UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 58. Abril 2020
Páginas 25-47

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

La Transformación de Funciones en el Aula de Física

Sergio Pablo Farabello, María Trigueros

Fecha de recepción: 26/11/2019
Fecha de aceptación: 15/04/2020

Resumen	Se realizó una investigación con 38 estudiantes universitarios de un curso de Física I con el fin de indagar acerca de los conocimientos matemáticos que ellos han aprendido acerca de la transformación de funciones, tras haber cursado Cálculo Diferencial. La investigación se enmarca en la Teoría de la Representaciones Semióticas de Duval. Se realizó una evaluación diagnóstica referida a las transformaciones $Af(Bx+C)+D$ aplicadas sobre las funciones x^2 y $\operatorname{sen} x$. El artículo contribuye mostrando las posibles causas de las dificultades presentadas por los estudiantes a la luz del marco teórico, además de proponer estrategias que contribuyan a mejorar su aprendizaje. **Palabras clave**: Transformación, cuadrática, senoidal, representaciones
Abstract	A study was carried out with 38 university students enrolled in the Physics I course in order to investigate what they had learned about the transformation of functions as part of their mathematical knowledge, after having completed a course on Differential Calculus. The research is framed by Duval's Theory of Semiotic Representations. A diagnostic assessment test was carried out concerning transformations of the form $Af(Bx+C)+D$ applied to the functions x^2 and $\sin x$ when the parameters included in them are varied one by one. The article contributes by showing possible reasons to explain student's difficulties in the light of the theoretical framework, and by proposing strategies that may contribute to improve student's learning. **Keywords**: Transformations, quadratic, sine, representations
Resumo	Foi realizada uma pesquisa com 38 estudantes universitários de um curso de Física I, a fim de investigar o conhecimento matemático que eles aprenderam sobre a transformação de funções, depois de concluir a cadeira de Cálculo Diferencial. A pesquisa está enquadrada na Teoria das Representações Semióticas de Duval. Foi realizada uma avaliação diagnóstica referente às transformações $\boldsymbol{Af(Bx+C)+D}$ aplicadas às funções $\boldsymbol{x^2}$ e $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}$. O artigo contribui mostrando as possíveis causas das dificuldades apresentadas pelos alunos à luz do referencial teórico, além de propor estratégias que contribuam para melhorar sua aprendizagem. **Palavras-chave:** Transformação, quadrática, senoidal, representações

1. Introducción

El conocimiento matemático constituye una herramienta básica para la comprensión y el manejo de la realidad en la que vivimos. Dado que se encuentra presente en la vida cotidiana de los estudiantes, se esperaría que su experiencia cotidiana haga posible la construcción del saber matemático (Cadenas, 2007). Las evaluaciones internacionales, sin embargo, muestran que éste no es necesariamente el caso. En estas evaluaciones, como por ejemplo en el estudio PISA, el grado de competencia de los estudiantes no focaliza en los contenidos matemáticos en sí, sino en el grado de *alfabetización matemática* de los estudiantes, esto es, en su capacidad para utilizar sus competencias matemáticas con el propósito de afrontar los desafíos de las cuestiones cotidianas.

Los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) establecieron los principios básicos para comparar el rendimiento en matemáticas entre los países participantes, definiendo a la competencia matemática como (OCDE, 2004, p. 37):

> la capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de estos individuos como ciudadanos constructivos, responsables y reflexivos.

Por otra parte, Cabral y Delgado (2011) investigaron sobre la integración curricular de la Matemática y la Física en un curso de primer año en la universidad y en su trabajo destacan la percepción del profesor a cargo del curso acerca de que a los alumnos les era más fácil cursar Matemática que Física, ya que en Física tenían dificultades para razonar un problema dado y resolverlo utilizando los temas estudiados en Matemática. En la primera de las situaciones problemáticas, fue necesario que los estudiantes hicieran uso de los conceptos de trigonometría, vectores en dos dimensiones, fuerza, torque, condiciones de equilibrio traslacional y rotacional, solución de ecuaciones, interpretación y diseño de gráficos. En la segunda situación problemática planteada, los estudiantes debieron emplear conceptos de vectores en tres dimensiones, fuerza, torque, cálculo vectorial, solución de ecuaciones, dinámica traslacional y rotacional y generación de gráficos.

Cabral y Delgado (Op. cit.) atribuyen la facilidad por las matemáticas a la diferencia de tiempo de exposición de los estudiantes a los conceptos matemáticos respecto de los conceptos físicos a lo largo de su formación primaria y secundaria. Además, atribuyen la percepción de los estudiantes de sentirse más seguros en el terreno de la Matemática que en el de la Física, ya que en esta última es necesario reconstruir una serie de elementos matemáticos a partir de una situación realista. En el marco de la investigación, se realizó un trabajo de integración curricular, en el que los autores destacan las bondades del hecho de que cuando se requiere un tema en el área de Física que ha sido explicado previamente en Matemática, era posible utilizar la misma notación, lo que permitía que los alumnos no se confundieran con el significado y uso de los símbolos, normalmente diferente en cada una de estas disciplinas, al dictarse las asignaturas por separado y sin ningún tipo de integración.

Lopes y Costa (1996) afirman que los profesores de Física tienen la sensación de que, cuando los estudiantes se enfrentan a problemas de carácter cuantitativo, no saben nada de Matemática. Explican de esta manera el fracaso de los estudiantes frente a la resolución de dichos problemas. Bachelard (1986), en cambio, advierte sobre el obstáculo a superar en el caso de los problemas cuantitativos, cuando los alumnos, al tratar de resolverlos, se terminan enredando en números y fórmulas sin saber realmente lo que hacen, perdiendo la capacidad de reflexionar sobre los problemas formulados y los resultados obtenidos.

Para Moreno (2005), la enseñanza de los principios del cálculo resulta generalmente problemática y, aunque los profesores sean lo suficientemente capaces como para enseñar a los estudiantes a resolver de manera más o menos mecánica los problemas estándar, esas acciones no conducen a comprender lo que significa una verdadera comprensión de los conceptos y de los métodos de pensamiento matemáticos. Como consecuencia del empleo de esa forma de enseñanza, Moreno ha detectado problemas relacionados con la dificultad que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problemáticas contextualizadas y que requieren una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos que les permita utilizarlos en contextos diversos (Selden, Selden y Mason, 1994). Esto ocurre porque en un curso común de Cálculo Diferencial e Integral se llega, a lo sumo, a resolver los denominados “problemas de aplicación” propuestos en los libros de texto, los que generalmente no responden a la realidad (Camarena, 2007). Además, según lo reportado por Moreno (2005), algunos profesores de Matemática reconocen deficiencias en su formación inicial alejada de los fenómenos físicos, químicos y biológicos, lo que los conduce a dar explicaciones superficiales de algo que no dominan.

Camarena (2007) reporta entrevistas realizadas a docentes de materias específicas de carreras de ingeniería en las que ellos afirman que utilizan muy poco los conceptos matemáticos relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral, dado que en sus clases no se involucran en la deducción de las ecuaciones o fórmulas que utilizan para resolver los problemas aplicados. Esta práctica conlleva, según la autora, a que los estudiantes formen ideas falsas acerca de qué y cómo aprender y también de la importancia de la matemática en su futura vida profesional. Por ello, Camarena propone el estudio de la Matemática en contexto.

2. Fundamentación del problema

Carcavilla Castro y Escudero Escorza (2002) investigaron sobre la resolución de problemas de Física estructurados, que aparecen en los libros de texto tradicionalmente empleados en los cursos universitarios de Argentina (Tipler y Mosca, 2010; Young y Freedman, 2009; Alonso y Finn, 2009; Giancoli, 2007; Halliday, Resnick y Krane, 2001; entre otros) que, si bien son poco motivadores para los estudiantes, son considerados de difícil sustitución en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física. Según estos investigadores, cualquiera que sea la metodología de enseñanza que se emplee, los problemas mencionados formarán parte de etapas imprescindibles para la ejecución de otras tareas más abiertas y motivadoras. En su investigación, uno de los criterios considerados para analizar la resolución de los problemas fue la *utilización de las matemáticas*, definida como "*determinar si se han utilizado correctamente los instrumentos matemáticos pertinentes, en su aspecto fundamental, sin considerar errores leves de cálculo*". Un ejemplo de *error leve de cálculo* sería realizar un mal despeje de una variable en forma ocasional.

Como resultado de la investigación, se encontró que los fallos por causa de errores en los procedimientos matemáticos fueron bastante escasos; el porcentaje de aciertos fue del 88%. Las dificultades se relacionaron más bien con la comprensión de los conceptos. En sus conclusiones afirman que la influencia de la falta de conocimientos matemáticos, importante en algunas ocasiones, no constituye el factor principal causante de los fallos en la resolución de problemas.

Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés (2007), basados en los trabajos de Hegarty, Mayer y Monk (1995) y de Nesher (1976), investigaron las dificultades en el aprendizaje de la resolución de problemas, y se preguntaron si las mismas proceden de deficiencias en el conocimiento procedimental básico asociado con los cálculos y las técnicas algebraicas o más bien proceden de la construcción de modelos mentales deficientes que impiden llegar hasta el modelo que requiere el problema y el planteo de las ecuaciones involucradas en dicho modelo. A través de su investigación concluyeron que, en una situación típica de transferencia en la que se dispone de un problema fuente totalmente resuelto, los estudiantes no presentaron dificultades en el nivel de manejo algebraico, ya que una vez que lograron plantear las ecuaciones en forma correcta, demostraron saber resolverlas. Pero dieron cuenta de problemas graves de comprensión de los problemas algebraicos con enunciados. Por ello, los investigadores aconsejan poner énfasis en la comprensión de las interrelaciones existentes entre los elementos presentes en las situaciones problemáticas para facilitar la construcción del modelo de la situación y en las técnicas de traducción entre los lenguajes natural y matemático para facilitar la construcción del modelo del problema a partir del modelo de la situación.

Las funciones cuadráticas y senoidales aparecen en varios temas de la currícula de Física, y el significado y variación de sus parámetros resulta importante para el análisis de los fenómenos físicos estudiados. La función cuadrática aparece, entre otros ejemplos, como modelo matemático en el estudio del movimiento rectilíneo uniformemente variado, del movimiento de proyectiles y del de un cuerpo suspendido de un resorte. La función senoidal aparece al estudiar, entre otros, el movimiento armónico simple, el péndulo simple, la onda armónica, un circuito RC en corriente continua y un circuito RLC en corriente alterna.

El estudio de las transformaciones funcionales se ha tornado importante en los cursos previos al cálculo en las instituciones de educación superior porque ofrece a los estudiantes nuevas oportunidades de utilizar y reflexionar sobre el concepto de función (Lage y Trigueros Gaisman, 2006). Este tema se enseña en diferentes grados y niveles (Bingham, 2007), donde los estudiantes encuentran que algunos de sus componentes son difíciles de entender y trabajar (Eisenberg y Dreyfus, 1994; Zazkis, Liljedahl y Gadowsky, 2003).

Las transformaciones de funciones han sido caracterizadas por algunos autores (Larson y Hostetler, 2007; Jiménez, 2011; Stewrat, Redlin y Watson, 2012; Zill y Dewar, 2012) como *rígidas* y *no rígidas*, según los efectos que las transformaciones producen sobre la gráfica. Las transformaciones rígidas modifican la posición de la gráfica en el plano cartesiano pero no su forma, correspondiendo a este grupo las traslaciones o desplazamientos horizontales y verticales y las reflexiones respecto a los ejes de coordenadas. Las transformaciones no rígidas cambian la forma de la gráfica, conservando aproximadamente la forma original, correspondiendo a este grupo los estiramientos y las compresiones. Ambos tipos de transformaciones —rígidas y no rígidas— pueden darse solas o combinadas.

Darmawan y Pranoto (2011) y Daher y Anabousi (2015) utilizaron al software dinámico GeoGebra como herramienta tecnológica con el propósito de investigar si su utilización en el aula ayudaría a los estudiantes a manipular las funciones, poder observar sus transformaciones y llegar a las relaciones matemáticas vinculadas con ellas. Los autores dan cuenta que las características de GeoGebra no sólo contribuyeron al avance de los estudiantes en sus niveles de comprensión de las transformaciones de funciones según APOE, sino que probablemente provocaron dificultades para llevar a cabo estas transformaciones verbalmente, probablemente relacionadas con la falta de representación verbal en la interfaz GeoGebra.

Una de las problemáticas que se presenta en el curso de Física I es el hecho de que los alumnos no saben trabajar con el concepto de transformación de funciones en aplicaciones a modelos matemáticos de los fenómenos físicos. Generalmente, se presentan dificultades para reconocer los efectos que producen los diferentes parámetros que aparecen en las funciones senoidales y en las cuadráticas.

Este trabajo indaga acerca de los conocimientos matemáticos que los estudiantes de un curso de Física I tienen acerca de la transformación de funciones, específicamente la cuadrática y la senoidal, tras haber cursado Cálculo Diferencial.

Se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuáles son las dificultades que muestran los estudiantes al trabajar la transformación de funciones?, ¿es posible caracterizar esas dificultades en términos del uso de distintos registros de representación?

3. Marco teórico

Se adopta como marco teórico la Teoría de las Representaciones Semióticas, desarrollada por Raymond Duval (1996).

En la matemática aparecen diferentes sistemas de escritura: numéricas, algebraicas, notaciones simbólicas, lógicas y funcionales que constituyen una especie de lenguaje paralelo al lenguaje natural. Cada una de ellas constituye una forma semiótica diferente, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos. Los conceptos matemáticos no son objetos reales, por ello es necesario recurrir a distintas representaciones para poder estudiarlos. Pero se debe tener presente que dichas representaciones no son “el objeto matemático” propiamente dicho, sino una mera representación del mismo. Poder distinguir entre los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, triángulos, etc.) y sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, representaciones gráficas, tablas, figuras, etc.) es fundamental en la comprensión de los conceptos matemáticos.

El contenido de la representación depende en parte de la forma, en la medida en que el “contenido” es lo que el registro utilizado permite presentar explícitamente del objeto representado. Por ejemplo, la ecuación de una parábola y el gráfico de la parábola se refieren al mismo objeto matemático, pero no tienen exactamente el mismo contenido que permita identificarlo, puesto que no dan cuenta de las mismas propiedades del objeto (Guzmán, 1998). Es a través del análisis de distintas representaciones de un mismo objeto matemático y de su identificación con ese objeto que los individuos comprenden el significado de ese objeto. Las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas —en lenguaje natural o formal— o no discursivas —figuras, gráficos, esquemas, etc. Esta producción no responde única o necesariamente a una función de comunicación: puede responder también a una función de objetivación o a una función de tratamiento.

Duval (1999) denomina registros semióticos a aquellos sistemas con reglas que permiten combinar signos y efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación, es decir, aquellos que posibilitan transformar cualquier representación semiótica en otra representación semiótica.

Para Duval, la actividad cognitiva en matemáticas requiere no sólo del uso de diferentes sistemas semióticos de representación, pasando por la distinción entre el objeto y su representación, sino también de la articulación de estos diferentes sistemas semióticos. En relación con los registros semióticos, diferencia dos tipos específicos de transformaciones entre representaciones semióticas: *tratamientos* y *conversiones*. Un tratamiento es una transformación de una representación semiótica en otra representación semiótica, al interior de un mismo registro (por ejemplo, un cálculo numérico, o la aplicación de una propiedad a una expresión algebraica), es decir, se trata de una transformación interna a un registro; mientras que una conversión es una transformación de una representación en un cierto registro, en otra representación en un registro diferente (por ejemplo, la representación en un registro algebraico que puede transformarse en la representación en un registro figural), es decir, se trata de una transformación externa al registro inicial.

Según Duval, el problema central del aprendizaje en matemáticas está asociado a la transformación de conversión, en tanto necesidad de reconocer representaciones totalmente diferentes, producidas desde registros diferentes, como representaciones de un mismo objeto; reconociendo que esta coordinación de registros de representación, esencial para la actividad matemática, dista de ser una actividad simple y natural. Duval afirma que la diversificación de los registros de representación semiótica es la constante del desarrollo de los conocimientos tanto desde el punto de vista individual como del científico y del cultural. La importancia para el funcionamiento del pensamiento, generalmente se explica por las dificultades o limitaciones que encuentra la función de comunicación que existe entre los registros.

Las representaciones semióticas, para la matemática, adquieren una importancia significativa tanto para la comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática (Duval, 1999). El tratamiento de los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Por ejemplo, al realizar un cálculo numérico, notamos que existe una dependencia del sistema de escritura elegido: escritura decimal, escritura fraccionaria, escritura binaria, etc.

La coordinación y la habilidad para realizar el cambio de registro de cualquier representación semiótica se tornan fundamentales en el aprendizaje de la matemática, ya que pueden ayudar a superar los obstáculos que normalmente aparecen (Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui, 2012).

4. Metodología

La implementación de este estudio se llevó a cabo en el mes de agosto de 2016 con los alumnos que cursaban Física I, asignatura correspondiente al segundo semestre del primer año del Ciclo de Cursado Común de la Facultad de Bromatología de la Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina, con los estudiantes que habían terminado exitosamente un curso de Cálculo Diferencial en el semestre anterior, cuyo contenido incluía el tema de transformación de funciones.

Los estudiantes fueron informados acerca del alcance de la evaluación diagnóstico que se les proponía realizar, y se les indicó que la misma no tenía carácter evaluativo, sino que formaba parte de una investigación en Enseñanza de la Matemática. Se aclaró que la participación en la actividad era voluntaria y que podía realizarse en forma anónima.

Se aplicó un instrumento (Anexo 1) diseñado en base a la tesis de Cortés Robles (2016) y adaptado en función de los objetivos de la investigación. La evaluación se realizó sobre dos temas: la función cuadrática y la función seno. En ambos casos se indagó sobre las transformaciones básicas de las funciones, haciendo hincapié en los registros algebraicos, gráficos, y las visualizaciones que deberían producirse de acuerdo a la variación de los parámetros que las definían.

Para cada función se definieron tres consignas, subdivididas cada una de ellas en cuatro apartados relativos a los efectos que causaban los diferentes parámetros empleados en las siguientes transformaciones: $Af(x)$, $f(Bx)$, $f(x+C)$ y $f(x)+D$.

En la primera consigna se solicitó escribir la expresión de la función transformada tras la aplicación de los parámetros mencionados, con el fin de obtener registros algebraicos para el análisis. La consigna requiere de una transformación de tratamiento al interior del registro algebraico.

En la segunda consigna se solicitó graficar las transformaciones que se producían en la función original tras la aplicación de los parámetros, teniendo en cuenta valores positivos y negativos. Para facilitar el trabajo de los estudiantes, se les suministró la gráfica de la función original. Los registros que se obtuvieron en esta actividad fueron gráficos. La consigna requiere de una transformación de tipo tratamiento al interior del registro gráfico.

En la última consigna se pidió a los estudiantes que describieran las transformaciones que se producían en la función original al aplicarle los parámetros (positivos y negativos). Los registros obtenidos corresponden al lenguaje natural y al formal y la consigna requiere de una conversión entre distintos registros de representación.

Cada evaluación consta entonces de 12 ítems para cada función (4 por cada consigna), totalizando un total de 24 respuestas esperadas de cada estudiante.

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas en conjunto con los profesores que integran la cátedra utilizando criterios definidos por uno de los autores del presente trabajo. Las respuestas de los alumnos se volcaron en una tabla en la cual se describió la respuesta dada por cada uno de los estudiantes para cada una de las consignas del instrumento. En esa tabla se volcaron tanto frases textuales de los estudiantes como observaciones de los profesores que analizaron las respuestas después de discutirlas entre ellos y llegar a un acuerdo común.

Los resultados obtenidos de las respuestas se clasificaron en cuatro categorías:

- “B”: respuesta correcta o parcialmente correcta
- “R”: respuesta con algún aspecto correcto
- “M”: respuesta totalmente incorrecta
- “-”: sin respuesta

Una respuesta fue clasificada como “B” si el estudiante pudo reconocer todos los efectos que un determinado parámetro producía en la función transformada, diferenciando (en forma completa o incompleta) lo que ocurría para diferentes valores que podía tomar dicho parámetro. Por ejemplo: qué ocurría si los parámetros A y B eran, en valor absoluto, mayor o menor que 1, o cuántas unidades se desplazaba (y en qué sentido) la gráfica de la función según el valor de los parámetros C y D.

Si el estudiante logró reconocer los efectos de los parámetros, pero no mencionó lo que pasaba según los valores que ellos tomaban, la respuesta se clasificó como “R”.

El instrumento de evaluación se aplicó a un total de 38 alumnos, quienes contaron con una hora y media para resolverlo.

Para llevar a cabo el análisis de las respuestas al instrumento, los 38 estudiantes fueron identificados con la letra “M” o la letra “T” seguida de un número correlativo, según fueran de la comisión de la mañana o de la tarde. Así, los estudiantes aparecen denominados desde M1 hasta M24 y desde T1 hasta T14.

5. Resultados

En primer término, se presentan los resultados generales obtenidos de las respuestas al cuestionario. Se analizan las respuestas a cada una de las consignas, sin relacionar las correspondientes a los distintos registros para una misma transformación

Posteriormente se realiza un análisis de las mismas consignas en términos del marco teórico.

5.1. Análisis general de los resultados

La tasa de respuestas totales fue del 67% (n = 615). Para la función cuadrática se obtuvo el 77% (n = 349) de respuestas, mientras que para la función seno el 58% (n = 266). El 30% (n = 270) del total de las respuestas fueron correctas o parcialmente correctas, y el 27% (n = 247) fueron totalmente incorrectas.

5.1.1. Registros algebraicos

El 68% (n = 26) y el 66% (n = 25) de los estudiantes construyó en forma correcta la expresión algebraica de la función cuadrática para los parámetros A y D, respectivamente.

El 45% (n = 17) y el 42% (n = 16) de los estudiantes escribió incorrectamente la expresión algebraica de la función cuadrática para los parámetros B y C, respectivamente.

Para la función senoidal, en cambio, los mayores porcentajes se obtuvieron para las respuestas correctas en todos los ítems que conformaban la consigna.

Tal como ocurrió con la función cuadrática, la expresión correspondiente a los parámetros A y D con el 61% (n = 23) y el 55% (n = 21), respectivamente, fueron las de mayor tasa de respuestas correctas.

El 26% (n = 10) de los estudiantes escribió incorrectamente la expresión algebraica de la función cuadrática para los parámetros B y C. Por ejemplo, nueve estudiantes escribieron Bx^2 en lugar de B^2x^2 y nueve escribieron $x^2 + C$ en lugar de $(x + C)^2$.

5.1.2. Registros gráficos

En esta consigna se solicitó graficar la función $y = f(x)$ transformada por los parámetros A, B, C y D. Se dividió en cuatro ítems, de la misma forma que en los registros algebraicos.

Los estudiantes tuvieron más éxito al responder sobre los efectos de los parámetros A y D en la función cuadrática.

El 42% (n = 16) y el 55% (n = 21) de los estudiantes graficó en forma correcta las transformaciones de la función cuadrática para los parámetros A y D, respectivamente. Mientras que el 37% (n = 14) y el 55% (n = 21) de los estudiantes graficó incorrectamente las transformaciones de la función cuadrática para los parámetros B y C, respectivamente.

Para la función senoidal, en cambio, los mayores porcentajes correspondieron a las respuestas incorrectas para todos los parámetros, destacándose las referentes al parámetro B, donde el 39% (n = 15) de los estudiantes respondió en forma errónea.

Los mayores porcentajes de respuestas correctas se obtuvieron para los efectos de los parámetros C y D, con el 26% (n = 10) y el 39% (n = 15), respectivamente.

Tan sólo el 11% (n = 4) de los estudiantes pudo responder correctamente o en forma regular la consigna referida a los efectos del parámetro B. Pero, a diferencia de lo ocurrido con la función cuadrática, hubo un mayor porcentaje de respuestas correctas referidas a los efectos del parámetro C (26%, n = 10) que a los del parámetro A (13%, n = 5).

5.1.3. Registros lingüísticos (lenguaje natural y formal)

Duval (1996) afirma que las representaciones semióticas juegan un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas. Estas representaciones pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural o en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos o esquemas). Las representaciones no discursivas han recibido mucha atención y, aunque la importancia de los registros lingüísticos, tanto en lenguaje natural como formal han sido considerados por algunos autores tales como Guzmán (1998) y Oviedo *et al.* (2012), en general no han recibido la misma atención que los registros de representación no discursiva. En esta sección se consideran los resultados obtenidos en relación a las producciones discursivas.

En esta la tercera consigna se solicitó describir las transformaciones que se producen en la función $y = f(x)$ al aplicar las transformaciones según los valores de los parámetros A, B, C y D. Se dividió en cuatro ítems, de la misma forma que en los registros algebraicos y gráficos.

Para la función cuadrática, el mejor desempeño de los estudiantes ocurrió para el parámetro D, donde el 29% (n = 11) respondió en forma correcta.

Para los efectos debidos a los parámetros A, B y C se obtuvieron los peores resultados de los estudiantes, con el 39% (n = 15), 34% (n = 13) y el 32% (n = 12), respectivamente.

El 53% (n = 20) de los estudiantes no respondió nada sobre los efectos del parámetro B.

Para la función senoidal, ocurrió algo similar a lo de la función cuadrática, con la diferencia que las respuestas correctas de los efectos debidos al parámetro A (16%, n = 6) fueron mayores que las correspondientes al parámetro D (13%, n = 5).

Para los parámetros A, B y C se obtuvieron los peores resultados de los estudiantes, con el 34% (n = 13), 26% (n = 10) y el 21% (n = 12), respectivamente.

Hubo una alta tasa de consignas sin responder: el 66% (n = 25) de los estudiantes no respondió sobre el efecto del parámetro B, el 50% (n = 19) sobre los parámetros A y C, y el 47% (n =18) sobre el parámetro D. Consideramos que estos resultados pueden deberse al hecho de que en las clases de matemática, en general, no se solicita a los estudiantes que describan el comportamiento de los parámetros ni que expliquen lo que dice un teorema, por ejemplo. Ello conduce a que los estudiantes no pongan atención a este aspecto y no reflexionen sobre los procedimientos que aplican aún cuando los docentes los consideren correctos.

5.2. Análisis de las transformaciones de registros

Para determinar si los estudiantes lograron superar algunos de los obstáculos que normalmente aparecen en la comprensión de un concepto matemático, se analizó la coordinación y la habilidad de los estudiantes para realizar el cambio de registro de sus propias representaciones semióticas (Oviedo et al., 2012).

En términos del marco teórico adoptado, se analizaron las transformaciones de una representación semiótica en otra, al interior del mismo registro (*tratamientos*) y las transformaciones de una representación en un determinado registro, en otra representación en un registro diferente (*conversiones*).

5.2.1. Función cuadrática

Transformación $T(x) = Af(x)$

Ninguno de los estudiantes advirtió que, para un valor dado de x, la transformación $T(x) = Af(x)$ modifica la imagen de la función transformada respecto de la función básica, aumentando o disminuyendo su valor absoluto, según que el valor de A sea mayor o menor que uno. Los estudiantes que emitieron alguna respuesta sólo hicieron referencia al cambio de la apertura o al acercamiento o alejamiento de la gráfica a los ejes coordenados. Lo mismo ocurrió para la transformación $T(x) = f(Bx)$. Estos resultados coinciden con lo reportado por otros investigadores (Borba y Confrey, 1996; Darmawan y Pranoto, 2011; Cortés Robles, 2016)

El estudiante T12 representó correctamente en los tres registros los efectos de la transformación debida al parámetro A. No sólo advirtió los efectos del signo de A en la concavidad o convexidad de la gráfica y la modificación de su apertura, sino que especificó lo que ocurría con la apertura para valores de A menores y mayores que uno. En el registro lingüístico escribió, para A<0, *"la parábola se invierte y para valores distintos a* -1 *cambia su apertura"*. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*. (Fig. 1)

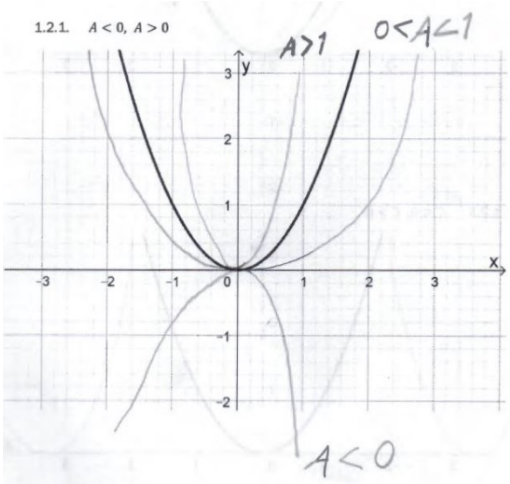


Figura 1. Respuesta 1.2.1 del estudiante T12

El estudiante M5 representó correctamente en los tres registros los efectos de la transformación debida al parámetro A. Advirtió los efectos del signo de A en la concavidad o convexidad de la gráfica y la modificación de su apertura pero omitió, en el registro gráfico, el efecto que tienen en la apertura de la gráfica los valores de A menores y mayores que uno. En el registro lingüístico, en cambio, lo expresó correctamente indicando:

> *(M05)* *"Si A<0, la parábola es cóncava hacia abajo. Si A>0, la parábola es cóncava hacia arriba. Si 0<A<1 la parábola se acerca al eje x y si 1<A se acerca al eje y (las ramas)"*

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

El estudiante M2 representó correctamente en los tres registros los efectos de la transformación debida al parámetro A. Advirtió los efectos del signo de A en la concavidad o convexidad de la gráfica y la modificación de su apertura pero omitió, tanto en los registros gráfico y lingüístico, el efecto que tienen en la apertura de la gráfica los valores de A menores y mayores que uno. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

Transformación $T(x) = f(Bx)$

Tres estudiantes (M2, T7 y T12) representaron correctamente en los tres registros los efectos de la transformación debida al parámetro B. El estudiante M2 no aclaró nada sobre el efecto que tienen en la apertura de la parábola los valores de B mayores y menores que uno. El estudiante T7 reconoció correctamente los cambios en la apertura de la parábola para valores de B mayores y menores que 1. El estudiante T12 en el registro lingüístico expresó que *"la parábola cambia su apertura"* sin mencionar de qué manera, lo que sí hizo en el registro gráfico (Fig. 2).

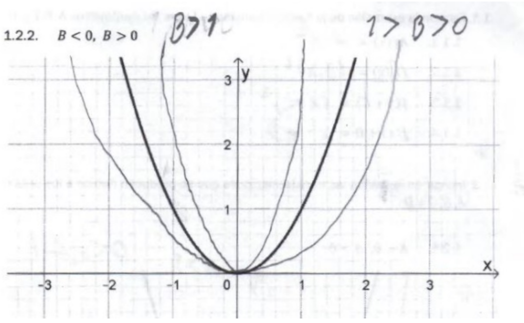


Figura 2. Respuesta 1.2.2 del estudiante T12

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

(M02) Para $f(Bx)$: *"Indica la amplitud. El cuadrado hace a B siempre positivo."* Para B<0: *"El valor negativo se transforma en positivo por el exponente."* Para B>0: *"La parábola toma valores positivos de y, y varía su amplitud"*

(T07) *"Aquí el resultado final siempre va a ser positivo, la variación que se puede apreciar es cuando el valor de B es mayor o menor a 1, sin importar su signo. En este caso, la parábola se vuelve más abierta para B<1 o más cerrada para B>1"*

El estudiante M13 representa en forma correcta en el registro algebraico (B^2x^2), no realiza registro gráfico y en el registro lingüístico manifiesta que *"como B está al cuadrado no importa el signo, siempre su apertura será hacia los valores positivos de Y"*, pero nada dice acerca de la variación de la amplitud. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

<u>Transformación $T(x) = f(x + C)$</u>

Nueve estudiantes representaron correctamente en los tres registros los efectos de la transformación debida al parámetro C. Cinco de ellos omitieron indicar la magnitud del desplazamiento. A modo de ejemplo, se transcriben los registros lingüísticos de los estudiantes T7 y T11 quienes representaron en forma similar en los registros gráficos (Fig. 3 y 4).

(T07) Para C<0: *"La parábola se desplaza hacia la derecha."* Para C>0: *"La parábola se desplaza hacia la izquierda"*

(T11) Para C<0: *"Se desplaza tantos lugares de 'C' para la derecha."* Para C>0: *"Se desplaza tantos lugares de 'C' para la izquierda"*

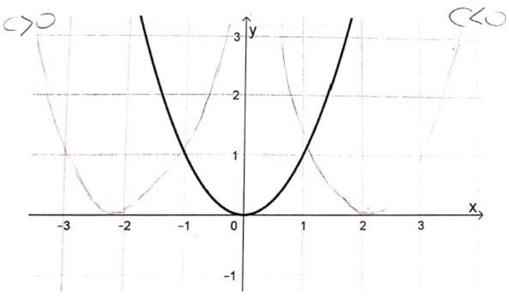


Figura 3. Respuesta 1.2.3 del estudiante T07

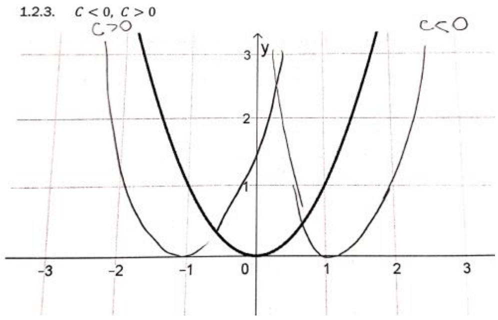


Figura 4. Respuesta 1.2.3 del estudiante T11

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

Dos estudiantes representaron correctamente en los registros algebraico y lingüístico, pero cometieron errores en el registro gráfico. El estudiante M11 graficó las parábolas desplazadas a izquierda y derecha para C>1 y C<1 respectivamente. El estudiante M12 graficó las parábolas desplazadas a izquierda y derecha, pero no indicó nada acerca del signo de C. Ambos estudiantes efectuaron transformaciones de *tratamiento*.

Transformación $T(x) = f(x) + D$

Los estudiantes M13 y T1 lograron representar la transformación en los tres registros en forma correcta. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

(M13) Para D<0: *"La función se desplaza en Y tanto cuanto valgo D. Como D es un valor negativo el desplazamiento será hacia abajo. Para esta función con D negativo la parábola irá en valores - de Y."* Para D>0: *"Como D es positivo el desplazamiento será hacia arriba. Para esta función con D positivo la parábola irá o se encontrará en valores + de Y"*

(T01) Para D<0: *"La función se corre sobre el eje negativo de 'Y' tantos lugares como indique 'D'."* Para D>0: *"La función se corre sobre el eje positivo de 'Y' tantos lugares como indique 'D'"*

Nueve estudiantes representaron correctamente en los tres registros, pero omitieron indicar la magnitud del desplazamiento vertical. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

(M06) *"Si D<0 se produce un corrimiento hacia abajo. Si D>0 se produce un corrimiento hacia arriba"*

5.2.2. Función senoidal

Transformación $T(x) = Af(x)$

Los estudiantes M2 y T12 representaron correctamente en los tres registros los efectos de la transformación debida al parámetro A. Ninguno de los dos aclaró lo que sucedía para valores de A, en valor absoluto, mayores y menores que uno (Fig. 5 y 6).

(M02) Para $Af(x)$: *"Modifica la amplitud y orientación."* Para A<0: *"Se invierte la gráfica por el signo negativo, diferentes amplitudes."* Para A>0: *"Se mantiene igual la gráfica, diferentes amplitudes"*

(T12) Para A<0: *"La onda cambia el tamaño de sus valles y crestas, y se invierte."* Para A>0: *"La onda cambia el tamaño de sus valles y crestas"*

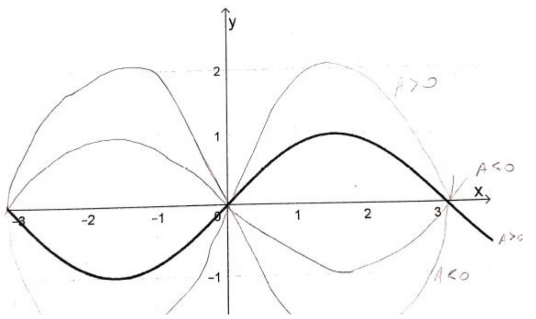


Figura 5. Respuesta 2.2.1 del estudiante M02

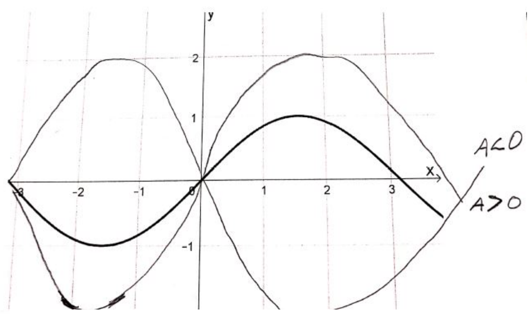


Figura 6. Respuesta 2.2.1 del estudiante T12

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

Los estudiantes M5 y T9 representaron bien en los tres registros, pero tanto en el registro gráfico como en el lingüístico atribuyeron la variación de la amplitud (aumento) sólo a los valores positivos de A. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

(M05) Para A<0: *"La función seno se invierte, donde hay cresta va a haber valle y viceversa."* Para A>0: *"Si A> y se hace más grande, la amplitud de la onda aumenta"*

(T09) *"Si A<0 se invierte el sentido de la función como se indica en el gráfico, todos los valores de Y que antes eran positivos pasan a ser negativos y viceversa. Si A>0 aumenta la amplitud de la función, cada valor original de Y se va a multiplicar por el valor positivo de A"*

Transformación $T(x) = f(Bx)$

Ningún estudiante logró representar correctamente esta transformación en los tres registros, ni identificar simultáneamente en el valor de B la variación de la frecuencia y en el signo de B la simetría respecto del eje x.

El estudiante M10 representó correctamente la transformación en los registros algebraico y gráfico, identificando la variación de la frecuencia y la inversión de la onda para dos valores particulares de B: +2 y -2. No representó la transformación en el registro lingüístico. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

El estudiante M5 representó en los tres registros. En el registro gráfico (Fig. 7) representó una onda senoidal con mayor frecuencia, pero en el lingüístico no hace referencia al efecto del valor y signo de B. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

(M05) *"Si B<0 varía la periodicidad de la onda"*

Los estudiantes M2 y T7 representaron en los tres registros. En los registros gráfico y lingüístico le asignaron al signo de B (y no a valores mayores y menores que

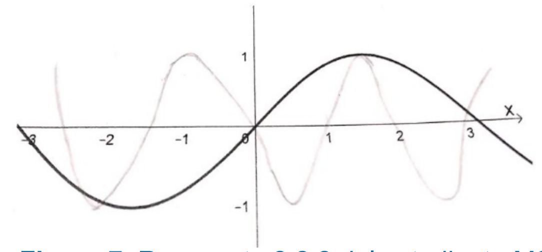


Figura 7. Respuesta 2.2.2 del estudiante M05

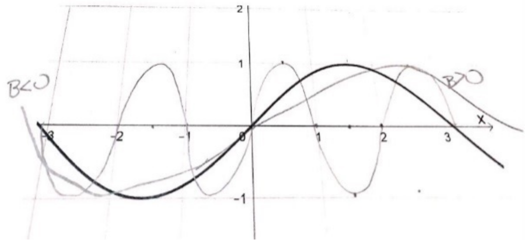


Figura 8. Respuesta 2.2.2 del estudiante T07

uno) la variación del período o de la longitud de onda (Fig. 8). No visualizaron la simetría respecto del eje x para valores negativos de B.

> *(M02)* Para $f(Bx)$: *"Modifica constancia con la que se producen las ondas (período)."* Para B<0: *"Se acorta el período (gráfica mal hecha)."* Para B>0: *"Se alarga el período"*

> *(T07)* Para B<0: *"Aumenta la longitud de onda."* Para B>0: *"Disminuye la longitud de onda"*

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

Transformación $T(x) = f(x + C)$

El estudiante M11 logró representar correctamente la transformación en los tres registros, indicando el efecto del valor y el signo del parámetro C.

> *(M11)* Para C<0: *"Se desplaza hacia la derecha C lugares."* Para C>0: *"Se desplaza hacia la izquierda C lugares."*

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

El estudiante M14 realizó la transformación en el registro gráfico de manera confusa, pero al considerar el conjunto de los tres registros se puede considerar que interpretó en forma correcta el efecto del valor y el signo del parámetro C.

> *(M14)* *"Cuando C es negativo se corre C lugares hacia la derecha. Cuando C es positivo se corre C lugares hacia la izquierda"*

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

Seis estudiantes representaron correctamente la transformación en los tres registros, pero omitieron indicar el efecto del valor de C en la magnitud del desplazamiento de la función.

> *(M05)* *"Si C<0, la función seno se desplaza a la derecha. Si C>0, la función seno se desplaza a la izquierda"*

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

Transformación $T(x) = f(x) + D$

Tres estudiantes (T1 y T11) representaron correctamente la transformación en los tres registros, indicando el efecto del valor y el signo del parámetro D.

(T01) Para C<0: *"La función se corre por el eje negativo Y tantos lugares como indique D."* Para D>0: *"La función se corre por el eje positivo Y tantos lugares como indique D"*

(T11) Para C<0: *"La función se corre por el eje negativo Y tantos lugares como indique D."* Para D>0: *"La función se corre por el eje positivo Y tantos lugares como indique D"*

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

El estudiante T2 representa sólo en los registros gráfico y lingüístico indicando correctamente el efecto del valor y el signo del parámetro D, a pesar de que en el registro lingüístico menciona casos particulares. Además aclara que la onda conserva su amplitud.

(T02) Para D<0: *"D para $f(x)$ corre a la gráfica sobre el eje Y según el valor de D, pero conserva su amplitud. En este caso valores inferiores a 0, o sea -1, -2, -3 en el eje Y."* Para C>0: *"D para $f(x)$ corre a la gráfica sobre el eje Y conservando su amplitud"*

Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

Diez estudiantes representaron correctamente la transformación en los tres registros, indicando el efecto del signo del parámetro D, pero ninguno de ellos indicó la magnitud del desplazamiento, relacionada con el valor del parámetro D. Las transformaciones realizadas fueron *tratamientos* y *conversiones*.

(M17) Para D<0: *"D unidades hacia abajo."* Para C>0: *"D unidades hacia arriba"*

5.2.3. Resumen

Las transformaciones de *conversión*, solas o asociadas a las de *tratamiento*, se dieron en el 69% (n=26) y en el 47% (n=18) de los casos en la construcción de las funciones transformadas $T(x) = f(x) + D$ para las funciones cuadrática y senoidal, respectivamente. En el caso de la función senoidal, las transformaciones de *tratamiento* y *conversión* asociadas, se presentaron con la misma frecuencia (42%, n=16) para la construcción de la función transformada $T(x) = Af(x)$ y $T(x) = f(x) + D$.

En cambio, en la construcción de las funciones transformadas $T(x) = f(Bx)$ y $T(x) = f(x + C)$, las transformaciones de *conversión*, solas o asociadas a las de *tratamiento*, se dieron con menor frecuencia. Para el parámetro B se presentó el 11% (n=4) y 13% (n=15) para las funciones cuadráticas y senoidal, mientras que para el parámetro C las frecuencias fueron del 29% (n=11) y 31% (n=12) respectivamente, siendo a la vez las construcciones en las que más del 70% de los estudiantes no realizó transformaciones ni de *tratamiento* ni de *conversión*.

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Con el instrumento diseñado para esta investigación fue posible determinar que los estudiantes tienen mayor dificultad con las conversiones, particularmente las que tienen que ver con los parámetros B y C como se discute a continuación.

De acuerdo con lo expresado por Duval (1999), se puede concluir que el aprendizaje de las transformaciones de funciones presenta su mayor dificultad con $T(x) = f(Bx)$ —transformación no rígida— y $T(x) = f(x + C)$ —transformación rígida—, por ser las que presentaron menor frecuencia de transformaciones de *conversión*. Otros investigadores, utilizando diferentes marcos teóricos, arribaron a conclusiones similares (Eisenberg & Dreyfus, 1994; Borba y Confrey, 1996; Baker, Hemenway y Trigueros Gaisman, 2001; Zazkis et al., 2003; Lage y Trigueros Gaisman, 2006; Amaya de Armas, 2008; Faulkenberry y Faulkenberry, 2010; Darmawan y Pranoto, 2011).

La dificultad detectada se puede explicar porque los parámetros A —transformación no rígida— y D —transformación rígida— afectan directamente la imagen de la función (multiplican o dividen, y suman o restan a la función original), mientras que los parámetros B y C afectan a la variable independiente, es decir, producen una modificación "***adentro"*** de la función.

Esto coincide con lo reportado por Faulkenberry y Faulkenberry (2010), quienes afirman que "*las transformaciones en la salida son relativamente fáciles para que los estudiantes puedan comprender por qué los efectos de la gráfica son consistentes con sus expectativas intuitivas (…) Sin embargo, las transformaciones a la entrada tienden a dar a los estudiantes más dificultades conceptualmente, muy probablemente debido a que los efectos de las transformaciones en la entrada parecen ser contrarios a la intuición".* Los resultados hallados para el parámetro A —transformación no rígida—, muestran que los estudiantes han tenido menor problema de aprendizaje —mayor cantidad de transformaciones de *conversión* realizadas— en la transformación de la función senoidal que en la cuadrática, lo cual no era lo esperado, dado que la función cuadrática es para ellos una función más conocida que la senoidal y su comportamiento debiera ser más predecible.

En la función cuadrática, un valor de A positivo y mayor que uno, modifica el conjunto imagen asignándole valores cada vez mayores, provocando que a menor desplazamiento en el eje X, resulte una mayor elevación en Y, obteniendo un "*crecimiento uniforme*" y un "*alejamiento*" de la función respecto del eje Y.

Un cambio de signo de A producirá, en cambio, una reflexión de la gráfica con respecto al eje de las abscisas, manteniendo el mismo comportamiento descripto en el párrafo anterior, para valores de A que aumenten, en valor absoluto.

Sin embargo, la función senoidal no tiene el mismo comportamiento que la cuadrática, ya que una variación del valor de A no produce un crecimiento (o decrecimiento) uniforme en la imagen, ni tampoco un acercamiento o alejamiento al eje y, dado que el parámetro A modifica la amplitud de la curva, "*estirando*" o "*comprimiendo*" la función original.

Estos comportamientos son los que sugieren *a priori* que los estudiantes deberían tener una dificultad mayor al momento de describir y representar gráficamente los efectos que el parámetro A produce en la función senoidal respecto de los que produce en la función cuadrática. La evidencia hallada contrasta con este supuesto, lo cual debería ser motivo de futuras investigaciones. Una explicación posible podría ser que, como los estudiantes se encontraban cursando Física y habían estudiado el movimiento armónico simple y algunos fenómenos ondulatorios, la función senoidal no les resultara tan lejana.

El 35% (n=13) y el 26% (n=10) de los estudiantes realizaron transformaciones de *tratamiento* o *conversiones* para la función cuadrática y la senoidal, respectivamente, para el parámetro C. Estos resultados son también contrarios a lo reportado por Faulkenberry y Faulkenberry (2010), lo cual puede obedecer a que los estudiantes hayan logrado memorizar que $f(x+C)$ produce un desplazamiento horizontal de la función hacia la izquierda de tantas unidades según el valor de C, y que $f(x-C)$ produce un desplazamiento en sentido inverso, contrario a la intuición (Zazkis et al., 2003; Consciência y Oliveira, 2011).

En este estudio no se encontraron dificultades en cuanto a la caracterización de las transformaciones como rígidas o no rígidas, ya que los parámetros B y C corresponden a las primeras, mientras que los parámetros A y D corresponden a las segundas, presentando entre ambos tipos de transformaciones grados de dificultad similares. Por otra parte, se considera que la no respuesta a los ítems que requieren de descripción, se debe, como se mencionó, a su poco uso en las clases de matemática. Dado que el uso de este registro es indispensable para estimular la reflexión de los estudiantes, consideramos que debiera sugerirse a los profesores que se introduzca con mayor frecuencia en las clases y exámenes.

Dada la importancia de la aplicación del concepto de transformación de funciones cuadráticas y senoidales en otras asignaturas, principalmente en Física —descriptas en la fundamentación de este trabajo—, es necesario generar líneas de investigación que indaguen en profundidad las dificultades aquí reportadas para poder caracterizarlas y diseñar estrategias didácticas adecuadas para tratar de disminuirlas.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, M. y Finn, E. (2009). *Física. Volumen I: Mecánica*. Ciudad de México, México: S. A. Alahambra Mexicana.

Alonso, M. y Finn, E. (2009). *Física. Volumen II: Campos y Ondas*. Ciudad de México, México: S. A. Alahambra Mexicana.

Amaya de Armas, R. (2008). Transformaciones básicas de las funciones. En Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. 487-495.

Bachelard, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique contribution à une psychanalise de la connaissance objective*. París, Francia: J. Vrin

Baker, B., Hemenway, C. y Trigueros, M. (2001). On transformations of functions. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Phycology of Mathematics Education, 1*, 100-107

Bingham, A. (2007). *Teaching Transformations of Functions using Modern Dance: An Experiment Pairing a Modern Dance Class with College Algebra*. Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. February 22 –25, 2007, San Diego. Mission Valley, California. http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/papers/bingham.pdf

Borba, M., y Confrey, J. (1996). A Student's Construction of Transformations of Functions in a Multiple RepresentationalEnvironment. *Educational Studies in Mathematics*, 319-337

Cabral, R. y Delgado F. (2001). Bondades de la integración curricular en física y matemáticas en la adquisición de conocimientos y habilidades. *Revista Iberoamericana de Educación, 54*(5). ISSN: 1681-5653

Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la Escuela de Educación de la Universidad de Los Andes. *Orbis. Revista Científica Ciencias Humanas, 2*(6), 68-84.

Camarena, P. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática, 10*(1), 145-175.

Carcavilla Castro, A. y Escudero Escorza, T. (2004). Los conceptos en la resolución de problemas de Física «bien estructurados»: aspectos identificativos y aspectos formales. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 213-228.

Consciência, M., Oliveira, H. (2011). Function concept and transformations of functions: the role of the graphic calculator. The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, February 7-13, 2011, Rzeszów, Poland.

Cortés Robles, A. (2016). *Caracterización gráfica de las funciones senoidales*. (Tesis inédita de maestría). Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Daher, W. y Anabousi, A. (2015). Students' recognition of function transformations' themes associated with the algebraic representation. *Journal of Research in Mathematics Education, 4*(2), 179-194. doi: 10.4471/redimat.2015.1110

Darmawan y Pranoto, I. (2011). *On The Teaching Of Analyzing The Effects Of Parameter Changes On The Graph Of Functi*on. International Seminar and the Fourth National Conference on Mathematics Education "Building the Nation Character through Humanistic Mathematics Education". Department of Mathematics Education, Yogyakarta State University, Yogyakarta, July 21-23, 2011.

Duval, R. (1996). Quel Cognitif Retenir en Didactiques des Mathématiques? *RDM, 16*(3), 349-382.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*, traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Eisenberg, T., y Dreyfus, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. In L. Burton & C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 153-158. Londres, Reino Unido.

Faulkenberry, E. y Faulkenberry, T. (2010). Transforming the Way We Teach Function Transformations. *Mathematics Teacher, 104(1)*, 29-33.

Giancoli, D. (2007). *Física 1: Principios con aplicaciones*. Ciudad de México, México: Printece Hall México.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 5-21.

Halliday, D., Resnick, R. y Krane, K. (2001). *Física (Vol I)*. Ciudad de México, México: Compañía Editorial Continental.

Hegarty, M., Mayer, M. y Monk, C. (1995). Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*(1), 18-32.

Jimenez, J. (2011). *Matemáticas IV: Funciones, Enfoques por competencias*. 2da edición, Mexico: Pearson.

Lage, A.E. y Trigueros Gaisman, M. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American. Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, 2, 23-30.

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. H. (2008). *Functions and Their Graphs*. In Precalculus: A Graphing Approach (5th ed., pp. 128–132). New York: Houghton Mifflin Company.

Lopes, B. y Costa, N. (1996). Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: fundamentación, presentación e implicaciones educativas. *Enseñanza de las Ciencias, 14*(1), 44-61.

Moreno Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

Nesher, P. (1976). Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 369-388.

OCDE. (2004). Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana. Madrid, España: Santillana Educación S.L.

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria, 13*, 29-36.

Sanjosé, P., Valenzuela, T., Fortes, M. y Solaz-Portolés, J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 6*(3), 538-561.

Selden, J., Selden, A. & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results*, MAA

Notes No. 33, 1994, 19-26. Washington, DC: Mathematics Association of America

Stewart, J., Redlin, L., & Saleem, W. (2012). *Transformaciones de funciones*. In Precálculo: Matemáticas para el cálculo (6th ed., pp. 179–185). México: Cengage Learning.

Tipler, P. y Mosca, G. (2010). *Física Para la Ciencia y la Tecnología (Vol. I)*. Barcelona, España: Reverté.

Tipler, P. y Mosca, G. (2010). *Física Para la Ciencia y la Tecnología (Vol. II)*. Barcelona, España: Reverté.

Young, H. y Freedman, R. (2009). *Física Universitaria (Vol. I)*.Ciudad de México, México: Pearson.

Young, H. y Freedman, R. (2009). *Física Universitaria con Física Moderna (Vol. II)*.Ciudad de México, México: Pearson.

Zazkis, R., Liljedahl, P. y Gadowsky, K. (2003). Conceptions of function translation: obstacles, intuitions, and rerouting. *The Journal of Mathematical Bahavior, 22*(4), 435-448.

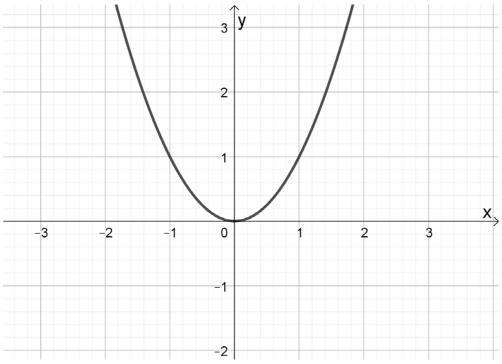
Zill, D., & Dewar, J. (2012). *Funciones*. In Precálculo con avances de cálculo (pp. 49–128). México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

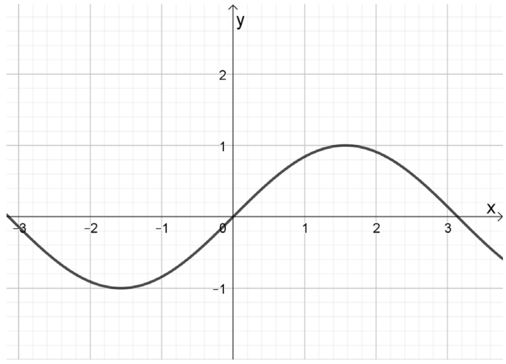
ANEXO

Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$

1. Escribir la expresión de la función transformada por los parámetros $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ y D
   - 1.1. $Af(x) =$ $\qquad$ $Ag(x) =$
   - 1.2. $f(Bx) =$ $\qquad$ $g(Bx) =$
   - 1.3. $f(x + C) =$ $\qquad$ $g(x + C) =$
   - 1.4. $f(x) + D =$ $\qquad$ $g(x) + D =$
2. Indicar en las gráficas las transformaciones que se producen debido a los parámetros $A, B, C\ y\ D$
   - 2.1. $A < 0,\ A > 0$
   - 2.2. $B < 0,\ B > 0$
   - 2.3. $C < 0,\ C > 0$
   - 2.4. $D < 0,\ D > 0$

UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN: 1815-0640
Número 58. Abril 2020
Páginas 25-47
http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION





3. Completar la tabla, describiendo las transformaciones que se producen en las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ según los valores de los parámetros $A, B, C\ y\ D$

Parámetro	Cuadrática	Senoidal
$A < 0, \quad A > 0$	$Af(x)$	$Ag(x)$
$B < 0, \quad B > 0$	$f(Bx)$	$g(Bx)$
$C < 0, \quad C > 0$	$f(x + C)$	$g(x + C)$
$D < 0, \quad D > 0$	$f(x) + D$	$g(x) + D$

Datos de identificación de los autores

Farabello, Sergio Pablo
Especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y la Matemática. Facultad de Bromatología, UNER, Argentina.
Estudiante del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, Mención Matemática. UNICEN, Argentina.
Lugar de residencia: Gualeguaychú, Entre Ríos, Argentina.
Codirector del Proyecto de Investigación 25D/057 denominado “Estrategias heurísticas para la resolución de problemas matemáticos vinculados al perfil profesional en el primer nivel de las carreras de grado”. Años 2013/2017.
Integrante del Proyecto de Investigación denominado “Exploración de las dificultades en el aprendizaje de las ciencias experimentales para obtener elementos que configuren estrategias de enseñanza”. Años 2002/2005.
PUBLICACIONES
Kindsvater, N. M.; Martinelli, E. A.; Arévalo, N.; Lapalma, L.; Rodríguez, D. O.; Tesouro, R. A.; Farabello, S. P.; Fava, L. (2008). Evaluación de estrategias de procesamiento de información en la enseñanza de ciencias experimentales. *Ciencia, docencia y tecnología 36*: 13-42. ISSN 0327-5566
serpafa67@gmail.com, Luis N. Palma 2518, (2820) Gualeguaychú, Entre Ríos, Argentina, +54 9 3446 660495
ORCID: 0001-9870-2753

Trigueros, María
Lic. en Física UNAM, México. M. en C. Física, UNAM, México y Doctorado en Educación en la Universidad Complutense de Madrid, España.
Investigadora en Educación Matemática y profesora de Matemáticas en el ITAM, México. Miembro de la Academia Mexicana de Ciencias y del Sistema Nacional de Investigadores de México, Sus temas de investigación incluyen uso de la tecnología en la enseñanza de las Matemáticas; la enseñanza y el aprendizaje del concepto de variable en el álgebra elemental, y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la universidad.
ALGUNAS PUBLICACIONES
Trigueros, M. (2019). The development of a linear algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM Matematics Education*, December pp 1-14. Springer Berlin Heidelberg Print ISSN1863-9690- Online ISSN1863-9704, https://doi.org/10.1007/s11858-019-01064-6
Rodríguez J., M.; Parraguez G., M.; Trigueros G., M. (2018). Construcción cognitiva del espacio vectorial R2. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 21, núm 1, pp. 57-86, ISSN: 1665-2436
Figueroa, A.; Possani, E. & Trigueros, M. (2018). *Matrix multiplication and transformations: an APOS approach in The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 77-91, ISNN: 0732-3123, https://doi,org/10.1016/j.jmathb.2017.11.002
Trigueros, M.; Martínez-Planell, R. & McGee, D. (2018). Student understanding of the relation between tangent plane and the total differential of two-variable functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, Vol. 4, N°.1, pp. 181-197 ISSN: 2198-9745 (Print) ISSN: 2198-9753 (Electronic), DOI: 10.1007/s40753-017-0062-5
Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2013). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer Verlag. ISBN: 978-1-4614-7965-9, DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6
mtriguerosg@gmail.com, Río Hondo 1, Tizapán San Angel, México DF 03810, +52 1 555 6284000
ORCID: 0001-7527-6704