REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 171-185
ISSN: 1815-0640

Ideas para Enseñar

Una propuesta para el trabajo en Geometría en la formación inicial de profesores de matemática

Mario Dalcín, Verónica Molfino.

Resumen

Relatamos el trabajo en clase en torno a dos actividades, una referida a polígonos y otra referida a poliedros. Las mismas se llevaron adelante como parte de las actividades curriculares del curso de Geometría, en dos grupos de primer año del profesorado de matemática. A través de estas dos actividades, buscamos comunicar las virtudes y desafíos que implica el diseño y puesta en práctica de un curso centrado en la actividad matemática de los estudiantes.

Abstract

We relate the class work on two activities, one referring to polygons, and another referred to polyhedra. They were carried out as part of curricular activities of a Geometry course in two groups of first year in math teacher's study. Through these activities we seek to communicate the virtues and challenges of the design and implementation of a course focused on students' mathematical activity

Resumo

Relatamos o trabalho da classe em duas atividades, uma referindo-se a polígonos e outro referindo-se a poliedros. Eles foram realizadas como parte das atividades curriculares do curso de Geometria, em dois grupos de professores de matemática do primeiro ano. Através destas atividades, buscamos comunicar as virtudes e os desafios da concepção e implementação de um curso com foco na atividade matemática dos alunos

Introducción

Después de una larga tradición de una extensa diversidad de planes de estudio para formación docente, en Uruguay, a partir del año 2008, rige un Plan único para profesores de matemática de enseñanza media. Esto fue y es posible debido a una tradición que buscó elaborar planes únicos que afectaran a todo el país (también a nivel medio e inicial); a la extensión territorial relativamente pequeña de nuestro país, donde no hay diferencias culturales tan marcadas que hagan necesario pensar en diversidad de planes; y a un proceso de discusión que involucró a docentes y autoridades en la formulación del mismo y que también implica un compromiso de los involucrados en llevarlo adelante.

Los estudiantes pueden ingresar al profesorado de matemática habiendo cursado cualquier orientación del Bachillerato Diversificado (que abarca los tres últimos años de la enseñanza media), lo que implica que estos estudiantes inicien el profesorado con experiencias personales muy variadas en lo que a la matemática se refiere, ya que las distintas orientaciones del Bachillerato tienen diferentes cargas horarias y distintos programas.

El compromiso de llevar adelante este plan 2008 de formación de profesores de matemática de enseñanza media implica el desafío de diseñar cursos que estén acordes a los conocimientos matemáticos con los que ingresan los estudiantes y que a su vez les permitan desarrollarse, tanto en lo referido a los contenidos como a los procesos cognitivos propios de la matemática, que les sean de utilidad para seguir avanzando en la carrera y para su futura tarea como docentes de enseñanza media. En este último sentido hacemos hincapié en que la forma de trabajo debe ser acorde a la que es deseable que ellos desarrollen en dicha tarea.

¿Cómo concebir la geometría y la actividad geométrica?

Houdement y Kuzniak (1993) plantean tres geometrías:

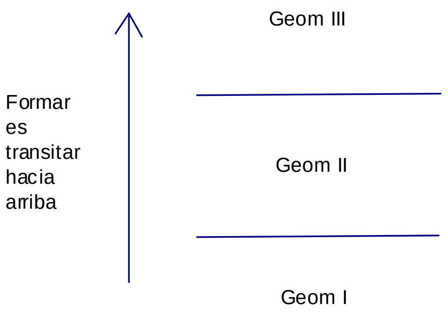
Geometría I. *La geometría natural*. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

Geometría II. *La geometría axiomática natural*. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático preciso. Pero dicho sistema axiomático pretende responder, en la medida de las posibilidades, a lo observable por el humano.

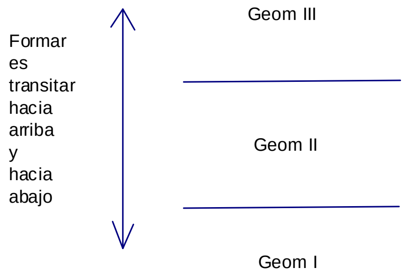
Geometría III. *La geometría axiomática formalista*. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cuál dar cuenta de toda la geometría, desde la que se trabaja en la enseñanza primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático. Estas podrían pensarse en un primer momento como niveles a través de los cuales los estudiantes deberían transitar, concebirlas como una jerarquía, la Geometría II mejor que la Geometría I, la Geometría III mejor que la Geometría II.

Así es como ha sido concebida tradicionalmente la enseñanza de la geometría, un camino unidireccional, siempre ascendente:



Sin embargo, no se trata de dirimir cuál de estas geometrías es mejor, no es eso lo que está planteado: los autores postulan tres geometrías posibles, tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas permiten ver en cuál se está trabajando en cada momento, son tres dimensiones distintas, el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero el camino puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Cada una de estas dimensiones no niega a la otra. Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones.



Por otro lado, Houdement y Kuzniak plantean un vínculo entre su modelo de las Geometrías I, II, III y los niveles de van Hiele, lo cual facilita establecer conexiones entre un modelo medianamente difundido y manejado por los docentes como es el de van Hiele y este nuevo modelo. Quien desee profundizar en este aspecto, puede remitirse a Kuzniak, A. (2006). *Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour I'enseignement et la formation des enseignants en geometrie*. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6 (2), April, pp. 167–187.

Consideramos que dadas las características antes mencionadas de los estudiantes que ingresan al profesorado de matemática, así como de la amplitud del modelo de Houdement y Kuzniak (1993) de las Geometrías I, II, III, este nos puede ser de utilidad para entender el trabajo geométrico de nuestros estudiantes y así poder contribuir a su desarrollo. Las producciones de nuestros estudiantes al iniciar sus estudios de profesorado pueden ser ubicadas dentro de la Geometría I o la Geometría II, dependiendo de la actividad en que estén trabajando.

Una propuesta de curso

Las actividades que relatamos aquí forman parte de un curso organizado en base a fichas de trabajo armadas centralmente en base a tareas que el estudiante debe resolver. Las mismas se encuentran disponibles en la página http://www.depdematematica.org/ipa/sitio/login/index.php.

Algunas de dichas tareas están compuestas por preguntas que plantean distintas situaciones problemáticas. Otras proponen la búsqueda de información en libros de texto de geometría o en Internet, ya sea acerca de contenidos específicos de geometría, como de la época, vida y obra de distintos matemáticos. En otros casos se plantea la construcción de modelos en Geometría Dinámica y también se proponen ejercicios de aplicación de contenidos ya tratados en clase. El diseño de un curso de este tipo es una alternativa a la forma en que tradicionalmente se ha enseñado la geometría, en la que el conocimiento geométrico ya está escrito en los textos y llega al estudiante a través de la exposición del profesor. En esta propuesta de curso las actividades son planteadas para que los estudiantes las trabajen en equipos en clase (equipos que se mantienen para el trabajo domiciliario) y donde la formulación de preguntas y conjeturas es cosa cotidiana. La responsabilidad del docente está en diseñar las actividades y en organizar el desarrollo de la clase, buscando que sean los estudiantes quienes lleven adelante las tareas propuestas y, claro está, organizando las puestas en común, institucionalizando los acuerdos alcanzados, organizando las preguntas que van surgiendo en el transcurso de la clase y que muchas veces implican la propuesta de nuevas actividades para poder responderlas.

A continuación relatamos lo acontecido con dos actividades, una referida al trabajo con polígonos y otra al trabajo con poliedros y que tuvieron una vinculación entre sí en el desarrollo del curso. Las actividades fueron planteadas en dos grupos de primer año del profesorado de matemática –de 20 estudiantes cada uno y de los cuales somos respectivamente profesores–, en el curso de Geometría Euclidiana (curso anual de 8 horas semanales de 45 minutos). Los estudiantes trabajan en grupos de cuatro, cinco o seis integrantes. Las 8 horas semanales están agrupadas en dos módulos de 4 horas cada uno. El relato está hecho en primera persona pero pueden referir a hechos acontecidos en uno u otro grupo.

Una actividad con polígonos regulares

La actividad que se les planteó a los estudiantes fue la siguiente:

"Si usamos un solo tipo de polígono regular por vez y los vértices de los polígonos deben coincidir, ¿qué polígonos regulares pueden ser usados para embaldosar una superficie plana ilimitada?"

La primera pregunta que surgió en algunos grupos fue ¿qué es un polígono regular? Sus respuestas fueron:

1) polígono con lados iguales e inscriptible,

2) polígono con lados iguales y ángulos iguales,

3) polígono con lados iguales,

4) polígono con ángulos iguales.

- Hubo estudiantes que afirmaban que la definición 3 implicaba la definición 4 y también otros que decían que la definición 4 implicaba la definición 3.
- Para fundamentar estas afirmaciones algunos estudiantes sostenían que en el triángulo equilátero esto era así, por lo que en el resto de los polígonos [regulares] también debería ser así.
- Al no haber acuerdo en todo el grupo de que esto debería ser así en todos los polígonos regulares, se siguieron buscando argumentos y surgió -para la proposición en que la definición 4 implicaba la definición 3- el caso del rectángulo como contraejemplo para ver que no era cierta.

- Les costó un poco más resolver acerca de la validez de la proposición en que la definición 3 implicaba la definición 4, pero en algún momento un estudiante sugirió el rombo como caso donde no se cumplía.
- Les propuse 'acomodar' las proposiciones anteriores excluyendo a los cuadriláteros y afirmándoles que en todos los otros polígonos sí se cumplía.
- Les llevó un buen tiempo dibujar un polígono que sirviera de contraejemplo para alguna de las dos proposiciones. Por lo general dibujaban hexágonos regulares. Después de buscar unos cuantos minutos algunos estudiantes llegaron al pentágono equilátero formado por un cuadrado y un triángulo equilátero pegados por un lado. (Figura 1)
- Más trabajo aún llevó encontrar un polígono que tuviera ángulos iguales y que no tuviera lados iguales. Finalmente surgió un hexágono a partir de un hexágono regular al que le trazaron un nuevo lado paralelo a uno de los lados. (Figura 2)

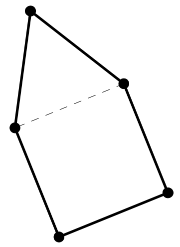


Figura 1

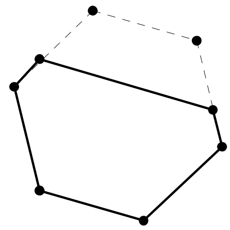


Figura 2

En base a lo anterior, se vio la necesidad de la igualdad de los lados y la igualdad de los ángulos para definir polígono regular. Acordamos que las definiciones 1 y 2 eran correctas, dejando claro que su equivalencia en ese momento del desarrollo del curso no la podíamos justificar más allá de no poder encontrar contraejemplos donde se cumpliera una y no la otra.

Recién ahora empezamos con la pregunta del embaldosado.

- Algunos grupos usaron la estrategia de dibujar a mano distintos embaldosados. Dadas las imperfecciones de sus figuras también admiten el pentágono regular como posible baldosa.
- Otros, después de empezar dibujando, pensaron en la cantidad de ángulos que confluyen en un mismo vértice. Como el ángulo del polígono no puede ser llano, tendrá que haber como mínimo 3 polígonos, entonces: 360/3 = 120 y tenían el exágono, 360/4 = 90, 360/5 = 108, 360/6 = 60 y "ángulo más chico que 60 no había ningún polígono regular que tuviera". Concluían entonces, sin intentar dibujar el embaldosado, que las posibles baldosas eran de 3, 4, 5 y 6 lados.

Inicialmente admiten el pentágono regular como posible baldosa, basándose tanto en argumentos visuales como en argumentos algebraicos (como los mencionados).

- La estrategia de dos equipos fue dividir 360 entre la medida del ángulo interior del polígono y buscar que el resultado sea un número natural. Les sugiero a estos dos equipos hacer una tabla de dos columnas para ordenar sus observaciones.

Tabla 1

Medida del ángulo interior del polígono	*360/medida de la primer columna*
60	*6*
90	*4*
108	*3 y algo*
120	*3*
…	*…*
Se aproxima a 180	*Se aproxima a 2*

Con esta búsqueda podían seguir considerando polígonos de cualquier número de lados. Les propongo ahora agregar las dos columnas de los costados:

Tabla 2

Polígono	*Medida del ángulo interior del polígono*	*360/medida de la primer columna*	*Significado de la 3er columna*
Triángulo equilátero	*60*	*6*	*Cantidad de polígonos regulares en torno a un mismo vértice*
Cuadrado	*90*	*4*	
Pentágono Regular	*108*	*3 y algo*	
Hexágono Regular	*120*	*3*	
	…	*…*	
	Se aproxima a 180	*Se aproxima a 2*	

De esta forma pudieron ver que entre 3 y 2 no hay ningún polígono más, que 3 es el mínimo.

- Un estudiante graficó la medida del ángulo interior del polígono en función de 360/medida de la primer columna (los valores de la tercer columna). Al hacerlo en el pizarrón el grupo entero puede ver una nueva manera de interpretar los datos de las tablas.

- Otros, después, a partir de que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados viene dada por la expresión 180(n-2), hallaron una expresión general para cada ángulo del polígono regular [180(n-2)/n] y concluían que la expresión 360/180(n-2)/n tenía que ser natural para que el problema tuviera solución, agregando que n debía ser mayor o igual a 3. Simplificando la expresión anterior llegan a que 2n/(n-2) tiene que ser natural. Van dando valores a n: 3, 4, 5, 6, 7… Y como se puede seguir indefinidamente se ven obligados a interpretar los números que van obteniendo.

- También hay quien usando la calculadora se equivoca en las cuentas. Ante la pregunta ¿el decágono sirve? hace 1440/10 = 144 y al calcular 360/144 obtienen un número natural.

- Otro grupo, que había intentado hacer un embaldosado con pentágonos, aclaró que no se podía y explicó por qué, mediante el cálculo de la medida de los ángulos interiores de un pentágono.

- Otro grupo llega a que con 7 lados o más no se puede.

- Quedó pendiente para alguna clase futura si con cualquier baldosa triangular se podía embaldosar el plano, lo mismo con baldosas de 4 lados (algunos ya mencionaron rectángulos o trapecios isósceles; veremos si llegan a que cualquier cuadrilátero sirve). El estudiante que había ideado el pentágono equilátero pegando cuadrado y triángulo equilátero dice que su baldosa sirve para recubrir el plano. También surgió la pregunta si combinando polígonos regulares se podía.

Una actividad con poliedros

La actividad es la primera de una serie de actividades que buscan concluir con la construcción, definición y fundamentación de por qué los poliedros regulares son cinco.

"¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean polígonos regulares de un solo tipo?"

En otras palabras:

¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean exclusivamente triángulos equiláteros?

¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean exclusivamente cuadrados?

¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean exclusivamente pentágonos regulares?

¿Es posible construir poliedros convexos cuyas caras sean exclusivamente hexágonos regulares?

"¿Cuántos poliedros distintos puedes construir en cada caso?"

Se llevaron a clase varillas plásticas usadas para el cableado (tienen forma cilíndrica, miden dos metros de longitud y un centímetro de diámetro, se consiguen en cualquier ferretería, son relativamente baratas y fáciles de cortar), algunos cuchillos y piola. Un primer problema a resolver fue el de cortar las varillas de dos metros en varillas iguales para de esa forma poder trabajar todos los equipos de la clase con las mismas varillas y a su vez surgió la idea de sugerir al otro grupo que también usaran esa misma medida. Los estudiantes de cada grupo cotidianamente trabajan en equipos en el curso de Geometría, en esta ocasión no es distinto.

- Los poliedros convexos que construyeron cuyas caras son exclusivamente triángulos equiláteros fueron los siguientes:

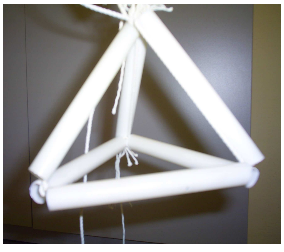


Figura 3

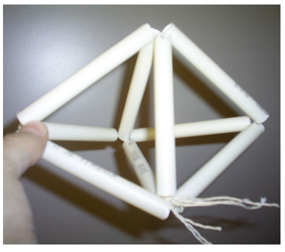


Figura 4

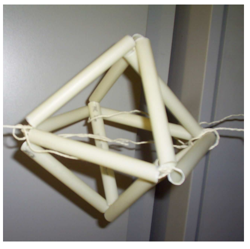


Figura 5

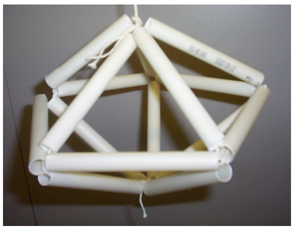


Figura 6

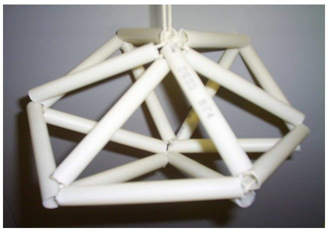


Figura 7

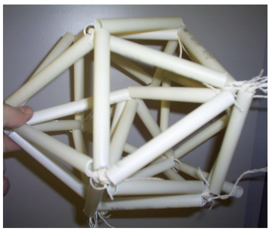


Figura 8

Uno o dos estudiantes han visto previamente el icosaedro y dudan respecto a si su nombre es icosaedro o dodecaedro.

- Con caras que sean cuadrados construyen el siguiente poliedro (que todos recuerdan se llama cubo). (Figura 9)
- Con caras que sean pentágonos regulares construyen el siguiente poliedro (que algunos pocos estudiantes reconocen como dodecaedro). (Figura 10)
- Inspirados por la construcción del dodecaedro, un equipo de estudiantes emprende la construcción de un poliedro con caras hexagonales y construyen el siguiente poliedro (Figura 11)

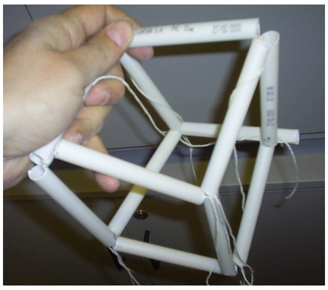


Figura 9

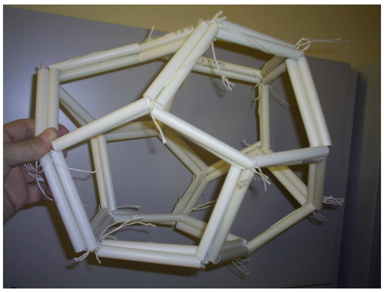


Figura 10

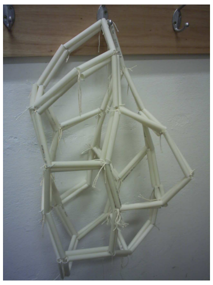


Figura 11

Estos poliedros fueron construidos en la primera clase (4 horas) en que se planteó la actividad.

Haciendo un balance de lo trabajado hasta el momento –y previendo el profesor los problemas a resolver en la clase siguiente- se observa que de entre los poliedros convexos cuyas caras son triángulos equiláteros hay algunos que fueron construidos siguiendo una misma idea ‘de pegar dos pirámides por la base’: así se construyó la bipirámide triangular (Figura 4), bipirámide cuadrada (octaedro regular, Figura 5), bipirámide pentagonal (Figura 6) y bipirámide hexagonal (Figura 7).

Se les pide a los estudiantes que para la clase siguiente construyan desarrollos de dichas pirámides de bases triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares. Se acuerda usar una misma medida de arista (al igual que se usaron con la varillas plásticas) para alivianar el trabajo a hacer por cada uno y además que en la clase siguiente se pudieran armar los poliedros usando partes construidas por distintos estudiantes.

La pregunta que queda pendiente para la próxima clase es si habrá otros poliedros (además de los ya construidos) cuyas caras sean polígonos regulares de un solo tipo.

A la clase siguiente los estudiantes traen los poliedros construidos:

- Planteado a los integrantes del grupo qué opinan del poliedro de la Fig. 12 algunos estudiantes dicen que dicho poliedro no corresponde a lo que planteaba la actividad, ya que todas las caras tenían que ser del mismo tipo.

El profesor deja planteada la pregunta acerca de si habrán otros poliedros cuyas caras sean polígonos regulares de más de un tipo. Anuncia que más adelante se abordará el estudio de estos poliedros.

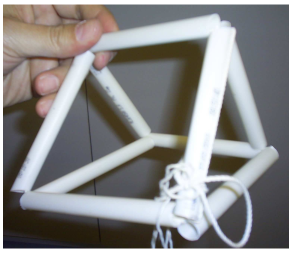


Figura 12

Los poliedros de las Figuras 13 y 14 (mostramos dos imágenes de cada uno para que se pueda apreciar mejor de qué poliedro se trata) no son admitidos por algunos estudiantes como parte de la respuesta a la actividad por no ser convexos.

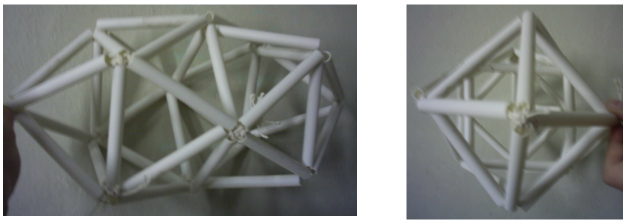


Figura 13

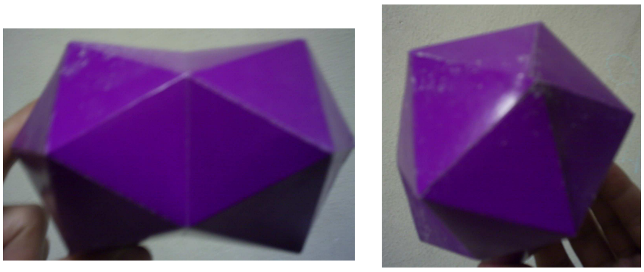


Figura 14

- El profesor plantea la pregunta acerca de si habrá infinitos poliedros no convexos cuyas caras sean triángulos equiláteros.

Algunos estudiantes proponen que a partir del poliedro de la Figura 13 se le puede cortar una de las tapas [pirámide de base cuadrada] y pegándole un poliedro idéntico obtener un poliedro de más caras. Este procedimiento se podría repetir con el nuevo poliedro que se formó.

Otros observan que el mismo procedimiento también se podría usar con el poliedro de la Figura 14.

Se concluye entonces que los poliedros no convexos de caras triángulos equiláteros son infinitos.

- El profesor deja planteada la pregunta: ¿Serán infinitos los poliedros convexos cuyas caras sean triángulos equiláteros?

La intención es que en las clases siguientes sigan intentando construir otros poliedros de este tipo y que frente a las dificultades de hallar nuevos, surja en el grupo la idea de que son un conjunto finito. Se planteará en ese momento buscar construir todos los poliedros convexos de la familia y elaborar una demostración de por qué son un número finito.

- Un tema que había quedado pendiente de la clase anterior era el del 'poliedro' bipirámide hexagonal. Como docentes, y en la modalidad de trabajo que nos planteamos para el curso, la presencia física, material de este 'poliedro' nos genera un (bienvenido) problema. Buscando ser coherente con la propuesta, el profesor no dice que dicho 'poliedro' no existe y después explica por qué no existe. De hacer eso estaríamos apelando a nuestra autoridad, y haciendo que el conocimiento llegue a la clase por medio del profesor, contrariando así la intención de que las idea surjan de los propios estudiantes. En nuestra propuesta de trabajo buscamos que sean ellos quienes elaboren respuestas para las situaciones que se van planteando –como esta, muchas surgen del desarrollo de la clase-, que las discutan con los integrantes de su equipo y que después las expliquen y defiendan frente al grupo.

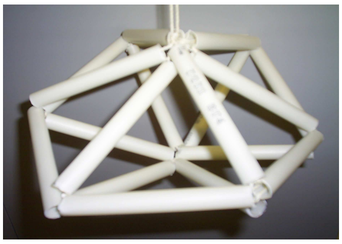


Figura 15

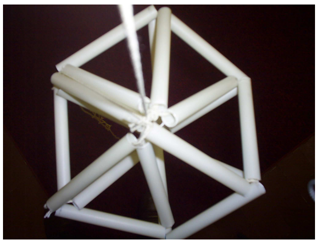


Figura 16

Las características del material concreto con el que trabajan hacen posible que dicho poliedro se pueda construir. El hecho de que 6 triángulos equiláteros confluyeran a un mismo vértice no les generaba ningún conflicto, el peso de la evidencia material era tal que incluso recordando lo que ya habíamos trabajado algunos días antes con los embaldosados del plano con polígonos regulares de un solo tipo (y donde los triángulos equiláteros eran una de las posibles respuestas) admiten las dos posibilidades: que funcione en el plano y que ahora también se pueda usar para construir esta 'bipirámide hexagonal'.

En la clase anterior se les había pedido que construyeran desarrollos de pirámides de bases triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares, hexágonos regulares. Según sus propias palabras, 'pegando dos de estas pirámides por sus bases', se podían obtener los poliedros construidos con las varillas.

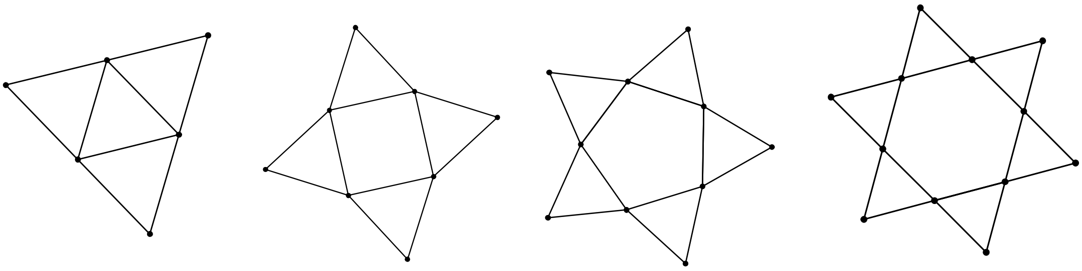


Figura 17

Estos desarrollos que tienen dibujados en papel pero sin recortar (Figura 17), no les sirven para observar ninguna contradicción en la existencia de la 'bipirámide hexagonal'

Quien primero se da cuenta de la imposibilidad de tal 'poliedro' es un estudiante que construyó los desarrollos de las pirámides en cartón. Uniendo las vértices libres de los triángulos equiláteros muestra cómo formar una pirámide de base triangulas, una de base cuadrada, una de base pentagonal y cuando intenta armar la de base hexagonal observa que todos los vértices coinciden en un mismo punto del plano de la base.

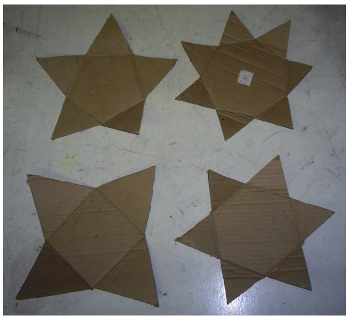


Figura 18

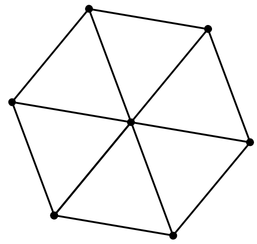


Figura 19

Recién ahora comprenden dónde estaba el problema en el armado de la inexistente 'bipirámide hexagonal'. Recién en este momento algún estudiante reconoce que esto mismo ya se había visto al tratar el embaldosado del plano usando polígonos regulares de un solo tipo.

El trabajar con las varillas permitió el armado de la 'bipirámide hexagonal' (estamos trabajando aquí en la Geometría I que plantean Houdement y Kuzniak); por otro lado el recurrir a argumentos ya acordados previamente (suma de ángulos interiores de un polígono) permitió enfocar el problema desde un punto de vista deductivo (estamos trabajando aquí en la Geometría II).

Provocados por el profesor, quien les cuestionaba 'cómo era posible que afirmaran que dicho poliedro no existía si el estaba mostrando uno', los estudiantes dicen ahora que eso era posible debido a lo flojo que había quedado el hilo mediante el cual se ataron las varillas. Estuvieron presente así en esta discusión los criterios para establecer la validez de una afirmación en geometría. En este caso el argumento deductivo les resultó más potente que el empírico.

- El profesor pregunta si será posible construir pirámides de base heptagonal y cuyas caras sean triángulos equiláteros. Tienen dificultades en imaginarse dicha pirámide: hay quienes creen que sí se podrá y hay quienes creen que no. Estos últimos argumentan que 'si con la base hexagonal los seis triángulos entraron justito, con la base heptagonal los triángulos [equiláteros] se van a superponer'. Deciden construirse un desarrollo de dicha 'pirámide'. Al buscar armarla se les presenta la siguiente situación que les confirma que no se puede construir pero que confronta su intuición de que los triángulos se iban a superponer.

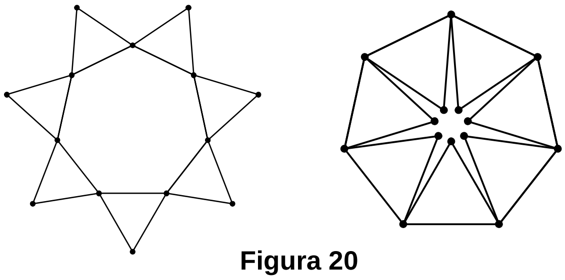


Figura 20

Otro poliedro que habían construido la clase anterior fue el de caras hexágonos regulares. Algunos habían iniciado esta construcción pensando que se trataba de la 'pelota de fútbol' pero entre ellos mismos aclararon que en el caso de la pelota habían hexágonos y pentágonos regulares. El profesor aprovecha para dejar planteada una nueva pregunta a ser contestada en el desarrollo del curso: ¿Cuántos poliedros convexos cuyas caras sean polígonos regulares –ahora combinando polígonos de distinto tipo- se podrán construir?

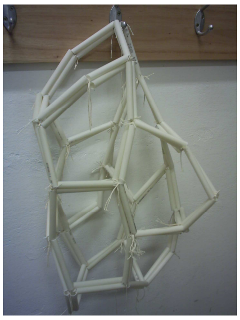


Figura 21

Al buscar sostenerlo para que quedara 'parado', que no se deformara debido a su propio peso, los estudiantes empiezan a desconfiar de que dicho poliedro podría no ser convexo.

Nuevamente el profesor busca recordar los embaldosados planos -donde tres hexágonos era una de las posibilidades- y al igual que con la 'bipirámide hexagonal' los estudiantes admiten las dos posibilidades como viables: la plana y la del poliedro de caras hexagonales. Son consideradas como dos posibilidades no contradictorias.

Llegados a este punto el profesor no sabe cómo salir de la situación.

A una estudiante se le ocurrió construir en papel, y después recortar, tres hexágonos pegados y cortar la arista AC.

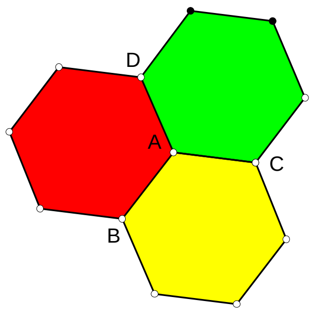


Figura 22

A partir de esta figura plana la estudiante empieza a buscar que no queden los tres hexágonos en un mismo plano. Manteniendo por ejemplo fijo el hexágono rojo levantó un poco el hexágono verde (así no quedaban rojo y verde en un mismo plano) y lo que observó fue que el hexágono amarillo (unido al hexágono rojo a través de AB) empezaba a superponerse al hexágono verde. El argumento que propone la estudiante cabe dentro de la Geometría I. Bienvenido sea ya que permitió ver la situación desde otro ángulo.

- En la clase anterior se había construido el cubo con varillas. Se observa que en cada vértice concurren tres caras cuadradas. El profesor pregunta acerca de si no será posible construir otro poliedro cuyas caras sean cuadrados y en el cual confluyan cuatro cuadrados en cada vértice. Buscando usar una idea análoga a la de la estudiante con los exágonos, les propone a los estudiantes que se dibujen cuatro cuadrados pegados y que después intenten armar lo que sería un vértice del poliedro. Después de que algunos manifiestan ciertas dificultades al intentar armar dicho vértice, un estudiante propone eliminar uno de los cuadrados y medir el ángulo que forman las dos 'aristas' que se levantan:

Figura 23

Midiendo el ángulo MLN, después de levantados los cuadrados azul y verde hacia un mismo semiespacio de los determinados por el cuadrado rojo, pudieron constatar que el ángulo era menor que 90º. Si seguían levantando los cuadrados azul y verde podían constatar a simple vista que dicho ángulo era menor.

También en este caso los argumentos dados son dentro de la Geometría I. Queda como tarea pendiente para los profesores el cómo se podría abordar esta misma situación a partir de la Geometría II.

¿Cómo se continuó?

Como ya se mencionó antes, la actividad con poliedros recién reportada era la primera de una serie de actividades que buscan concluir con la construcción, definición y fundamentación de por qué los poliedros regulares son cinco.

- La construcción de los poliedros regulares con material concreto fue hecha por los estudiantes en la actividad anterior.
- A esto siguió una actividad donde los estudiantes, trabajando en la sala de informática con el programa Poly, tenían que completar una tabla donde para cada familia de poliedros que incluye Poly debían responder si eran convexos, tenían caras que son polígonos regulares, tenían caras uniformes (iguales entre si), tenían aristas uniformes (todas están incluidas en el mismo par de caras) y si tenían vértices uniformes (concurren la misma cantidad de caras y del mismo tipo). Se definieron como poliedros regulares a aquellos poliedros que cumplían todas las propiedades a la vez.
- Respecto a la fundamentación de por qué los poliedros regulares son cinco, se les planteó las siguientes actividades:

<u>Actividad 1</u>

Veamos lo que nos dice Euclides hace 2300 años, en la Proposición 18 del Libro XIII, de sus Elementos.

a) Lee atentamente lo planteado por Euclides y reescribe la demostración del teorema usando tus propias palabras.

> *"Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por figuras equiláteras y equiangulares iguales entre sí. Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares [colocados] en un solo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es*

> *comprendido por menos de cuatro rectos [Libro XI, Proposición 21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el [ángulo] del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad. Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por figuras equiláteras y equiangulares. Q.E.D.”*

b) ¿Qué dice la Proposición 21 del Libro XI de los Elementos que se menciona en la demostración anterior?

Puedes encontrar todos los enunciados de las proposiciones de los Elementos accediendo a: http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

La Proposición 21 de los *Elementos* es verificada midiendo en varios poliedros (Geometría I). ¿Se cumple si el poliedro no es convexo? Analizando los poliedros de las Figs. 13 y 15 se concluye que la proposición no tiene por qué cumplirse si el poliedro no es convexo. Esta proposición establecida en la Geometría I es asumida como punto de partida para abordar la siguiente actividad donde se busca elaborar una demostración de que los poliedros platónicos son solo cinco trabajando en la Geometría II.

Actividad 2

Una demostración alternativa del teorema anterior puede hacerse a partir de la Proposición 21:

a) Si m es la cantidad de polígonos regulares de n lados que concurren en un vértice de un poliedro, se cumple:

$$\frac{m(n-2).180^{o}}{n} < 360^{o}$$

¿Por qué?

b) La inecuación anterior es equivalente a:

$$(m-2)\,(n-2) < 4$$

¿Por qué?

c) ¿Para qué parejas de valores (m,n) *se cumple la desigualdad anterior? Explica.*

d) ¿A qué poliedro te conduce cada pareja de valores (m,n) *obtenidos previamente?*

Es llamativa la dificultad que presenta la parte b) para la gran mayoría de los equipos. Si bien la actividad 2 presenta una guía de la demostración y la misma requiere ciertos conocimientos algebraicos, estos remiten en todo momento a su significado geométrico.

Reflexión final

Las actividades relatadas anteriormente pueden resultar pueriles a un docente acostumbrado al trabajo en clase en forma expositiva y pueden considerarse inapropiadas para un primer año de un profesorado de matemática.

Consideramos que este tipo de actividades, donde la responsabilidad de la actividad matemática tiene su centro en el estudiante, son un camino a transitar si buscamos formar docentes que sean capaces de desarrollar sus propias capacidades argumentativas y de concebir la práctica educativa desde una óptica que otorgue al estudiante de nivel medio un rol activo en su aprendizaje.

Tan importante como el tipo de actividades a proponer consideramos la forma de trabajo en clase: equipos de estudiantes poniéndose de acuerdo en torno a las distintas ideas y argumentos que van surgiendo; cada equipo exponiendo sus ideas al grupo y defendiéndolas de las críticas. Esta forma de trabajo nos parece que contribuirá a formar un estudiante capaz de trabajar en equipo y de promover a su vez esta forma de trabajo cuando sea docente en enseñanza media.

Bibliografía

Castela, C., Consigliere, L., Guzmán; I. Houdement, C., Kuzniak, A. Rauscher, J. (2006). *Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Un étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français. Cahier de Didirem, Spécial* n°6 *:* IREM de Paris 7.

Houdement, C. Kuzniak, A. (1993). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x,* 51, 5-21.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 6 (2), 167-187.

Mario Dalcín es egresado del Instituto de Profesores 'Artigas' (Montevideo-Uruguay) y Magister en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Tiene especial interés en la Geometría y en Historia de la Matemática y en sus procesos de enseñanza. Sobre estos temas ha escrito en Revista do Professor de Matemática, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Forum Geometricorum. Actualmente integra el Departamento de Matemática de Formación Docente teniendo a cargo cursos de Geometría en el Instituto de Profesores 'Artigas'. **mdalcin00@gmail.com.**

Verónica Molfino es egresada del Instituto de Profesores 'Artigas' (Montevideo-Uruguay) y Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Tiene especial interés en la Geometría y los procesos de institucionalización del conocimiento matemático. Sobre estos temas ha escrito en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa y en las revistas Educación Matemática (Santillana) y Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. Actualmente integra el Departamento de Matemática de Formación Docente teniendo a cargo cursos de Geometría y Topología en el Instituto de Profesores 'Artigas'. **veromolfino@gmail.com**