UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 137-150
ISSN: 1815-0640

Dinamización Matemática:
Soy el rectángulo. ¡Nadie me quiere!

Luis Balbuena Castellano

Resumen

Este trabajo recoge bastante fielmente lo que he dictado a un humano. Soy el rectángulo y he querido presentarles a algunos de mis parientes más populares. Y me he decidido a hacerlo porque, aunque hay muchas figuras geométricas en nuestro entorno (hasta el punto de que se ha llegado a decir que la naturaleza está escrita con el lenguaje de la geometría), a nosotros se nos tiene en poca estima y no logro entenderlo ¡porque mira que, además de abundantes, somos guapos! Espero que si llegas a leer hasta el final, termines cambiando tu opinión sobre nosotros, los rectángulos.

Abstract

This piece of work describes accurately what I've dictated to a human being. I am the rectangle and I wanted to introduce you to some of my most popular relatives. I have decided to do it because, although there are many geometric figures around us (it is said that Nature is written with the language of geometry), people don't appreciate us and I don't understand it because we are abundant but also handsome. If you read to the end, I hope you change your opinion about us, the rectangles.

Resumo

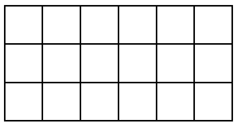
Este trabalho recolhe bastante fielmente o que ditei a um humano. Sou o rectángulo e quis apresentar-lhes a alguns de meus parentes mais populares E decidi-me a fazê-lo porque, ainda que há muitas figuras geométricas em nosso meio (até o ponto de que se chegou a dizer que a natureza está escrita com a linguagem da geometría), a nós se nos tem em pouca estima e não consigo o entender ¡porque olha que, além de abundantes, somos guapos! Espero que se chegas a ler até o final, termines mudando tua opinião sobre nós, os rectángulos.

1. Introducción

Sí, soy el rectángulo, esa figura de cuatro lados que es tan familiar a la gente, y que, sin embargo, casi nadie valora o repara en nuestra presencia, o sea, *¡que pasan de nosotros!*

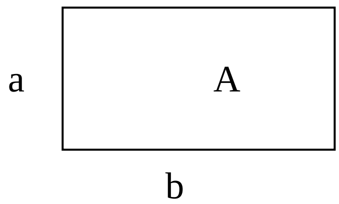
Fíjate (permíteme que te tutee; es que me siento más cómodo así), hasta qué punto estoy en todas partes. Hazme el favor de parar de leer este texto y mira a tu alrededor durante unos segundos. Me verás en muchos sitios sin necesidad de moverte de donde estás: me tienes en la puerta, en las ventanas, en las páginas de los libros, los folios, en la pantalla de tu ordenador, en los marcos de los cuadros que están colgados en la pared, los poster; la planta de la habitación en la que estás, es casi seguro que es uno de los míos y así podríamos seguir y encontraríamos muchos más. ¿Habías reparado en ello? Y, para que veas cómo es verdad que se suele pasar de nosotros, te voy a relatar algo que posiblemente te haya sucedido a ti también. Imagínate que estás delante de la fachada de un edificio que tiene los elementos habituales. Las ventanas son, como casi siempre, rectangulares pero hay una que es circular. Estoy convencido de que esa es la ventana que llamará la atención de todos los que miren la fachada. Dirán algo así como: *¡Mira! hay una ventana circular, ¡qué original!...,* todos se fijarán en ella y que conste que no tengo nada contra esa figura. Total, que como soy muy abundante, aparentemente *¡nadie me quiere!…*

Menos mal que hay algo que sí nos reconocen los humanos. Se trata de la fórmula que se usa para calcular nuestra área. Esa de *área igual a base por altura*. Es de las cosas que se aprenden en la Escuela y no se olvidan. No es de extrañar teniendo en cuenta lo sencilla y gráfica que es su deducción. No tienes más que mirar la figura 1 para comprenderlo y memorizarlo.



Área del rectángulo = 3x6 = 18 cuadraditos.

En general:



área A = bxa

Figura 1

Pues bien, a continuación voy a tratar de probar que somos importantes. Que hay miembros muy notables y queridos en nuestra infinita familia. Algunos son tan destacados que la humanidad les ha dedicado muchas horas a estudiarlos llegando a influir en cuestiones relacionadas con el arte, las finanzas, etc. Por otra parte, estos estudios que giran en torno a nosotros, además, son estupendos temas para ser desarrollados como talleres con grupos de estudiantes. Basta con que el profesorado prepare el material necesario que es muy sencillo. Se aprende mucho con nosotros…

2. De proporción irracional

Sin duda, el más conocido de nuestra familia es ese al que los humanos llaman *rectángulo áureo*. Su nombre le proviene del hecho de que sus lados tienen unas dimensiones tales que la relación entre ellas (es decir, el número que resulta de dividir el largo entre el ancho o al revés) es la llamada *proporción áurea* que algunos llegan a denominar la *divina proporción*, hasta esos extremos llega su veneración.

¿Y por qué a los humanos les gusta tanto esta proporción? Eso se lo preguntas a ellos porque yo nunca lo he sabido. Los artistas renacentistas, por ejemplo, admiraron mucho esta proporción: Leonardo, Boticelli,… Ellos, los renacentistas, fueron los que le pusieron el mote de *divina proporción*. Pero no solo ellos. Te transcribo, por si no la conoces, la poesía que le dedicó el gaditano Rafael Alberti (1902,1999), uno de esos grandes poetas andaluces luminosos y cercanos:

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Sobre esta proporción se ha escrito mucho y si acudes a algún buscador de internet seguro que encontrarás muchos estudios que te permitirán conocerla más a fondo. Me voy a limitar a explicarte cómo conseguir un rectángulo que tenga la proporción áurea y deducir después el valor de esa famosa proporción.

Para ello, fíjate en la figura 2 y haz lo que te indico: dibuja un cuadrado y marca el punto medio de la base. Pincha un compás en ese punto y el vértice A lo llevas sobre la prolongación de la base. Al cerrar el rectángulo tienes dibujado a mi pariente más famoso: el *rectángulo áureo*.

¿Cuánto vale la proporción de los lados de ese rectángulo? Con unos sencillos cálculos la vamos a obtener:

Observa:

Voy a calcular primero cuánto mide el segmento que va desde el punto medio del lado del cuadrado hasta A y que notaré como S. Como ves es una sencilla aplicación del teorema de Pitágoras:

$$S=\sqrt{h^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{h^2+\frac{h^2}{2^2}}=\sqrt{\frac{4h^2+h^2}{4}}=\frac{h\sqrt{5}}{2}$$

Con ese dato, podemos calcular cuánto mide la base del rectángulo:

$$base=\frac{h}{2}+\frac{h\sqrt{5}}{2}=\frac{h(1+\sqrt{5})}{2}$$

No sé si sabes que se suele utilizar la letra griega phi (Φ) para representar a la proporción áurea. Pues bien, tendremos entonces que:

$$\Phi = \frac{base}{altura} = \frac{\frac{h(1+\sqrt{5})}{2}}{h} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989...$$

El carácter de irracional le viene de la presencia de esa raíz cuadrada que, al no ser el 5 un cuadrado perfecto, entonces es un número de infinitas cifras decimales no periódicas. Hay otras formas de llegar a este número pero esta me parece que es muy clara y directa.

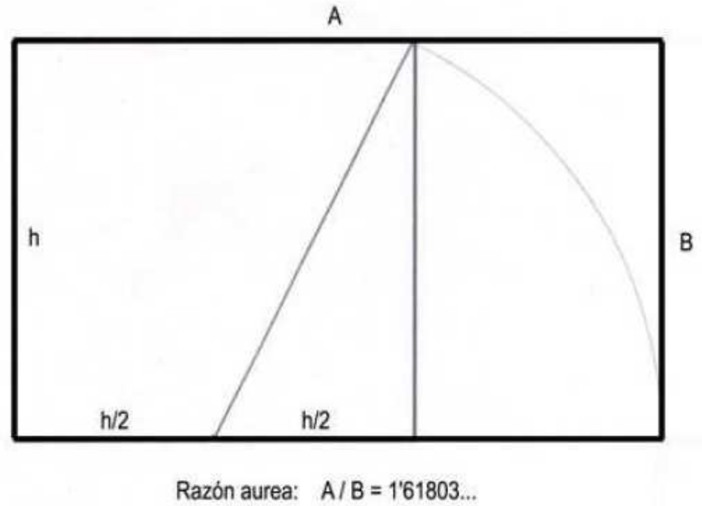


Figura 2

Como te indicaba antes, de la proporción áurea podemos estar un largo rato hablando pero te repito lo de que busques información en internet. Verás la cantidad de páginas que se le dedican y las aplicaciones que tiene, en el arte sobre todo.

Antes de pasar al siguiente rectángulo notable, te indico una curiosidad para que la compruebes contigo, que eres humano. Es esta: para saber si un cuerpo (humano, claro) tiene la proporción áurea, se mide la estatura y la distancia que hay desde el ombligo hasta el suelo (figura 3). Las divides y cuanto más próximo está ese número a 1,61 más áureo es tu cuerpo… Esto hazlo en la intimidad…

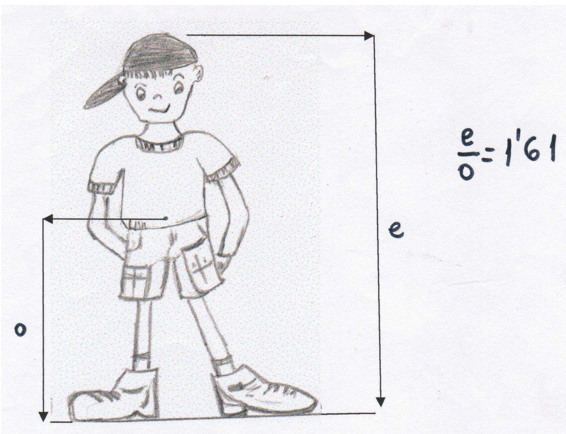


Figura 3

Paso a otro rectángulo que, tal vez, utilizarás a diario y, casi seguro que tampoco le prestarás mucha atención. Me refiero a los folios, esos en cuyos paquetes leerás DIN A4. Se trata de unos rectángulos que tienen también una proporción irracional que te la cuento por si la desconoces. Debo aclararte primero que DIN es un acróstico *DIN = Deutsches Institut fur Normung = Instituto alemán de normalización*. Este Instituto dio una directriz para los folios que data de 1922, con el fin de regularizar el formato de este tipo de papel.

Igual que hice antes con el áureo, te voy a decir cómo conseguir un rectángulo que pertenezca a esta familia para pasar a calcular después la proporción entre sus lados: Observa la figura 4 y haz lo que te indico. Dibuja un cuadrado y traza la diagonal. Yo lo he hecho a mano alzada pero tú puedes usar escuadra y cartabón para que el cuadrado te salga perfecto.

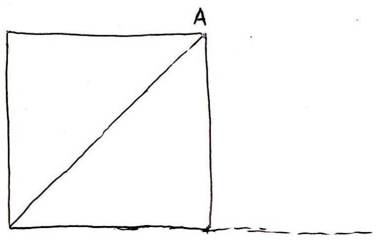


Figura 4

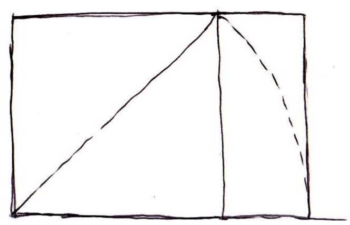


Figura 5

Pincha el compás en el extremo inferior de la diagonal y abate el punto A sobre la prolongación del lado. Al cerrar, como se hace en la figura 5, tienes un rectángulo con la proporción DIN A. Te informo que el DIN A0 es un rectángulo que tiene esa misma forma pero con un área igual a un metro cuadrado.

Voy a calcular ahora la proporción en la que están los lados de este rectángulo. Una forma sencilla de conseguirlo pasa por considerar que el lado del cuadrado de partida mide la unidad. En ese caso, la diagonal dibujada mide:

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Por lo tanto, la proporción en la que están los lados del rectángulo es:

$$\frac{lado\,mayor}{lado\,menor} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = 1{,}4142135...$$

Pero la gran virtualidad de este pariente mío es que cuando lo partes por la mitad doblando el lado mayor (figura 6), los dos rectángulos que quedan son semejantes al anterior.

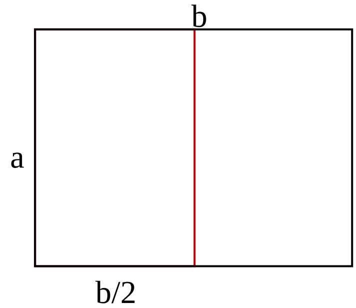


Figura 6

Dicho de otra forma: los DIN A0, DIN A1, DIN A2, DIN A3,… son rectángulos semejantes. Si quieres entretenerte un poco, parte un folio en la forma que te he indicado y hazlo de forma sucesiva con los trozos que vas obteniendo. Si después colocas un trozo de cada tamaño en la forma de la figura 7 verán que ¡la diagonal es la misma!… esa es una prueba gráfica de que son semejantes.

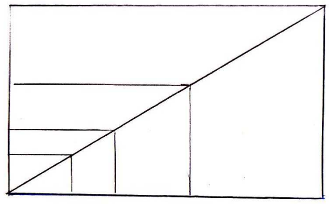


Figura 7

Además, por la forma en la que se van cortando, es evidente que el área del DIN Aj es la mitad del DIN A(j-1). Por tanto, el área del DIN A1 es de 0,5 m^2; la del DIN A2 es 0,25 m^2; la del DIN A3, 0,125 m^2 y la del folio corriente, el DIN A4, es de 0,0625 m^2 o, si lo prefieres, 625 cm^2. He querido llegar hasta el DIN A4 para proponerte ahora un entretenimiento y es que como conoces el área y también la proporción en la que se encuentran los lados, con esos datos puedes responder a la siguiente pregunta: ¿Cuánto miden sus lados?

Pero creo que me estoy desviando de mi cometido de presentarte a más rectángulos notables.

Procedo, por tanto, a darte noticias de otro de mis parientes. Este es el más codiciado porque se trata de dinero. Es el rectángulo que enmarca a todos los billetes de dólares. Supongo que sabes que los billetes de 1, 2, 5, 10, 20, 50, y 100 dólares están en el mismo rectángulo (figura 8). No es como en los billetes de euros que entre el de 5 y el de 500 hay una diferencia notable de tamaño y creo que ni siquiera son semejantes. Bueno, esto lo supongo porque es que nunca he podido tener uno de 500 para poder compararlos…

Figura 8

Sí, ya sé que todos los billetes son rectángulos pero ese del dólar (cuya forma también tienen billetes de otros países), posee una propiedad geométrica muy curiosa.

Te la voy a relatar: toma un billete de dólar (o una fotocopia…) y sigue el proceso que ves en las imágenes que vienen a continuación (figura 9) y que trataré de explicar con palabras a continuación por si hay algo que no está claro.

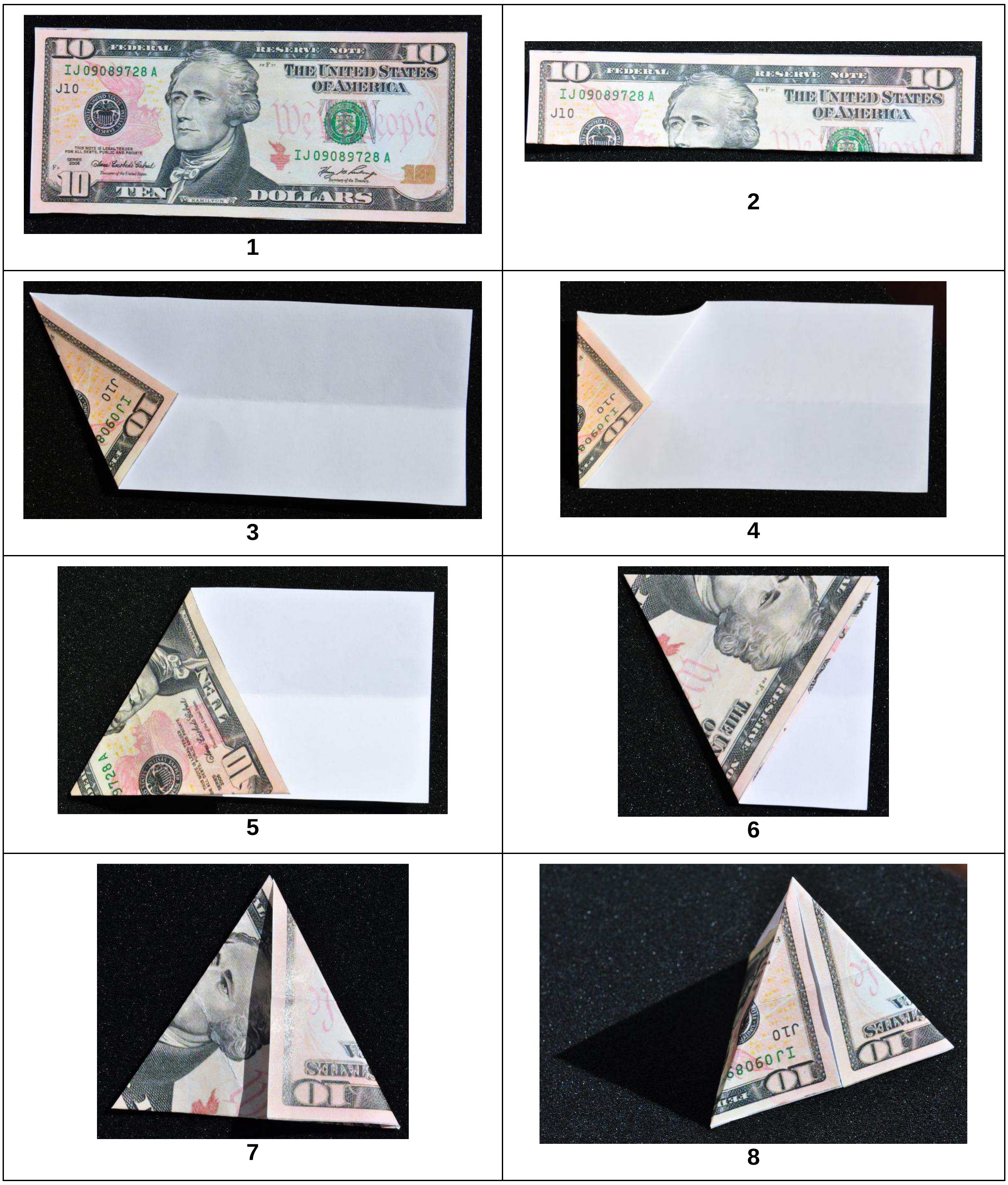


Figura 9

1. Fotocopia de un billete de 10 dólares.
2. Doblar el billete por la mitad.

3. Llevar la esquina a la línea que marca la mitad del billete. Comprobar que el ángulo que se forma en la esquina superior izquierda es de 30º.
4. Se dobla por el cateto menor del triángulo anterior.
5. Al doblar de la forma indicada en la foto anterior, aparece un triángulo equilátero.
6. Se dobla de nuevo a lo largo del lado del triángulo equilátero y aparece también un triángulo equilátero encima del otro. Queda una solapa.
7. Al doblar la solapa debe quedar un triángulo equilátero.
8. Pues bien, si ahora se despliegan los dobleces realizados observamos que ¡se puede formar un tetraedro!

Tras este proceso, queda claro que los billetes de dólar vienen a ser el desarrollo de ese poliedro regular. Observa los cuatro triángulos equiláteros de la figura 10. Se trata de una de las formas de desarrollar el tetraedro. Pasando el triángulo rectángulo de la izquierda a la parte derecha se tiene el rectángulo de la familia del dólar. Interesante, ¿verdad?

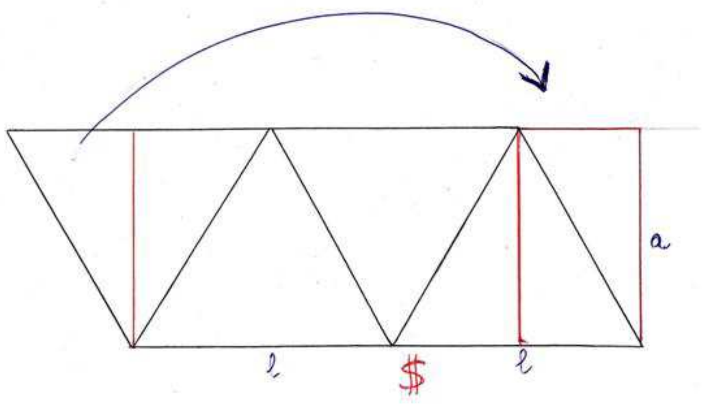


Figura 10

Veamos ahora cuál es el valor de la proporción que mantienen el largo y el ancho de un billete de dólar. Pero antes de hacerlo con la ayuda de la geometría, toma una regla graduada, mide el largo, mide el ancho y divide estas dos cantidades. Déjalo anotado.

Para proceder geométricamente, observa en la figura 10 que el largo del billete es igual a dos veces el lado *l* del triángulo equilátero. Ahora se necesita calcular el valor de la altura *a* del triángulo. Aplicando el teorema de Pitágoras verás que no resulta complicado llegar a este resultado:

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Con este dato podemos ya calcular la proporción de los lados:

$$\frac{lado\,mayor}{lado\,menor} = \frac{2l}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2{,}3094...$$

Revisa el valor que obtuviste empíricamente. Debes tener anotado 2,3…

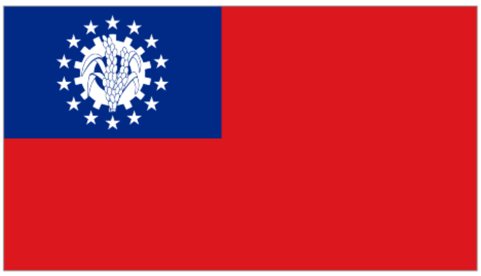
3. De proporción racional

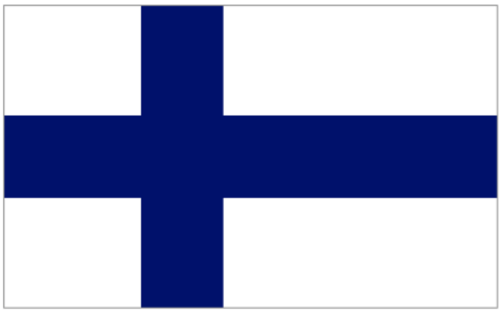
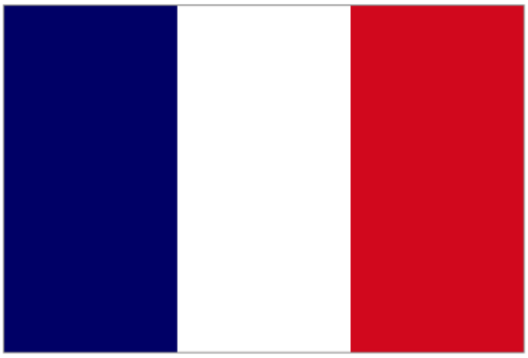
Pero todos esos notables rectángulos que te he nombrado tienen en común que las proporciones de sus lados son números irracionales. Sin embargo existe un interesante conjunto de rectángulos de proporciones racionales que son muy, pero que muy populares y, en general, son unos desconocidos. Más bien se debe a que mucha gente ignora que los rectángulos en los que se enmarcan las banderas del mundo, no tienen todos la misma proporción, es decir, que la relación entre su ancho y su largo, no es igual para todos sino que existen nada menos que 22 modelos diferentes que te voy a mostrar con la imagen de un ejemplar de bandera de cada uno de los modelos. Esa proporción, que llamo *índice de cuadratura (i)*, viene dada, como te digo, por la relación que existe entre el ancho (a) y el largo (b) es decir,

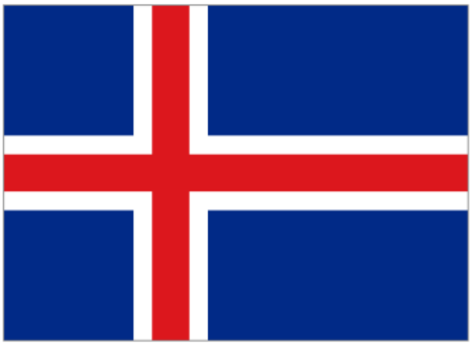
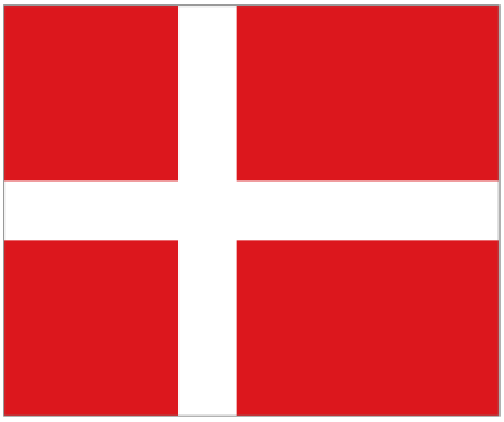
$$i = \frac{a}{b}$$

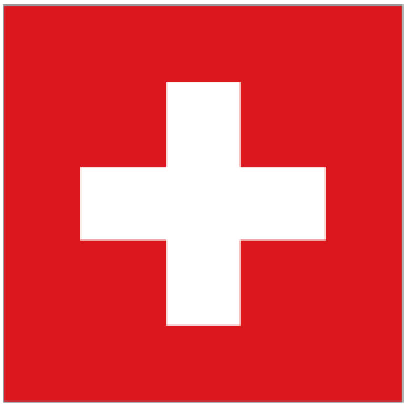
Con esta definición del índice de cuadratura, es evidente que si la bandera es cuadrada, el índice toma el valor 1 porque las dos dimensiones son iguales. Te informo que solo hay dos banderas cuadradas: las de Suiza y Vaticano. Las demás, tienen índices menores que 1 siendo el más pequeño el de la bandera de Qatar que vale 11:28, es decir, que si quisiésemos hacer el rectángulo en el que se enmarca la bandera de esta país, tendría 11 unidades de ancho por 28 de largo. Pero antes de seguir debo decirte que existe una bandera, que es la de Nepal, que no está enmarcada en un rectángulo sino en un pentágono cóncavo. Seguro que si la has visto habrás dicho; *¡Qué original!*... Pero ya estoy acostumbrado a esos desplantes… Sigamos.

Te voy a presentar, por tanto, a todos estos rectángulos famosos y fíjate cómo, poco a poco, las banderas se van cuadrando hasta llegar a las que tienen el índice de cuadratura igual a 1 (figura 11).

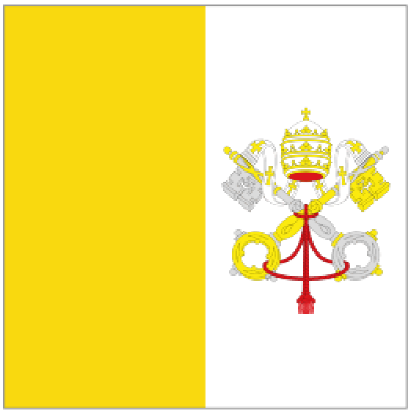
 **Qatar 11:28**	 **Reino Unido 1:2**
 **Estados Unidos de Norteamérica 10:19**	 **Myanmar 5:9**

 **El Salvador 189:335**	 **México 4:7**
 **Alemania 3:5**	 **Finlandia 11:18**
 **Guatemala 5:8**	 **Estonia 7:11**
 **Francia 2:3**	 **Bolivia 15:22**

 **Brasil 7:10**	 **Albania 5:7**
 **Islandia 18:25**	 **Israel 8:11**
 **Papúa Nueva Guinea 3:4**	 **Dinamarca 28:37**
 **Mónaco 4:5**	 **Bélgica 13:15**



Suiza 1:1



Vaticano 1:1

Figura 11

4. A modo de conclusión

Bueno, llego al final de este breve relato y presentación de algunos elementos de mi familia y espero que, a partir de ahora, sepas apreciarnos un poco más… Has comprobado que, entre los rectángulos, los hay importantes y populares.

Conozco una curiosa experiencia que sé que la han realizado en más de una ocasión y que te paso por si la quieres repetir en tu entorno de amistades y parientes…

Se trata de pasarles una hoja como la que te adjunto en la figura 13 en la que hay varios rectángulos entre los que se encuentra uno de proporción áurea. La experiencia consiste en decirle a la persona que de todos ellos, elija aquel que le parezca más bello, más equilibrado, vamos, que le produzca más *tilín*… Según quienes han estudiado el asunto parece que hay una destacada proporción de personas que se decantan por el áureo…

Por cierto que no me resisto a explicarte el llamado *test de Paula* para saber si un rectángulo que estés mirando es o no áureo. Es muy sencillo. Basta con que tengas en tus manos un rectángulo que sepas que es áureo (una tarjeta de crédito, por ejemplo, puede servir…) (figura 12). Te colocas delante del rectángulo que quieres testar. Sitúa la tarjeta áurea entre tu ojo y ese rectángulo tratando de comprobar si encajan. Si lo logras, entonces es áureo.

Figura 12

Se acabó. Gracias por haber tenido la paciencia de llegar hasta aquí…

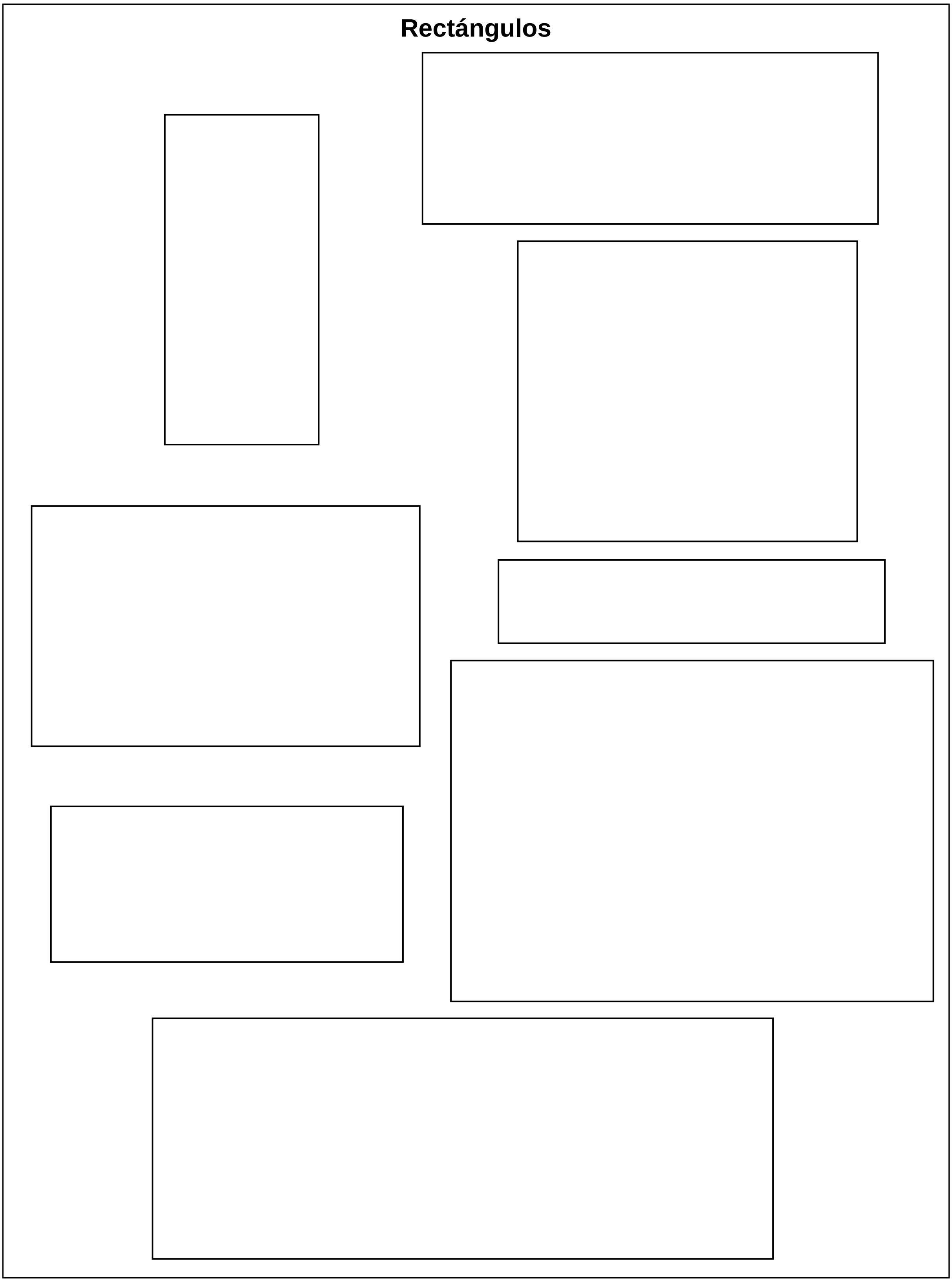


Figura 13

Bibliografía

Balbuena, L. (2000): *Naciones y Banderas*. Proyecto Sur de Ediciones. Granada.
Corbalán, Fernando (2010): *La proporción áurea*. RBA coleccionables S.A.
Erbez, J.; Balbuena, L. (2008): *Colores al viento.* La Laguna
Erbez, J.; Balbuena, L. (2008): Poster de banderas de naciones del mundo, 2ª edición.
Garfunkel, S. (1998): *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley Iberoamericana España, S.A.

Luis Balbuena Castellano, Maestro Nacional y licenciado en Matemáticas. Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria. Asesor de la OEI. Codirector del curso *Ñandutí* de didáctica de las matemáticas para el nivel secundario. Ha sido Secretario General de la Sociedad Isaac Newton, de la Federación Española y de la FISEM. Ha trabajado la popularización de las matemáticas en los medios de comunicación. Ha ganado cuatro premios *Giner de los Ríos* y tres de *Educación e Inventiva*.