

## Relações Institucionais: a noção de sistemas de equações lineares na Escola Básica no Brasil

Marlene Alves Dias, Tânia Mendonça Campos, Veleida da Silva, Bernard Charlot

### Resumo

Nesse trabalho apresenta-se uma análise da evolução do ensino da noção de sistemas de duas equações e duas incógnitas para estudantes com idades entre 13 e 14 anos, da escola básica no Brasil, utilizando como referencial teórico central a abordagem de Bosch e Chevallard (1999) e como referencial teórico de apoio a noção de "topos" de Chevallard e Grenier (1997). Finalmente, fazem-se algumas considerações sobre os resultados encontrados, indicando transformações ocorridas no período considerado..

### Abstract

This work presents an analysis of developments in teaching the concept of systems of two equations and two unknowns for students aged between 13 and 14 years, basic education in Brazil, using as its main theoretical reference-point the approach adopted by Bosch and Chevallard (1999) and as a supporting theoretical reference-point the notion of "topos" of Chevallard and Grenier (1997). Finally, there are some considerations about the results, indicating changes occurred over the period.

### Resumen

Este artículo presenta un análisis de la evolución de la enseñanza del concepto de sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas para estudiantes de edades comprendidas entre los 13 y los 14 años, de educación primaria en Brasil, utilizando como una aproximación teórica central a Bosch y Chevallard (1999) y como soporte teórico a la noción de "topos" de Chevallard y Grenier (1997). Por último, hay algunas consideraciones acerca de los resultados, lo que indica cambios ocurridos durante el período.

## 1. Introdução

A noção de sistemas de equações lineares é uma ferramenta matemática importante tanto para os estudantes do ensino fundamental e secundário como para os do ensino superior, pois além de permitir a modelagem de diversas situações matemáticas das outras ciências e do cotidiano, ela também possibilita a articulação com outras noções matemáticas, em diferentes níveis de ensino. Pode-se citar como exemplo, sua aplicação em questões da engenharia, de álgebra linear e de equações diferenciais.

Certamente, as situações-problema que podem ser exploradas nesses contextos não se reduzem a apenas sistemas lineares – outras noções matemáticas estão em jogo em sua resolução – mas, a escolha desses contextos está relacionada ao fato de que eles permitem uma introdução da noção de sistemas lineares que propicia a discussão das soluções e favorece também a discussão de outras aplicações dessa noção.

Sendo assim, este artigo tem por objetivo melhor compreender as escolhas institucionais nos últimos 50 anos, para o tratamento dessa noção com estudantes brasileiros entre 13 e 14 anos, a fim de verificar como suas diferentes possibilidades são exploradas nessa etapa da escolaridade.

Dessa forma, estuda-se neste trabalho, a relação institucional esperada, levando-se em conta as orientações apresentadas nos documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1991) e Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008), a relação institucional existente em diferentes décadas, via livros didáticos referentes a essas épocas. Ou seja, o estudo aqui proposto tenta compreender a ecologia das diferentes tarefas e técnicas encontradas nas diferentes décadas. Inicia-se, assim, este estudo, a partir do seguinte questionamento:

- Como se aborda a noção de sistema de duas equações lineares e duas incógnitas nas diferentes décadas?
- Quais são os ostensivos e não ostensivos em jogo nas diferentes abordagens, conforme definição de Bosch e Chevallard (1999)?

Na tentativa de responder às questões acima, realizamos um estudo bibliográfico e localizamos algumas pesquisas sobre as noções de equações e inequações, mas não encontramos trabalhos específicos sobre sistemas de equações lineares, em particular, sobre os sistemas de duas equações com duas incógnitas, o que aumentou o nosso interesse por desenvolver uma pesquisa específica sobre essa noção matemática.

## 2. Referencial teórico da pesquisa

O estudo bibliográfico conduziu-nos à abordagem antropológica de Bosch e Chevallard (1999) como referencial teórico central para a análise das relações institucionais esperadas e existentes no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas para estudantes brasileiros entre 13 e 14 anos. Dedicamo-nos, em particular, ao exame dos ostensivos (qualquer objeto material, principalmente os objetos materiais particulares como os sons, os grafismos e os gestos) e não ostensivos (objetos que, como as idéias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente) privilegiados, nas diferentes décadas para o ensino dessa noção matemática.

Assim, ao desenvolver este estudo, propusemo-nos a identificar os diferentes tipos de tarefas propostas nas diferentes décadas, as técnicas privilegiadas, destacando as que podem ser utilizadas para justificar o trabalho matemático, ou seja, o discurso tecnológico empregado para auxiliar o estudante a desenvolver as diferentes tarefas que lhe são propostas.

Para compreender melhor que papéis o professor e o estudante devem desempenhar no processo de ensino e aprendizagem, baseamos nosso estudo na noção de “topos” introduzida por Chevallard e Grenier (1997), que permite analisar o que se espera do professor e do estudante, tanto em relação aos conhecimentos prévios necessários quando se introduz um novo conceito matemático, como em relação às atividades e atitudes necessárias para que se desenvolva o trabalho matemático em jogo nas tarefas que competem a cada um deles.

### 3. Metodologia da pesquisa

A pesquisa foi iniciada com um estudo bibliográfico das pesquisas existentes sobre a noção de equações, inequações e sistemas de equações lineares para a escola básica no Brasil e dos trabalhos relacionados ao referencial teórico escolhido. Na sequência foram levantadas as sugestões dos documentos oficiais para o tratamento da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas ressaltando os papéis do professor e do estudante e um conjunto de tarefas que possibilitam o tratamento proposto por esses documentos

Finalmente, construímos uma grade de análise para examinar as regularidades e diferenças existentes nas abordagens da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas apresentadas em oito livros didáticos, publicados e adotados nas décadas escolhidas. Para os livros anteriores ao ano 2000 utilizamos as obras fornecidas por colegas que as preservaram e tentamos verificar as evoluções de um mesmo autor quando possível. As três obras mais recentes foram escolhidas por terem sido avaliadas pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, conforme figura 1 abaixo.

Figura 1: Os livros analisados

Livro – Autores	Ano	Século	PNLD
1º <i>Matemática e Realidade</i> . Iezzi et al.	2005	XXI	2008
2º <i>A conquista da Matemática</i> . Castrucci et al.	2002	XXI	2005
3º <i>Matemática e Realidade</i> . Iezzi et al.	2000	XXI	2006
4º <i>Matemática Scipione</i> . Di Pierro Netto	1999	XX	
5º <i>Matemática Conceitos Operações</i> . Di Pierro Netto	1982	XX	
6º <i>Matemática na Escola Renovada</i> . Di Pierro Netto	1971	XX	
7º <i>Matemática Curso Moderno</i> . Sangiorgi	1966	XX	
8º <i>Curso de Álgebra</i> . De Farias	1959	XX	

Apresentamos a grade de análise construída para identificar as tarefas e as variáveis das tarefas privilegiadas nas diferentes épocas.

#### 3.1. A grade de análise

A grade serve de instrumento para estudar os ostensivos e não ostensivos possíveis na introdução da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, destacando: As tarefas associadas a essa noção, (em geral, utilizadas no trabalho com alunos entre 13 e 14 anos) e as variáveis dessas tarefas, com ênfase para os ostensivos e não ostensivos possíveis para a sua solução.

Distinguimos as seguintes tarefas em função da situação que elas privilegiam:

- situação matemática algébrica transformada em um contexto cotidiano;
- sistemas de equações lineares algébricos explícitos, indicando, ou não, o método a ser aplicado;
- articulação entre a noção de sistema de duas equações lineares e duas incógnitas e a noção de retas no plano  $\mathbb{R}^2$ ;
- situação envolvendo a articulação de diferentes noções matemáticas e que exige a passagem de um ostensivo representado em língua natural para os ostensivos tabela e representação algébrica de equações lineares e sistemas de equações lineares.

Para as **variáveis das tarefas**, considerando a tarefa: “Estudo gráfico das possibilidades de solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas”, distinguimos as seguintes variáveis:

- O tipo de situação dada no enunciado da tarefa;
- Os não ostensivos possíveis para o seu desenvolvimento, colocando em evidência aqueles que devem fazer parte dos “topos” do aluno e/ou do professor;
- Os ostensivos possíveis para o desenvolvimento das tarefas.

Escolhemos apresentar nesse artigo os resultados da obra de Scipione Di Piero Neto, na sequência denominado apenas Scipione, pois se trata do único autor que foi possível analisar três décadas seguidas.

#### 4. A análise dos livros didáticos

Para a análise dos livros didáticos selecionados, levamos em conta a relevância atribuída, por cada um dos autores, à noção de sistemas de equações lineares, em relação às outras noções introduzidas na mesma série. Esse trabalho foi apresentado por meio de um organograma segundo modelo proposto por Tavignot (1991) seguido de comentários, conforme o exemplo abaixo para o livro de Scipione (1999).

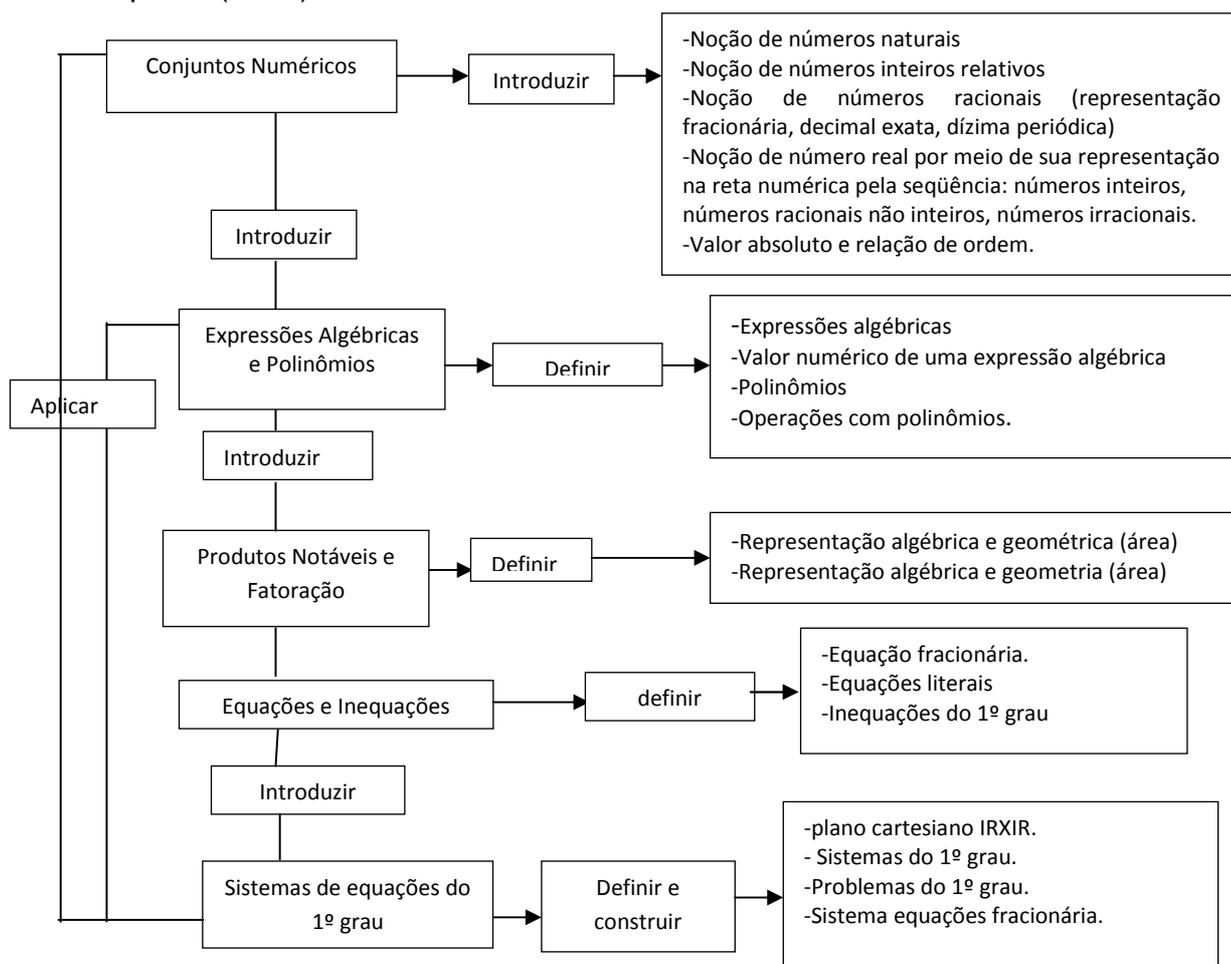


Figura 2: Organograma da obra de Scipione (1999)

Em seguida, procuramos identificar o papel do professor e do estudante, com base na noção de “topos”, introduzida por Chevallard e Grenier (1997), a saber:

Para a análise da parte que corresponde ao trabalho do professor, examinamos a introdução teórica da noção de sistemas de equações lineares e os exercícios resolvidos (“topos” do professor).

Para a análise da parte que corresponde ao trabalho do estudante, examinamos os exercícios propostos (“topos” do aluno).

#### 4.1. Exemplo da análise de um livro: Análise do livro didático de Scipione (1999)

Antes de introduzir a noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, o autor retoma e/ou desenvolve noções de conjuntos numéricos, expressões algébricas e polinômios, produtos notáveis e fatoração, equações e inequações, articulando novos conhecimentos com aqueles construídos anteriormente. Utilizando um discurso tecnológico para justificar essa articulação, o autor propõe exemplos de aplicação da Matemática em situações contextualizadas e, quando possível, mostra como uma noção se desenvolveu historicamente. Dessa forma, o autor segue as indicações da Proposta do Estado de São Paulo (1988) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998).

Para o caso específico da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas o autor propõe o estudo algébrico das possibilidades de solução do sistema, por meio da representação geométrica das retas que correspondem a cada equação no sistema cartesiano ortogonal. Com relação às tarefas propostas aos estudantes, verificou-se que as quatro atividades que envolvem sistemas lineares privilegiam a abordagem algébrica.

### 5. Resultados da análise

Verifica-se que, em geral, as tarefas apresentadas não exigem o cálculo literal (regras e leis que permitem a aplicação da técnica) podendo ser resolvidas apenas por meio do cálculo numérico, isto é, utilizando o cálculo mental, o que denominamos ponto de vista das tentativas, como mostra o seguinte exemplo.

Um menino quer cortar um pedaço de barbante com 30 cm de comprimento em duas partes, de forma que uma dessas partes meça o dobro da outra. Quanto deverá medir cada parte? (São Paulo, p.130, 1991).

parte 1	parte 2	soma	total de barbante
2	4	2 + 4	6 cm
5	10	5 + 10	15cm
10	20	10+20	30cm

Figura 3: Ponto de vista das tentativas

As tarefas “situação matemática transformada em um contexto cotidiano”, “sistemas de equações lineares algébricos explícitos pedindo ou não o método a ser aplicado”, “estudo gráfico das possibilidades de solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas” correspondem a apenas 39% do total das tarefas propostas aos estudantes. Dessas tarefas, 34% são tarefas de aplicação de um

método de solução de sistemas, ou seja, se destinam ao desenvolvimento de técnicas de solução de sistemas.

A tarefa “situação matemática algébrica transformada em um contexto do cotidiano” exige que os estudantes dominem noções de equações e sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas. Em nossa análise, verificamos que esse tipo de atividade corresponde a apenas 4% do trabalho proposto aos estudantes, o que pode dificultar a possibilidade de aplicação desse conhecimento em outros contextos, no futuro.

A evolução do ensino da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas está associada às sugestões de novas abordagens contidas na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1991), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e na Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2008) em virtude do grande número de possibilidades de aplicação de noções e procedimentos relativos aos sistemas lineares. Embora não esteja explícito, esses documentos sugerem que é necessário um discurso tecnológico para justificar as técnicas utilizadas, sem que, para isso, recorra-se à teoria que justifica essas técnicas, ou seja, as estruturas algébricas.

Em relação ao questionamento inicial, foi possível observar que para o ensino da noção de sistemas de equações lineares para estudantes com idades entre 13 e 14 anos, a abordagem proposta, tanto na Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1991) como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), está associada à solução de situações-problema do cotidiano e para um tipo de sistema mais restrito, isto é, o sistema de duas equações e duas incógnitas.

Verificou-se que nos livros didáticos existe um número reduzido de tarefas que permitem a introdução da noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas e as escolhas variam em função dos ostensivos e não ostensivos que lhes são associados.

Além disso, com o auxílio da grade de análise e pelo exame dos livros didáticos escolhidos apresentados na figura 3 abaixo, foi possível observar que nas obras atuais considera-se a noção de equação do 1º grau, como conhecimento já construído, quando se introduz a noção de sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas. Essa escolha pode justificar o fato de não se utilizar no processo de ensino e aprendizagem da noção de sistemas de duas equações e duas incógnitas o ponto de vista das tentativas ou o cálculo mental mesmo quando esse é possível. Existe também a preocupação dos autores das três obras recentes, apresentados na figura 1 acima, em articular os quadros numérico, geométrico e algébrico, mesmo quando as noções são introduzidas por meio dos ostensivos que as representam, o que exige a utilização de um discurso tecnológico para justificar as passagens de uma representação à outra, ou a aplicação de conhecimentos prévios, no desenvolvimento das tarefas propostas.

Consideramos que as escolhas estão associadas aos “topos” do professor e do estudante, uma vez que variam em função do tipo e da quantidade de tarefas que ficam a cargo de cada um deles. Dessa forma, parece que nas obras atuais analisadas existe a preocupação de se levar em conta os quatro tipos de tarefas consideradas nesta pesquisa.

## 6. Conclusão

É possível observar que houve um avanço na abordagem sugerida nos livros didáticos, no que se refere à construção da noção de sistemas de equações lineares, quando a ênfase é dada aos sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas, pois esse ensino não se limita apenas ao caráter ferramenta para a solução de tarefas da própria Matemática, de outras ciências ou do cotidiano. Ou seja, seu caráter objeto também é destacado pela exploração e discussão das possíveis soluções dos sistemas, tanto algébrica quanto geometricamente.

Observa-se ainda que entre as décadas analisadas, houve um momento (década de 50) em que se estudavam os sistemas de equações lineares de  $m$  equações e  $n$  incógnitas, mas o nível privilegiado era apenas o nível técnico. Essa época é seguida por uma abordagem na qual se privilegia o objeto matemático e não se consideram as situações de aplicação do conhecimento em jogo – abordagem característica da época da Matemática Moderna (década 60).

Pode-se dizer que a partir da década de 70, aqui analisada por meio do livro didático de Scipione (1971) inicia-se uma articulação entre o caráter ferramenta e o caráter objeto dos sistemas de duas equações e duas incógnitas, que vem sendo empregada até o presente.

É importante observar que essa articulação é feita por meio de uma mudança entre os quadros algébrico e geométrico, não exigindo um trabalho fundamentado nas estruturas de grupo aditivo, multiplicativo, abeliano, anel e corpo, como se propunha na época da Matemática Moderna.

## Bibliografia

- Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais. (PCN): Matemática* / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF.
- Bosch, M. & Chevillard, Y. (1999). *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs*. Recherches en didactique des mathématiques 19(1), 77-124.
- Castrucci, B. et al. (2002). *A Conquista da Matemática*. Editora FTD, São Paulo. Brasil.
- Chevillard, Y. & Grenier, D. (1997). *Le topos de l'élève*. Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques. Houlgate: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.
- De Farias, S. (1959) *Curso de Álgebra Ensino Fundamental*. Editora Globo, Rio de Janeiro. Brasil.
- Di Pierro Netto, S. (1991) *Matemática Scipione*. Editora Scipione, São Paulo. Brasil.
- Di Pierro Netto, S. (1982) *Matemática Conceitos e Operações*. Editora Saraiva, São Paulo. Brasil.
- Di Pierro Netto, S. (1971) *Matemática na Escola Renovada*. Editora Saraiva, São Paulo, Brasil.
- Iezzi, G. et al. (2000) *Matemática e Realidade*. Editora Atual, São Paulo, Brasil.
- Iezzi, G. et al. (2005) *Matemática e Realidade*. Editora Atual, São Paulo, Brasil.
- São Paulo (1991). *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: Ensino fundamental*. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. – São Paulo: SEE/CENP.

São Paulo (2008) *Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo*. Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. – São Paulo: SEE/CENP.

Sangiorgi, O. (1966) *Matemática Curso Moderno*. Editora Moderna, São Paulo, Brasil.

Tavignot, P. (1991) *L'analyse du processus de transposition didactique, l'exemple de la symétrie orthogonal au collège*. Thèse de Doctorat, Paris :Université René Descartes.

**Marlene Alves Dias** é Matemática e Educadora Matemática com doutorado em Didática de disciplinas, opção Matemática, pela Universidade Denis Diderot – Paris 7 – França em 1998. É professora – pesquisadora do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante do Brasil – UNIBAN. Desenvolve pesquisas, orienta estudantes de mestrado e doutorado e é avaliadora de cursos do INEP. [alvesdias@ig.com.br](mailto:alvesdias@ig.com.br).

**Tânia Maria Mendonça Campos** é Matemática com Doutorado em Matemática pela Universidade de Ciências de Languedoc (Montpellier – FR) em 1979. Tem Pós-doc em Matemática pela Universidade de Londres em 1991 e em Educação Matemática na Universidade de Oxford em 2007. Atualmente é Pró-reitora de Pós-Graduação e Coordenadora do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo; assessora ad-hoc do CNPq, CAPES e FAPESP e avaliadora institucional do INEP. Tem experiência na coordenação de grandes projetos de formação continuada de professores de matemática financiados pelo PNUD/SEE-SP. [taniammcampos@hotmail.com](mailto:taniammcampos@hotmail.com).

**Veleida Anahí da Silva** é Doutora em Ciências da Educação pela Universidade de Paris 8 França e Pós-doutorado pela Universidade Federal de Sergipe, graduada em Ensino de Ciências e Matemática. Atualmente é professora Adjunta da Universidade Federal de Sergipe, no Departamento de Educação e no Núcleo de Pós-graduação em Educação e no Núcleo Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, que ela coordena. Fundou e lidera o Grupo de pesquisa Educação e Contemporaneidade - EDUCON. Pesquisa os temas Relação com os saberes cotidianos e científicos, Didática do Ensino de Ciências e Matemática, Formação de professores, Jovens universitários de espaços populares. Publicou livros e capítulo de livros na França e no Brasil. [vcharlot@terra.com.br](mailto:vcharlot@terra.com.br).

**Bernard Charlot** é livre docente em Educação pela Universidade de Paris X, Nanterre (1985). Atualmente é Professor Visitante Nacional Senior (bolsa CAPES) na Universidade Federal de Sergipe e membro dos cursos de Pós-Graduação em Educação e em Ensino de Ciências e Matemática da UFS. É também Professor Titular Emérito da Universidade Paris 8 e Professor Afiliado da Universidade do Porto, Portugal. Na UFS, líder do Grupo de pesquisa CNPq Artes, Diversidade e Contemporaneidade e membro do Grupo de pesquisa CNPq Educação e Contemporaneidade (EDUCON). Principal tema de pesquisa nos últimos anos: a relação dos alunos com o saber e a escola. Publicou também sobre Globalização e Educação. Possui numerosos livros e artigos, publicados ou traduzidos em muitos países. Já orientou muitos mestrados, doutorados e supervisionou vários pós-doutorados (na França e no Brasil). [bernard.charlot@terra.com.br](mailto:bernard.charlot@terra.com.br).