

<http://www.fisem.org/www/index.php>
<https://union.fespm.es/index.php/UNION>

Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato

Gerardo Salgado Beltrán, Martha Iris Rivera López, Crisólogo Dolores Flores

Fecha de recepción: 27/11/2019

Fecha de aceptación: 20/01/2020

<p>Resumen</p>	<p>Este artículo describe los resultados de una investigación que exploró las conceptualizaciones de pendiente en el contenido que enseñan los profesores de matemáticas de Bachillerato. Para ello, analizamos las notas de clase del cuaderno de matemáticas de sus estudiantes por medio del método de Análisis de Contenido y empleamos las once conceptualizaciones de pendiente reportadas por otros investigadores como marco de referencia. Los resultados indican que las conceptualizaciones Razón Algebraica, Trigonométrica y Coeficiente Paramétrico, enfatizadas en lo procedimental, fueron las que más promueven los profesores al definir, explicar, ejemplificar y proponer actividades vinculadas al concepto de pendiente. Palabras clave: Conceptualizaciones de pendiente; Notas de Clase; Análisis de Contenido; Profesores</p>
<p>Abstract</p>	<p>This paper describes the results of a research whose objective was explore the conceptualizations of slope in content taught by high school mathematics teachers, through the class notes of their students' math notebook. For data analysis, the Content Analysis method and the descriptions of the eleven slope conceptualizations reported by other researchers were used as framework. The results indicate that the conceptualization Algebraic Ratio, Trigonometric and Parametric Coefficient were the most promoted by teachers in defining, explaining, exemplifying and proposing activities related to the concept, but these with a procedural emphasis. Keywords: Slope's conceptualizations; Class notes; Content Analysis; Teachers</p>
<p>Resumo</p>	<p>Este artigo descreve os resultados de uma investigação que explorou as conceituações de inclinação no conteúdo ensinado por professores de matemática do ensino médio. Para isso, analisamos as anotações das aulas do caderno de matemática de seus alunos por meio do método Análise de Conteúdo e empregamos as onze conceituações de inclinação relatadas por outros pesquisadores, como um marco de referência. Os resultados indicam que as conceituações Razão, Algébrica, Trigonométrica e Coeficiente Paramétrico, enfatizadas no procedimento, foram as que os professores mais promoveram ao definir,</p>

	<p>explicar, exemplificar e propor actividades relacionadas ao conceito de inclinação.</p> <p>Palavras-chave: Conceituações de inclinação; Notas de classe; Análise de Conteúdo; Professores</p>
--	---

1. Introducción

La pendiente es un concepto protagonista en el currículo de matemáticas ya que es objeto de enseñanza y aprendizaje desde Nivel Secundaria hasta el Nivel Superior, por tanto, un prerequisite fundamental para desarrollar un pensamiento matemático avanzado debido al vínculo con otros conceptos matemáticos y fenómenos de la vida real (Carlson, Oehrtman y Engelke, 2010; Confrey; Smith, 1995; Stump, 2001a; Noble, Nemirovsky, Wright y Tierney, 2001). Su comprensión no es tarea fácil, ya que va más allá de solo considerarlo como un cálculo algebraico relacionado a la inclinación de una recta (Moore-Russo, Conner y Rugg, 2011; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Stanton y Moore-Russo, 2012; Stump, 1999, 2001a, 2001b). Su complejidad y dificultades en su comprensión está asociada a las múltiples maneras de representarlo: Algebraicamente en fórmulas y ecuaciones, geoméricamente en gráficos, trigonoméricamente como la tangente del ángulo de inclinación de una recta, en Cálculo como límite, etc. (Stump, 1999).

Conocer a fondo los fenómenos que se suscitan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de pendiente requiere, a su vez, de conocer los elementos que inciden directamente en tal proceso, tales como: a) el currículum oficial, que viene dado en el conjunto de documentos que oficializan las autoridades educativas o asociaciones de un lugar y que fijan o proponen los programas de las asignaturas, contenidos mínimos, objetivos que deben alcanzarse, etc.; b) el currículum potencial, el cual queda determinado en publicaciones docentes, libros de texto, materiales didácticos, etc.; c) el currículum impartido, es el que efectivamente desarrolla el profesorado en clase a lo largo del curso, y por último d) el currículum aprendido que es el que efectivamente queda adquirido por el alumnado (Steiner, 1980; Alsina, 2000; Dolores y Valenzuela, 2012).

Desde la década de los noventa, el estudio de pendiente es un tema vigente en la agenda de la investigación en Educación Matemática de diversos países como: Estados Unidos de Norteamérica, España, Corea, Turquía, México, etc. Algunos de los trabajos que se han publicado han hecho énfasis en el currículum aprendido, documentado errores y dificultades en estudiantes de diferentes niveles educativos al trabajar la pendiente (Por ej.: Barr, 1980, 1981; Moschkovich, 1990; Azcárate, 1992; Schoenfeld, Smith y Arcavi, 1993; Zaslavsky, Sela y Leron, 2002; Herbert y Pierce, 2008; Teuscher; Reys, 2010, 2012; Cho y Nagle, 2017; Dolores-Flores, Rivera-López y García-García, 2018). También se ha explorado el conocimiento en profesores y estudiantes a través de las múltiples conceptualizaciones que acepta el concepto (Por ej.: Stump, 1999, 2001; Moore-Russo et al., 2011; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013; Newton y Poon, 2015; Casey y Nagle, 2016; Nagle, Casey y Moore Russo, 2017, Rivera, Salgado y Dolores, in press).

Otros estudios han explorado el currículum oficial con la intención de conocer qué conceptualizaciones de pendiente son favorecidas en el currículum matemático estadounidense (Stanton y Moore-Russo, 2012; Nagle y Moore-Russo, 2014) y el mexicano (Dolores, Rivera y Moore-Russo, in press). Con relación al currículum potencial, se han explorado las conceptualizaciones consideradas por profesores de matemáticas para el diseño de materiales de instrucción (Nagle y Moore-Russo, 2013), así como una exploración sobre los elementos no textuales en libros de texto estadounidenses y coreanos, donde la pendiente fue uno de los tópicos analizados (Kim, 2012).

La revisión ha arrojado que son escasos los estudios centrados en el currículum impartido en torno al concepto de pendiente. Además, Stanton y Moore-Russo (2012) señalan la necesidad de investigar cómo el profesor aborda en clase este concepto, debido al poco conocimiento que se tiene en la Educación Matemática de esta situación. Por tanto, con este estudio buscamos explorar y conocer más acerca del tratamiento que el profesor da al concepto de pendiente en el aula. Si bien, esto se puede observar directamente en el aula, también es posible hacerlo desde las notas de clase del cuaderno de matemáticas (CM), tal como lo afirma Arce (2018).

En este sentido, el CM es considerado como un instrumento en el que el estudiante escribe anotaciones derivadas de las explicaciones o discusiones que tienen lugar en la clase de matemáticas, a través del cual, recopila y revisa su trabajo personal (Arce, 2018; Godino, Contreras y Font, 2006; Pérez, 2007). Así, el CM aporta información variada sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Viñao, 2006). Hasta ahora, los estudios que se han reportado sobre el CM, se han centrado en aportar información respecto al rol que juega en el aprendizaje de la matemática y cómo ciertas estrategias de enseñanza pueden interferir en este proceso (Van Meter, Yokoi y Pressley, 1994; Monereo y Pérez, 1996; Monereo, Carretero, Castelló, Gómez y Pérez-Cabaní, 1999; Saint-Onge, 1997; Nogueira, 2005; Salgado-Horta y Maz-Machado, 2013; Rensaa, 2014; Arce, Conejo y Ortega, 2016; Yau y Mok, 2016). Además, Arce (2018) afirma que el CM aporta información rica sobre muchos aspectos ligados al docente, al contenido que enseña y al modo en que lo aborda en el aula. Por consiguiente, la pregunta que se busca responder con este estudio es: ¿Qué conceptualizaciones de pendiente están presentes en el contenido que enseñan los profesores de bachillerato? Y para responderla nos planteamos como objetivo, analizar las notas de clase de sus estudiantes para identificar las conceptualizaciones de pendiente que enseña el profesor cuando aborda el concepto en la clase de matemáticas.

2. Método

Este estudio es cualitativo y exploratorio, en el mismo sentido que Hernández, Fernández y Baptista (2010). Al realizarlo, se buscó conocer las conceptualizaciones de pendiente que se encuentran en las notas de clase de estudiantes de bachillerato. Entendemos por conceptualización de pendiente a una representación específica del concepto (Stump, 1999, 2001a, 2001b), las cuales se describen en la Tabla 1.

CONCEPTUALIZACIÓN	DESCRIPCIÓN	CÓDIGO
Razón Algebraica	Cambio en y entre cambio en x , razón con la expresión algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	A
Razón Geométrica	La razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta. Subida sobre corrida en el gráfico de una recta.	G
Propiedad Funcional	Razón de cambio constante entre dos variables encontradas en representaciones múltiples, incluyendo tablas y descripciones verbales (por ej. cuando x incrementa en 2, y incrementa en 3).	F
Situación Mundo-Real	Situación física (estática, por ej.: una rampa, escalera, etc.) o situación funcional (dinámica, por ej.: distancia en función del tiempo, volumen en función del tiempo, etc.)	R
Indicador de comportamiento	Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento (-), tendencia horizontal de la línea (0). Si no es cero, indica la intersección con el eje x .	B
Propiedad Física	Descripción de una recta utilizando expresiones como grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, ángulo, etc.	P
Coefficiente Paramétrico	Coefficiente m (o su valor numérico) en $y = mx + b$ ó $y - y_1 = m(x - x_1)$.	PC
Trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo de una recta que hace con una recta horizontal; tangente del ángulo de inclinación.	T
En Cálculo	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva, de una recta secante, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso una no lineal).	C
Propiedad Determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares entre sí; además de determinar una recta si da un punto.	D
Constante Lineal	Propiedad constante y única para las rectas; pendiente de la recta que no es afectada por la traslación de la misma. Es una propiedad constante en la colinealidad de los puntos de una recta, independiente de la región del gráfico lineal que se está considerando, es decir que dos puntos cualesquiera de la recta determinan la pendiente.	L

Tabla 1. Conceptualizaciones de la pendiente (Adaptada de Nagle y Moore-Russo (2014))

El análisis de las notas de clase se realizó utilizando el método Análisis de Contenido sugerido por Bardín (2002). El objeto de estudio fueron las notas de clase de trece estudiantes de bachillerato del 11º grado, cuyas edades varían entre 17 y 18

años (próximos a culminar el curso de Geometría Analítica conocido también como Matemáticas III), provenientes de trece instituciones educativas ubicadas principalmente en la región centro del Estado de Guerrero, México. Para efectos de este estudio, se eligieron las notas de clase de Matemáticas III debido a que en este curso, el concepto de pendiente es objeto de estudio de acuerdo con el currículo mexicano (SEP, 2013).

Para la recolección de las notas de clase, se consideraron dos criterios: que el CM fuese objeto de evaluación por el profesor y que el autor cumpliera con la característica de ser copista total en el sentido de Monereo et al. (1999). Para el primero, se elaboró y aplicó una encuesta a 25 profesores de bachillerato en servicio. En esta, se les preguntó: Datos personales, cómo estructura el tratamiento que da a los conceptos matemáticos en su clase y qué mecanismos utiliza para evaluar a los estudiantes. Los resultados indicaron que 12 de los encuestados no consideran el CM como objeto de evaluación, lo cual orilló a descartarlos de este estudio, ya que según Fried y Amit (2003) las notas de clase que son objeto de evaluación, reflejan más características del contenido que enseña el profesor en el aula, debido al control que este ejerce sobre las mismas. Para el segundo criterio, se recolectaron los cuadernos de todos los estudiantes de cada uno de los profesores considerados para este estudio, con el objetivo de reunir el material que sería objeto de análisis. Posteriormente, los investigadores se reunieron con cada profesor a fin de comparar el contenido de los cuadernos (para mirar su correspondencia) y determinar cuáles reflejaban de manera más completa (desde el punto de vista del profesor) el tratamiento del contenido en el aula. De este modo, el objeto de estudio fueron las notas de clase de un CM por profesor.

Para determinar las unidades de contexto, se utilizó la información recolectada en las encuestas hechas a los profesores, respecto a cómo estructuran el tratamiento que dan a los conceptos matemáticos en su clase. De acuerdo con los resultados, la totalidad manifestó que en principio plantean *definiciones* (*) seguidas de *explicaciones* (⊙), *ejemplos* (◦) y *actividades* (ejercicios y problemas) (⊗), esto permitió que fueran elegidas como unidades de contexto. Posteriormente, cada profesor identificó y clasificó dicha información en las notas de clase de su estudiante para su posterior análisis.

Las unidades de análisis fueron las frases, procedimientos o palabras clave que hacen referencia a la descripción de alguna de las conceptualizaciones de pendiente descritas en la Tabla 1. Para realizar el análisis se digitalizaron y clasificaron las notas de clase de acuerdo con las unidades de contexto (Ver Imagen 1), luego, esta información fue puesta a disposición de los tres investigadores involucrados en este estudio. Cada investigador codificó y completó una tabla análoga a la Tabla 2. En ella se registró el código que identifica la conceptualización, acompañada por un subíndice que indica el número de código y un superíndice que indica la unidad de contexto (Por ejemplo, A_1^* indica el primer código asociado a la conceptualización Razón Algebraica (A) identificada en *definiciones*).

Escuela	Estudiante	Conceptualizaciones									
		A	G	F	R	B	P	PC	T	C	D

					R _P	R _F								
	E1													
	⋮													
	E13													

Tabla 2. Ejemplo de la tabla empleada para registrar el análisis de cada investigador

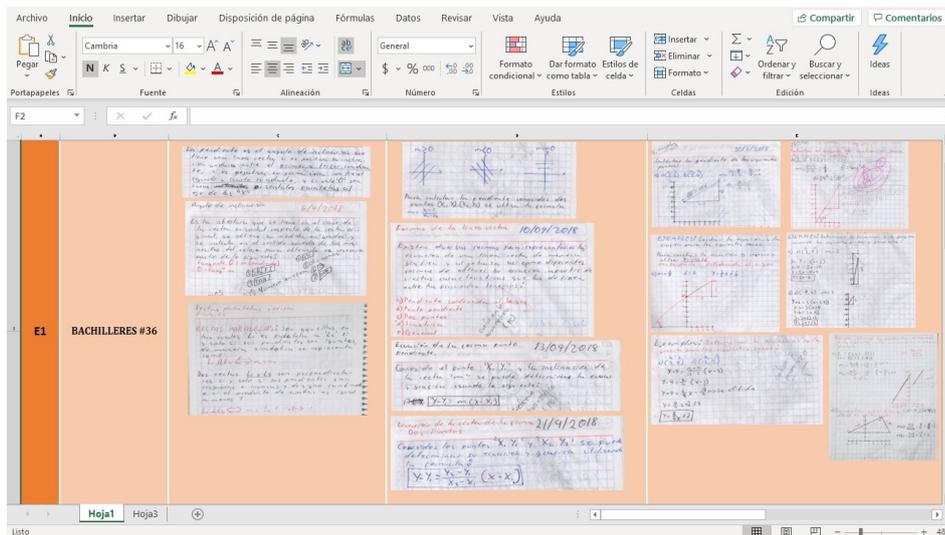


Imagen 1. Ejemplo de la clasificación de las notas de clase utilizando Microsoft Excel
Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presentan dos ejemplos de cómo fueron identificadas las conceptualizaciones de pendiente en las notas de clase. La Imagen 2 muestra una *definición* que el profesor presenta a sus estudiantes en clase. En ella, se ha identificado como frase clave a “la pendiente es la inclinación de la recta”. De acuerdo con la Tabla 1 esta frase está directamente vinculada con la conceptualización P. Por lo tanto, se asignó el código P₁^{*}.

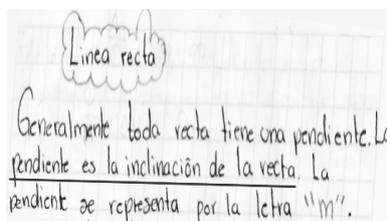


Imagen 2. Evidencia de la conceptualización Propiedad Física en definiciones
Fuente: Elaboración propia

La Imagen 3 muestra los *ejemplos* que otro profesor trabajó durante su clase. En esta, se identificó como procedimiento clave “Utiliza la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente de una recta conocidos dos puntos por donde pasa”. Este procedimiento se asocia con la descripción de la conceptualización A y se asignó el código A₁^o.

Calcula la pendiente en: 1) A(3,5) B(2,7)
 x_1, y_1, x_2, y_2 2) P(-2,-5) P₂(-3,-8)
 x_1, y_1, x_2, y_2

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{7-5}{2-3}$ $m = \frac{-8-(-5)}{-3-(-2)}$

$m = \frac{2}{-1}$ $m = \frac{-3}{-1}$

$m = -2$ $m = 3$

Imagen 3. Evidencia de la conceptualización Razón Algebraica en ejemplos
Fuente: Elaboración propia

Finalmente, para decidir el tipo de conceptualizaciones presentes en las notas de clase, los investigadores se reunieron y en conjunto, compararon y discutieron las codificaciones propuestas de cada uno. En caso de algún desacuerdo, se discutieron las posturas hasta llegar un consenso y determinar la conceptualización presente. Esto permitió la confiabilidad de los resultados y garantizó su validez, credibilidad y rigor, eliminando así el sesgo de un único investigador.

3. Resultados

Del análisis realizado a las notas de clase, se determinaron los códigos asociados a la descripción de cada conceptualización identificada en *definiciones*, *explicaciones*, *ejemplos* y *actividades* propuestas por los profesores en el contenido que enseñan sobre el concepto de pendiente, mismos que se registran en la Tabla 3.

CONCEPTUALIZACIÓN	DESCRIPCIÓN DE LOS CÓDIGOS
Razón Algebraica (A)	A ₁ : La pendiente es igual a $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ A ₂ : La pendiente es el cambio en x entre cambio en y , $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ó $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Situación Mundo-Real (RP -Física y RF - Funcional)	R _{F1} : La pendiente es la razón de cambio constante, por ejemplo: distancia vs tiempo, la pendiente representa la velocidad. R _{P1} : Se asocia la pendiente con el medio circundante, por ejemplo, escaleras, rampas, etc.
Indicador de comportamiento (B)	B ₁ : Las rectas con pendiente positiva son crecientes, con pendiente negativa son decrecientes y con pendiente cero son constantes.
Propiedad Física (P)	P ₁ : La pendiente es la inclinación que tiene una recta.
Coefficiente Paramétrico (PC)	PC ₁ : En las ecuaciones de la recta $y = mx + b$, $y - y_1 = m(x - x_1)$, y $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$, m y $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ representan la pendiente de la recta respectivamente.
Trigonometría (T)	T ₁ : La pendiente se calcula como $m = \tan \theta$, donde θ es el ángulo de inclinación de la recta.
Propiedad Determinante (D)	D ₁ : Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendiente son iguales y perpendiculares si son recíprocas y de signo contrario (o el producto de sus pendientes es -1)

Constante Lineal (L)	<p>L₁: La pendiente de una recta m es constante.</p> <p>L₂: Si la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se mantiene constante, el lugar geométrico es una línea recta.</p>
-----------------------------	---

Tabla 3. Codificación final que describen las conceptualizaciones identificadas

Del análisis de las notas de clase se identificaron entre tres y ocho conceptualizaciones de pendiente en el contenido que enseñan los profesores cuando abordan dicho concepto, destacándose la Razón Algebraica y Trigonométrica en las cuatro unidades de contexto (Ver Tabla 4).

Escuela	Estudiante	Conceptualizaciones											
		A	G	F	R _M		B	P	PC	T	C	D	L
					R _P	R _F							
Bachilleres #36	E1	A ₁ [⊙] A ₁ [°] A ₁ [⊗]					B ₁ [⊙]	P ₁ [*] P ₁ [⊙]	PC ₁ [⊙] PC ₁ [°] PC ₁ [⊗]	T ₁ [*] T ₁ [°]		D ₁ [*] D ₁ [°]	
Preparatoria #1	E2	A ₁ [⊗]			R _{P1} [⊗]				PC ₁ [⊙] PC ₁ [°]				
CBTis	E3	A ₁ [⊙] A ₁ [°] A ₁ [⊗]			R _{P1} [⊗]				PC ₁ [⊙] PC ₁ [°]	T ₁ [*]		D ₁ [*]	L ₁
CETis	E4	A ₁ [*] A ₁ [⊙] A ₁ [°] A ₁ [⊗]							PC ₁ [⊙] PC ₁ [°] PC ₁ [⊗]	T ₁ [*]			
Bachillerato Tecnológico	E5	A ₁ [*] A ₁ [⊙]							PC ₁ [⊙] PC ₁ [°]	T ₁ [*] T ₁ [⊗]		D ₁ [⊗]	
Preparatoria #9	E6	A ₁ [⊙] A ₁ [°] A ₁ [⊗]						P ₁ [*]	PC ₁ [⊙] PC ₁ [°] PC ₁ [⊗]	T ₁ [⊙] T ₁ [⊗]		D ₁ [*] D ₁ [°]	
Preparatoria #36	E7	A ₁ [⊗]					B ₁ [⊙] B ₁ [°]		PC ₁ [⊙] PC ₁ [°]				
Preparatoria #33	E8	A ₁ [*] A ₁ [°]					B ₁ [⊙]		PC ₁ [°]	T ₁ [*] T ₁ [°]			
Preparatoria #26	E9	A ₁ [*] A ₂ [⊙] A ₁ [°] A ₁ [⊗]				R _{F1} [⊙]	B ₁ [⊙]	P ₁ [*]	PC ₁ [⊙] PC ₁ [°] PC ₁ [⊗]	T ₁ [*] T ₁ [°] T ₁ [⊗]		D ₁ [*]	L ₂ [⊙]
Conalep #133	E10	A ₁ [⊙] A ₁ [°] A ₁ [⊗]							PC ₁ [⊙] PC ₁ [⊗]	T ₁ [*] T ₁ [⊗]		D ₁ [*] D ₁ [⊗]	
Preparatoria #29	E11	A ₁ [⊙] A ₁ [⊗]							PC ₁ [⊙] PC ₁ [⊗]			D ₁ [*]	
Conalep #113	E12	A ₁ [*] A ₁ [⊙] A ₁ [°] A ₁ [⊗]								T ₁ [*] T ₁ [⊙] T ₁ [°] T ₁ [⊗]		D ₁ [*]	
Bachilleres #11	E13	A ₁ [*] A ₁ [⊙]					B ₁ [⊙]		PC ₁ [⊙] PC ₁ [⊗]	T ₁ [*] T ₁ [⊙]			

Tabla 4. Conceptualizaciones identificadas en las notas de clase

En las *definiciones* propuestas por la mayoría de profesores se encontró el uso predominante de dos conceptualizaciones: Trigonométrica al referirse a la pendiente como $m = \tan \theta$ donde θ es el ángulo de inclinación de la recta y Razón Algebraica cuando señalan que la pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (ver Imagen 4). Otras conceptualizaciones identificadas en esta unidad de contexto fueron: Propiedad Determinante, al utilizar los criterios de paralelismo y perpendicularidad para definir rectas paralelas y perpendiculares; Propiedad Física, al asumir que la pendiente es el ángulo de inclinación de la recta y; Constante Lineal, al definir que una línea es recta si su pendiente es única. Estos resultados evidenciaron el desconocimiento por parte de algunos profesores acerca de la definición de pendiente.

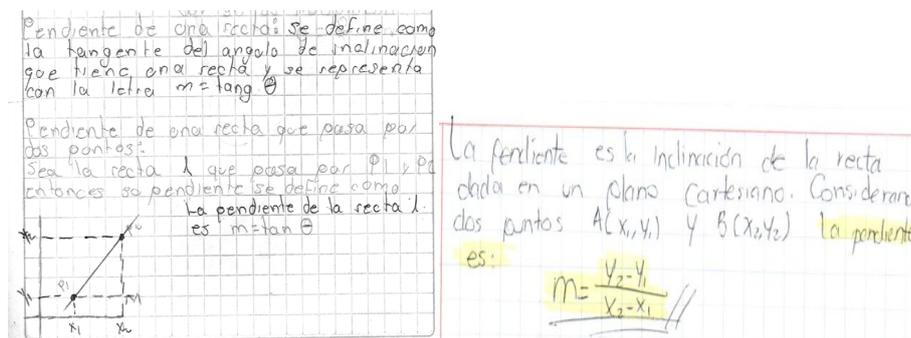


Imagen 4. Definición de pendiente en las notas de dos estudiantes
Fuente: Elaborada por los autores

También, se identificó que al dar *explicaciones*, *ejemplos* y proponer *actividades* para que los estudiantes interactúen con el concepto, los profesores recurren a la conceptualización Razón Algebraica y Coeficiente Paramétrico. La primera, al señalar que la fórmula sirve para calcular la pendiente de la recta, al proporcionar *ejemplos* así como *actividades* que involucren la obtención de la pendiente a partir de dos puntos conocidos, centrándose en la ejercitación de la fórmula (ver Imagen 5). Y la segunda, al dar *explicaciones* que involucra la pendiente como el número que acompaña a la x en la ecuación $y = mx + b$, al plantear *ejemplos* y *actividades* que involucren la obtención de la ecuación una recta a partir de datos como: pendiente y ordenada al origen, dos puntos por donde pasa la recta, un punto y su pendiente y, un punto y el ángulo de inclinación (ver Imagen 6). A manera de inferencia, estos resultados sugieren un trabajo centrado en lo procedimental y algorítmico y son contradictorios respecto a los requerimientos del Programa de Estudio de Matemáticas III donde se enfatiza que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben dejar de lado la memorización, mecanicismo y la desarticulación de temas (SEP, 2013).

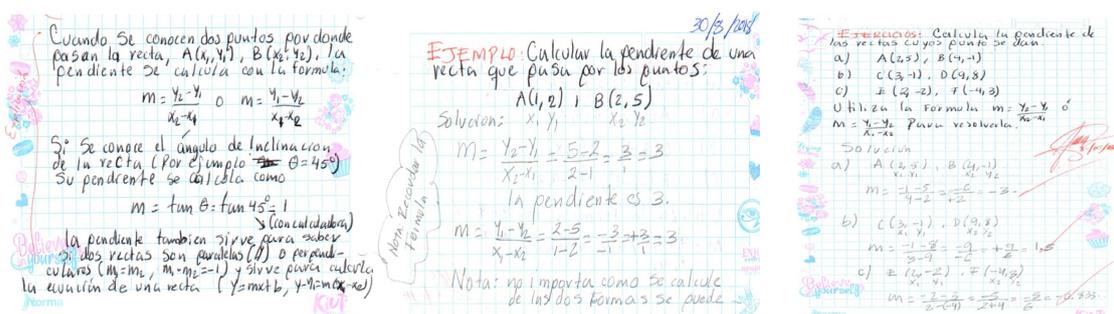


Imagen 5. Explicación, ejemplo y actividades que involucran la Razón Algebraica
Fuente: Elaborada por los autores

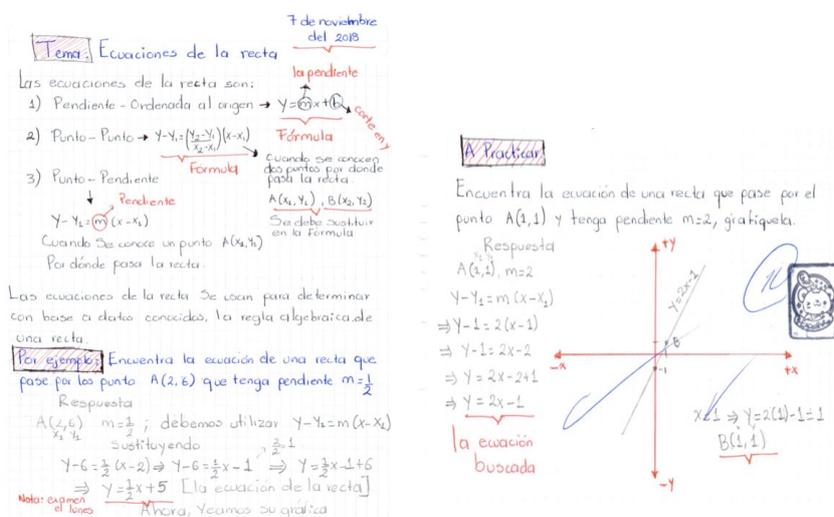


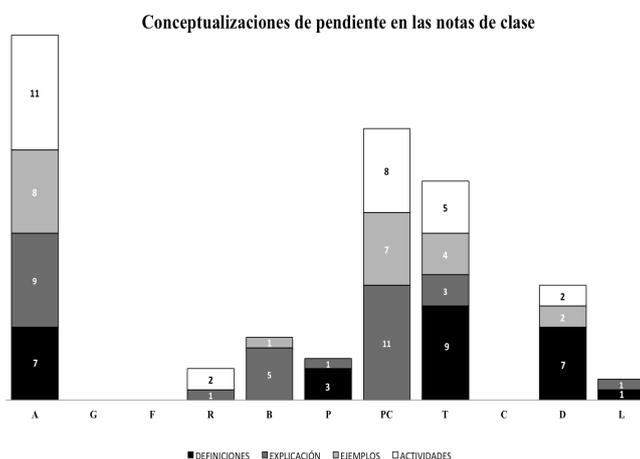
Imagen 6. Explicación, ejemplo y actividad que involucran la conceptualización Coeficiente Paramétrico
Fuente: Elaborada por los autores

Otras conceptualizaciones identificadas de mayor a menor énfasis fueron: en *explicaciones*, Indicador de Comportamiento, Trigonometría, Propiedad Física, Constante Lineal y Situación Mundo Real; en *ejemplos*, Trigonometría, Propiedad Determinante e Indicador de Comportamiento y; en *actividades*, Trigonometría, Propiedad Determinante y Situación Mundo Real. Mientras que, Razón Geométrica, Propiedad Funcional y Cálculo no fueron identificadas en el contenido que enseñan. La ausencia de esta última es razonable, debido a que la pendiente representada como la derivada de una función en un punto y otras ideas variacionales vinculadas a la misma, no son objeto de estudio de la Geometría Analítica (SEP, 2013).

De acuerdo con los resultados la conceptualización Situación Mundo Real fue identificada en las notas de tres estudiantes, como referente para plantear *explicaciones* de cómo la pendiente se vincula con la razón de cambio (en las notas de un estudiante) y para plantear *actividades* complementarias en las que los estudiantes por cuenta propia vincularan el concepto con situaciones cotidianas de su entorno (en las notas de dos estudiantes). Estos hallazgos insinúan que la mayoría de los profesores poco promueven el desarrollo de competencias que den

oportunidad a los estudiantes realizar vinculación entre la pendiente y situaciones del entorno cotidiano, tal como se sugiere en el Programa de Estudio de Matemáticas III (SEP, 2013).

En general, se notó que las conceptualizaciones de pendiente (Trigonométrica, Razón Algebraica, Coeficiente Paramétrico y Propiedad Determinante) vinculadas a la definición analítica de pendiente son tratadas en clase con mayor énfasis (ver Gráfica 1). Sin embargo, se percibe un tratamiento disperso, por un lado mirando la pendiente como “la tangente del ángulo de inclinación”, seguido de “diferentes fórmulas para calcularla”, utilizándola para “encontrar la ecuación de una recta o ángulo de inclinación de la misma” y para decidir con base en ella “si dos rectas son paralelas o perpendiculares”. En ninguna de las notas analizadas en este estudio se encontraron indicios que nos hicieran pensar que el profesor da oportunidad a los estudiantes para que establezcan conexiones entre las diferentes representaciones del concepto.



Gráfica 1. Conceptualizaciones de pendiente por unidad de contexto
 Fuente: Elaborada por los autores

4. Discusión y conclusiones

Los hallazgos de esta investigación evidenciaron que los profesores de bachillerato al abordar el concepto de pendiente con sus estudiantes, centran la atención principalmente en los procedimientos asociados al cálculo de la misma y relegan a un segundo plano el tratamiento de nociones conceptuales, tal como lo advierten Dolores-Flores et al. (2018), Lingefjärd y Farahani (2017) y Walter y Gerson (2007). Situación que según Báez, Cantú y Gómez (2007) atribuyen a que en México son pocos los profesores de matemáticas de bachillerato que cuentan con el perfil para gestionar la enseñanza y aprendizaje, por lo cual la mayoría de ellos se limita a enseñar contenidos tal como lo sugiere un libro de texto, incluido el nivel de demanda cognitiva que en los ejercicios y problemas estos textos presentan.

En diversas investigaciones se ha insistido en la importancia del concepto de pendiente en la Educación Matemática (Birgin, 2012; Dolores-Flores et al., 2018;

Mudaly y Moore-Russo, 2011; Özer y Sezer, 2014; Stump, 1999, 2001a, 2001b; Zou, 2014) por su presencia en la currícula de matemáticas (Stanton y Moore-Russo 2012; Rivera y Dolores, 2017; Dolores et al., in press) y por sus múltiples conceptualizaciones (Moore-Russo et al., 2011). De acuerdo con los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014), los profesores de matemáticas en su práctica deben tratar el concepto de pendiente vinculando las ideas intra-matemáticas con las extra-matemáticas, de tal forma que el estudiante tenga la oportunidad de integrar las diversas representaciones del concepto para desarrollar la comprensión del mismo. De acuerdo con Stump (2001a) lo señalado por la NCTM se favorecería si en la enseñanza y aprendizaje de la pendiente se enfatiza la conceptualización Situación Mundo Real. No obstante, los resultados de esta y otras investigaciones (por ejemplo, Stump, 2001b; Nagle y Moore-Russo, 2013) han reportado el escaso énfasis que los profesores de matemáticas dan a la relación entre la pendiente y situaciones asociadas con el mundo real cuando abordan el concepto.

Por otra parte, Deniz y Kabael (2017) señalan que la conceptualización Razón Geométrica es un referente importante para la interiorización de la pendiente como una razón constante en la recta, situación que se vincula directamente con la conceptualización Constante Lineal. Por lo cual, representa una idea intuitiva que posibilita la conexión con otras conceptualizaciones, siempre y cuando no sea considerada únicamente como una herramienta procedimental (Byerley y Thompson, 2017; Walter y Gerson, 2007). Al respecto, algunas investigaciones han reportado que al diseñar materiales de instrucción, los profesores tienden a enfatizar en la Razón Geométrica (Nagle y Moore-Russo, 2013; Stump 2001b), resultado similar a los hallazgos reportados por otros investigadores acerca del conocimiento de profesores y estudiantes de diferentes niveles educativos (Dündar, 2015; Newton y Poon, 2015; Nagle et al., 2013; Walter y Gerson, 2007), así como lo que se promueven en los programas de estudio (Stanton y Moore-Russo 2012; Nagle y Moore-Russo, 2014).

En el contexto mexicano esto es contrastante, ya que se ha reportado que en el currículo de la educación básica (primaria, secundaria y bachillerato) la conceptualización Razón Geométrica es escasamente promovida (Dolores et al., in press). Aunado a esto, Rivera et al. (in press) encontraron que en estudiantes recién egresados del bachillerato, esta conceptualización es escasamente evidenciada cuando resuelven tareas que involucran dicho concepto, a diferencia de la Razón Algebraica que es la más recurrente en sus procedimientos. Estos resultados, en contraste con el presente estudio son correspondientes, ya que en las notas de clase se identificó que la conceptualización Razón Algebraica es la que predomina en las *explicaciones, ejemplos y actividades* que promueven los profesores del bachillerato en el contenido que enseñan al abordar el concepto de pendiente, mientras que Razón Geométrica no fue identificada.

Finalmente, la evidencia reunida y el análisis realizado proporciona elementos para inferir que en la mayoría de profesores persisten las interpretaciones analíticas y procedimentales de la pendiente, en el mismo sentido de Zaslavsky et al. (2002). Estos resultados sugieren que los diferentes programas de formación y actualización

de profesores de matemáticas deben ofrecer oportunidades para examinar el concepto de pendiente, así como reflexionar sobre su definición y construir relaciones entre sus diversas representaciones.

5. Limitaciones y futuras investigaciones

De acuerdo con los resultados de este estudio, las notas de clase han permitido identificar las conceptualizaciones de pendiente que promueven los profesores en el contenido que enseñan. Sin embargo, reconocemos que existen limitaciones desde esta perspectiva para hablar de todo lo que ocurre en el aula, dado que hay actividades que no suelen tener cabida en ellas, como por ejemplo: diálogos orales, la gestualidad desarrollada por los diferentes actores participantes y el tiempo dedicado a cada una de las actividades, etc. Además, tampoco muestran si ha existido una interiorización real de los contenidos trabajados por parte del alumno, puesto que puede existir transcripción sin que exista comprensión o asimilación de lo copiado. Por ello, consideramos que futuras investigaciones deberían centrarse en contrastar el contenido que realmente asimilan los estudiantes con el de sus notas de clase a cerca del concepto de pendiente. Por otro lado, sería interesante explorar el contenido de las notas de clase de aquellos estudiantes cuyos profesores no ejercen control sobre las mismas, a fin de conocer la actividad del estudiante en un dominio privado, y de esta manera conocer más a fondo sus percepciones y focos de interés en torno al aprendizaje del concepto de pendiente.

Bibliografía

- Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: Un reto matemático llamado futuro. En J. Goñi (Ed.), *El Currículum de Matemáticas en los Inicios del Siglo* (pp. 13-21). España: Graó.
- Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: Un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *La Gaceta de la RSME*, 21(2), 367-387.
- Arce, M., Conejo L., y Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1), 149–172.
- Azcarate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Épsilon*, 24, 9-22.
- Badanelli, A., y Mahamud, K. (2007). Posibilidades y limitaciones del cuaderno escolar como material curricular. Un estudio de caso. *Revista de la Asociación de Inspectores de Educación de Madrid: Avances en supervisión educativa*, 5, 79-90.
- Báez, M., Cantú, C., y Gómez, K. (2007). *Un estudio cualitativo sobre las prácticas docentes en las aulas de matemáticas en el nivel medio*. Tesis de licenciatura no publicada. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán. México.
- Bardin, L. (2002). *El Análisis de Contenido*. 3ª Edición. Madrid: Akal.
- Barr, G. (1980). Graphs, gradients and intercepts. *Mathematics in School*, 9(1), 5-6.
- Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. *Mathematics in School*, 10(1), 14-17.
- Birgin, O. (2012). Investigation of eighth-grade students' understanding of the slope of the linear function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26 (42a), 139-162.
- Byerley, C., y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48, 168-193.

- Carlson, M., Oehrtman, M., y Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, 28(2), 113–145.
- Casey, S., y Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, 92(2), 163-177.
- Cho, P. y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, 3(1), 135-150.
- Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 66–86.
- Deníz, O., y Kabaël, T. (2017). Students' mathematization process of the concept of slope within the realistic mathematics education. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H.U. Journal of Education)*, 32(1) 123-142.
- Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., y García-García, J. (2018). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 369-389.
- Dolores, C., García, J., y Gálvez, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educación Matemática*, 29(2). 125-158.
- Dolores, C., Rivera, M. I., y Moore-Russo, D. (in press). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*.
- Dündar, S. (2015). Knowledge of mathematics teacher-candidates about the concept of slope. *Journal of Theory and Practice in Education (Eğitimde Kuram ve Uygulama)*, 11(2), 673-693. Recuperado de <http://dergipark.gov.tr/eku/issue/5465/74218>.
- Espino, S. (2012). *La toma de apuntes, su uso y enfoque de aprendizaje en estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Barcelona.
- Fried, M. N., y Amit, N. (2003) Some reflections on mathematics classroom note-books and their relationship to the public and private nature of student practices. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 91–112.
- Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(76), 39.
- Gvartz, S., y Larrondo, M. (2010). El cuaderno de clase como fuente primaria de investigación. Alcances y límites teóricos y metodológicos para su abordaje. En J. Meda, D. Montino y R. Sani (Eds.), *School Exercise Books: A Complex Source for a History of the Approach to Schooling and Education in the 19th and 20th Centuries* (pp. 11-22). Florencia (Italia): Polistampa.
- Herbert, S. y Pierce, R. (2008). An 'emergent model' for rate of change. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(3), 231–49.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Kim, R. Y. (2012). The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States. *ZDM*, 44(2), 175-187.
- Lingefjärd, T. y Farahani, D. (2017). The elusive slope. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 75(1), 35-54.
- Monereo, C., y Pérez, M. L. (1996). La incidencia de la toma de apuntes sobre el aprendizaje significativo. Un estudio en enseñanza superior. *Infancia y aprendizaje*, 19(73), 65-86.
- Monereo, R. Carretero, M. Castelló, I. Gómez y M. L. Pérez Cabaní (1999). Toma de apuntes en estudiantes universitarios: Descripción de las condiciones de un escenario específico. En J. I. Pozo y C. Monereo (coords.), *El Aprendizaje Estratégico: Enseñar a Aprender desde el Currículo* (pp 219–236). Madrid: Santillana.

- Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21.
- Moschkovich, J. (1990). Students' interpretations of linear equations and their graphs. En R. Speiser, C. A. Maher, y C.N. Walter (Eds.) *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109-116). Snowbird, Utah: North American Chapter.
- Mudaly, V., y Moore-Russo, D. (2011). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education Programme. *Pythagoras*, 32(1), 27–33.
- Nagle, C., Casey, S., y Moore-Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, 117(1-2), 13-26.
- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., y Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1491-1515.
- Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2013). The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, 6(2), 1-18.
- Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2014). Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. *Mathematics Educator*, 23(2), 40-59.
- NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics: United State of America.
- Newton, X. A., y Poon, R. C. (2015). Pre-service stem majors' understanding of slope according to common core mathematics standards: An exploratory study. *Global Journal of Human-Social Science*, 15(7), 27-42.
- Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., y Tierney, C. (2001). Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 85–108.
- Nogueira, S. (2005). Efectos del uso de la pizarra en la toma de apuntes de estudiantes universitarios. *Cultura y Educación*, 17(4), 373–385.
- Özer, E., y Sezer, R. (2014). A comparative analysis of questions in american, singaporean, and turkish mathematics textbooks based on the topics covered in 8th grade in Turkey. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14(1), 411-421.
- Pérez, A. M. (2007). Los apuntes de los alumnos: Estilos, usos y sentidos en la construcción del conocimiento. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 2(14), 29-50.
- Rensaa, R. J. (2014). The impact of lecture notes on an engineering student's understanding of mathematical concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, 34, 33–57.
- Rivera, M. I. y Dolores, C. (2017). Concepciones de la pendiente en el currículum oficial de la educación básica. *Memoria del XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa* (pp. 1-11). Recuperado el 1 de Julio de 2018 de <http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/2566.pdf>
- Rivera, M.I., Salgado, G., y Dolores, C. (in press). Explorando las conceptualizaciones de pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema*.
- Salgado-Horta, D., y Maz-Machado, A. (2013). Toma de apuntes y aprendizaje en estudiantes de educación superior. *Revista Complutense de Educación*, 24(2), 341-358.
- Schoenfeld, A. H., Smith, J. P., y Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. *Advances in Instructional Psychology*, 4, 55-175.
- SEP, DGB y DCA. (2013). *Matemáticas III. Serie programas de Estudios*. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Bachillerato, Dirección de Coordinación Académica. Consultado en: [http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/3er SEMESTRE/Matematicas III biblio2014.pdf](http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/3er_SEMESTRE/Matematicas_III_biblio2014.pdf)

- Stanton, M., y Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270-277.
- Steiner, H. G. (1980). School curricula and the development of science and mathematics. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 11(1), 97-106.
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124-144.
- Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 207-227.
- Stump, S. (2001b). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101(2), 81-89.
- Teng, H. C. (2011). Exploring note-taking strategies of EFL listeners. *Procedia: Social and Behavioral Sciences*, 15, 480-484.
- Teuscher, D., y Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and Steepness: Do students understand the concepts? *Mathematics Teacher*, 3(7), 519-524.
- Teuscher, D., y Reys, R. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics*, 112(6), 359-376.
- Valenzuela, C., y Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 79, 47-69.
- Van Meter, P., Yokoi, L., y Pressley, M. (1994). College students' theory of note-taking derived from their perceptions of note-taking. *Journal of Educational Psychology*, 86(3), 323-338.
- Viñao, A. (2006). Los cuadernos escolares como fuente histórica: Aspectos metodológicos e historiográficos. *Annali di Storia dell'Educazione e Delle Istituzioni Scolastiche*, 13, 17-35.
- Walter, J. G., y Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 203-233.
- Yau, K. W., y Mok, I. A. C. (2016). Insights from students' private work in their notebooks: how do students learn from the teacher's examples?. *Educational Studies in Mathematics*, 93(3), 275-292.
- Zaslavsky, O., Sela, H., y Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 119-140.
- Zou, H. (2014). *U.S. and Chinese Middle School Mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of functions*. Ph.D. Dissertation. Arizona State University.

Autores:

Gerardo Salgado Beltrán, Maestro en Ciencias en el Área de Matemática Educativa, Catedrático e Investigador de la Unidad Académica de Matemáticas perteneciente a la Universidad Autónoma de Guerrero. gerardosalgadobeltran@yahoo.es

Martha Iris Rivera López, Doctora en Ciencias Área Matemática Educativa por la Universidad Autónoma de Guerrero. Profesora de matemáticas del Nivel Medio Superior. irivera@uagro.mx

Crisólogo Dolores Flores, Doctor en Ciencias con Especialidad en Metodología de la Enseñanza de la Matemática por el Instituto Superior Pedagógico "Enrique J. Varona" de La Habana, Cuba. Trabaja en el Doctorado y Maestría del Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. cdolores2@gmail.com