

Suma y resta mediante el uso de una pizarra digital en alumnado con Síndrome de Down¹

Aurelia Noda, Alicia Bruno, Carina González, Lorenzo Moreno, Hilda Sanabria

Resumen

Se presenta una investigación sobre cómo efectúan operaciones de suma y resta un grupo de 9 estudiantes con Síndrome de Down. El estudio, de tipo descriptivo y cualitativo, detalla las estrategias, los procedimientos y los errores basándose en los estudios previos realizados sobre este tópico en personas sin discapacidad. Los datos se toman de la realización de algoritmos en una pizarra digital, la cual permite representar mediante bolas, los números implicados en las operaciones. Los resultados muestran que los estudiantes con Síndrome de Down presentan las mismas estrategias y procedimientos de la población sin discapacidad, aunque ningún alumno se sitúa en un nivel totalmente abstracto. El uso de los dedos o de las representaciones con bolas se muestra como un procedimiento fundamental en estos estudiantes. Los errores son muy variables según los alumnos y destacan los que se deben a un conocimiento incompleto del sistema de numeración decimal.

Abstract

We present research into how a group of 9 students with Down syndrome perform subtractions and additions. This descriptive and qualitative study uses previous research conducted in this area on people without disabilities to detail the strategies, procedures and errors involved. The data were gathered from algorithms performed on a digital board, which allows for the numbers used in the operations to be represented using balls. The results show that students with Down syndrome use the same strategies and procedures as normal students, though none of the subjects operated on a completely abstract level. The use of fingers or concrete representations (balls) appears as a fundamental process among these students. As for errors, these vary widely depending on the students, and can be attributed in their majority to an incomplete knowledge of the decimal number system.

Resumo

Apresenta-se nesse trabalho uma investigação sobre como um grupo de 9 estudantes com Síndrome de Down realizam operações de adição e subtração. A pesquisa, de cunho qualitativo e descritivo, detalha as estratégias, os procedimentos e os erros apresentados, que são comparados aos resultados apresentados em estudos prévios sobre esse tópico, em pessoas sem problemas cognitivos. Os dados foram coletados durante a realização de algoritmos em uma tela digital, a qual permite que os números envolvidos nas operações sejam representados por bolas. Os resultados mostram que os estudantes com SD apresentam as mesmas estratégias e procedimentos da população sem essa síndrome, mas nenhum aluno se encontra em um nível totalmente abstrato. O uso dos dedos ou das representações concretas (bolas) se mostra como um procedimento fundamental para esses estudantes. Aos erros são altamente variáveis entre os alunos investigados, e destacam-se aqueles que são devidos ao conhecimento incompleto do sistema de numeração decimal.

¹ Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: "Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación" del Ministerio de Ciencias e Innovación (Madrid, España).

1. Introducción

En este trabajo presentamos un estudio sobre la realización de los algoritmos de sumar y restar en una población de personas con Síndrome de Down (SD). Estudiamos las estrategias y los procedimientos que emplean cuando efectúan operaciones en una pizarra digital, cuyo diseño permite que los alumnos procedan de la misma forma a cómo lo hacen con papel y lápiz, es decir, no sólo pueden utilizar los símbolos numéricos, sino que la pizarra permite modelizar mediante bolas, los procesos de conteo al efectuar las operaciones.

Las investigaciones sobre aprendizaje matemático en personas con SD se han centrado principalmente en conceptos numéricos, y menos en otras áreas de las matemáticas, como la geometría, la medida o la estadística. Dentro del conocimiento numérico, la mayoría de las investigaciones analizan el concepto de número, la cardinalidad y el conteo (Abdelhameed y Porter, 2006; Caycho, Gun, y Siegal, 1991; Gelman y Cohen, 1988; Nye, Fluck, y Buckley, 2001; Porter, 1999; Sloper, Cunningham, Turner, Knussen, 1990). También encontramos investigaciones que estudian cómo los alumnos con SD efectúan operaciones de suma y resta, las cuales indican que pueden llegar a tener éxito en situaciones aditivas usando estrategias de conteo concretas, por lo que las actividades de conteo de objetos son básicas para desarrollar habilidades más avanzadas con estos alumnos (Barody, 1987, citado en Porter, 2006). Otras investigaciones se han interesado en mostrar porcentajes de éxito al efectuar operaciones como medida de "lo que pueden lograr". Así, Buckley y Sacks (1987) (citado en Monari, 2002) realizaron un estudio con 90 adolescentes con SD y observaron que sólo un 18% podía recitar más de 20 números, un 50% podía hacer alguna suma simple, pocos podían hacer una multiplicación o una división y un 6% fueron capaces de usar dinero de manera independiente. Encontramos menos investigaciones que profundicen en los procesos y métodos que utilizan las personas con SD en los pasos que requieren los algoritmos y cómo se asemejan, o no, a las actuaciones de la población sin discapacidad.

Pensamos que la amplia literatura sobre la ejecución de algoritmos de las operaciones en personas de desarrollo típico, ya consolidada, sirve como base para profundizar en las características de las personas con SD en este tópico.

Las tendencias actuales en la enseñanza de las operaciones básicas proponen reducir el tiempo dedicado a los cálculos con papel y lápiz, en favor de comprender y de utilizar las operaciones en problemas cotidianos, de hacer un mayor uso de calculadoras y ordenadores, y de desarrollar las destrezas para estimar y calcular mentalmente (NCTM, 2000). Este enfoque cobra especial sentido en personas con discapacidad cognitiva, ya que sus dificultades en el aprendizaje general, y de las matemáticas en particular, lleva a optar por una enseñanza básica, que incida en los conceptos y destrezas necesarios para desenvolverse en situaciones diarias. Sin embargo, al mismo tiempo, los niños con SD están cada vez más integrados en escuelas ordinarias, siguiendo un currículo adaptado a cada uno de ellos. Esto ha repercutido en una mayor integración social y en el aumento del aprendizaje de conocimientos en las diferentes áreas.

En nuestro entorno social, cada vez hay más niños con SD que aspiran a obtener el título de educación primaria y secundaria. Para ello, se les exige unos

conocimientos mínimos adaptados a sus capacidades. En el área de matemáticas, el conocimiento de los algoritmos de las operaciones básicas forma parte de ese conocimiento mínimo. Por ello, a pesar de esta aparente contradicción (entre las tendencias de la enseñanza numérica y las exigencias curriculares para obtener el título de educación primaria), nos parece relevante conocer las dificultades que presenta esta población en la ejecución de procedimientos algorítmicos, con el objetivo final de poder proponer metodologías adecuadas que les ayuden a progresar en sus aprendizajes, considerando o teniendo en cuenta sus características cognitivas.

Es fundamental tener en cuenta que las alteraciones cerebrales genéticas asociadas con el SD no son las mismas en todos los individuos. Este factor, además de las influencias familiares, sociales y educativas, son causa de una gran variabilidad entre las personas con SD, incluso mayor que en la población general (Porter, 1999; Pueschel, 2002; Abdelhameed y Porter, 2006; Buckley, 2007). Por ello, es necesario tener en cuenta, que las personas con SD son cognitivamente diferentes, aunque hay unas características generales que pueden aparecer en diferentes grados (Chapman et al, 2000; Arranz, 2002; Troncoso et al 1999).

En general, las personas con SD reciben, procesan y organizan la información con dificultad y lentitud, al mismo tiempo que manifiestan impulsividad para dar respuestas a las tareas, lo que les lleva a responder sin haber realizado una reflexión previa, siendo esto causa de una menor calidad en sus respuestas y una mayor frecuencia de error (Pueschel, 1991; Flórez, 1991). Se muestran inseguros ante los imprevistos e incómodos ante cualquier variación o novedad, por lo que algunas actividades diarias las ejecutan de forma rutinaria, de la misma manera y sin ninguna modificación (Troncoso, del Cerro y Ruiz; 1999). Suelen tener dificultades para aplicar los conocimientos y generalizar a otras situaciones lo que han aprendido (Troncoso, del Cerro y Ruiz; 1999). Presentan un déficit en la memoria a corto plazo y largo, presentando una mejor percepción y retención visual que auditiva, por lo que se debe presentar la información, siempre que sea posible, a través de más de un sentido (Buckley, 1985; Marcell and Weeks, 1988; Bower and Hayes, 1994). Les cuesta retener varias instrucciones dadas en un orden secuencial (memoria secuencial), lo que tiene importancia en la mayoría de las actividades matemáticas y en especial, en la comprensión de los problemas, en los que se deben tener en cuenta varios datos o informaciones (Snart O`Grady y Das, 1982; Molina y Arraiz, 1993; Molina, 2002; Rondal et al., 2000).

Otro elemento que hemos considerado en este trabajo, es la utilización del ordenador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las personas con SD. Diferentes investigaciones realizadas con esta población, han puesto de manifiesto beneficios educativos cuando utilizan el ordenador como una herramienta para el aprendizaje de contenidos curriculares (Valverde, 2005), debido a que el ordenador aporta la información por el canal visual y auditivo, lo que ayuda a captar la información, al mismo tiempo que incrementa la motivación y la atención hacia la tarea (Fuchs y Allinder, 1993; Scruggs y Mastropieri, 1993).

En cuanto a contenidos curriculares de matemáticas, Linares y Martínez (1994) utilizaron en su estudio un programa de ordenador para mejorar la manipulación, elección y reconocimiento de figuras geométricas y colores en una persona con SD.

Su investigación puso de manifiesto diferencias significativas tras la intervención mediante el programa informático y demostró que dicha persona era capaz de realizar transferencias de los conceptos aprendidos fuera del ámbito del ordenador.

También se ha demostrado la eficacia de los programas informáticos para enseñar estrategias de resolución de problemas aritméticos a personas con retraso mental. Mastropieri, Scruggs y Shiah (1997) comprobaron la existencia de diferencias significativas en la resolución de problemas aritméticos, antes y después del tratamiento, además de encontrar en el ordenador una herramienta muy motivadora y divertida para las personas con retraso mental que participaron en el estudio.

Ortega (2003), pone de manifiesto en su investigación, la mejora de un grupo de personas con SD en el conocimiento numérico con el uso de software educativos., especialmente porque el ordenador aporta la información por el canal visual y auditivo lo que ayuda a captar la información, al mismo tiempo que atrae la atención de los estudiantes.

Actualmente existen multitud de programas informáticos que se adaptan a las necesidades de cada individuo y permiten realizar un trabajo remedial en el aprendizaje. Según Dowker (2005) dichos sistemas de instrucción individualizados por ordenador tienen ventajas e inconvenientes. Entre las ventajas de estos programas destaca la adaptabilidad a los modelos individuales de aprendizaje, la falta de presión social al ejecutar las tareas (ya que pueden dedicar a la tarea el tiempo que necesiten) y la alta motivación que sienten los alumnos con su uso. Y como desventajas señala el hecho de que muchos programas incentivan la respuesta correcta, pero no tienen en cuenta el proceso cognitivo al realizar la tarea. Los programas en el pasado tendían a señalar las respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes, sin analizar cómo ocurría el error (Hativa, 1988). Los programas más sofisticados hoy en día permiten diagnosticar e interpretar los errores, aunque como cualquier test, puede no tener en cuenta características individuales, especialmente si son respuestas atípicas de la población general.

El trabajo que presentamos forma parte de una investigación de un equipo multidisciplinar dedicado al aprendizaje de las matemáticas de alumnos con SD, en el que colabora personal relacionado con las áreas de Didáctica de la Matemática y de Ingeniería Informática de la Universidad de La Laguna. Este equipo multidisciplinar está desarrollando un sistema multimedia de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, habilidades sociales y autonomía personal, denominado Divermates (Diversidad y Matemáticas) (Bruno y Noda, 2010; González et al., 2006; 2007), destinado a alumnos con SD. Este sistema multimedia dispone de diferentes herramientas informáticas entre las que se encuentra una pizarra digital, diseñada para trabajar tanto operaciones como problemas aritméticos de sumas y restas de uno o dos dígitos, que presenta tres tipos de formatos diferentes (ver Fig. 1, Pizarra 1, 2 y 3), dispone de un sistema automático que registra las acciones y los resultados finales obtenidos por los alumnos en la realización de las tareas, y detecta los errores cometidos así como las causas potenciales de los mismos. Con la información obtenida se genera un informe personalizado para cada alumno que sirve de orientación al profesor.



Figura 1. Pizarra digital

La pizarra consta de cinco zonas de interacción: *zona de enunciados*; *agente virtual*; *barra de números, bolas y signos*; *hoja de resolución*; y *caja de herramientas* (ver Figura 2).



Figura 2. Zonas de interacción de la pizarra digital

Dado que nuestros sujetos de estudio, presentan dificultades de comprensión de la lectura, la *zona de enunciados* y el *agente virtual*, presentes en la pizarra 3, se han diseñado con el objeto de facilitar dicha comprensión. Por ello, la presentación de los enunciados se hace en forma textual, gráfica y sonora, destacando la pregunta del problema en un color y tamaño diferente, y permitiendo repetir el enunciado las veces necesarias. La *barra de números, bolas y signos*, esta compuesta de números del 0 al 9, los signos y las bolitas para realizar los cálculos. Para el diseño de la caja de herramientas se utilizaron objetos cotidianos para los alumnos: lápiz, goma de borrar e impresora. La zona *hoja de resolución*, simula el cuaderno donde el alumno está acostumbrado a trabajar. Las operaciones se escriben en forma vertical y, si el alumno lo requiere, puede colocar bolas a la derecha de los números y tacharlas con el lápiz, como apoyo para efectuar la operación.

Para proporcionar una interacción adecuada a las necesidades de la población con SD, se ha realizado una adaptación del ratón, de manera que para manipular los números, las bolas, la goma y el lápiz, basta con hacer clic sobre ellos y depositarlos con otro clic en el sitio deseado. Los números pueden ser fácilmente reemplazados por otros números, con el mismo procedimiento, sin necesidad de borrar el número anterior. Para la colocación del símbolo de la operación basta con hacer clic sobre él, ya que la máquina lo coloca en su lugar correspondiente.

En este trabajo analizamos la ejecución de algoritmos utilizando las pizarras 1 y 2 por parte de niños con SD, y dejamos para posteriores trabajos el análisis de la resolución de problemas aditivos, correspondientes a la pizarra 3.

2. Investigaciones sobre la suma y resta

Entre los años 1970 y 1990 encontramos múltiples investigaciones, que provienen principalmente de Estados Unidos e Inglaterra, que analizan los errores en la ejecución de los algoritmos de las operaciones básicas en la población general, y que nos han servido como marco en el que apoyar nuestra investigación.

Partimos de la idea de que los errores suelen ser sistemáticos, y provienen de reglas erróneas que aplican los estudiantes (Ginsburg, 1977; Brown y Van Lehn, 1982). Sin embargo, el estudio de los errores, como indican Fiori and Zuccheri, (2005), lo entendemos como una etapa natural e inevitable en la construcción del conocimiento, que da información para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Las investigaciones realizadas con niños sin discapacidad muestran un abanico de errores muy amplio. A continuación describimos estos errores organizados en diferentes categorías y que hemos utilizado en este trabajo. Somos conscientes de que no exponemos todos los errores, pero es necesario desglosar al menos los que aparecerán a lo largo del trabajo y que se muestran a continuación en la tabla 1.

Tabla 1. Categorización de errores en los algoritmos de suma y resta

1.	Grafomotriz	<ul style="list-style-type: none"> • Confundir números (3 y 5; 6 y 9; 4 y 7)
2.	Algoritmo	<ul style="list-style-type: none"> • Comenzar a operar por la izquierda en operaciones con llevadas
3.	Sistema numeración decimal	<ul style="list-style-type: none"> • Encolumnamiento (incorrecta alineación de los números en columnas) • Cambiar orden unidades (12 por 21) • Sumar o restar unidades de diferente orden (unidades con decenas)
4.	Cero	<ul style="list-style-type: none"> • Cero en vez de sumar o restar ($52+30=80$) • Dar al cero el valor del otro término para sumar o restar ($52+30=84$) • Poner el valor del sustraendo en lugar de restar ($40-13=33$)
5.	Significado operación	<ul style="list-style-type: none"> • Sumar y restar a la vez ($63+21=82$) • Sumar en lugar de restar y viceversa ($63+21=42$).
6.	Llevada	<ul style="list-style-type: none"> • Olvidar la llevada ($43 - 37 = 16$) • Error al reagrupar ($24+18= 51$) • Llevar siempre ($42+23=75$) • Escribir los resultados parciales intermedios completos ($43+18=511$)
7.	Hechos numéricos	<ul style="list-style-type: none"> • Hechos numéricos inventados ($2+3=6$)
8.	Otros	<ul style="list-style-type: none"> • Despistes/invencción

Algunos de estos errores tienen que ver con dificultades sintácticas, como los errores *Grafomotrices* o de *Algoritmo*, mientras que los restantes son errores semánticos, que implican un desconocimiento de conceptos básicos de los números y las operaciones.

Roberts (1968) realizó un estudio sobre el fracaso en aritmética, con una población de 148 niños sin discapacidad de nueve años y encontró numerosos

errores relacionados con el significado de las operaciones, de manera que aplicaban una operación distinta a la que se pedía o bien mezclaban las operaciones. Cox (1975) (citado en Dickson y Brown, 1984) estudió los errores en operaciones básicas cometidos por dos grupos de estudiantes de 8 a 14 años, una muestra tomada de escuelas ordinaria y otras de escuelas especiales (alumnos con discapacidad mental educable). Cox encontró que, de los 51 tipos de errores sistemáticos, 23 de ellos tenían que ver con la llevada. Descubrió que el error más frecuente en ambos grupos se producía en las restas con llevadas, y consistía en que los alumnos restaban el número mayor del menor, con independencia de si estaban en el minuendo o en el sustraendo, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 27 \\ \hline 22 \end{array}$$

Este error se produjo con muy elevada frecuencia en ambos grupos de alumnos. También en la suma, los principales errores tenían que ver con la llevada, por ejemplo, escribir los resultados parciales intermedios completos:

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 7 \\ \hline 213 \end{array}$$

Indica Cox que los errores sistemáticos de los alumnos se deben a una deficiente comprensión del proceso algorítmico. Es importante analizar no sólo el error, sino las estrategias y los procedimientos que siguen los alumnos en la ejecución de los algoritmos, ya que pueden explicar algunos de los errores cometidos y de esta manera facilitar la fase remedial que debe acompañar a todo estudio de errores y dificultades.

Para analizar las estrategias y los procedimientos seguidos por los estudiantes, hemos utilizado los trabajos de Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson (1999) y de Carpenter & Moser (1982) en los que se describen las estrategias de alumnos al resolver los problemas aditivos de enunciado verbal, las cuales se detallan en la tabla 2.

Tabla 2. Estrategias de suma y resta

Estrategias de Modelización (Utilización de objetos físicos)	
Suma	
<i>Contar todo.</i>	Se construyen dos conjuntos de objetos, se juntan y se cuentan todos los objetos.
Resta	
<i>Quitar.</i>	Se forma el conjunto mayor de objetos, después se separa de ellos, de una sola vez, un conjunto de objetos igual al sustraendo y se cuenta la cantidad de objetos que queda.
<i>Añadir.</i>	Se forma el conjunto de objetos correspondiente al sustraendo y se añade tantos objetos hasta tener el número que indica el minuendo. El número de objetos añadidos, es el resultado de la resta.
<i>Correspondencia uno a uno.</i>	Se forman los dos conjuntos de objetos y se emparejan. La solución es el número de objetos sin emparejar.
<i>Quitar hasta.</i>	Se forma el conjunto de objetos correspondiente al minuendo y se quitan objetos hasta que quede el número de objetos que indique el sustraendo. El resultado es el número de objetos que se han quitado.

Estrategias de conteo (Utilización de secuencias de conteo)	
Suma	<i>Contar a partir del primero.</i> Se empieza a contar a partir del primer sumando dado. En $3+6$, empieza por 3 y cuenta 4, 5, 6, 7, 8 y 9. <i>Contar a partir del mayor.</i> Se empieza a contar a partir del sumando mayor. En $3+6$, dice 6 y cuenta 7, 8 y 9.
Resta	<i>Contar hasta.</i> Se cuenta hacia delante a partir del sustraendo, hasta llegar al minuendo. El resultado es el número de palabras recitadas. En $7-3$ dice 4, 5, 6 y 7, el resultado es 4. <i>Contar hacia atrás.</i> Se cuenta a partir del minuendo tantos números como tiene el sustraendo. El resultado es el último número recitado. En $7-3$ dice 6, 5 y 4. <i>Contar hacia atrás hasta.</i> Se cuenta a partir del minuendo hacia atrás, hasta llegar al sustraendo. El resultado es el número de palabras recitadas. En $7-3$ dice 6, 5, 4 y 3. El resultado es 4.
Estrategias de hechos numéricos	
Suma y resta	<i>Hecho memorizado:</i> Se memorizan las sumas o restas de los números de un dígito. <i>Hecho deducido.</i> A partir de un hecho conocido, se deduce otro por alguna propiedad (Si $3+4=7$ entonces $3+5=8$; Si $7-5=2$, entonces $7-4=3$)

Nótese que las estrategias de *Añadir* y *Contar hasta* son semejantes, la primera se realiza con objetos y la segunda sólo con el uso de la secuencia numérica. Lo mismo podemos decir con las estrategias de *Quitar* y *Contar hacia atrás*. Indican los autores de estos trabajos que las estrategias de conteo pueden ir acompañadas de recuento con los dedos, que se usan para llevar la cuenta del número de palabras recitadas en la secuencia numérica, más que para representar los números físicamente.

Las estrategias de conteo son más abstractas que las de modelización con objetos físicos, ya que los niños demuestran que no necesitan construir y contar físicamente los conjuntos. Según Carpenter et al. (1999), al principio los niños utilizan estrategias de modelización que son sustituidas por estrategias de conteo y finalmente, acaban utilizando los hechos numéricos. El paso de una estrategia a otra no se produce de forma instantánea, y durante un tiempo pueden convivir estrategias de modelización y conteo, junto al uso de hechos numéricos recuperados de la memoria.

Aunque en los trabajos citados, las estrategias corresponden a la resolución de problemas de suma y resta, y no de algoritmos aislados, esta clasificación nos resulta válida para estudiar la ejecución de algoritmos, ya que como veremos, las estrategias utilizadas por los estudiantes de nuestro estudio se identifican con las anteriores.

3. Objetivos y Metodología

3.1. Objetivos

En este trabajo indagamos en la ejecución de los algoritmos de suma y resta por parte de un grupo de alumnos con SD (entre 9 y 29 años), utilizando la pizarra digital descrita anteriormente, con los siguientes objetivos de investigación:

1. *Analizar las estrategias y los procedimientos al efectuar operaciones de suma y resta.*
2. *Describir los errores que cometen los alumnos en la ejecución de algoritmos de*

suma y resta.

3. *Evaluar el uso de la pizarra digital por parte de los estudiantes. En concreto, evaluar la aceptación de la herramienta, el uso de las bolas, las dificultades de representación de los números y de las bolas.*

3.2. Metodología

Para realizar el estudio trabajamos con 9 estudiantes con SD, pertenecientes a la *Asociación Tinerfeña de Trisómicos 21 (ATT21, en Tenerife, España)*. De los 9 estudiantes, 6 están integrados en escuelas ordinarias (en primaria, secundaria o formación profesional) y reciben en la ATT21 clases de apoyo escolar en las diferentes disciplinas y 3 de ellos, que denominados de *Alfabetización*, son alumnos que por su edad ya no acuden a las aulas ordinarias, sino que están en centros especiales de inserción laboral y asisten a la ATT21 para proseguir con su formación académica. El criterio de selección de los alumnos lo determinó su nivel de conocimiento de las operaciones de suma y resta. Así, se seleccionaron los 9 alumnos de manera que hubiera tres de cada uno de los niveles de conocimiento de las operaciones de suma y resta que se describen a continuación:

- *Alumnos de nivel 1 (N1):* Conocen los números hasta el 30 y están en fase de aprendizaje de sumas y restas con números de un dígito.
- *Alumnos de nivel 2 (N2):* Conocen los números de dos dígitos, y están en fase de aprendizaje de sumas y restas con números de dos dígitos, sin llevadas.
- *Alumnos de nivel 3 (N3):* Conocen los números hasta mil, y están en fase de aprendizaje de sumas y restas con números de dos dígitos, con llevadas.

En la tabla 3 se resumen los datos de los 9 alumnos participantes, teniendo en cuenta los niveles descritos anteriormente: a) la edad; b) el nivel curricular que siguen en matemáticas (Infantil, I; Primaria, P); c) si están integrados en escuelas ordinarias de Primaria (P), de Secundaria (S) o de formación profesional (FP) o bien, si son alumnos de Alfabetización, es decir, si trabajan en centros de inserción laboral (A).

Tabla 3. Alumnos: edad, nivel de integración, currículo seguido en matemáticas

Alumnos	Nivel 1			Nivel 2			Nivel 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Edad	18	11	22	11	29	15	20	19	21
Currículo de matemáticas	I	I	I	P	I/P	P	P	P	P
Integración	A	P	A	P	A	S	FP	S	FP

I: Infantil; P: Primaria; A: Alfabetización; FP Formación Profesional

Se plantearon a los alumnos operaciones de suma y resta adecuadas a su nivel, aunque el número de operaciones planteadas varió de un nivel a otro, ya que se quería cubrir la mayor tipología de operaciones (con y sin ceros, con y sin llevadas...). El número de operaciones planteadas en cada nivel fueron las siguientes:

- *Nivel 1*, siete sumas y seis restas de un dígito.
- *Nivel 2*, nueve sumas y ocho restas de dos dígitos, sin llevadas.
- *Nivel 3*, ocho sumas y ocho restas de dos dígitos, sin y con llevadas.

En los tres niveles, los alumnos resolvieron operaciones planteadas de tres

maneras diferentes: a) el profesor las escribía en la pantalla, b) el profesor las dictaba y los alumnos las escribían en la pantalla y c) los alumnos las leían en papel escritas en horizontal y las copiaban en la pizarra con escritura vertical. En el Anexo 1 se muestran las operaciones de cada nivel.

Las sesiones de trabajo se videograbaron con el objetivo de observar todos movimientos de los alumnos en la ejecución completa de los algoritmos y así poder clasificar los procedimientos, las estrategias, los errores y todas las interacciones con la pizarra.

4. Resultados generales

Para mostrar los resultados, en primer lugar, se analiza el éxito en los dos tipos de operaciones, a continuación se desglosan las estrategias y los procedimientos de cada alumno, y se clasifican los errores que cometieron, mostrando diferentes ejemplos, y por último, se analiza el uso de la pizarra digital.

4.1 Éxito al efectuar operaciones

En la tabla 4 se muestra el éxito obtenido por los 9 alumnos al efectuar las operaciones. Recuérdese que sólo los alumnos de nivel 3 efectuaron operaciones con llevadas.

Tabla 4. Porcentaje de éxito de los 9 alumnos en las operaciones

	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Sumas sin llevadas	100	14	71	89	55	55	100	100	100
Restas sin llevadas	0	0	0	100	50	37	100	100	100
Sumas con llevadas	-	-	-	-	-	-	20	80	80
Restas con llevadas	-	-	-	-	-	-	20	80	80
Nº operaciones	7 sumas y 6			9 sumas y 8			8 sumas y 8 restas		

En las operaciones sin llevadas observamos, que para los alumnos de los niveles 1 y 2, las restas son más complejas que las sumas (excepto para el alumno A4 que realiza correctamente 16 operaciones de las 17 planteadas). Especialmente llamativo es que los tres alumnos de nivel 1 fracasan al efectuar las restas debido a que las efectúan como si fueran sumas. Esta mayor dificultad en las restas es común en los alumnos sin dificultades de aprendizaje.

Los alumnos de nivel 3 resuelven con éxito tanto las sumas como las restas sin llevadas. En cambio, en las operaciones con llevadas, hay una diferencia considerable entre el alumno A7 y los otros dos alumnos, A8 y A9, ya que el primero presenta grandes dificultades en estas operaciones (solo resuelve con éxito un 20% de las sumas y un 20% de las restas con llevadas), sin embargo, los alumnos A8 y A9 resuelven con éxito un 80% de cada tipo de operación.

En la tabla 5 se muestra el éxito de los alumnos para escribir las operaciones en la pizarra, ya sea después de que el profesor las dicte en voz alta o después de que los alumnos las lean en el papel.

Tabla 5. Porcentaje de éxito de los alumnos en la escritura de los números en la pizarra

	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Operaciones dictadas	100	50	100	100	0	75	25	100	100
Operaciones copiadas	100	60	100	100	100	50	50	100	100

Los alumnos A1, A3, A4, A8 y A9 no tienen dificultades de escritura en la pizarra, cuando las operaciones son dictadas o copiadas. Sin embargo, los restantes alumnos tuvieron dificultades en alguna o en ambas acciones (dictado o copiado), lo que les llevó, en general, al fracaso en dichas operaciones, y puso de manifiesto algunas de sus deficiencias numéricas. Es el caso de los ejemplos que se muestran en las Figuras 3, 4 y 5, pertenecientes a respuestas de los alumnos A2, A5 y A7.

Operación copiada desde el papel (9-3) $\begin{array}{r} 3 \\ - 6 \\ \hline 9 \end{array}$	Operación dictada por el profesor (7+12) $\begin{array}{r} 7 \\ + 12 \\ \hline 89 \end{array}$	Operación copiada desde el papel (6+27) $\begin{array}{r} 6 \\ + 27 \\ \hline 87 \end{array}$
Figura 3. Escritura y resolución de una operación: alumno A2	Figura 4. Escritura y resolución de una operación: alumno A5	Figura 5. Escritura y resolución de una operación: alumno A7

Estos datos nos ayudan a situar el grado de conocimiento y las diferencias entre las operaciones de suma y resta, de cada alumno dentro de su nivel. Se observa la variabilidad entre los alumnos, lo cual es una característica de los alumnos con SD (Porter, 1999; Pueschel, 2002; Abdelhameed y Porter, 2006; Buckley, 2007).

4.2 Análisis de estrategias y procedimientos

Para facilitar el análisis de resultados, además de señalar las *estrategias* utilizadas por los estudiantes basándonos en las que están descritas en la Tabla 2, hemos separado los *procedimientos* que utilizan, distinguiendo entre: empleo de bolas en la pizarra, conteo con los dedos y uso de los símbolos.

4.2.1. Estrategias y procedimientos para la suma

En la tabla 6 se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos en la realización de las sumas. En ocasiones, se observa que los alumnos utilizan diferentes estrategias en una misma operación, por esa razón se han detallado todas las estrategias encontradas.

En la tabla 7 hemos señalado el procedimiento utilizado, teniendo en cuenta si el alumno empleó bolas a la derecha de los números, si utilizó sus dedos, o si realizó, estrictamente, un manejo simbólico de los números. Todos los alumnos utilizan la pizarra digital, salvo el alumno A1 que la rechaza y prefiere realizar las operaciones en el papel y poner el resultado en la pizarra.

Tabla 6. Porcentaje de uso de estrategias para sumar de los 9 alumnos

Estrategias sumas	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Contar todo	100	100	86	11					
Contar todo/Contar a partir del primero				11			12,5		
Contar a partir del primero				11	56		25		
Hecho memorizado/Contar todo				44				12,5	
Hecho memorizado/Contar a partir del primero				11	22	11	62,5	50	50
Hecho memorizado				11	11	89		37,5	50
Otros			14		11				
Número de sumas	N = 7			N = 9			N = 8		

Tabla 7. Porcentaje de uso de procedimientos para sumar de los 9 alumnos

Procedimientos sumas	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Bolas	100	100	100		67				
Bolas /Símbolos numéricos					22	11			
Dedos				44,5			37,5	50	
Dedos/símbolos numéricos				44,5			62,5	12,50	50
Bolas-Dedos									
Símbolos numéricos				11	11	89		37,5	50
Número de sumas	N= 7			N= 9			N=8		

Las tablas 6 y 7 muestran cambios de estrategias y de procedimientos según los niveles de los alumnos que van de menos a más abstractas.

Los alumnos de nivel 1 utilizan como única estrategia, la estrategia básica de modelización denominada *contar todo*; para ello, representaron los dos sumandos con bolas a la derecha de cada número y contaron todas las bolas. El alumno A1 realizó este proceso en el papel y los alumnos A2 y A3 en la pizarra digital (ver figura 6).

$$\begin{array}{r}
 5 \quad \color{blue}{\bullet} \color{blue}{\bullet} \color{blue}{\bullet} \color{blue}{\bullet} \color{blue}{\bullet} \\
 + 4 \quad \color{blue}{\bullet} \color{blue}{\bullet} \color{blue}{\bullet} \color{blue}{\bullet} \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

Figura 6. Estrategia "Contar todo"
(Respuesta del alumno A3)

En el nivel 2 es donde se observa una mayor diversidad entre los alumnos tanto en las estrategias como en los procedimientos empleados. El alumno A4 utiliza los tres tipos de estrategias: de modelización (*contar todo*), de conteo (*contar a partir del primero*) y de hechos numéricos (*hechos memorizados*), utilizando sus dedos tanto para modelizar como para seguir la cuenta del número de palabras

recitadas en la secuencia numérica. La predominante es la de *contar todo* y la de *hechos memorizados* la emplea únicamente en las sumas en las que hay un 0.

El alumno A5 utiliza la estrategia de conteo *contar a partir del primero*, y en los casos en los que debe sumar un número con 0, utiliza la de *hechos memorizados* con el manejo de los símbolos. Destaca el hecho del empleo de bolas en la estrategia de conteo, como se puede ver en la figura 7.

$\begin{array}{r} 45 \\ + 2 \\ \hline 47 \end{array}$	<p>Figura 7. Estrategia “Contar a partir del primero” en unidades y “hechos memorizados” en decenas. (Respuesta del alumno A5)</p>
---	---

Por último, en el alumno A6 domina la estrategia de *hechos memorizados* en 8 de las 9 sumas planteadas y muestra un manejo de los símbolos, procedimiento asociado a dicha estrategia. De hecho, de los 9 alumnos analizados, el alumno A6 es el que mayor uso hace de esta estrategia para las sumas.

En definitiva, observamos tres alumnos de nivel 2 con diferentes grados de abstracción en las estrategias y distintos procedimientos (A4-dedos para modelizar y seguir el conteo; A5-bolas para seguir el conteo; A6-símbolos numéricos).

En los alumnos de nivel 3, se distingue el alumno A7 de los otros dos, A8 y A9, los cuales tienen un comportamiento similar. El alumno A7 utiliza la estrategia *contar a partir del primero* en todas las operaciones, principalmente acompañada de la estrategia de *hechos memorizados* en las sumas con un 0. Para los alumnos A8 y A9 predominan los *hechos memorizados* (no sólo en las sumas con 0), aunque, en algunas ocasiones, *cuentan a partir del primero*.

Lo que distingue a los tres alumnos de nivel 3 es el abandono de estrategias de modelización a favor de estrategias de conteo con utilización de los dedos y del manejo simbólico al utilizar hechos memorizados, y por consiguiente, el abandono de procedimientos de representación con bolas.

En general, en la realización de las sumas se observa una evolución en las estrategias, que van desde la más básica (*contar todo*, usando bolas), a la más abstracta (*hechos memorizados* con manejo de símbolos). Aunque dicha evolución avanza según el nivel de los alumnos, hay diferencias dentro de un mismo nivel. También se observan cambios de estrategias en un mismo alumno, en función de los números implicados. Por ejemplo, el alumno A4 utiliza la estrategia *contar a partir del primero*, cuando los números son mayores que 5 y la estrategia *contar todo*, si son menores que 5.

4.2.2 Estrategias y procedimientos para la resta

En las siguientes tablas, 8 y 9, se muestran los porcentajes de las diferentes estrategias y procedimientos utilizados para efectuar las restas por parte de los 9 alumnos.

Tabla 8. Porcentaje de uso de estrategias para restar de los 9 alumnos

Estrategias restas	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Contar todo	100	83	83						
Contar hasta							75	12,5	12,5
Quitar		17		37,5	12,5	12,5			
Quitar /Contar todo						25			
Contar a partir del primero					12,5				
Hecho memorizado/ Contar a partir del primero					12,5				
Hecho memorizado/Contar todo						12,5			
Hecho memorizado/ Quitar				50	25	37,5			
Hecho memorizado/Contar hasta							25	75	37,5
Hecho memorizado				12,5	12,5	12,5		12,5	50
Algoritmo Inventado			17		25				
Número de restas	N= 6			N= 8			N= 8		

Tabla 9. Porcentaje de uso de procedimientos para restar de los 9 alumnos

Procedimientos restas	NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Bolas	100	100	100	50	50	12,5			
Bolas/Símbolos numéricos				37,5	37,5	25			
Dedos						25	75	12,5	
Dedos/Símbolos numéricos						25	25	75	50
Bolas y Dedos									
Símbolos numéricos				12,5	12,5	12,5		12,5	50
Número de restas	N = 6			N = 8			N = 8		

La tabla 8 muestra cómo en la resta, las estrategias se diversifican, quizás debido a la mayor dificultad de esta operación para los alumnos. Al igual que en las sumas, en las restas hay cambios de estrategias y procedimientos en función del nivel de los alumnos.

Los alumnos de nivel 1 cometen el error de sumar en lugar de restar en la mayoría de las restas, por lo que la estrategia principal que siguen es la misma que habían utilizado en las sumas, es decir, *contar todo*, utilizando el procedimiento de representar el números de bolas que corresponden a cada número.

Se puede observar diversidad en los alumnos de nivel 2, como también ocurrió en la suma, no sólo en el éxito, sino en las estrategias y los procedimientos. En este nivel prevalecen dos estrategias: *Quitar* y *Hechos memorizados* (esta última estrategia en las operaciones en las que hay un cero en alguno de los términos). En muchas ocasiones, ambas estrategias se utilizan combinadas. En la figura 8 se puede observar la respuesta del alumno A5 a una resta en la que emplea bolas con

el procedimiento *Quitar*.

$ \begin{array}{r} 36 \quad \cancel{\bullet} \cancel{\bullet} \cancel{\bullet} \cancel{\bullet} \bullet \\ - 5 \\ \hline 31 \end{array} $	<p>Figura 8. Estrategia “Quitar” en unidades y “hechos memorizados” en decenas. (Respuesta del alumno A5)</p>
--	--

En cuanto a los procedimientos utilizados, los alumnos del nivel 2 necesitan ayudas (bolas y/o dedos) en la mayoría de las restas. Los alumnos A4 y A6 utilizan en las restas, procedimientos más básicos que en las sumas. Así, el alumno A4 usa los dedos en las sumas y recurre a las bolas en las restas, mientras que el alumno A6, emplea símbolos numéricos en las sumas y necesita representar bolas o contar con los dedos en las restas.

Entre los alumnos del nivel 3 se observa el uso de estrategias más básicas que las empleadas en las sumas, debido a la dificultad que encuentran en esta operación. Por otro lado, los tres alumnos utilizan, con porcentajes diferentes entre ellos, una estrategia de conteo que no se da entre los alumnos de los otros niveles, que es *Contar hasta*, apoyándose siempre en el empleo de los dedos (en ningún caso con bolas). También en este nivel encontramos dicha estrategia junto con el uso de *Hechos memorizados* en una misma operación, en especial, el alumno A9 (como también lo hacía en las sumas). El avance en este nivel es que la utilización de *Hechos memorizados* aparece también en restas en las que los dos números son distintos de cero; esto se observa en los alumnos A8 y A9.

En resumen, la resta es una operación más compleja para los estudiantes, lo cual se manifiesta no sólo por el éxito más bajo, sino por la necesidad de apoyarse en lo concreto, ya sean bolas o dedos, y por una diversidad en las estrategias. Se observa un desconocimiento de esta operación por parte de los alumnos de nivel 1, a pesar de que formaba parte de los objetivos escolares que estaban trabajando. Una justificación que encontramos a este hecho es que puede ser un reflejo de “la escasa flexibilidad para cambiar un procedimiento que se está siguiendo”, lo cual es característico de los alumnos con SD. Es decir, el hecho de que las dos primeras operaciones planteadas fueran sumas, les pudo llevar a seguir efectuando este procedimiento en todos los casos que se les planteó. Otra explicación es que la mayor dificultad que tenían con la resta, les llevó a realizar la operación con la que sienten más seguridad, en este caso, la suma.

A continuación, y a modo de síntesis, mostramos las estrategias y los procedimientos más característicos de los 9 alumnos conjuntamente en las dos operaciones. El cuadro refleja la evolución de las estrategias desde las más básicas de modelización (como *Contar todo* y *Quitar*), pasando por las estrategias de conteo (*Contar a partir del primero* y *Contar hasta*), hasta las más abstractas (*Hechos numéricos*), según el nivel de los alumnos. Los procedimientos también cambian, y van desde el uso de las bolas para modelizar, al uso de bolas para apoyarse en el conteo, hasta la sustitución de las mismas por el empleo de dedos para apoyar el conteo, y el uso simbólico de los números.

Tabla 10. Resumen de las estrategias y procedimientos de los 9 alumnos

		SUMAS	RESTAS
Nivel 1	A1		
	A2		Con bolas
	A3		Contar todo
Nivel 2	A4	Con dedos	Con bolas
		- Contar todo	- Quitar
	- Contar a partir del primero		
	A5	Símbolos numéricos	Símbolos numéricos
		- Cuando hay cero	- Cuando hay cero
	A6	Con bolas	Con bolas
- Contar a partir del primero		- Quitar	
A6	Símbolos numéricos	Símbolos numéricos	
	- Cuando hay cero	- Cuando hay cero	
Nivel 3	A7	Con dedos	Con dedos
		- Contar a partir del primero	- Contar hasta
	Símbolos numéricos	Símbolos numéricos	
	- Cuando hay cero	- Cuando hay cero	
	A8	Con dedos	Con dedos
		- Contar a partir del primero	- Contar hasta
Símbolos numéricos	Símbolos numéricos		
A9	Con dedos	Con dedos	
	- Contar a partir del primero	- Contar hasta	
Símbolos numéricos	Símbolos numéricos		

4.3. Estudio de los tipos de errores

En este apartado se desglosan los errores de los alumnos en las diferentes operaciones, sin diferenciar que provengan de sumas o restas. En la tabla 11 se presenta el número de veces que se da cada tipo de error en los 9 alumnos, siguiendo la clasificación dada en la tabla 1. En este caso no se dan porcentajes, debido a que muchas veces los alumnos cometen varios errores en una misma operación.

Los alumnos de nivel 1 cometen, principalmente, un error no recogido en la tabla 1, relativo al proceso de conteo de las bolas. Observamos que los alumnos presentan dificultades en algunos de los *principios de conteo* indicados por Gelman y Gallistel (1978), tales como, el *principio de orden estable* (no seguir la serie numérica al contar las bolas) o el *principio de correspondencia uno a uno* (saltarse alguna bola al contar) (ver figura 9).

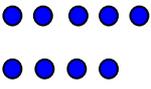
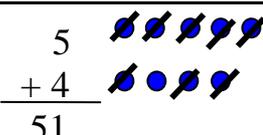
Operación escrita en la pizarra por el tutor	
Errores: <i>Conteo</i> (se salta objetos y no sigue la serie numérica) <i>Grafomotriz</i> (confunde números 3 con 5) <i>Sistema de numeración decimal</i> (cambia unidades por decenas) Estrategia: <i>Contar todo</i>	
$\begin{array}{r} 5 \\ + 4 \\ \hline \end{array}$ 	El alumno coloca tantas bolas como indican ambos sumandos.
$\begin{array}{r} 5 \\ + 4 \\ \hline 51 \end{array}$ 	Cuenta las bolas tachándolas y dice: “uno, dos tres, cuatro, cinco”. Al saltar a la línea inferior continúa el conteo por once y deja una bola sin contar, dice: “once, doce y trece”. Pero escribe 51.

Figura 9. Error de “Conteo”, “Grafomotriz” y “Sistema de numeración decimal” (Respuesta del alumno A2)

Además, en este nivel 1 observamos otros errores que no se dan en los otros niveles. El alumno A2 en dos ocasiones confunde los números (error *Grafomotriz*) y cambia el orden de las unidades, ya que escribe las decenas en el lugar de unidades, 01 en lugar de 10, 51 en lugar de 15... Este último, es un error que indica una incomprensión del *Sistema de numeración decimal*. Ambos errores están ejemplificados en la figura 9.

Otro error que presentan los tres alumnos del nivel 1, está catalogado como un desconocimiento del *Significado de la operación*, debido a que suman en todas las restas planteadas. En la figura 10 se muestra la respuesta del alumno A2 a una resta que refleja este error.

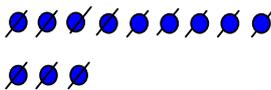
Algoritmo que el alumno copia después de leerlo en papel (9-3)	
Errores: <i>Significado de la operación</i> (sumar en lugar de restar) Estrategia: <i>Contar todo</i>	
$\begin{array}{r} 9 \\ - 3 \\ \hline 12 \end{array}$ 	El alumno coloca 9 bolas del minuendo y 3 bolas del sustraendo y tacha contándolas.

Figura 10. Error de “Significado de la operación”. (Respuesta del alumno A2)

El alumno A3 comete un error relacionado con el *Cero*, en concreto dar al cero el valor del otro término, como puede verse en la figura 11, error que aparece con un una escritura errónea del número 10.

Operación escrita en la pizarra por el tutor	
Errores: <i>Cero</i> (da al cero el valor del otro término) <i>Sistema de numeración decimal</i> (cambia unidades por decenas) Estrategia: <i>Contar todo</i>	
$\begin{array}{r} 5 \\ - 0 \\ \hline 01 \end{array}$ 	El alumno coloca 5 bolas al lado de cada número, las tacha y cuenta 10. Escribe 01.

Figura 11. Error de “Cero” y de “Sistema de numeración decimal”. (Respuesta del alumno A3)

Como también ocurría en las estrategias y los procedimientos, en los alumnos del nivel 2 no observamos un patrón común. Destaca la actuación del alumno A4 que tiene un único error relacionado con el *Conteo*. En los otros dos alumnos observamos errores relacionados con el conocimiento del *Sistema de numeración decimal*, como la colocación incorrecta de los números (encolumnamiento), lo que les lleva a sumar o restar unidades con decenas (A5 y A6). Estos errores surgen cuando las operaciones son dictadas o copiadas (Ver figura 12).

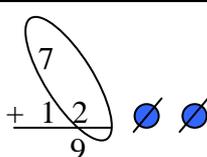
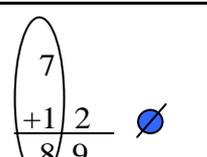
Operación dictada por el profesor (siete más doce)	
Errores: <i>Sistema de numeración decimal</i> (encolumnamiento y sumar unidades con decenas)	
Estrategia: <i>Contar a partir del primer número dado.</i>	
	<p>Escribe la operación de manera incorrecta. Representa con bolas las unidades del segundo sumando, y las sumas con las unidades que ha colocado en el lugar de las decenas. Escribe 9 en las unidades.</p>
	<p>Luego borra las bolas, representa la decena del 12 con una bola y vuelve a sumarla con las unidades. Escribe 8</p>

Figura 12. Error de “Sistema de numeración decimal2. (Respuesta del alumno A5)

Otros errores observados en los alumnos del nivel 2, indican un desconocimiento de las reglas del *Algoritmo*, como comenzar a operar por la izquierda (ver figura 13), y un desconocimiento del *Significado de la operación*, como sumar y restar en una misma operación, y sumar en lugar de restar (ver figura 3).

Operación escrita en la pizarra por el tutor	
Errores: <i>Algoritmo</i> (comienza por la izquierda)	
<i>Significado de la operación</i> (suma y resta a la vez).	
Estrategia: <i>Quitar y contar todo</i>	
$\begin{array}{r} 36 \\ -12 \\ \hline 2 \end{array}$	<p>Representa con los dedos las decenas del minuendo (3) y baja tantos dedos como decenas hay en el sustraendo (1). El resultado son los dedos levantados (2).</p>
$\begin{array}{r} 36 \\ -12 \\ \hline 28 \end{array}$	<p>Luego, representa con bolas las unidades del minuendo (6) y las del sustraendo (2) y procede a contarlas todas para obtener el resultado (8).</p>

Figura 13. Error de “Algoritmo” y del “Significado de la operación”. (Respuesta del alumno A6)

Como ya comentamos en el apartado 2, el error más frecuente en la resta con niños de desarrollo típico tiene que ver con la llevada. Así ocurrió también en nuestro estudio con los tres alumnos de nivel 3, ya que el error característico de este grupo fue olvidarse de la *llevada* (ver figura 14). Además de esto, el alumno A7,

presenta dificultades con el encolumnamiento cuando las operaciones son dictadas, y errores provocados por comenzar a operar por la izquierda.

Operación dictada por el tutor (treinta y cuatro menos seis)	
Error: <i>Olvidar la llevada</i>	
Estrategia: <i>Contar hasta y Hecho memorizado</i>	
$\begin{array}{r} 34 \\ - 6 \\ \hline 38 \end{array}$	En las unidades, cuenta con sus dedos desde 6 hasta 14 y recuenta los dedos que ha utilizado, escribiendo un 8 en las unidades. A continuación, olvida la llevada y escribe directamente un 3 en las decenas.

Figura 14. Error de “Llevada”. (Respuesta del alumno A7)

Por último, algunos alumnos cometen errores no catalogados que entendemos provienen del despiste o de procedimientos difíciles de catalogar.

Tabla 11. Número de veces de los errores cometidos por los 9 alumnos

Errores de sumas y restas		NIVEL 1			NIVEL 2			NIVEL 3		
		A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
CONTEO	Conteo de bolas	1	9	3	1					
GRAFOMOTRIZ	Confundir números		2							
ALGORITMO	Operar izquierda						5	2		
SISTEMA NUMERACIÓN DECIMAL	Encolumnamiento					4	3	3		
	Cambiar orden unidades		4	1						
	Sumar o restar unidades de diferente orden					4				
CERO	Cero en vez de sumar o restar					1				
	Dar al cero el valor del otro término			2						
SIGNIFICADO OPERACIÓN	Sumar y restar a la vez					1	4			
	Sumar en lugar de restar.	6	5	5		3				
LLEVADA	Olvidar la llevada							5	2	1
OTROS	Despistes/invencción	1					2			1

4.4. Estudio del uso de la pizarra digital

En este apartado comentamos los resultados de la interacción del alumno con las diferentes zonas de la pizarra digital (ver figura 2): uso del ratón, colocación de números y bolas, borrado y tachado de bolas, colocación del signo de la operación y utilización de las áreas sensibles establecidas en la zona *hoja de trabajo*. Además analizamos el grado de autonomía de los alumnos al resolver las tareas, observando la necesidad o requerimiento del profesor.

Los alumnos se muestran entusiasmados con la pizarra digital y aunque se les

ofrece el papel por si lo prefieren o necesitan, todos optan por trabajar en la pizarra, salvo el alumno A1 que decide realizar todas las operaciones en papel y, posteriormente, trasladar el resultado a la pizarra, y el alumno A3 que en dos ocasiones se ve aturcido con la operación y recurre al papel.

En cuanto a la interacción con la pizarra digital, tres alumnos, el A4, A8 y A9, no manifiestan ninguna dificultad y se muestran totalmente autónomos y seguros. En el resto de los alumnos aparecen algunas dificultades motrices en la utilización de determinados elementos de la pizarra digital que comentamos a continuación.

Tachado de las bolas

El tachado de las bolas con el lápiz requiere de movimientos cortos y precisos que generó dificultades a los alumnos A2, A3, A5 y A6. A tres de ellos (A3, A5 y A6) esta dificultad no les hizo cometer errores en las operaciones, procediendo en ocasiones a contar las bolas tocándolas con sus dedos sobre la pantalla. Sin embargo, en el alumno A2, esta dificultad favoreció la aparición de errores en el conteo, como fallar en la aplicación de los *principios de correspondencia uno a uno* y del *orden estable*, como se explica en lo que sigue:

- Al contar las bolas, las señala con el puntero del ratón y hace movimientos muy bruscos que le lleva a saltarse bolas que deja sin contar, es decir, falla en el *principio de correspondencia uno a uno*.
- Al contar las bolas, las tacha con el lápiz. Este proceso requiere movimientos ajustados que le lleva a concentrarse más en el tachado que en el conteo, y de esta manera pierde la cuenta de lo tachado al pasar de una fila de bolas a otra, por lo tanto, falla en el *principio del orden estable*.

Uso de la goma de borrar

La utilización de la goma para borrar los números y las bolas no genera dificultad, salvo en el alumno A3 que en algunas ocasiones tiene dificultad con el borrado de los números, al no recordar la acción a realizar.

Colocación del signo

La colocación del signo de la operación, cuando las operaciones eran dictadas o mostradas en papel y el alumno tenía que escribirlas en la pizarra, puso de manifiesto en algunos alumnos, el desconocimiento del significado del signo (alumnos A2 y A3) y la poca importancia que le dan al mismo, al limitarse a colocar los números y proceder a operar, dejando escrito el signo de la operación anterior (alumnos A5 y A6). En algunos casos, dejaban el signo de la suma cuando era una resta (o viceversa).

Escritura de las operaciones

La utilización de la *Hoja de resolución* (ver figura 2) provocó algunas dificultades:

- Cuando las operaciones son con números de un dígito y el resultado es mayor que 9, colocan primero las decenas en la posición de las unidades, y las unidades a su izquierda, en el lugar de las decenas (esto lo observamos en los alumnos A2 y A3). El ejemplo de la figura 15 corresponde al alumno A3 quien, por requerimiento de la profesora, realiza posteriormente la operación en papel

y no comete dicho error, lo cual muestra que es un error provocado por el entorno de la pizarra digital, que muestra una falta de conocimiento del sistema posicional de los números.

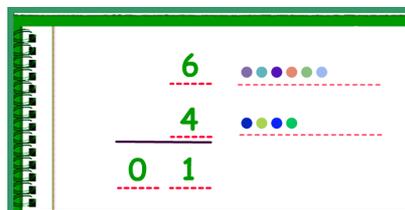

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 4 \\ \hline 01 \end{array}$$

Figura 15. Respuesta del alumno A3

- Otra situación que se dio en las operaciones con números de un dígito, fue colocarlos en el lugar de las decenas, lo que llevó, en ocasiones, a un error de encolumnamiento, (ver el ejemplo del alumno A7, en la figura 16).

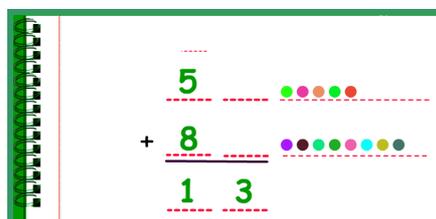

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 8 \\ \hline 13 \end{array}$$

Figura 16. Respuesta del alumno A7

Autonomía

En cuanto a la autonomía de los alumnos al enfrentarse a tareas de resolver operaciones en la pizarra digital, excepto el alumno A1 que se muestra muy inseguro, el resto de los alumnos manifiestan una alta autonomía y seguridad, hasta tal punto que en algunas ocasiones, la profesora interviene para hacer alguna aclaración y es ignorada por parte de los alumnos, continuando con su proceso y tomando sus propias decisiones. La intervención de los profesores se limita a realizar aclaraciones puntuales o corregir errores por iniciativa propia, no por demanda de los alumnos.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos analizado las estrategias, procedimientos y errores de un grupo de alumnos con SD al efectuar algoritmos de suma y resta. Las investigaciones realizadas con niños sin discapacidad en este tópico, nos ha permitido tener un marco en el que analizar los resultados y de esta forma comprobar si hay estrategias y errores que aparecen con más fuerza en la población con SD analizada. El grupo de alumnos que participaron en la experiencia tenían diferente conocimiento numérico, lo que nos ha permitido observar cómo cambian tanto las estrategias como los errores según los niveles de conocimiento numérico de los alumnos.

Se observa que muchos errores no responden al azar, sino a procedimientos mal aprendidos, ya que suelen repetirse varias veces. Hemos observado una relación entre los niveles de los alumnos y el predominio de determinados errores. Así, en los alumnos de nivel 1, lo más característico es la ausencia del significado de la resta, ya que sumaron en todos los casos y los errores que tienen que ver con el proceso de conteo. En el nivel 2 los errores cambian según los alumnos y no se observa un patrón de errores característico. Y para los alumnos de nivel 3, es

común el error de llevada, lo cual coincide con la población sin discapacidad.

Cuando los alumnos se enfrentan a tareas en las que las operaciones son dictadas o copiadas, aparecen errores que ponen de manifiesto una incompreensión del razonamiento subyacente a un algoritmo, de manera que parece que existe una laguna entre los procedimientos (reglas del algoritmo) y la comprensión del sistema de numeración decimal. Es decir, muestran un empleo mecánico de procedimientos aprendidos de memoria, por lo que parece necesario un ajuste en la enseñanza. Este aspecto hay que analizarlo en el entorno de la pizarra digital, en el sentido en que la forma de escritura de los números y operaciones en la misma, puede originar dificultades semánticas, reflejo del dominio incompleto del sistema de numeración decimal, como es el caso del error de encolumnamiento.

Para la población estudiada se observa que la resta es más difícil que la suma, como también ocurre con las personas sin discapacidad. Esto se ve no sólo en el menor porcentaje de éxito, sino en las estrategias y los procedimientos de ejecución, que para la resta son más básicos que para la suma.

En la población analizada, las estrategias y los procedimientos que utilizan, van evolucionando de manera similar a como se ha indicado para la población sin discapacidad. No ha aparecido ninguna estrategia diferente a las mostradas en la literatura, aunque también es cierto, que no se dan todas las referenciadas. La estrategia más utilizada por los alumnos de nivel 1 es la estrategia básica de *modelización*, y en los dos niveles siguientes aparecen estrategias de *conteo* y de *hechos numéricos*. Sin embargo, hemos encontrado que las estrategias de *conteo* se utilizan con el apoyo de los dedos y en ocasiones de las bolas, y no recitando la serie, lo cual es llamativo. Es decir, ningún alumno de los analizados utiliza las estrategias de conteo recitando los números, sino que han necesitado del apoyo de los dedos o bolas. Por otra parte, ningún alumno ha llegado al nivel de total abstracción que implica utilizar como únicas estrategias los *hechos numéricos*.

También evolucionan los procedimientos, así observamos que en el nivel 1, los alumnos modelizan con bolas, nunca con los dedos; en el nivel 2 utilizan bolas o dedos según los alumnos o según la operación, tanto para modelizar como para seguir el conteo; y en el nivel 3 ningún alumno utiliza representaciones con bolas, sino recurren a los dedos para apoyarse en el conteo, y aparecen con mayor frecuencia el manejo simbólico.

Por lo tanto, los resultados indican la importancia de las ayudas visuales (fichas, bolas, dedos...) en la enseñanza de la suma y la resta en las personas con SD, ya que para los casos más complejos debido a los números implicados, los alumnos recurren a estas ayudas y a estrategias menos abstractas.

El análisis del uso de la pizarra digital nos ha llevado a realizar algunos ajustes a la misma, como que cada vez que hay que hacer una nueva operación, la pizarra quede en blanco y no se pueda comenzar a operar hasta que el signo de la operación no esté colocado. Otra adaptación realizada es la incorporación de pantallas táctiles para los alumnos que tienen problemas de motricidad en el manejo del ratón o para aquellos que lo deseen. Frente a esto, la pizarra presentó ventajas para los alumnos que tienen problemas de escritura en general, y de los números en particular, ya que pueden centrarse en la operación y olvidar sus dificultades con la

grafía.

Por último, encontramos que los alumnos se sintieron muy motivados hacia el uso de la pizarra, con lo cual es una herramienta que se está integrando en determinados programas multimedia, a modo de ayuda para resolver operaciones.

Nota: Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: “Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación” del Ministerio de Ciencias e Innovación (España).

6. Bibliografía

- Abdelhameed, H. y Porter, J. (2006). Counting in Egyptian children with Down Síndrome. *International Journal of Special Education*, 21(3), 176-187.
- Arranz, P. (2002). *Niños y jóvenes con SÍNDROME DE DOWN*. Editorial Egido. Zaragoza.
- Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 141-157.
- Bird, G.; Buckley, S.J. (2001). Number skills for individuals with Down syndrome - An overview. *Down Syndrome Issues and Information*.
- Bower, A.; Hayes, A. (1994). Short-term memory deficits and Down syndrome: A comparative study. *Down Syndrome Research and Practice*, 2 (2), 47-50.
- Brown, J. S.; Van Lehn, K. (1982). Towards a generative theory of “bugs”. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 117-135. LEA. New Jersey.
- Bruno, A. Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En Moreno, M.M., Estrada, A.; Carrillo, J. y Sierra, T.A. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 141-162). Lleida: SEIEM.
- Buckley y Sacks (1987). *The adolescent with Down's Syndrome*. Portsmouth: Portsmouth Polytechnic.
- Buckley, S. (1985). Attaining basic educational skills: Reading writing and number. In D. Lane & B. Stratford (eds.), *Current Approaches to Down Syndrome*, 315-343. Holt Rinehart & Winston. London.
- Buckley, S. (2007). Teaching numeracy. *Down Syndrome Research and Practice*, 12 (1), 11-14.
- Carpenter, T. Moser, J. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. LEA. New Jersey.
- Carpenter, T.; Fennema, E.; Franke, M.L.; Levi, L. y Empson S.B. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH. Heinemann.
- Caycho, L.; Gun, P. y Siegal, M. (1991), “Counting by children with Down' Syndrome”, *American Journal on mental Retardation*, 95(5), 575-583.
- Chapman, R.S. y Hesketh, L.J. (2000). Fenotipo conductual de las personas con Síndrome de Down. *Rev. Síndrome Down*, Vol. 17, 3: 66-79.
- Cox, L.S. (1975). Systematic errors in the four algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6(4), 202-220.
- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide recent research*. Cassell.

- Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic*. Psychology Press. New York.
- Fiori, C.; Zuccheri, L. (2005). An experimental research on errors patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics Education*, 60, 323-331.
- Flórez, J.; Troncoso, M. V. (1991). *SÍNDROME DE DOWN y Educación*. Masson S.A. and Fundación Síndrome de Down de Cantabria. Barcelona.
- Fuchs, L.S. y Allinder, R.M. (1993). Computer Applications in the schools for students with mild disabilities: Computer-Assisted Instruction and Computer-Managed Instruction. In Gable, R.A. y Warner, S.F.; *Strategies for Teaching Students with Mild to Severe Mental Retardation* (49-70). London: Jessica Kingsley Publishers.
- Gelman, R. y Cohen, M. (1988), "Qualitative differences in the way Down syndrome and normal children solve a novel counting problem", en Nadel, L. (ed.) *The Psychology of Downs' Syndrome*, Cambridge, MA: MIT Press, 51-99.
- Gelman, R.; Gallistel, (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press
- Ginsburg, H. (1977). Learning to Count. Computing with Written Numbers. Mistakes. In Ginsburg, H., *Children's Arithmetic: How They Learn It and How You Teach It*, pp. 1-29, 79-129. Pro-Ed. Austin, Texas.
- González, C.; Guerra, D.; Noda, M; Bruno, A.; Sanabria, H.; Moreno, L (2007). Diagnóstico automático de errores aritméticos y ayudas adaptadas para niños con Síndrome de Down. *Educação Matemática Em Revista-RS*. 8, 77-88.
- González, C; Sigut. J.; Sanabria, H.; Guerra, D.; Noda, A.; Bruno, A.; Hernández, B. Hernández, A.; Moreno, L. (2006). Diseño e implementación de interfaces accesibles para acercar las matemáticas a niños con Síndrome de Down. In Méndez-Vilas, A.; Solano A.; Mesa, J.A.; Mesa J. (eds.) *Technological Science Education, Collaborative Learning*, vol. 2, pp. 1090-1095. FORMATEX. Sevilla. (Design and implementation of accessible interfaces for facilitating mathematics in children with Down syndrome).
- Hativa, N. (1988). Sigal's ineffective computer-based practice of arithmetic: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 195-214.
- Linares, P.L. y Martínez, M. (1994). Aprendizaje computadorizado en una persona con Síndrome de Down. *Polibea*, 32, 4-10.
- Marcell, M. M.; Weeks, S. L. (1988). Short-term memory difficulties and Down syndrome. *Journal of Mental Deficiency Research*, 32, 153-162.
- Mastropieri, M.A.; Scruggs, T.E. and Shiah, R.L. (1997). Can computers teach problemsolving strategies to students with mild mental retardation?. *Remedial and Special Education*, 18, 3, 157-165.
- Molina, S. (2002). *Psicopedagogía del niño con Síndrome de Down*. Arial, Granada. (*Psychology of children with Down syndrome*).
- Molina, S.; Arraiz, A. (1993). *Procesos y estrategias cognitivas en niños deficientes mentales*. Pirámide, Madrid. (Cognitive processes and strategies in mentally handicapped children).
- Monari, E. (2002). Learning Mathematics at school... and later on. *Down Syndrome News and Update* 2(1),19-23.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA
- Nye, J.; Fluck, M. y Buckley, S. (2001). Counting and cardinal understanding in children with Dwn syndrome and typically developing children. *Down Syndrome Research and Practice*, vol. 7, núm. 2, pp. 68-78.

- Ortega, J. M. (2003). *Nuevas tecnologías y aprendizaje matemático en niños con Síndrome de Down*. Federación Española de Síndrome de Down (FISEM) y Obra Social de Caja Madrid. Madrid.
- Porter, J. (1999). Learning to count: A difficult task? *Down Syndrome Research and Practice*, 6(2), 85-94.
- Pueschel, S. M. (1991). Causas del Síndrome de Down. En Pueschel, S.M. Síndrome de Down: *Hacia un futuro mejor* (37-48). Barcelona: Salvat.
- Pueschel, S. M. (2002). *Síndrome de Down: Hacia un futuro mejor: Guía para padres*. Masson S.A. Santander: Fundación SÍNDROME DE DOWN de Cantabria (2ª edición). Barcelona.
- Roberts, G. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetics pupils. *The Arithmetic Teacher*, 15, 442-446.
- Rondal, J.; Perera, J.; Nadel, L. (2000). Síndrome de Down. *Revisión de los últimos conocimientos*. Espasa Calpe. Madrid. (Down syndrome. Review of the latest knowledge).
- Scruggs, T.E. y Mastropieri, M.A. (1993). Teaching students with mild mental retardation. In Gable, R.A. y Warner, S.F.; *Strategies for Teaching Students with Mild to Severe Mental Retardation* (117-125). London: Jessica Kingsley Publishers.
- Sloper, P.; Cunningham, C.; Turner, S.; Knussen, C. (1990). Factors relating to the academic attainments of children with Down' syndrome. *British Journal of Educational Psychology*, 60, 284-298.
- Snart, F.; O'Grady, M.; Das, J. P. (1982). Cognitive processing by subgroups of moderately retarded children. *American Journal of Mental Deficiency*, 82(5), 645-472.
- Troncoso, M. V., del Cerro, M. y Ruiz, E. (1999). El desarrollo de las personas con Síndrome de Down: una visión longitudinal. *Siglo Cero*, 30 (4), 184: 7-26.
- Valverde M., S. (2005). *El aprendizaje de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en personas con Síndrome de Down*. Facultad de Educación. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.

Aurelia Noda Doctora en Matemáticas por la Universidad de La Laguna. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. mnoda@ull.es

Alicia Bruno Doctora en Matemáticas por la Universidad de La Laguna. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna. abruno@ull.es

Carina González Doctora en Informática por la Universidad de La Laguna. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática y Arquitectura tecnología de computadores. Universidad de La Laguna. cigonza@ull.es

Lorenzo Moreno Doctor en Física por la Universidad Complutense de Madrid. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática y Arquitectura tecnología de computadores. Universidad de La Laguna. lmoreno@ull.es.

Hilda Sanabria Analista de Sistemas. Paraguay. hilda@isaatc.ull.es