, 10/11/2010)

Já na questão d), envolvendo uma generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita*, baseando-se numa regra descoberta a partir do contexto do problema, a qual permitiu o cálculo imediato do valor de um termo sendo conhecida a ordem correspondente e vice-versa.

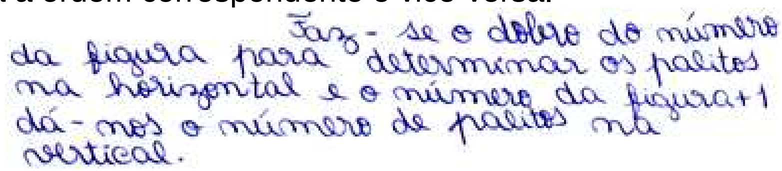
Faz-se o dobro do número da figura para determinar os palitos na horizontal e o número da figura+1 dá-nos o número de palitos na vertical.

Figura 3. Resposta do grupo-alvo G2 à questão d).

Na generalização distante da questão e) ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita*. A resposta do grupo-alvo G5 apresenta uma generalização algébrica de nível simbólico (usa linguagem algébrica) e de natureza construtiva (a expressão algébrica representa as partes da figura que não se sobrepõem).

$3 \times n + 1$

Figura 4. Resposta do grupo-alvo G5 à questão e).

Na questão f), tal como na a), pediam-se vários valores, referindo-se uns a generalizações próximas e outros a generalizações distantes. Na determinação de todos eles ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*, adicionando duas unidades como ajuste do resultado.

• Descobrimos o 40 é o 82 → ex: 40+40=80+2=82
número da figura ?. ex: 3+3=6+2=8

• São os múltiplos de 2 mas só começa no 4.

Figura 5. Resposta do grupo-alvo G5 à questão f).

Na questão g), de generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

$80 + 80 + 2 = 162$

Figura 6. Resposta do grupo-alvo G2 à questão g).

Também na generalização distante da questão h) ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *múltiplo da Diferença com ajuste*.

→ 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 ... - múltiplos de 2 começa no 4
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 ... múltiplos de 2 começa no 2
→ os múltiplos de 2 mais 2.

Figura 7. Resposta do grupo-alvo G5 à questão h).

Finalmente, na questão i), envolvendo uma generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita*. A resposta do grupo-alvo G2 apresenta uma generalização algébrica de nível simbólico (usa linguagem algébrica) e de natureza construtiva (a expressão algébrica representa as partes da figura que não se sobrepõem).

$2 \times n + 2$

Figura 8. Resposta do grupo-alvo G2 à questão i).

Durante a fase de trabalho autónomo, que se prolongou por cerca de 45 minutos, não surgiram dúvidas nem perguntas e não foi necessário dar explicações adicionais.

No período de discussão no grupo-turma, que durou cerca de 40 minutos, os grupos apresentaram as respostas dadas às questões, permitindo conhecer os resultados a que chegaram e as justificações que deram nas suas resoluções.

Verificou-se que na questão b), no trabalho autónomo, os grupos não utilizaram a estratégia *Objeto Inteiro com ajuste contextual*, que consiste em considerar um termo da sequência como unidade, usar múltiplos dessa unidade e ajustar o resultado com base no contexto do problema. Contudo, nesta fase da aula, houve um aluno que apresentou esta ideia e com o questionamento da professora um outro completou o seu raciocínio, como se ilustra no seguinte diálogo.

Prof: Será que não daria ainda de outra forma, usando o resultado obtido na questão anterior?
A16: 151 na figura 50; na figura 100 deve ser 2×1 , que dá 302; não dá?
Prof: Será que não? Por que é que chegam a 302 e não 301, que seria a resposta correta?
A1: Porque há um palito que é contado duas vezes ao juntar-se os dois conjuntos de 151 palitos para formar a figura 100. (Aula 4, 10/11/2010)

Na questão c) verificou-se que o grupo G3 tinha utilizado na sua resolução a estratégia *Tentativa-e-Erro* e na discussão evoluiu para uma estratégia *Explícita* com base na reversibilidade do seu pensamento para descobrir o valor de n que satisfaz a equação numérica $3\times n+1=6$, como se mostra no diálogo seguinte.

Prof: Alguém fez de outra forma?
A5: Sim. 601 menos um é 600; 600 a dividir por 3 dá 200; é a figura número 200. (Aula 4, 10/11/2010)

Na questão e), recorrendo à estratégia *Explícita*, surgiram diferentes expressões algébricas equivalentes, como $n+n+n+1$ do grupo G6, $2\times n+n+1$ do grupo-alvo G2 e $n\times 3+1$ do grupo G3. Analogamente, na questão i) foram apresentadas expressões diferentes e equivalentes, como $n\times 2+2$ do grupo G1 e $n+n+2$ dos grupos G3, G4 e G6.

Também na questão g) se verificou que os grupos não recorreram à estratégia *Objeto Inteiro com ajuste contextual* no trabalho autónomo, mas na discussão os alunos foram questionados e um deles chegou ao resultado dessa forma.

Prof: E nesta questão, o resultado da anterior não seria útil?
A1: Como fizemos para a figura 100.
Prof: Sim, mas agora é o perímetro.
A1: Na figura 80 se juntarmos duas vezes o número de palitos da figura 40, ficamos com 2 palitos a mais, que não fazem parte do perímetro da figura 80.
Prof: Então como se faz?
A16: Na figura 40 são 82; na figura 80 são $2\times 8\ -2$, que dá 162. (Aula 4, 10/11/2010)

Em síntese, nesta tarefa, surge com maior número de ocorrências a estratégia *Diferença*, seguida da estratégia *Explícita*.
Já depois de terminada a aula, a professora proferiu o seguinte comentário: "É uma tarefa interessante e abrangente que envolve alguns conteúdos anteriores, mas achei-a um pouco extensa para ser resolvida e discutida em 90 minutos; os alunos tiveram que se despachar" (Prof, conversa pós-aula, 10/11/2010).

4.2. Tarefa 9 – Molduras

A Joana resolveu construir molduras, tal como as que observou numa exposição de artesanato, cujo contorno é constituído por peças quadradas geometricamente iguais, de um centímetro c

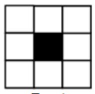
Fig.1

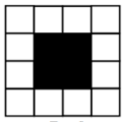
Fig.2

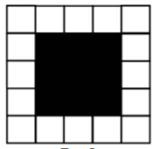
Fig.3

a) Completa a tabela seguinte:

Número da figura	1	2	3	4	5	…	*n*
Número de peças quadradas	8					…	
Perímetro (cm)	12					…	

b) Existe alguma figura da sequência com 800 peças quadradas? Explica a tua resposta.

c) O Jorge sugeriu à Joana que a expressão algébrica $4\times(n+2)-4$ representa o número de peças quadradas em qualquer figura da sequência. Concordas com ele? Explica a tua resposta.

d) A Catarina, por sua vez, indicou a expressão algébrica $2\times(n+2)+2\times n$ para representar o número de peças quadradas de qualquer figura da sequência. Esta expressão é equivalente à do Jorge? Explica a tua resposta.

e) Existe alguma figura da sequência com 208 centímetros de perímetro? Explica a tua resposta.

Tarefa adaptada de Alonso, Barbero, Fuentes, Azcárate, Dozagarat, Gutiérrez et al. (1993).

Na tarefa 9 apresenta-se um padrão figurativo de crescimento, com questões de generalização próxima e distante e questões de manipulação algébrica. A expectativa com as questões de generalização era que os grupos descobrissem regularidades e as generalizassem, culminando na descrição da regra ou lei de formação da sequência em linguagem algébrica.

Na Tabela 2 apresentam-se as frequências absolutas das estratégias de generalização usadas pelos grupos e referem-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 2: Estratégias usadas pelos grupos na resolução da tarefa 9

Questões		Tipo de Generalização	Estratégias				
			Contagem	Diferença	Tentativa-e-Erro	Explícita	Outra
a)	Número de peças quadradas	Próxima	1	4	—	2	—
		Distante	—	—	—	7	—
	Perímetro	Próxima	1	5	—	1	—
		Distante	—	—	—	6	1
b)		Distante	—	—	3	3	1
e)			—	—	3	3	1
Total			2	9	6	22	3

Pelo número de ocorrências da estratégia *Explícita*, conclui-se que os grupos recorreram, maioritariamente, a estratégias gerais.

Na questão a), nas perguntas de generalização próxima, quer na sequência do número de peças quadradas quer na sequência dos perímetros, em todas as respostas dadas através da estratégia *Diferença* foi seguida a subcategoria *múltiplo da Diferença com ajuste*. Neste caso, os dois grupos-alvo usaram a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo e adicionaram 4 e 8, respetivamente, ao resultado em cada uma das sequências como ajuste do resultado.

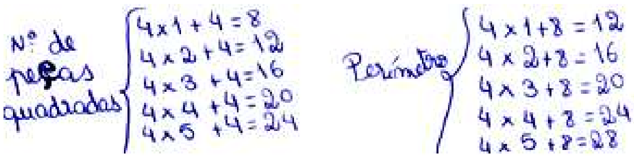

Figura 9. Resposta do grupo-alvo G2 à questão a) nas perguntas de generalização próxima.

Nas perguntas de generalização distante, ambos os grupos-alvo utilizaram a estratégia *Explícita* ao descobrirem uma regra com base no contexto de problema, que lhes permitiu calcular de imediato o valor de um termo conhecida a ordem correspondente e vice-versa.

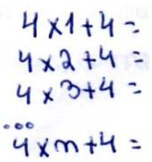

Figura 10. Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) na pergunta de generalização distante da sequência do número de peças quadradas.

No caso da sequência dos perímetros, tal como no caso anterior, a resposta do grupo-alvo G5, obtida por um raciocínio indutivo, constitui uma generalização algébrica de nível simbólico e de natureza construtiva.

Figura 11. Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) na pergunta de generalização distante da sequência dos perímetros.

Na questão b), envolvendo uma generalização distante, o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *Tentativa-e-Erro*, experimentando sucessivos valores até verificar a condição pretendida, enquanto o grupo-alvo G5 recorreu à estratégia *Explícita*.

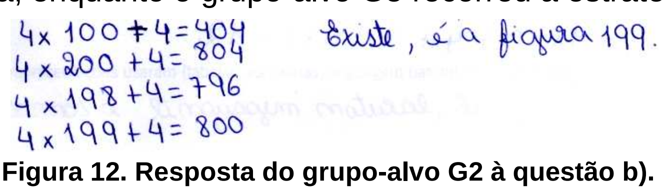

Figura 12. Resposta do grupo-alvo G2 à questão b).

Também na questão e), de generalização distante, o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *Tentativa-e-Erro* e o grupo-alvo G5 optou pela estratégia *Explícita*.

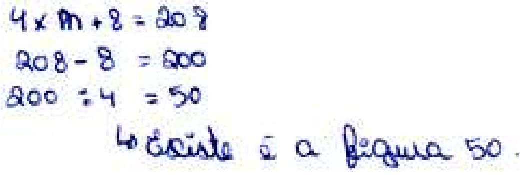

Figura 13. Resposta do grupo-alvo G5 à questão e).

Na questão c), o grupo-alvo G2 optou por substituir valores na variável em ambas as expressões algébricas, a do enunciado e a que descobriu em a), para verificar se encontrava os mesmos resultados.

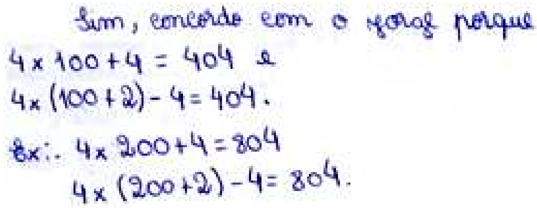

Figura 14. Resposta do grupo-alvo G2 à questão c).

Já o grupo-alvo G5 optou por transformar algebricamente a expressão dada no enunciado e verificar se encontrava a que tinha descoberto em a).

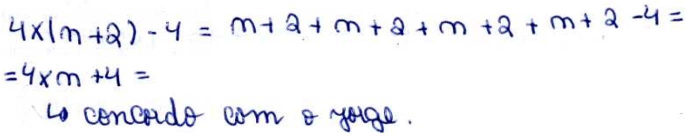

Figura 15. Resposta do grupo-alvo G5 à questão c).

Na questão d), tanto o grupo-alvo G2 como o grupo-alvo G5 retomaram as estratégias adotadas na questão c), tendo G2 recorrido à expressão do Jorge, obtida na questão anterior, comparando-a com a do enunciado.

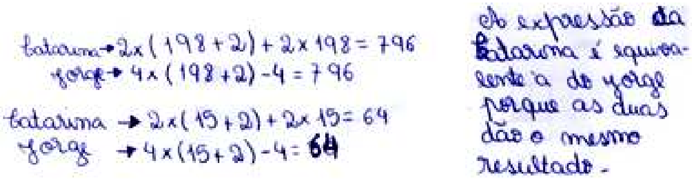

Figura 16. Resposta do grupo-alvo G2 à questão d).

Também nesta tarefa, durante a fase de trabalho autónomo, que se prolongou por cerca de 45 minutos, não surgiram pedidos de esclarecimento dos alunos sobre a tarefa e a sua resolução.

No período de discussão no grupo-turma, que durou cerca de 40 minutos, os grupos apresentaram e discutiram as respostas dadas e as justificações apresentadas.

No trabalho autónomo verificou-se, na questão c), que nenhum grupo tomou a iniciativa de "desmontar" a generalização de natureza desconstrutiva dada, $4\times(n+2)-4$, a fim de obter uma expressão equivalente. Contudo, com o questionamento da professora, alguns alunos revelaram conclusões pertinentes.

Prof: De outra forma, se analisarmos a expressão $4\times(n+2)-4$ não conseguiríamos concluir que também representa o número de peças quadradas de qualquer figura? A figura 2, por exemplo, quantas peças quadradas tem de lado?

A1: 4.

Prof: E a figura 3?

A1: 5; é sempre mais duas (…)

Prof: E se pensarmos na figura n, o que representa $n+2$?

A1: É o número de peças quadradas de um lado.

Prof: E porque se multiplica por 4?

A9: São 4 lados.

Prof: E porque se subtrai 4 no fim?

A20: Porque as 4 peças dos 4 cantos foram contadas duas vezes. (Aula 9, 03/12/2010)

Também na questão d) se verificou que nenhum grupo, durante o trabalho autónomo, tomou a iniciativa de “desmontar” a generalização de natureza construtiva dada, $2\times(n+2)+2\times n$, chegando de outra forma à resposta. No entanto, o questionamento da professora permitiu aos alunos progredirem nesse sentido.

Prof: E de outra maneira, como fizemos na questão anterior, analisando a expressão $2\times(n+2)+2\times n$? Já vimos o que representa $n+2$, o que representa?

A9: São as peças quadradas que a figura n tem de lado; vezes dois dão o número de peças de dois lados.

Prof: E o resto da expressão, $2\times n$, dá-nos o quê?

A1: As peças que faltam dos outros dois lados. (Aula 9, 03/12/2010)

Em síntese, nesta tarefa verificou-se um elevado número de ocorrências da estratégia *Explícita* nas questões de generalização, podendo significar que a resolução de problemas de padrão melhora a capacidade de generalização dos alunos.

4.3. Tarefa 11 – As mensagens

O João resolveu iniciar um envio de mensagens (SMS) em cadeia e enviou uma mensagem ao seu amigo Pedro (primeira etapa). Entretanto, o Pedro tem de enviar a mensagem a duas pessoas (segunda etapa). Cada uma das pessoas que recebeu a mensagem do Pedro terá de a enviar a outras duas pessoas (terceira etapa), o que significa que ao fim da terceira etapa a mensagem foi enviada 7 vezes. Repete-se o processo de envio da mensagem nas etapas seguintes.

a) Completa a tabela seguinte:

Número da etapa	Nº de vezes que a mensagem foi enviada
1	
2	
3	
…	…
n	

b) Existe alguma etapa em que a mensagem tenha sido enviada 512 vezes? Se existir, indica o número da etapa que lhe corresponde.
c) Ao fim de quatro etapas, quantas vezes foi enviada a mensagem? E ao fim de cinco etapas? Explica como pensaste.
d) Ao fim das n primeiras etapas, quantas vezes foi enviada a mensagem? Explica o teu raciocínio.

Adaptado de *Canguru Matemático sem Fronteiras 2010*, Categoria Escolar, Organização do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra com o apoio da Sociedade Portuguesa de Matemática.

Na tarefa 11 apresenta-se outro tipo de padrão de crescimento, uma sequência não linear, cuja expressão algébrica é do tipo $a^{n \pm c}$, com questões de generalização próxima e distante.

Na Tabela 3 podem observar-se as frequências absolutas das estratégias usadas pelos grupos e indicam-se os tipos de generalização envolvidos nas diferentes questões.

Tabela 3: Estratégias usadas pelos grupos na resolução da tarefa 11

Questões	Tipo de Generalização	Estratégias				
		Diferença	Tentativa-e-Erro	Explícita	Outra	Não Resposa
a)	Próxima	4	—	2	1	—
	Distante	—	—	7	—	—
b)	Distante	—	1	4	2	—
c)	Próxima	4	—	2	1	—
d)	Distante	—	—	6	—	1
Total		8	1	21	4	1

Nesta tarefa, a maioria dos grupos continuou a recorrer a estratégias gerais, como se constata pelo maior número de ocorrências que se verificou na estratégia *Explícita*.

Nas questões a), nas perguntas de generalização próxima, em todas as respostas dadas a partir da estratégia *Diferença*, foi seguida a subcategoria *recursiva*. Na questão de generalização próxima c), uma vez que todas as respostas foram dadas com base nas respostas dadas à questão a), elas também foram classificadas na subcategoria *recursiva.* Na questão a), ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Diferença recursiva*, continuando a sequência com base na diferença entre termos consecutivos, conforme se verifica no diálogo do grupo-alvo G5.

A15: Na 1ª etapa é 1; na etapa 2 a mensagem foi enviada duas vezes.
A12: Pois é; na 3ª etapa é $4 = 2 \times 2$.
A19: Na 4ª etapa é 4×2.
A12: É $2 \times 2 \times 2$, igual a 8; é sempre vezes dois (…)
A19: Na etapa 5 é 8×2, igual a 16. (Aula 11, 15/12/2010)

Ainda nesta questão, na generalização distante ambos os grupos-alvo usaram a estratégia *Explícita* e chegaram a uma generalização algébrica, de nível simbólico, através de um raciocínio indutivo.

$4 = 2^2$
$8 = 2^3$
$16 = 2^4$
...
2^{n-1}

Figura 17. Resposta do grupo-alvo G5 à questão a) na pergunta de generalização distante.

Na generalização distante da questão b), o grupo-alvo G2 recorreu à estratégia *Explícita*.

$$\begin{array}{r|l} 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 512 = 2^9$$

Existe a etapa nº 10.

Figura 18. Resposta do grupo-alvo G2 à questão b).

Já o grupo-alvo G5 utilizou a estratégia *Tentativa-e-Erro.*

$2^5 = 32$

$2^8 = 256$

$2^9 = 512$

↳ Existe, e é a etapa 10.

Figura 19. Resposta do grupo-alvo G5 à questão b).

Na questão c) ambos os grupos-alvo, recorrendo à tabela completada em a) pela estratégia *Diferença recursiva*, efetuaram as adições necessárias com os valores dessa tabela.

$1+2+4+8 = 15$ - Ao fim das 4 primeiras foram 15.

$1+2+4+8+16 = 31$ - Ao fim das 5 primeiras foram 31.

Figura 20. Resposta do grupo-alvo G5 à questão c).

Na generalização distante da questão d) ambos os grupos-alvo recorreram à estratégia *Explícita* e estabeleceram uma generalização algébrica de nível simbólico.

$$1+2+4+8+16+\cdots+2^{n-1}=$$

Figura 21. Resposta do grupo-alvo G5 à questão 11d).

Também nesta tarefa não surgiram perguntas dos alunos e a sua resolução estendeu-se por cerca de 40 minutos.

A discussão no grupo-turma, que durou cerca de 40 minutos, permitiu conhecer os resultados a que chegaram e justificações que deram nas suas resoluções. Nesta discussão, para além do que foi dito atrás, não se verificaram novos contributos.

Em síntese, verificou-se que os grupos recorreram mais frequentemente a estratégias de carácter geral. Por outro lado, no relatório, quatro grupos referiram que não sentiram qualquer dificuldade na resolução da tarefa e os restantes indicaram apenas dificuldades pontuais, algumas das quais ultrapassadas com o apoio da professora.

Acerca da tarefa, já depois de concluída, a professora referiu: "É interessante e acessível, atendendo aos conhecimentos que os alunos já possuem e às experiências realizadas nas tarefas anteriores" (Prof, conversa pós-aula, 15/12/2010).

4.4. Estratégias de generalização no conjunto de todas as tarefas

Resumem-se na Tabela 4 as frequências, em percentagem, de ocorrência das diferentes estratégias de generalização usadas pelos grupos em cada uma das tarefas e na totalidade das 11 tarefas exploradas pelos alunos nas aulas.

Tabela 4: Frequência, em %, de utilização das estratégias pelos grupos, por tarefa e na totalidade das tarefas

Tarefas	Estratégias					
	Contagem	Diferença	Tentativa -e-Erro	Explícita	Outra	Não Resposta
1 — Números	71	—	—	11	18	—
2 — Polígonos	39	—	—	53	8	—
3 — Quadrados	5	12	12	64	7	—
4 — Palitos	10	44	8	25	13	—
5 — Ainda mais números	—	63	2	10	15	10
6 — O Pomar	—	18	41	39	2	—
7 — Tijoleiras	16	16	8	57	3	—
8 — As sequências da Ana	—	—	18	75	7	—
9 — Molduras	5	22	14	52	7	—
10 — Pontos	12	31	8	35	10	4
11 — As mensagens	—	23	3	60	11	3
Total	14	21	10	44	9	2

Por observação da Tabela 4 conclui-se que na globalidade das tarefas cerca de um em cada dois grupos recorreram a estratégias gerais, nomeadamente à estratégia *Explícita*. Para além da pequena percentagem de grupos que não responderam, no caso das restantes estratégias de generalização salienta-se a *Diferença* e, em menor percentagem, a *Contagem* e a *Tentativa-e-Erro*.

Por outro lado, à medida que se progrediu na intervenção de ensino, verifica-se uma maior frequência na adesão à estratégia de generalização *Explícita*, o que é particularmente notório a partir sétima tarefa, inclusive.

5. Conclusões

As interações verbais da professora e do investigador, este último no papel de observador participante, revelaram-se importantes no desenvolvimento do trabalho autónomo dos alunos na medida em que ajudou à reflexão e à (re)organização das conclusões dos alunos, minimizando as suas dificuldades e confusões, tal como aconteceu no estudo de Alvarenga (2006).

Geralmente, os alunos conseguiram encontrar a regra ou lei de formação das sequências em linguagem natural, apesar de experimentarem algumas dificuldades nas tarefas iniciais, ocorridas também no estudo de Matos (2007). Contudo, quando foi solicitada uma expressão algébrica que traduzisse essa generalização, os alunos manifestaram dificuldades relacionadas com a interpretação da letra utilizada na expressão. Em consequência, nas primeiras tarefas foi necessário o apoio da professora e do investigador para que eles refletissem nas suas estratégias e traduzissem as generalizações encontradas em linguagem algébrica. O mesmo se verificou nos estudos de Pereira e Saraiva (2010), Branco (2008) e Barbosa (2007).

Relacionar diferentes representações e converter a linguagem natural em linguagem simbólica revelaram-se tarefas difíceis pois os alunos encontravam-se na fase de transição da Aritmética para a Álgebra, iniciando a aprendizagem de diversos conceitos em simultâneo, nomeadamente o de variável e o de relação funcional (relação implícita entre o termo e a respetiva ordem).

Assim, nas situações onde era necessário construir uma relação funcional, relacionando a ordem do termo (variável independente) com o termo (variável dependente), em algumas tarefas, os alunos revelaram dificuldades em construir simbolicamente essa relação de generalização, talvez por serem confrontados com dois valores desconhecidos (o termo e a respetiva ordem) a variar em simultâneo (Alonso et al., 1993). Estas dificuldades na escrita da expressão algébrica da generalização de uma sequência e das discussões que tiveram lugar nas aulas indiciam que grande parte dos alunos sentiu muita dificuldade na transição do concreto para o abstrato, como também aconteceu nos estudos de Pereira e Saraiva (2010), Branco (2008) e Barbosa (2007).

Nas últimas tarefas, os alunos já evidenciavam mais confiança e à-vontade em generalizar em linguagem natural, mas a maioria dos grupos continuou a evidenciar dificuldades em escrever uma expressão algébrica correspondente. Porém, alguns grupos conseguiram escrever uma expressão algébrica da regra em algumas sequências sem ajuda, como se verificou com alguns alunos no estudo de Branco (2008), mas ao contrário do que sucedeu no estudo de Pereira e Saraiva (2010).

Nas tarefas de padrões figurativos de crescimento verificou-se que os grupos geralmente completavam as tabelas com base na análise das figuras apresentadas — primeiros termos das sequências, nas perguntas de generalização próxima, e uma vez organizados os dados nas tabelas, para descobrirem a regra ou lei de formação das sequências, geralmente, abandonavam as figuras e ficavam-se por abordagens numéricas. O facto de não seguirem geralmente uma abordagem figurativa poderá dever-se à falta de hábito e à eventual dificuldade no raciocínio visual. Embora existam autores (e.g., Alonso et al., 1993; Socas et al., 1996) a referir que no caso das propriedades numéricas não estarem bem aprendidas, surgem dificuldades com as abordagens numéricas, no presente estudo os alunos optaram geralmente por ela, chegando a maioria dos grupos à regra ou lei de formação das sequências em linguagem algébrica, embora com alguma dificuldade e frequentemente usando um raciocínio indutivo.

Nos padrões figurativos, em termos gerais, nas questões de generalização próxima os grupos utilizaram as estratégias *Contagem* e *Diferença*, enquanto nas questões de generalização distante optaram, geralmente, pela estratégia *Explícita*, verificando-se nas últimas tarefas algumas ocorrências da estratégia *Tentativa-e-Erro*. Uma conclusão evidente destes resultados é o facto de os alunos mudarem geralmente de estratégia consoante se tratava de uma questão de generalização próxima ou distante e que a estratégia *Explícita* ocorreu, sobretudo, nas generalizações distantes. Além disso, nestas questões, o raciocínio dos alunos evoluiu geralmente para uma regra de carácter geral, permitindo indicar de imediato um termo dada a respetiva ordem e vice-versa.

Nas questões de generalização próxima, relativas aos padrões figurativos, em termos gerais, os alunos recorreram algumas vezes à estratégia *Contagem*, contrariamente ao que ocorreu no estudo de Alvarenga (2006), em que esta estratégia foi utilizada muitas vezes, o que poderá dever-se ao facto de os alunos que participaram neste último estudo serem do 5º ano, portanto num nível de escolaridade anterior.

Nos padrões lineares, os alunos utilizaram essencialmente generalizações algébricas construtivas, considerando os termos da expressão algébrica como representando as partes da figura que não se sobrepõem (as expressões surgem com “adições”). Também se verificou que os alunos não optaram geralmente pela estratégia *Objeto Inteiro*, tendo esta sido identificada em momentos de discussão, ainda que raramente. Além disso, houve alguns casos em que o foco da generalização se manteve no plano concreto (não geral), não se revelando o uso de materiais uma necessidade para se mostrar a generalização e, deste modo, os alunos não passaram pelo nível de generalização algébrica factual, talvez influência da sua faixa etária. Outros grupos, em certas situações, ficaram-se pelo nível de generalização algébrica contextual descritivo e utilizaram uma linguagem orientada para explicar a generalização com referências ao contexto. Em geral, apesar das dificuldades, os alunos, utilizando a linguagem algébrica para descrever a generalização, progrediram para o nível de generalização algébrica simbólica.

No padrão não linear (tarefa 11) verificou-se que os grupos utilizaram, em geral, nas questões de generalização próxima as estratégias *Explícita* e *Diferença* e nas questões de generalização distante as estratégias *Explícita* e *Tentativa-e-Erro*.

Em termos gerais, verificou-se, no conjunto de todas as onze tarefas, uma maior prevalência da estratégia *Explícita*, seguida das estratégias *Diferença* e *Contagem*, respetivamente. A estratégia *Explícita* é a que mais se adequa à faixa etária dos alunos, constituindo uma estratégia de generalização que lhes permite determinar de imediato qualquer termo da sequência Por outro lado, constatou-se ainda que os alunos mudaram geralmente de estratégia consoante se tratava de generalizações próximas ou distantes, estas últimas a desencadearem a formulação mais frequente de estratégias de generalização mais abstratas e eficientes.

Bibliografia

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME.

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S. et al. (1993). *Ideas y actividades para enseñar algebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Alvarenga, D. L. (2006). *A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2º ciclo*. (Dissertação de mestrado, Universidade do Minho). Lisboa: APM.

APM (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: Autor.

Barbosa, E. M. (2007). *A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação com alunos do 8º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, Universidade de Évora). Lisboa: APM.

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Bezuszka, S. J. & Kenney, M. J. (2008). The three R's: recursive thinking, recursion, and recursive formulas. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp. 81-97). Reston, VA: NCTM.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Chua, B. L. & Hoyles, C. (2011). Secondary school students' perception of best help generalising strategies. National Institute of Education Nanyang Technological University, London Knowledge Lab University of London. Consultado em Abril 10, 2011, em http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/3/CERME7_WG3_Chua.pdf

Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. University of Massachusetts–Dartmouth. Consultado em Maio 13, 2010, em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Lannin, J., Barker, D. & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Educational Research Journal,* 18(3), 3-28.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8º ano. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (Tradução portuguesa do original americano de 2000).

Pereira, M. & Saraiva, M. J. (2010). A escrita simbólica de uma generalização. *Educação e Matemática*, 107, 28-35.

Ponte, J. P. (2009). Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), *Patterns: Multiple Perspectives and contexts in Mathematics Education* (pp. 169-175). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME.

Ponte, J., Matos, A. & Branco, N. (2009b). *Sequências e Funções*. Lisboa: ME.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education,* 40(1), 83-96.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 65-82.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics,* 73(3), 297-328.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1996). *Iniciación al algebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.

Vale, I. & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação e Matemática*, 85, 14-20.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática — Propostas Curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th edition). Thousand Oaks: Sage Publications.

Manuel de Sousa Pereira. Mestre em Ciências da Educação, área de especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática. Professor de Matemática do Agrupamento de Escolas de Celorico de Basto, Braga, Portugal. cab.mspereira@gmail.com

José António Fernandes. Doutor na área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática. Professor Associado do Instituto de Educação, Universidade do Minho, Campus de Gualtar, Braga, Portugal. jfernandes@ie.uminho.pt