REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Junio de 2012, Número 30, páginas 61-80
ISSN 1815-0640

Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico

María Laura Distéfano, María Andrea Aznar, Marcel David Pochulu

Resumen

Esta investigación tuvo por objetivo realizar un análisis de las dificultades y errores que se generan cuando los alumnos usan las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial de los números complejos. Como marco teórico y metodológico se ha utilizado el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Se trabajó con las producciones escritas de 135 estudiantes de Álgebra, de una carrera de Ingeniería, quienes mostraron mayores dificultades cuando debieron hacer uso de una representación geométrica-vectorial.

Abstract

This research was aimed to analyse of the difficulties and errors that occur when students use arithmetical-algebraic and geometric-vectorial representations of complex numbers. As theoretical and methodological framework has been used the Mathematical Cognition Onto-semiotic Approach. It was worked on the written productions of 135 students of Algebra, of an engineering career, who showed more difficulties when they had to use a geometric-vectorial representation.

Resumo

Esta pesquisa teve como objetivo a realização duma análises das dificuldades e erros que se geram quando os alunos usam as representações aritmética- algébrica e geométrica-vetorial dos números complexos. Como marco teórico-metodológico tem sido usado o Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução matemática. Trabalhou-se com as produções escritas de 135 estudantes de Álgebra, numa carreira de Engenharia, que mostrou que tiveram mais dificuldades quando deveram fazer uso duma representação geométrica vetorial.

1. Introducción

Las dificultades que se generan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números complejos han sido abordadas por diversos autores, desde diferentes marcos teóricos. Así, por ejemplo, Pardo y Gómez (2007) llevan a cabo un trabajo de investigación sobre esta temática, enmarcado en el enfoque denominado Modelos Teóricos Locales de Filloy, concluyendo que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades e inconsistencias que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes reproducen, en algunos casos, agravadas.

Posicionándose en un enfoque socioepistemológico de la Matemática, Martínez Sierra y Antonio (2009) indagan sobre las alternativas factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, considerando la hipótesis de que este significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática bajo el cálculo de raíces de ecuaciones de la forma $x^n - 1 = 0$.

Por su parte, Bagni (2001) revisa la Historia de la Matemática y se propone examinar la efectividad de la introducción de los números imaginarios, en alumnos de preparatoria, mediante un ejemplo histórico. Concluye que la propuesta de presentarlos como un reclamo histórico puede resultar útil desde un punto de vista didáctico para estimular el interés y la motivación de los alumnos, pero no es siempre suficiente para garantizar el aprendizaje de los alumnos ni para que se acepten las cantidades imaginarias.

Considerando un enfoque cognitivista, y centrándose en las características de los procesos cognitivos asociados al uso de representaciones, planteado por la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, el trabajo de Aznar, Distéfano, Prieto y Moler (2010) presenta un análisis sobre la conversión entre representaciones efectuadas de números complejos en los registros gráfico y algebraico, en estudiantes universitarios. Concluyen que es necesario abordar sistemáticamente esta tarea de conversión para favorecer la coordinación entre diferentes registros y la conceptualización del objeto matemático en estudio.

Es de destacar que mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico (Radford, 1998). Los obstáculos y conflictos que se generan a partir de su uso y cómo influyen en el aprendizaje constituyen un tema central de análisis que ha sido abordado por numerosos autores desde diversas teorías (Janvier, 1987; Kaput, 1991; Hitt, 2001, 2002; Duval, 2004; Radford, 1998; Font, Godino y D'Amore, 2007) y continúa siendo tema de marcado interés para su estudio, dada la complejidad de los fenómenos que involucran.

En el caso de los números complejos, las representaciones semióticas utilizadas pueden clasificarse en dos grupos: las aritmético-algebraicas y las geométricas. Entre las primeras se encuentran la forma de par ordenado, la forma binómica y la forma polar. Al segundo grupo pertenecen las representaciones puntual y vectorial. Ambos tipos de representaciones son necesarios en las aplicaciones que este campo numérico tiene en diversas áreas de la Física y la Ingeniería.

Dado que las representaciones condicionan las prácticas matemáticas que conforman el significado de los objetos involucrados, es fundamental que el alumno pueda interpretarlas y articularlas (Font, Godino y D'Amore, 2007), para una mejor comprensión del objeto matemático en cuestión. De ahí que el objetivo que se persigue, al enseñar números complejos, sea explorar los significados que los alumnos tienen construidos en relación al uso de sus representaciones.

En este trabajo se pretende realizar un análisis ontosemiótico de las dificultades y errores que se generan cuando los alumnos usan distintas representaciones de los números complejos, en un curso de Álgebra de nivel universitario. Como marco teórico y metodológico de la Didáctica de la Matemática se ha considerado el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores. La elección de este enfoque se fundamenta en el hecho que el EOS considera el punto de vista de la dialéctica que se establece entre lo institucional y lo personal, analizando la distancia entre los *significados declarados* por los alumnos y los *significados pretendidos* por el profesor, en relación a las representaciones semióticas empleadas, lo cual podría ayudar a interpretar y comprender, desde otra perspectiva, lo que acontece en una clase de Matemática.

A su vez, las herramientas del EOS permiten estudiar, de manera conjunta, el pensamiento matemático, los ostensivos[1] que lo materializan, y las situaciones y factores que condicionan su desarrollo, permitiendo hacer una valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción.El interés de realizar un análisis de errores en el aprendizaje ha sido señalado por diversos autores, quienes piensan que son una parte inseparable de este proceso (Radatz, 1980; Borassi, 1987; Rico, 1995; Pochulu, 2004). A su vez, el interés radica en la posibilidad de caracterizar las regularidades con que se presentan los errores y de construir modelos explicativos, pues es una estrategia valiosa para clarificar dificultades en el aprendizaje matemático y permitiría plantear propuestas superadoras.

2. Marco teórico

El EOS considera a la Matemática en su triple aspecto: como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. En este marco teórico de la Didáctica de la Matemática, una *práctica matemática* se define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino, Batanero y Font, 2009).

A partir de este concepto surge la noción de *significado*, definido como *"el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas"* (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). Para el EOS, la cuestión del significado de los objetos matemáticos es de índole ontológica y epistemológica, puesto que se centra tanto en la naturaleza como en el origen de los mismos (Godino, Batanero y Font, 2009). En los casos en que el significado se atribuye a un individuo, se considera un *significado personal*, mientras que, si el significado es compartido por un grupo de individuos en el seno de una institución, se lo considera un *significado institucional*.

En este contexto, el aprendizaje supone la apropiación de los significados institucionales por parte del estudiante, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Godino *et al*, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009). Puesto que no siempre existirá concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se generan diferencias que dan lugar a lo que bajo este enfoque se denomina *conflicto semiótico*. Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

Debido al rol preponderante que juegan los objetos, el EOS considera que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Así, la tipología de objetos primarios, u objetos de primer orden, según Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), está constituida por:

- *Situaciones-problemas:* aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios.

[1] Se entiende por *ostensivos* aquellos objetos que se pueden mostrar a otro directamente.

- *Elementos lingüísticos:* términos, expresiones, notaciones, gráficos, en diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- *Conceptos- definiciones:* introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función)
- *Proposiciones:* enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos:* algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- *Argumentos:* enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos (deductivos o de otro tipo).

Las seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados sino que se vinculan entre sí: las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios determinan las *configuraciones* (figura 1), definidas por Godino, Batanero y Font (2009) como *"las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos"* (p. 8). En los casos en que estas redes se refieren a acciones representativas de la institución y acordes a ella, se denominan *configuraciones epistémicas*. Paralelamente, las *configuraciones cognitivas*, son aquellas que describen los sistemas de práctica personales (Godino, Batanero y Font, 2009). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones (epistémicas y cognitivas) se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, institucional y personal (Godino y Batanero, 1994).

Figura 1. Componentes de una configuración epistémica/cognitiva

Font, Godino y D'Amore (2007) consideran que todas las representaciones ostensivas tienen, por una parte, un valor representacional y, por otra parte, un valor instrumental, donde:

> El aspecto representacional nos lleva a entender la representación de una manera elemental 'algo' por 'algo'. En cambio, el valor instrumental nos lleva a entender la representación de una manera sistémica, como el 'iceberg' de un sistema complejo de prácticas que dicha representación posibilita (p. 13).

De esta manera, este enfoque subraya el rol que tienen las representaciones en las prácticas matemáticas y en la comprensión de un objeto. Esta comprensión, por parte del estudiante, se manifiesta en su competencia en el sistema de prácticas asociadas al mismo y cada subconjunto de ellas está condicionado por el par objeto/representación.

Todos los elementos que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o contenido de funciones semióticas. De este modo, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza relacional de la matemática y amplían el significado de representación.

Plantear el aprendizaje en términos de significados, otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia.

De esta manera, la función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos que causan equivocaciones en los alumnos no resultan de su falta de conocimientos, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (Godino, Batanero y Font, 2009).

Más específicamente, la Teoría de las Funciones Semióticas que plantea el EOS establece que el significado de un objeto matemático lo constituye el par *configuración epistémica / prácticas que posibilita*, siendo la definición del concepto matemático sólo uno de los componentes de la configuración epistémica.

Este posicionamiento del EOS no invalida que un concepto tenga otra definición equivalente, el cual se puede incorporar a otro par *configuración epistémica/prácticas que posibilita* distinto del considerado inicialmente. En consecuencia, cada par constituye diferentes sentidos del concepto, mientras que el significado será el conjunto de todos los pares *configuración epistémica/prácticas que posibilita* que se obtienen.

Godino (2003) considera que los objetos iniciales y finales de una función semiótica podrían estar constituidos por uno o varios elementos primarios de un objeto (los que a su vez constituyen una configuración epistémica), dando lugar diferentes tipos funciones semióticas. Si consideramos el objeto final de una función semiótica, tendremos:

Tabla 1. Tipos de funciones semióticas

Tipo de función semiótica	Contenido
Lingüística	Término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico
Situacional	Situación-problema
Conceptual	Concepto, definición
Proposicional	Propiedad o atributo del objeto
Actuativa	Acción u operación, algoritmo o procedimiento
Argumentativa	Argumentación

3. Metodología

Se llevó a cabo una investigación de naturaleza exploratoria, en el sentido que pretendió recoger y analizar información que pudiera servir para orientar futuras investigaciones, y al mismo tiempo descriptiva, puesto que generó la construcción de categorías a partir de las producciones escritas de los alumnos de la asignatura Álgebra, de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

Los datos se extrajeron a partir de las actividades escritas realizadas por 135 alumnos en dos ejercicios referidos al tema números complejos. Estos ejercicios pertenecían al primer examen parcial que se propuso desde la asignatura Álgebra, con la intención de evaluar los aprendizajes logrados por los estudiantes sobre la temática.. Uno de los ejercicios estaba ligado a la representación aritmético-algebraica (de aquí en más se lo llamará Ejercicio 1) y el otro a la geométrica-vectorial (de aquí en más se lo llamará Ejercicio 2).

En una primera fase del estudio se realizó una configuración epistémica de cada ejercicio, donde se pone de manifiesto el modo en que se articulan los objetos primarios involucrados en la actividad matemática que se propuso (situación problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje). Esta configuración epistémica constituye la solución experta de cada ejercicio, donde aparece su vinculación con las representaciones y significados asignados.

En una segunda fase, y usando el mismo criterio, se realizaron las configuraciones cognitivas, utilizando como base, la configuración epistémica, en tanto permitió elaborar un protocolo en el que se registraron los elementos más representativos consignados por los estudiantes en la resolución de la actividad. Esta configuración cognitiva permite apreciar el modo en que cada alumno articuló los seis objetos primarios que estaban presentes en la actividad, su vinculación con las representaciones y significados, los errores cometidos y los significados asignados.

En una tercera fase, se confrontaron las configuraciones cognitivas con la configuración epistémica, consignando en cada caso, si el uso de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial fue efectuado en forma correcta, parcialmente correcta o incorrecta. A su vez, esta comparación permitió determinar las dificultades que presentan los alumnos y la comprensión alcanzada en torno a los objetos matemáticos involucrados en las actividades.

4. Actividades propuestas y configuraciones epistémicas

En la siguiente sección se muestran los enunciados de los ejercicios, sus configuraciones epistémicas y las principales funciones semióticas involucradas. En el primer ejercicio propuesto se expone una proposición cuyos elementos están representados en lenguaje aritmético-algebraico. Su valor de verdad debe ser determinado por los alumnos a partir de la obtención de la parte imaginaria de la potencia de un número complejo expresado en forma binómica. Su configuración epistémica es la siguiente:

Tabla 2. Configuración epistémica del Ejercicio 1

Objetos primarios	Especificaciones
Situaciones-problema	Enunciado del problema: *Determinar si es verdadera o falsa la siguiente expresión: Si* $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ *i entonces* $\operatorname{Im}(z^{21}) = 1$
Lenguaje	- Simbólico: z, Im(z) - Lógico: si ... entonces ... - Aritmético: $2 - 2\sqrt{3}i$
Conceptos (definiciones)	- Forma binómica, forma polar y parte imaginaria de un número complejo. - Para $z = a + bi$ z ó z = (a,b): * Definición de módulo de un número complejo $\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ * Definición de argumento de un números complejo no nulo: como una de las soluciones φ del sistema $\begin{cases} \operatorname{Cos}(\varphi) = \frac{a}{\lvert z \rvert} \\ \operatorname{Sen}(\varphi) = \frac{b}{\lvert z \rvert} \end{cases}$ - Una proposición de la forma *p entonces q* es falsa cuando siendo o suponiendo al antecedente *p* verdadero, resulta o se demuestra que *q* es falso.
Propiedades	- $\arg(z) = Arg(z) + 2k\pi,\ k \in Z$ - De Moivre: Si $z = \lvert z \rvert \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot sen(\varphi))$ entonces $z^n = \lvert z \rvert^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot sen(n \cdot \varphi))$ - Igualdad de complejos en forma polar (módulos iguales, argumentos congruentes) - Si $z = a + bi$ entonces $a = \lvert z \rvert \cdot \cos(\varphi)$ y $b = \lvert z \rvert \cdot sen(\varphi)$.
Procedimientos	- Cálculo del módulo de z, usando $\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ =4 - Cálculo del argumento de z resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \operatorname{Cos}(\varphi) = \frac{2}{4} \\ \operatorname{Sen}(\varphi) = -\frac{2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ - Selección, del conjunto de infinitas soluciones, del argumento φ que cumple que $0 \le \varphi \le 2\pi$. - Obtención en forma polar de la potencia: $z^{21} = 4^{21}\underline{\lvert\, 21.\tfrac{5}{3}\pi} = 4^{21}\underline{\lvert\, \pi}$ - Obtención de la forma binómica de la potencia o, al menos, de su parte imaginaria $b = \lvert z \rvert \cdot sen(\varphi) \Rightarrow b = 4^{21} \cdot sen(\pi) \Rightarrow b = 4^{21} \cdot 0 \Rightarrow b = 0$
Argumentos	Como el antecedente se supone verdadero (ya que se trabaja con $z = 2 - 2\sqrt{3}i$) y se llega que el valor de verdad del consecuente es falso (porque $\operatorname{Im}(z^{21}) = 0$) el valor de verdad de la implicación es falso.

En la configuración epistémica anterior pueden observarse múltiples expresiones a las que es necesario dotar de significado. Para ello, estableceremos una función semiótica que tendrá por antecedente a un objeto matemático (o la expresión que puede designarlo), y como consecuente al sistema de prácticas matemáticas realizadas por una persona (o compartida en el seno de una institución) ante una cierta clase de situaciones–problemas. No obstante, para simplificar la notación y el análisis, se hará corresponder el antecedente al objeto primario más relevante del conjunto de prácticas (operativas y discursivas) asociado. En ambos, la correspondencia se realizó a un procedimiento que resulta imprescindible conocer, por parte de los estudiantes, para resolver exitosamente el ejercicio propuesto en la evaluación:

Antecedente		**Consecuente**
Módulo de z	$\xrightarrow{F_1}$	Valor numérico resultante del cálculo $\sqrt{a^2+b^2}$
Argumento de z	$\xrightarrow{F_2}$	Una de las soluciones φ del sistema $\begin{cases} \text{Cos}(\varphi) = \dfrac{a}{\lvert z \rvert} \\ \text{Sen}(\varphi) = \dfrac{b}{\lvert z \rvert} \end{cases}$

Figura 2. Algunas funciones semióticas del Ejercicio 1.

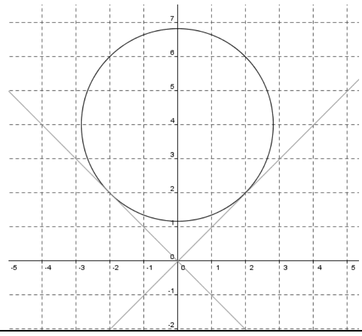
Las funciones F_1 y F_2 aluden, respectivamente, a significados actuativos (en el sentido que su contenido es una acción u operación, y en este caso, corresponde a un algoritmo o procedimiento) del módulo y del argumento de un número complejo, de la forma: $z = a + bi$, asociados a la representación aritmético-algebraica del mismo.

Por consiguiente, puede considerarse que, para la correcta resolución de este ejercicio, se requiere haber construido un significado actuativo aritmético-algebraico ligado a esta forma de representación de los números complejos.

En el Ejercicio 2 de la evaluación que se les administró a los alumnos, se muestran las representaciones gráficas de una circunferencia y de dos rectas tangentes a la misma que pasan por el origen de coordenadas. La circunferencia corresponde a un conjunto B de números complejos expresado por comprensión mediante una condición planteada como ecuación. Se les pregunta a los alumnos acerca de los valores del módulo y del argumento de los elementos del conjunto B.

En la Tabla 3 se distinguen los objetos primarios que conforman la configuración epistémica de este ejercicio.

Tabla 3. Configuración epistémica del Ejercicio 2.

Objetos primarios	Especificaciones
Situaciones-problema	Enunciado del problema: *A la derecha figura la representación de los números complejos del conjunto* $B=\{z\in C, \lvert z-4i\rvert=\sqrt{8}\}$. *a) Todos los números complejos del conjunto B ¿tienen el mismo módulo? ¿Por qué?* *b) ¿Entre qué valores varían los argumentos de los números complejos del conjunto B?* 
Lenguaje	- Coloquial :figura, complejos, conjunto, módulo, valores, argumentos - Simbólico: $B=\{z\in C, \lvert z-4i\rvert=\sqrt{8}\}$ - Gráfico: la representación, en el sistema cartesiano de una circunferencia que no está centrada en el origen y dos rectas tangentes a ella que pasan por el origen.
Conceptos (definiciones)	- Conjunto, pertenencia, módulo, argumento. - En un contexto aritmético-algebraico, para $z=a+bi$: * Definición de módulo de un número complejo: $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$ * Definición de argumento de un número complejo no nulo: como una de las soluciones φ del sistema $\begin{cases}\mathrm{Cos}(\varphi)=\dfrac{a}{\lvert z\rvert}\\ \mathrm{Sen}(\varphi)=\dfrac{b}{\lvert z\rvert}\end{cases}$ - En un contexto geométrico: * Definición de módulo del número complejo: distancia del afijo de z al origen de coordenadas; longitud del vector z. * Definición de argumento de un número complejo no nulo: ángulo con lado inicial en el semieje positivo de las abscisas y lado final en la semirrecta que contiene al vector asociado al número complejo.
Propiedades	- Dado un conjunto definido por comprensión a través de una condición, cualquier elemento que pertenezca al conjunto debe satisfacer dicha condición. - Un número complejo pertenece a una circunferencia si su afijo pertenece a la misma.
Procedimientos	- Identificar, gráfica o analíticamente, varios números complejos pertenecientes al conjunto dado. - Identificar los módulos de los números complejos pertenecientes al conjunto B, ya sea con herramientas del contexto aritmético-algebraico o del contexto geométrico, y comparar sus medidas observando su diferencia. - Identificar los argumentos de los números complejos pertenecientes al conjunto B. - Determinar valores extremos del argumento de los números complejos que pertenecen a la gráfica, ya sea con herramientas del contexto aritmético-algebraico o del contexto geométrico.
Argumentos	- Fundamentar la respuesta negativa mostrando casos particulares de elementos de B que tienen distinto módulo. - Fundamentar, con afirmaciones generales que aluden a que todos los afijos de los números complejos que pertenecen al conjunto B, están a la misma distancia del centro de la circunferencia, pero no del origen de coordenadas. - Todos los números complejos del conjunto B se encuentran en el sector del plano limitado por las dos semirrectas incluidas en las rectas graficadas.

La resolución del inciso a) de este ejercicio puede hacerse utilizando únicamente herramientas del significado aritmético-algebraico, obteniendo elementos particulares del conjunto B y comparando sus módulos. Sin embargo, las mismas resultan insuficientes para la resolución del segundo inciso, que requiere la determinación de elementos de valores extremos de argumento del conjunto B y esto sólo puede realizarse a partir de la interpretación gráfica y geométrico-vectorial del mismo.

Considerando que las herramientas del significado geométrico son las más viables para que los alumnos resuelvan ambos incisos, fueron seleccionadas, algunas funciones semióticas que se presentan a continuación (figura 3) donde se rescata, del conjunto de prácticas matemáticas que posibilita el objeto en cuestión, sólo un elemento primario: concepto.

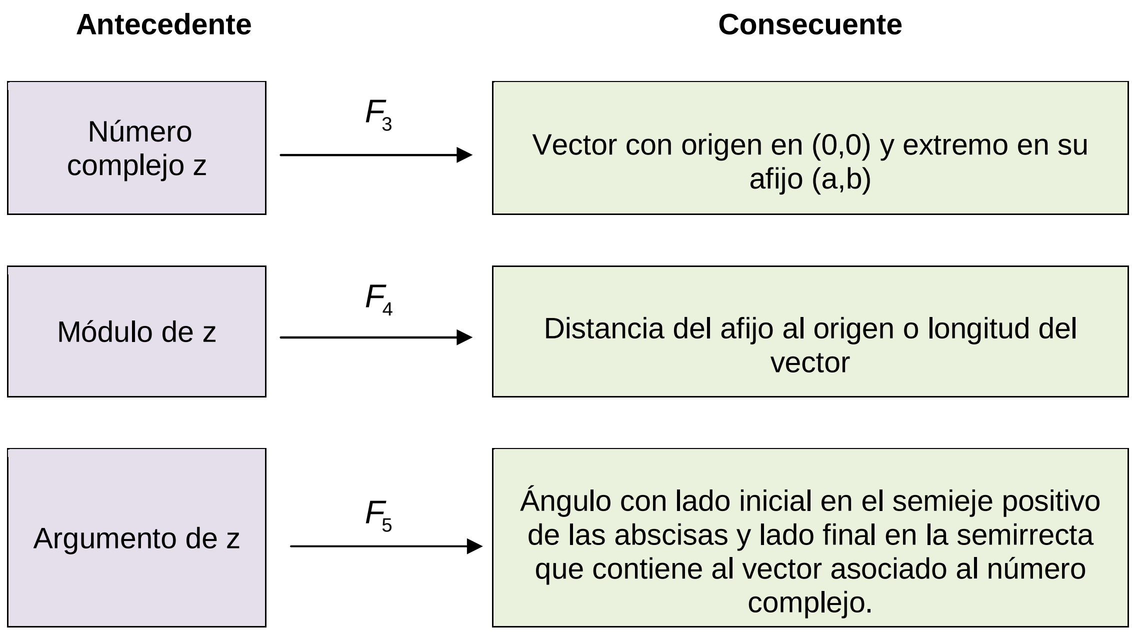


Figura 3. Algunas funciones semióticas del Ejercicio 2.

Las funciones F_3, F_4 y F_5 hacen referencia al significado conceptual (en el sentido que se ha tenido en cuenta sólo un objeto primario del conjunto de prácticas: concepto, estableciéndose una correspondencia semiótica de tipo conceptual) asociado a la representación geométrica-vectorial de un número complejo $z = a + bi$, donde los significados de módulo y argumento se derivan del significado de vector.

Esto condiciona que la función semiótica F_3 pueda establecerse sí y solamente si las funciones F_4 y F_5 son construidas. Puede considerarse que, para la correcta resolución de este ejercicio, es necesario haber construido un significado conceptual geométrico de los números complejos asociado a esta forma de representación, lo cual implica haber establecido estas tres funciones semióticas.

5. Resultados y análisis

A partir de las configuraciones epistémicas y funciones semióticas detalladas para ambos ejercicios, puede inferirse que:

(a) La resolución del Ejercicio 1 requiere usar significados asociados a la representación aritmético-algebraica de los números complejos.

(b) La resolución del Ejercicio 2, presenta como necesario para su resolución, el uso del significado asociado a la representación geométrica-vectorial.

Los resultados observados en las producciones escritas de los alumnos, y de las configuraciones cognitivas construidas en torno al objeto matemático en cuestión, muestran una gran disparidad en el uso de ambas representaciones (aritmético-algebraica y geométrica-vectorial).

Dicha disparidad se manifestó en el hecho de que una gran proporción de estudiantes que habían resuelto correctamente el ejercicio vinculado a la representación aritmético-algebraica, no lograron hacerlo con el ligado a la representación geométrica-vectorial.

De los 135 alumnos que se presentaron al parcial sólo 49 resolvieron correctamente el Ejercicio 1. De estos 49 estudiantes, únicamente 11 resolvieron correctamente el Ejercicio 2 y los 38 restantes lo resolvieron mal, o directamente no pudieron hacerlo. Sólo en 4 casos se presentó la situación inversa; esto es, que resolvieron correctamente el Ejercicio 2 e incorrectamente el Ejercicio 1. Esta última situación no fue abordada en este trabajo por no considerarla significativa, ya que representa apenas el 3% del total de exámenes.

Para poder describir en profundidad las dificultades de los estudiantes en la resolución del Ejercicio 2, se elaboraron las configuraciones cognitivas (fase 2 del estudio) y se compararon con la configuración epistémica (fase 3 del estudio).

A partir de la configuración cognitiva de la resolución de cada alumno, se registró en un protocolo la manifestación del uso de las propiedades, procedimientos y argumentos con el siguiente criterio: 1 (correcto), 0.5 (parcialmente correcto), -1 (incorrecto) y 0 (no manifestado), tal como se describe en la tabla 4. A su vez, analizando la distribución de los valores de los códigos empleados, y el modo en que se articularon los objetos primarios en las configuraciones cognitivas de los alumnos y las funciones semióticas involucradas, surgieron categorías de resolución de los ejercicios cuyas tipologías se distinguen en numeración romana, se detallan en la figura 4, y se describen seguidamente.

Tabla 4. Protocolo de registro de propiedades, procedimientos y argumentos de las configuraciones cognitivas.

ELEMENTOS	ESPECIFICACIONES	CATEGORÍAS						
		I	II	III	IV	V	VI	VII
PROPIEDADES	Dado un conjunto definido por comprensión a través de una condición, cualquier elemento que pertenezca al conjunto debe satisfacer dicha condición.	1	1	1	1	1	1	0
	Un número complejo pertenece a una circunferencia si su afijo pertenece a la misma.	1	1	1	1	1	0	0
PROCEDIMIENTOS	Identificar, gráfica o analíticamente, varios números complejos pertenecientes al conjunto dado.	1	1	1	0.5	1	-1	0
	Identificar los módulos de los números complejos pertenecientes al conjunto B, ya sea con herramientas del contexto aritmético-algebraico o del contexto geométrico.	1	-1	-1	-1	-1	0	0
	Identificar los argumentos de los números complejos pertenecientes al conjunto B.	1	1	-1	-1	0	0	0
	Determinar los valores extremos del argumento de los números complejos que pertenecen a la gráfica, ya sea con herramientas del contexto aritmético-algebraico o del contexto geométrico-vectorial.	1	1	0	0	0	0	0
ARGUMENTOS	Fundamentar la respuesta negativa mostrando casos particulares de elementos de B que tienen el distinto módulo.	0	0	0	0	0	0	0
	Fundamentar con afirmaciones generales que aluden a que todos los afijos de los números complejos que pertenecen al conjunto B están a la misma distancia del afijo del centro de la circunferencia pero no del origen de coordenadas.	1	-1	-1	-1	0	0	0

Si se considera el uso que han hecho los alumnos de las representaciones vectoriales, estas categorías pueden organizarse en un sistema jerárquico. En la figura 4 se exhibe dicho sistema junto con las frecuencias relativas de cada categoría.

Ejercicio 2

- Resuelven correctamente 11/49
  - **I-** Evidencian uso de representación vectorial 11/49
- Resuelven incorrectamente 33/49
  - Evidencian uso de representación vectorial 26/49
    - **II-** Conviven dos representaciones vectoriales 7/49
    - Una representación vectorial con origen en el centro de la circunferencia 19/49
      - **III-** Módulo igual al radio y argumento entre 0 y 2π 11/49
      - **IV-** Módulo igual al radio y argumento asociado a raíces enésimas 5/49
      - **V-** Módulo igual al radio y no analizan argumento 3/49
  - **VI-** No evidencian uso de representación vectorial 7/49
- **VII-** No resuelven 5/49

Figura 4. Categorías de las resoluciones del ejercicio 2.

A continuación se describen las características de las categorías determinadas, exponiendo en los casos que corresponde los errores que las distinguen. Asimismo se detallan las funciones semióticas incorrectas detectadas, para las cuales se usará la notación $\overline{f_i}$, en tanto que la notación F_i se reserva para el caso de funciones semióticas correctamente establecidas.

Categoría I:

Corresponde a las resoluciones correctas de ambos incisos del ejercicio. Si bien utilizaron la definición aritmético-algebraica, lo hicieron para arribar a la ecuación de la circunferencia graficada, a partir de la cual emplearon definiciones y procedimientos derivados de definiciones geométricas. Los argumentos de los alumnos, expresados en frases como: *“Los vectores parten desde el origen y caen en la circunferencia”*, *“Salen del origen y no del centro de la circunferencia”* o *“La longitud del vector variará”*, reflejan el uso de una correcta representación geométrica de los números complejos como vectores.

Categoría II:
Corresponde a las resoluciones en las que el inciso “a” (*Todos los números complejos del conjunto B ¿tienen el mismo módulo? ¿Por qué?)* fue respondido incorrectamente, mientras que el inciso “b” (*¿Entre qué valores varían los argumentos de los números complejos del conjunto B?)* fue respondido correctamente. En el procedimiento de identificación de los elementos del conjunto B, puede observarse el uso de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial de manera similar a la detallada en la Categoría I. El procedimiento de identificación de los valores del módulo es realizado de manera errónea, pues los alumnos utilizaron una representación geométrica-vectorial no adecuada de los números complejos, en la que el origen del vector se encuentra en el centro de la circunferencia dada. Esto condujo a que interpretaran que todos los números complejos del conjunto tienen el mismo módulo, coincidente con el radio de la circunferencia. Aquí pareciera que, partiendo de la proposición “Todos los números complejos que tienen el mismo módulo conforman una circunferencia”, realizaran una abducción interpretando que, si forman parte de una circunferencia, todos poseen idéntico módulo. Esto podría sugerir que, en lugar de establecerse la función semiótica conceptual F_4, estos alumnos establecen una función semiótica conceptual errónea $\overline{f_4}$ (Figura 5), donde se asocia a un objeto (Módulo de z) un concepto equivocado:

Antecedente		Consecuente
Módulo de z	$\xrightarrow{\overline{f_4}}$	Distancia del afijo al centro de la circunferencia a la cual pertenece

Figura 5. Función semiótica conceptual errónea asociada al módulo

Sin embargo, la identificación del argumento y sus valores extremos fue efectuada satisfactoriamente, vinculada a la función semiótica conceptual F_5. Esto es acorde con el uso de una representación vectorial en la que el origen de los vectores es el (0,0).

Esto pone de manifiesto que conviven dos representaciones vectoriales distintas, y marca la existencia de un *conflicto semiótico,* de tipo *cognitivo*[2] ya que los estudiantes hacen uso de dos funciones semióticas contradictorias: por un lado, aplican la función semiótica conceptual F_3 para establecer el argumento pero, para responder el ítem asociado al módulo, en lugar de F_3 estarían estableciendo la

[2] Para el EOS, un conflicto semiótico se denomina *cognitivo* cuando las diferencias de asignaciones de significado se producen entre prácticas que forman parte del significado personal de un mismo sujeto.

siguiente función semiótica conceptual errónea $\overline{f_3}$ (Figura 6), donde al objeto (número complejo z) se lo relaciona con un concepto equivocado:

Antecedente		Consecuente
Número complejo z	$\xrightarrow{\overline{f_3}}$	Vector con origen en el centro de la circunferencia a la que el afijo pertenece y extremo en su afijo (a,b)

Figura 6. Función semiótica conceptual errónea asociada al objeto número complejo

Categoría III:
Corresponde a resoluciones en las que ambos incisos fueron respondidos de manera inadecuada. En las mismas se manifiesta el uso de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica de pertenencia al conjunto B, como en las categorías anteriores, y se evidencia que identifican correctamente los elementos del conjunto. Se detecta el empleo de una única representación vectorial errónea, donde el origen está situado en el centro de la circunferencia dada, por lo que también estos alumnos consideraron que el valor del módulo es constante y coincide con el radio de la misma. En cuanto a los valores del argumento del número complejo z, señalaron que toma infinitos valores, los que varían entre 0 y 2π. En este caso los significados "conceptuales" atribuidos al módulo y al argumento, si bien son erróneos, guardan coherencia entre sí.

Este error manifiesta un *conflicto semiótico* pues el significado que se asigna a dichas definiciones no coincide con el otorgado por las funciones semióticas conceptuales F_4 y F_5, anteriormente definidas. Esto pareciera producirse como consecuencia de una diferente asignación de significado vectorial al número complejo z. En lugar de la función semiótica conceptual F_3 estarían estableciendo la función semiótica conceptual errónea $\overline{f_3}$ anteriormente descripta.

Categoría IV:
También en estas resoluciones se presentaron respuestas erróneas a ambos incisos y el uso de los dos tipos de representaciones. La representación vectorial utilizada es semejante a la descripta en la categoría III en el sentido de que el origen del vector es ubicado en el centro de la circunferencia pero, en este caso los alumnos no realizan satisfactoriamente el procedimiento de identificación de los *infinitos* elementos del conjunto dado debido a que los asocian a las raíces enésimas de algún número complejo.

Aparentemente existe un razonamiento abductivo asociado a la siguiente propiedad: Las raíces enésimas de un número complejo w pertenecen a una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\sqrt[n]{|w|}$ y sus argumentos son de la forma $\frac{\varphi + 2k\pi}{n}$. La abducción los conduce a concluir que todos los números complejos que están representados en una circunferencia corresponden al conjunto de raíces enésimas de un número dado. Pareciera que se establece la siguiente función semiótica conceptual errónea $\overline{f_6}$ (Figura 7), que relaciona un objeto matemático equivocadamente con un concepto:

Antecedente		Consecuente
Números complejos cuyos afijos pertenecen a una circunferencia	$\xrightarrow{\overline{f_6}}$	Raíces enésimas de algún número complejo w.

Figura 7. Función semiótica conceptual errónea asociada a los afijos pertenecientes a una circunferencia.

Categoría V:
Comprende las resoluciones en las que los elementos del conjunto B fueron identificados correctamente, en algunos casos utilizando propiedades aritmético-algebraicas y, en otros, propiedades geométricas. El inciso "a" (correspondiente al módulo de un número complejo) fue respondido inadecuadamente, tal como en las categorías III y IV, y el inciso "b" (referido al argumento de un número complejo) no fue resuelto, con lo cual fue considerado inexistente el procedimiento de identificación del mismo.

Categoría VI:
Estas resoluciones realizadas por los estudiantes se diferencian de las anteriores por el uso exclusivo de la representación aritmético-algebraica para determinar la pertenencia al conjunto B. Los alumnos sólo trabajaron con fórmulas o expresiones algebraicas con las que, el procedimiento de identificación de elementos del conjunto dado, fue realizado en forma errónea y esto les impidió desarrollar los procedimientos posteriores. En algunos casos el error fue causado por la incorrecta interpretación de la expresión simbólica $|z-4i|$ a la que atribuyen el significado de $|z|$. Como en la definición del conjunto B se expresa que $|z-4i|=\sqrt{8}$, interpretan que es z quien tiene un módulo constante. Se establece una función semiótica conceptual errónea $\overline{f_7}$ (Figura 8), al relacionar equivocadamente un objeto con un concepto:

Antecedente		Consecuente
$\|z-4i\|$	$\xrightarrow{\overline{f_7}}$	Módulo de z

Figura 8. Función semiótica conceptual errónea asociada a $|z-4i|$

Categoría VII:
Abarca los casos de no resolución del ejercicio. Fueron considerados inexistentes los usos de las distintas propiedades, procedimientos y argumentaciones detallados.

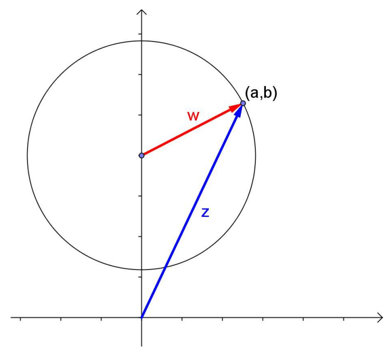
6. Conclusiones

En este trabajo se exploró el uso que realizan los alumnos de las representaciones aritmético-algebraica y geométrica-vectorial, cuando resuelven actividades donde están involucrados los números complejos, y los errores que pudieran estar desencadenando. A través del análisis de las configuraciones cognitivas de los dos ejercicios propuestos en la evaluación parcial, se comprobó que una gran proporción de alumnos sólo pudo hacer un uso correcto de la representación aritmético-algebraica, mientras que el uso de la representación geométrica-vectorial fue deficiente o nulo.

La categorización confeccionada sobre las producciones escritas del Ejercicio 2, con base en el registro de las configuraciones cognitivas, pone de manifiesto una fuerte relación entre el nivel de resolución y el uso de la representación vectorial. La presencia de conflictos semióticos no resueltos permitiría afirmar que, al momento de la evaluación, los alumnos no tenían construido un adecuado *significado geométrico* referido a los números complejos. Esto lleva a conjeturar que el sistema de prácticas desarrollado en las clases no contempló esta complejidad y posiblemente no se diseñaron suficientes actividades pertinentes al caso; lo cual plantea la necesidad de futuras indagaciones.

Asimismo, el trabajo pone en relieve algunos errores que cometen los alumnos cuando operan con números complejos, al instaurarse funciones semióticas donde se establece una dependencia representacional entre dos objetos: o bien uno de los objetos se pone en el lugar del otro, o un objeto es usado por el otro. En ese sentido, los errores más frecuentes que se encontraron son:

Tabla 5. Errores frecuentes al operar con números complejos

<table>
<tr><td colspan="2">a) Dado un conjunto de números complejos cuyo afijo se encuentra sobre una circunferencia, los alumnos interpretan que:</td></tr>
<tr><td>- El número complejo z es un vector (w) con origen en el centro de la circunferencia a la que el afijo pertenece y extremo en su afijo (a,b).</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>- Módulo de z es la distancia del afijo al centro de una circunferencia a la cual pertenece. Esto es: $|z| = |w|$</td></tr>
<tr><td>- Los números complejos cuyos afijos pertenecen a una circunferencia son las raíces de algún número complejo u.</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) Cualquier expresión con módulo, que contenga un número complejo, represente al módulo del mismo. Esto es: $|z - ai| = |z|$ con $a \in R$</td></tr>
</table>

Lo anteriormente expuesto confirma lo que expresan Font, Godino y D'Amore (2007) acerca del condicionamiento de los subsistemas de prácticas de la dupla objeto/representación y su complejidad ontosemiótica. Por otra parte, la dupla objeto/representación se constituye en una herramienta de evaluación de uno de los aspectos de la idoneidad cognitiva[3] de la trayectoria didáctica implementada: la distancia entre los significados pretendidos y los declarados. Esto promueve, como objetivo de futuras investigaciones, el análisis de las prácticas ligadas a la representación geométrica-vectorial de los números complejos.

Finalmente, con el trabajo se promueve un uso diferente de la evaluación, puesto que se la utiliza como instrumento para recolectar evidencias y valorar el aprendizaje, y no solamente para calificar a los estudiantes. La información recabada permitiría diseñar procesos de enseñanza que favorezcan la apropiación por parte de los alumnos de una pluralidad de representaciones, al mismo tiempo que ayuda a la comprensión de los conceptos involucrados.

Bibliografía

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G., y Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa 12(47)*, 13-22.

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 4(1)*, 45-62.

Borassi, R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors*. For the Learning of Mathematics* 7, 2-9.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. En M. J. Alderete y M. L. Porcar (Eds.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas* (pp. 1-20). Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Universidad de Granada. Recuperado el 1 de octubre de 2011 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3)*, 325-355.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma XXVII (2)*, 221-252.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la

[3] La *idoneidad cognitiva* expresa el grado en que los significados institucionales pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados institucionales pretendidos/implementados (Godino, Batanero y Font, 2009).

Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico. (Eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática*. (pp. 165–178). Universidad de Granada.

Hitt, F. (2002). *Representations and Mathematics visualization*. North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.Kaput, J. (1991). Notations and representations as Mediators of Constructive Processes. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Martínez Sierra, G. y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado del número complejo. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias 4*(1), 1-10. Recuperado el 1 de agosto de 2011 de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/Gustavo/2009_Martinez_%20Antonio.pdf.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA 2(1)*, 3-15. Recuperado el 30 de julio de 2011 de: http://www.pna.es/Numeros/pdf/Pardo2007La.pdf

Pochulu, M. D. (2004). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación 35(4)*. Recuperado el 30 de agosto de 2011 de: www.campusoei.org/revista/deloslectores/849Pochulu.pdf.

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics 1(1)*, 16-20.

Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia Pedagogica Experimentalis 35*(1), 277-302. Recuperado el 1 de septiembre de 2011 de: http://healthservices.laurentian.ca/NR/rdonlyres/BD762C3F-3C8D-4D51-A91F-6648A04A626C/0/signs_and_rep.pdf

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. En J. Kilpatrick; P. Gómez y L. Rico Luis (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

María Laura Distéfano. Profesora en Matemática. Magister en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. **mldistefano@fi.mdp.edu.ar**

María Andrea Aznar. Profesora en Matemática. Especialista en investigación educativa. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.

maznar@fi.mdp.edu.ar

Marcel David Pochulu. Profesor de Enseñanza Media de Matemática, Física y Cosmografía. Licenciado en Pedagogía Matemática. Magíster en Docencia Universitaria. Doctor en Didáctica de la Matemática por la UNED. Ha realizado estancias de investigación posdoctoral en la Universidad de Granada y Universidad de Barcelona. Docente e investigador de la Universidad Nacional de Villa María, Córdoba, Argentina. Coordinador del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Villa María. marcelpochulu@hotmail.com