UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Diciembre de 2012, Número 32, páginas 9-27
ISSN: 1815-0640

firma invitada

Enseñanza de las matemáticas: retos en un contexto global y aportes en una retrospectiva histórica

Uldarico MalaspinaJurado

Resumen

En este artículo se exponen reflexiones sobre la importancia de la enseñanza de las matemáticas para el nuevo tipo de sociedad que vivimos. En ese contexto se proponen algunos compromisos a ser asumidos por profesores de matemáticas, matemáticos, investigadores en educación matemática e instituciones educativas. Se destaca la importancia de que los matemáticos puros se involucren en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo en el nivel superior y brinda elementos históricos sobre los aportes de éstos a la educación matemática, considerando a Klein, Hilbert, Polya, Freudenthal, Dieudonné, Thom y De Guzmán. Luego de una exposición breve sobre la educación matemática como disciplina científica, se explicita algunos retos actuales para la enseñanza de las matemáticas y se brinda elementos para asumirlos, con propuestas para el curriculum de la educación básica, para la formación de profesores y para trabajar la resolución de problemas en las clases. El artículo concluye destacando la importancia de investigar sobre la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje y sobre la forma de estimular y desarrollar en los profesores la competencia de crear problemas de matemáticas.

Abstract

This article presents reflections about the importance of teaching mathematics for the new type of society we are currently living. Within this context, proposals are mentioned in order to be adopted by math teachers, mathematicians, researchers in mathematics education and educational institutions. It highlights the importance that pure mathematicians involve in teaching mathematics, especially in the superior level. Moreover, it is offered a historical dimension of the contributions that mathematicians have done to mathematics education, considering Klein, Hilbert, Polya, Freudenthal, Dieudonné, Thom and De Guzman. After a brief introduction on mathematics education as a scientific discipline; some of the current challenges for teaching mathematics are shown as well as a set of elements to face them with some proposals for the basic education curriculum, teacher training and working with problem solving in classes. The article concludes highlighting the importance of researching about the creation of problems that contribute learning mathematics and about encouraging teachers' competencies in math problems creation.

Resumo

Neste artigo expõem-se reflexões sobre a importância do ensino das matemáticas para o novo tipo de sociedade que vivemos. Nesse contexto propõem-se alguns compromissos a ser assumidos por professores de matemáticas, matemáticos, pesquisadores em educação matemática e instituições educativas Destaca-se a importância de que os matemáticos puros se envolvam no ensino das matemáticas, sobretudo no nível superior e brinda elementos históricos sobre os contribuas destes à educação matemática, considerando a Klein, Hilbert, Polya, Freudenthal, Dieudonné, Thom y De Guzmán. Depois de uma exposição breve sobre a educação matemática como disciplina científica, se explicita alguns reptos actuais para o ensino das matemáticas e se brinda elementos para os assumir, com propostas para o curriculum da educação básica, para a formação de professores e para trabalhar a resolução de problemas nas clases. O artigo conclui destacando a importância de pesquisar sobre a criação de problemas que favoreçam a aprendizagem e sobre a forma de estimular e desenvolver nos professores a concorrência de criar problemas de matemáticas.

1. Contexto global

Es fundamental que reflexionemos sobre la importancia de las matemáticas – y en consecuencia de su aprendizaje y su enseñanza – más allá del contexto institucional más inmediato, sea éste un centro de educación infantil, primaria, secundaria o superior. Es importante tomar conciencia de que vivimos en una sociedad con características diferentes a la sociedad de hace unos 30 años; es la llamada "sociedad del conocimiento y la información", o la "era digital", o la época de la "tercera revolución industrial", como la llama Jeremy Rifkin, en la que somos testigos de los grandes avances de la electrónica, la informática, la energía nuclear, la Internet, la comunicación inalámbrica en general, la automatización en la producción, etc. Hay, pues, abundancia de información, gran capacidad de comunicación y avances tecnológicos acelerados. Ante la rapidez de los cambios que se van dando, cada vez se requieren nuevos conocimientos para atender las demandas de la sociedad y, como hace notar Castells (1997), una materia prima importante es la información, pues para manejar la información se elaboran productos que son formas de procesarla y aparatos para hacer más eficientes esos procesamientos. Existe una estrecha relación entre conocimiento e información, pero lo esencial es convertir la información en conocimiento y éste es un importante reto para los docentes, no solo porque nosotros mismos lo requerimos para ejercer creativamente nuestra profesión y nuestra ciudadanía, sino porque debemos incentivar a nuestros alumnos a construir nuevos conocimientos usando la información disponible. Es pertinente recordar lo que nos dice Mario Bunge (2003):

> La información en sí misma no vale nada, hay que descifrarla. Hay que transformar las señales y los mensajes auditivos, visuales, o como fueren, en ideas y procesos cerebrales, lo que supone entenderlos y evaluarlos. No basta poseer un cúmulo de información. Es preciso saber si las fuentes de información son puras o contaminadas, si la información como tal es fidedigna, nueva y original […] si es verdadera o falsa, si suscita nuevas investigaciones […] Mientras no se sepa todo esto, la información no es conocimiento.

Convertir información en conocimiento requiere saber seleccionarla, interpretarla e integrarla; y el conocimiento creado requiere ser comunicado, ampliado, recreado y gestionado. Ciertamente, el papel del docente es sumamente importante para comunicar y recrear ese conocimiento y el papel del investigador para ampliarlo. Esta perspectiva requiere que todos, especialmente los maestros, estemos en permanente actitud de aprender y enseñar, criticar constructivamente, identificar problemas, investigar y comunicar. Himanen (2001), tomando como ejemplo a Linus Torvalds, el creador del sistema operativo Linux, nos dice:

> El aprendizaje, en la sociedad del conocimiento, tiene que estar asociado con la pasión, con el interés por lo desconocido, por las preguntas más que por las respuestas, por el apoyo de otros que conocen, por la resolución de problemas de manera colaborativa.

El proyecto Tuning, dedicado a una reflexión profunda sobre la educación superior, que busca unificar criterios estructurales, organizativos y funcionales en la educación – en particular en la formación de maestros – fue desarrollado inicialmente en Europa y para Europa, con la participación de 135 universidades europeas, que trabajaron desde el 2001 y posteriormente se amplió considerando Latinoamérica. Como es de imaginarse, es natural que hayan contextualizado estas reflexiones; así, en el capítulo denominado Contextualización, del informe final afirman:

> El desarrollo económico y social, en el momento actual, se caracteriza por la incorporación de un nuevo factor productivo, basado en el conocimiento y en el manejo adecuado de la información. Es evidente la intensidad, diversidad y velocidad con las que día a día se crean nuevos conocimientos, lo cual implica que las sociedades deben prepararse y estructurarse para aplicar estos avances, de una manera eficaz e innovadora a sus procesos tecnológicos. (Beneitone, P., Esquetini, C., González, Marty, Siufi, & Wagenaar, 2007, p.23)
>
> Tomando en cuenta la constante y vertiginosa transformación actual del mercado de trabajo, hay que considerar como cierto la rapidez con la que los conocimientos se vuelven obsoletos. Es preciso, entonces, que los estudiantes incorporen en sus procesos de enseñanza-aprendizaje, competencias que les brinden esa capacidad de adaptación permanente al cambio, pero, al mismo tiempo, que los formen como ciudadanos comprometidos. (Ibíd., p. 24)

Con este marco y luego de encuestas realizadas a 876 académicos y 664 graduados de diversos países de Latinoamérica, en el informe se propone 27 competencias específicas a desarrollar, algunas de las cuales son:

- Capacidad de abstracción, análisis y síntesis
- Capacidad de comunicación oral y escrita
- Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica
- Habilidades en el uso de las TIC
- Capacidad de investigación
- Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente
- Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas
- Capacidad creativa
- Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas
- Capacidad para tomar decisiones
- Capacidad de trabajo en equipo

La lectura de esta lista nos lleva a reflexionar sobre la gran responsabilidad que tenemos con los futuros ciudadanos, técnicos y profesionales al enseñar matemáticas a los niños y jóvenes de hoy, pues el aprendizaje de las matemáticas, adecuadamente orientado, contribuirá fuertemente al logro de estas competencias, en todos los niveles educativos, considerando las características propias de cada nivel. Contribuiremos al logro de estas competencias si hacemos esfuerzos personales e institucionales para que en todos los niveles educativos se desarrollen clases de matemáticas que sean amigables; sean brindadas con entusiasmo, motivaciones adecuadas y mostrando conexiones con otros campos del conocimiento; se trabaje con problemas atractivos en forma individual y grupal; se respete las ideas de los alumnos; se estimule la curiosidad y la creatividad; se brinde tiempo para que los alumnos piensen, intuyan, descubran, reflexionen sobre sus errores, encuentren sus propias soluciones, creen sus propios problemas y demostraciones, disfruten de sus aprendizajes y se inicien en la investigación.

2. Compromisos personales e institucionales

Para este tipo de sociedad, es tan grande la importancia de la matemática – tanto en su aspecto formativo como instrumental – y tan grande también la importancia de una adecuada orientación del aprendizaje de las matemáticas, que es un imperativo para los profesores de matemática, para los matemáticos, para los investigadores en didáctica de las matemáticas y para las instituciones educativas, asumir seriamente algunos compromisos como los siguientes:

Los profesores de matemáticas:

- Profundizar sus conocimientos matemáticos y didácticos
- Poner en práctica reflexiva las recomendaciones didácticas que estimulen un aprendizaje participativo y por descubrimiento.

Los matemáticos:

- Investigar para ampliar las fronteras del conocimiento en este campo, así como en sus interrelaciones con otros campos.
- Reflexionar acerca de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- Si ejercen docencia, contribuir al aprendizaje por descubrimiento y a la creación de problemas que estimulen el aprendizaje.
- Fortalecer las relaciones institucionales de matemáticos y de educadores matemáticos.

Los investigadores en didáctica de las matemáticas:

- Ampliar la frontera del conocimiento en esta joven disciplina científica
- Fortalecer la relación entre investigación y docencia de modo que haga más estrecha la conexión teoría-práctica.

Las instituciones educativas:

- Poner especial atención a la adecuada formación matemática y didáctica de los docentes de matemáticas de todos los niveles educativos, considerando a los docentes en formación y en servicio y dando prioridad a la formación de los profesores de educación primaria.
- Crear condiciones favorables para la implementación de métodos de enseñanza de las matemáticas que contribuyan a la participación activa de los alumnos y a su aprendizaje por descubrimiento (planes de estudio, textos, laboratorios, aulas, uso de tecnologías actuales)
- Contribuir a fortalecer la relación entre investigación en didáctica de las matemáticas y el ejercicio de la docencia.

3. Matemáticos y enseñanza de las matemáticas. Algunos elementos históricos

El desarrollo de lo manifestado en la sección anterior puede ser muy amplio y con diversos puntos de vista. Por ahora, recordemos algunos aportes de matemáticos muy reconocidos, con el propósito de contribuir a tener una perspectiva histórica y a tomar conciencia de lo importante que es una estrecha interacción entre matemáticos puros y educadores matemáticos, sobre todo en el nivel superior, que es donde se forman a los técnicos y profesionales que ejercerán como tales en una sociedad aún más tecnificada que la actual y que en consecuencia requerirá mayores competencias relacionadas con la creatividad, la investigación y el autoaprendizaje. Paradójicamente, lo más frecuente en los centros educativos de nivel superior es la enseñanza de las matemáticas de modo meramente expositivo, con más énfasis en la presentación formal y en las “aplicaciones prácticas”, que en la búsqueda de una comprensión profunda de conceptos, basada en la intuición y en el aprendizaje por descubrimiento de los alumnos. Distinguidos matemáticos, desde inicios del siglo pasado, advirtieron estos inconvenientes en la enseñanza de las matemáticas, que son particularmente preocupantes cuando se dan en los centros de formación de profesores.

Félix Klein **(1849 –1925)**

Ciertamente, este destacado matemático – al que recordamos al estudiar los grupos de Klein en el álgebra y la botella de Klein en la topología – marca un hito en la historia de la educación matemática por sus reflexiones y aportes, que siguen siendo referentes importantes en las investigaciones en didáctica de las matemáticas. Klein fue el impulsor del razonamiento funcional (que el concepto de función impregne los planes de estudio de matemáticas) e hizo un legado valiosísimo con su libro en tres tomos, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Matemática elemental desde un punto de vista avanzado), publicado en 1908, 1909 y 1928. El volumen 1, sobre aritmética, álgebra y análisis; el volumen 2, sobre geometría; y el volumen 3, sobre la matemática de las precisiones y aproximaciones. Si bien es cierto que el rigor es parte fundamental de las matemáticas y no puede estar ausente en su enseñanza, es importante tener muy en cuenta lo que nos dice Klein al respecto, con el respaldo de sus valiosos aportes a la matemática llamada pura: “en cierto sentido, las matemáticas han progresado más gracias a las personas que se han distinguido por la intuición, no por los métodos rigurosos de demostración” (citado por Perero, 1994, p. 101). Es tarea de educadores y de investigadores en dicáctica de las matemáticas encontrar el adecuado equilibrio entre intuición y rigor, según los temas y los niveles educativos, recordando que el mismo Klein nos dice que “la enseñanza no puede depender solamente de la materia objeto del estudio, sino sobre todo del sujeto al que se enseña” (citado por Corral, 2010, p. 4). Una muestra del reconocimiento a sus valiosos aportes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas fue el significativo hecho que en 1908, cuando en el IV Congreso Mundial de Matemáticos (IV International Congress of Mathematicians) se acordó crear el *Internationale Mathematische Unterichtskommission* (IMUK)[1], Klein fue elegido su presidente, a pesar de no estar presente en tal congreso. Más aún, en el

[1] Desde 1954 esta comisión se llama International Comission on Mathematical Instruction (ICMI)

2000 el ICMI acordó crear la *Medalla Felix Klein* para hacer un reconocimiento especial a quien haya obtenido logros sobresalientes en la investigación en educación matemática. El premio se otorga bienalmente, desde el 2003, en ceremonia especial, en los International Congress on Mathematical Education (ICME), que tienen lugar cada cuatro años.

***David Hilbert* (1862 -1943)**

Este gran matemático, también alemán, desarrolló ideas muy valiosas no solo para la enseñanza de las matemáticas sino para el entendimiento de la ciencia en general. Son muy conocidos sus aportes a la geometría y al análisis funcional, con la publicación en 1899 de su libro *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de Geometría) y con sus famosos espacios de Hilbert; sin embargo, son menos difundidas sus calificadas ideas – de gran importancia para la enseñanza de las matemáticas – en torno a la construcción de la ciencia y al rol de la axiomatización, considerando a ésta, en palabras de Leo Corry, de la Universidad de Tel Aviv, "como un medio para asegurar la solidez de las teorías existentes, y no como un medio para introducir de manera artificial, teorías basadas en el desarrollo formal de sistemas abstractos de postulados faltos de significado intuitivo" (Corry, 2002). Como respaldo a esta afirmación, Corry toma un párrafo del propio Hilbert, de un curso que dio en 1905, en Göttingen, en el que presentó sistemáticamente la forma en que debería aplicarse su enfoque axiomático a la geometría, la aritmética y la física:

> El edificio de la ciencia no se construye como una vivienda, en la cual hay que establecer primeramente unos cimientos firmes y solo entonces se procede a levantar y a ampliar las habitaciones. La ciencia prefiere hacerse lo antes posible de cómodos espacios por donde pasearse con holgura y es solamente después, cuando aparecen por aquí y por allá los signos de que los cimientos poco firmes no son capaces de sostener la expansión de las habitaciones, que ella se dispone a repuntarlos y fortificarlos. Esto no es un signo de debilidad, sino más bien la vía correcta y natural para su desarrollo. (Citado en Corry, 2004, p. 127)

George Polya (1887 – 1985)

En estas pinceladas históricas es imposible dejar de mencionar a este matemático húngaro que contribuyó notablemente en diversos campos de la matemática, como el análisis real y complejo, la combinatoria, la teoría de números, las probabilidades (Boas,1990) y que hizo un valiosísimo legado histórico a la educación matemática al publicar sus famosos libros vinculados con la resolución de problemas: *How to solve it* , en 1945; *Mathematics and plausible reasoning,* en 1954 (Vol I: *Induction and analogy in mathematics; Vol II: Patterns of plausible inference*); y *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving,* en 1962. En verdad, estos libros, que también están publicados en español, no solo brindan reflexiones profundas sobre la resolución de problemas, sumamente útiles para la tarea docente y de investigación, sino que deleitan al matemático y al educador con muy interesantes problemas. Polya pensó mucho en la tarea docente y con el propósito de ser muy concreto en algunas recomendaciones, en su *Mathematical discovery* consideró sus *Diez Mandamientos para el Profesor*, de los cuales, merecen especial atención los siguientes:

- Demuestre interés por su materia
- Domine su materia
- Deles no solo información sino el "saber hacer", actitudes intelectuales, el hábito de un trabajo metódico.
- Permítales aprender conjeturando
- Permítales aprender demostrando
- No revele de pronto toda la solución – deje que los estudiantes hagan conjeturas antes que Ud. se la diga – déjeles descubrir por ellos mismos tanto como sea posible.

Hans Freudenthal (1905 – 1990)

Matemático alemán con importantes aportes en diversos campos de la matemática, como la topología, la teoría de grupos, la teoría de Lie y la geometría (Springer & Dalen, 2009) que alzó una significativa voz de alerta ante las propuestas, desde 1959, de orientar la enseñanza de las matemáticas, desde la educación básica, con énfasis en lo formal y en el marco de la "nueva matemática" estructuralista. Es famoso su artículo *¿Enseñanza de las Matemáticas Modernas o Enseñanza Moderna de las Matemáticas?* (Freudenthal, 1963) y sumamente interesante su crítica al libro de Algebra Lineal y Geometría Elemental de Dieudonné, publicado en el American Mathematical Monthly (Freudenthal, 1967). Fue fundador de una nueva orientación en la Educación Matemática: la enseñanza de la matemática realista, que ha ido ganando gran influencia internacional, en particular a partir de la aplicación en muchos países del Programme for International Student Assessment (PISA), que toma aspectos fundamentales de sus planteamientos. Fue fundador en 1968 de la primera revista internacional sobre investigación en Educación Matemática: *Educational Studies in Mathematics*, actualmente publicada por la prestigiosa editorial Springer y considerada en la base de datos del Institute for Scientific Information (ISI); también fue gestor del primer congreso mundial sobre educación matemática (International Congress on Mathematical Education – ICME) que se realizó en Lyon en 1969. En Holanda funciona el Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education que continúa el trabajo que inició este distinguido matemático y el ICMI ha creado la *Medalla Hans Freudenthal*, que – de manera similar a la Medalla Félix Klein – desde el 2003 se otorga bienalmente a los investigadores en Educación Matemática que destacan de manera especial por sus aportes en este campo del conocimiento.

Jean Dieudonné (1906 –1992)

Famoso matemático francés, integrante del grupo Bourbaki, con grandes contribuciones a la matemática en el álgebra abstracta, la topología y el análisis funcional. Por su reconocido prestigio como matemático y sus inquietudes por la enseñanza de las matemáticas, fue uno de los conferencistas más influyentes en el célebre Seminario de Royaumont en 1959, presidido por Marshal Stone, otro distinguido matemático norteamericano, que en esa época era presidente del ICMI. El seminario, que reunió a representantes de 18 países, se realizó a iniciativa de la

Organisation for European Economic Cooperation (OEEC)[2] con el propósito de compartir reflexiones sobre la matemática en el nivel escolar. No hay mucha información documentada sobre este seminario, pero ciertamente marcó un hito para la enseñanza de las matemáticas, al recomendar el énfasis en la "nueva matemática" estructurada y formal. En la página web del ICMI[3], se resume: "The most influential talk is that of Jean Dieudonné, whose proposals for the reform of the teaching of mathematics are explicitly inspired by the Bourbaki school". Sus propuestas suscitaron cambios en el mundo occidental en la enseñanza de las matemáticas y también críticas de otros matemáticos, entre los que destaca René Thom.

René Thom (1923 – 2002)

Otro famoso matemático francés, muy conocido por su Teoría de Catástrofes y sus aportes en la geometría diferencial, premiado en 1958 con la Medalla Fields (considerada el "Premio Nobel en Matemáticas"). Preocupado por la tendencia a enseñar "matemáticas modernas" en la década de los 60, con énfasis en lo formal y en la teoría de conjuntos, publicó en 1970, en *L'Age de la Science,* su famoso artículo *Las matemáticas modernas: ¿un error pedagógico y filosófico?* En él, entre otras valiosas reflexiones, nos dice:

> La axiomatización es un trabajo de especialistas, y su lugar no está ni en la enseñanza secundaria ni en la universidad, salvo en profesionales que quieran especializarse en el estudio de los fundamentos. El único nivel que tiene importancia es el de la validez intuitiva local del razonamiento.

En relación a ese artículo, es interesante leer el artículo de Dieudonné (1974) en el que se encuentra párrafos específicos para la enseñanza universitaria, como:

> Tengo la impresión de que (Thom) está pensando en la idea de un sistema axiomático que partiría de la teoría de conjuntos para ir "construyendo" sucesivamente los enteros, racionales y reales. Si es así, debo decir que estoy totalmente de acuerdo con él y con sus afirmaciones respecto a la importancia desmedida que se ha dado a esas "reconstrucciones" del continuo, que han podido tener su utilidad desde el punto de vista histórico.

Y para la enseñanza secundaria:

> Mi opinión es que no debe introducirse ningún sistema axiomático antes de los quince años. Esto no quiere decir que se deba evitar los intentos de deducción lógica, sino todo lo contrario, no hay que perder ninguna oportunidad de convencer a los alumnos del enorme poder de este proceso mental.
>
> Me pregunto si Thom puede realmente creer que el álgebra lineal en un espacio de dos dimensiones es algo "abstracto", lejos del alcance de un estudiante de quince años, cuando resulta que todas las nociones básicas pueden hacerse visibles en la pizarra y que todos los axiomas tienen un significado geométrico inmediato.

[2] Actualmente es la Organization for Economic Co-operation and Development (OECD)
[3] http://www.icmihistory.unito.it/timeline.php

Miguel de Guzmán (1936 – 2004)

Matemático español, que luego de obtener su doctorado en la Universidad de Chicago, con una tesis sobre análisis armónico, regresó a España y desde su cátedra en la Universidad Complutense de Madrid desempeñó un papel crucial para el desarrollo de la matemática y su enseñanza, en España y en los países de habla hispana, tanto por su calidad profesional como por su calidad humana. Escribió muchos libros y fue Presidente del ICMI en dos períodos consecutivos, de 1991 a 1998. A continuación reproducimos un párrafo dedicado a él en la página web del ICMI[4],

> According to Spanish mathematicians, Miguel de Guzmán was a key figure in Spanish mathematics of the twentieth century. Eugenio Hernández and Fernando Soria wrote in the ICMI Bulletin (no. 54, June 2004) that Miguel de Guzmán was a central figure in the development of harmonic analysis in Spain and (…) captivated the enthusiasm of several generations of mathematicians. He was an extraordinary teacher and communicator and his ideas in mathematical education have had a profound influence on the teaching of mathematics in Spain and in the world. His books, translated into several languages, have made accessible to a large audience that extraordinary activity of the human spirit known as Mathematics.

En la revista *Números*, Sierra (2004) recoge varios de las interesantes reflexiones y propuestas de Miguel de Guzmán en torno a la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo:

> La educación matemática se debe concebir como un proceso de inmersión en las formas propias de proceder del ambiente matemático, a la manera como el aprendiz de artista va siendo imbuido, como por ósmosis, en la forma peculiar de ver las cosas características de la escuela en la cual se entronca.
> Esto supone continuo apoyo en la intuición y en lo real.
> Los procesos del pensamiento matemático deben ser lo central de la educación matemática. (p. 90)
> La matemática es sobre todo saber hacer, es una ciencia en la que el método prima sobre el contenido. Hay que conceder una gran importancia al estudio de las cuestiones que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas. (p. 91)

La lista de matemáticos influyentes en la educación matemática puede ser muy larga y difícilmente ser exhaustiva, pues en cada país hubo y hay matemáticos que preocupados por la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina han hecho y hacen aportes significativos. En particular, en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas en el Perú, es imperativo mencionar a los matemáticos peruanos José Tola, César Carranza y César Camacho y al matemático brasileño Elon Lages Lima.

4. Educación Matemática.

Reflexiones como las anotadas en la sección anterior, profundizadas y discutidas en ámbitos universitarios, en institutos de investigación y en foros nacionales e internacionales y complementadas con los aportes tanto desde otros campos del conocimiento - la psicología, la filosofía y la sociología - como con experiencias

[4] http://www.icmihistory.unito.it/portrait/guzman.php

desarrolladas por profesores y matemáticos con gran vocación docente, fueron constituyendo lo que actualmente es ya una joven disciplina científica: la educación matemática[5], como lo sostienen – entre otros autores – Josep Gascón (1998), en su artículo *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*; y más recientemente, y de manera más amplia, Juan D. Godino (2010) en los seis capítulos muy bien documentados de su libro *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica.* Ellos recogen y amplían los trabajos de Higginson (1980) – que sostiene que la matemática, la psicología, la sociología y la filosofía son las cuatro disciplinas fundacionales de la Educación Matemática como disciplina científica – y de Steiner (1985), que sostiene que la didáctica de las matemáticas debe considerarse como una disciplina científica y como un sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica. Así, la enseñanza de la matemática es mucho más que un arte, como se consideraba antiguamente y el aprendizaje no es solo un proceso psico-cognitivo. La didáctica de la matemática deja de ser meramente normativa y se desarrolla en el marco de la epistemología experimental.

En la constitución de esta disciplina científica merece mención especial el trabajo de Guy Brousseau, profesor francés que con gran vocación por la enseñanza de las matemáticas reflexionó mucho sobre sus experiencias de enseñanza de la matemática elemental y profundizó sus conocimientos de matemáticas hasta obtener su Doctorado de Estado. En 1968 propuso la creación de los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) y en 1970 hizo pública su Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), que marca un hito histórico en la didáctica de la matemática como disciplina científica.

Actualmente, hay muchos enfoques teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas entre los cuales están la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), desarrollada por Yves Chevallard; la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), desarrollada por Raymond Duval; el enfoque de Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE), desarrollado por Ed Duvinsky; el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Juan D. Godino, Vicenç Font, Carmen Batanero y otros investigadores; el enfoque socioepistemológico, desarrollado por Ricardo Cantoral, Rosa M. Farfán y otros colaboradores; y las numerosas investigaciones sobre resolución de problemas, que se iniciaron con el ya mencionado matemático húngaro George Polya. Actualmente hay valiosos aportes de otros distinguidos matemáticos contemporáneos, entre los que destaca de manera particular Alan Schoenfeld, de la Universidad de Berkeley, que en el presente año ha recibido el premio Medalla Félix Klein, otorgado por el ICMI.

5. Retos para la enseñanza de las matemáticas

A continuación puntualizamos algunos retos para la enseñanza de las matemáticas, pensando en todos los niveles educativos y especialmente en la educación básica, que pueden ser útiles al elaborar agendas de trabajo e investigación en la educación matemática

[5] En el mundo anglosajón y en Latinoamérica se usa esta expresión. En Alemania, Francia, Italia y España se usa “didáctica de la matemática”. Se pueden usar como sinónimas.

i) *Enseñar la matemática vinculándola con la realidad*

- Con situaciones de la vida diaria
- Con problemas que se dan en otros campos del conocimiento: Ingenierías, Física, Economía, Ciencias sociales, Arquitectura, Psicología, Biología, Arte, etc.
- Con la historia de la matemática y del país
- Con los problemas nacionales
- Con las necesidades que se presentan en una sociedad globalizada, con cambios tecnológicos cada vez más rápidos.

ii) *Ofrecer situaciones de aprendizaje de la matemática con visión de futuro:*

- Desarrollar capacidades de autoaprendizaje
- Desarrollar capacidades de investigación
  - o Identificar, resolver y crear problemas
  - o Entender y crear demostraciones
  - o Resolver y crear problemas usando las TIC.
- Desarrollar capacidades para construir modelos y manejar situaciones complejas
- Desarrollar capacidades para predecir, seleccionando información y usándola adecuadamente.

iii) *Ofrecer situaciones de aprendizaje de la matemática educando en la verdad y la belleza.*

iv) *Ofrecer situaciones de aprendizaje de la matemática que permitan la recreación inteligente.*

v) *Ofrecer situaciones de aprendizaje de la matemática con métodos activos y teniendo en cuenta las nuevas formas de aprendizaje de los niños y jóvenes en el nuevo tipo de sociedad que vivimos.*

Todo esto conlleva retos tanto en la formación y capacitación de profesores de matemáticas como en la revisión de los planes de estudio y en el ejercicio docente propiamente dicho.

5.1 En relación al curriculum de la educación básica. Algunas propuestas:

a) Estimular el cálculo mental y la estimación.

b) Orientar el uso adecuado de calculadoras y software matemático (en particular de geometría dinámica).

c) Desarrollar actividades que hagan intuir y manejar la aritmética modular y otros temas de la matemática discreta. (Elementos de teoría de grafos y de teoría de juegos)

d) Desarrollar actividades que hagan comprender la proporcionalidad directa y su vinculación con las funciones lineales.

e) Presentar diversas situaciones que no correspondan a un "comportamiento lineal" y vincularlas con las funciones cuadráticas, las exponenciales, las logarítmicas o las trigonométricas.

f) Desarrollar actividades que orienten el uso adecuado de criterios estadísticos y probabilísticos para el análisis de la información y para la toma de decisiones.

g) Desarrollar actividades que permitan desarrollar la intuición para la optimización ("*intuición optimizadora*")

h) Prestar más atención a la geometría, bi y tri dimensional. Presentar situaciones de la geometría en la esfera.

i) Presentar situaciones lúdicas que permitan crear problemas, construir modelos y hacer demostraciones a partir del descubrimiento de regularidades y la búsqueda de generalizaciones.

5.2 En relación a la formación académica del profesor de matemáticas

Es claro que será imposible avanzar hacia la formación adecuada del ciudadano de la sociedad de la "tercera revolución industrial" si no contamos con profesores adecuadamente formados. Este es un tema muy amplio, y acá solo hacemos algunas puntualizaciones a tener en cuenta.

Urge una revisión profunda de los planes de formación de los profesores de educación básica. Es particularmente importante – y constituyen un gran capítulo aparte – la formación matemática de los profesores de educación inicial y primaria, pues son ellos los que inician la educación de los futuros ciudadanos. Su pensamiento científico y su cultivo o rechazo a las matemáticas estarán fuertemente influenciados por sus experiencias en estos niveles educativos. No nos detendremos en este caso específico, pero mucho de lo que decimos a continuación, orientado principalmente a profesores de secundaria y superior, debe tenerse en cuenta también para los profesores de educación inicial y primaria.

a) *Formación matemática*

Un criterio básico es que el profesor debe tener conocimientos más amplios y profundos que los que va a enseñar, pero es importante destacar que esto es necesario pero no suficiente para estimular el aprendizaje y el cultivo de tales conocimientos. En ese sentido, es fundamental que el profesor de matemáticas tenga conocimientos avanzados de análisis, álgebra, geometría, estadística y probabilidades y que éstos sean adquiridos con métodos activos, con uso de recursos tecnológicos, tomando conciencia de los contextos históricos y reflexionando aspectos didácticos de investigaciones publicadas en revistas especializadas. La formación matemática de los profesores debe desarrollarse brindándoles experiencias de aprendizaje que les sirvan de referentes para su posterior desarrollo profesional como orientadores del aprendizaje de sus alumnos. No se trata solo de presentarles rigurosamente contenidos matemáticos, sino de estimular la comprensión intuitiva y formal de los mismos, partiendo de situaciones problemáticas a ser resueltas individualmente o en grupos, adecuadamente preparadas, de modo que estimulen su creatividad, su intuición, su competencia de crear problemas, el manejo formal de conceptos y el uso de recursos tecnológicos.

b) *Formación en didáctica de las matemáticas*

Una aclaración importante es que la formación en didáctica de las matemáticas no significa la adquisición de un conjunto de recetas para "enseñar bien" los contenidos matemáticos de un plan de estudios.

La formación de los futuros profesores y la formación permanente de los profesores en ejercicio, debe incluir la reflexión profunda de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a la luz de algunos de los enfoques teóricos ya mencionados, considerar las particularidades de los educandos y sus contextos socioculturales y brindar experiencias en la resolución de problemas, no como un conjunto de técnicas para adquirir rapidez en la obtención de resultados, sino teniendo en cuenta que resolver problemas es una forma de hacer matemática; es decir, analizar, relacionar lógicamente, verificar, conjeturar, demostrar o rechazar conjeturas, buscar diversas posibilidades, examinar casos particulares, pensar en generalizaciones, y desarrollar la intuición matemática y la creatividad. Un estudio profundo que toca estos temas, especialmente sobre el rol de la intuición en la resolución de problemas de optimización desde los primeros niveles de la educación básica, puede encontrarse en Malaspina & Font (2010) y Malaspina (2011a).

La resolución de problemas debe tratarse integradamente con la identificación y con la creación de problemas, pues su importancia es vital no solo en el campo de la didáctica de las matemáticas sino en la matemática misma. Así lo consideran destacados investigadores matemáticos, entre ellos Jean Dieudonné, que nos dice "La historia de las matemáticas muestra que los avances matemáticos casi siempre se originan en un esfuerzo por resolver un problema específico" (Citado en Kleiner, 1986, p. 31). Existen numerosos ejemplos de problemas que han hecho historia en las matemáticas cuyo uso adecuado puede aportar mucho a su enseñanza y aprendizaje. Baste considerar los tres famosos problemas griegos – la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo – que se plantearon aproximadamente en el siglo V a.C. Es interesante revisar cómo durante muchos siglos, destacados matemáticos, entre los cuales están Newton y Gauss, trabajaron buscando una solución al problema de la duplicación del cubo y recién en el siglo XIX, Galois, con una teoría creada por él, demostró rigurosamente su imposibilidad.

Otro aspecto sustancial en la formación en didáctica de las matemáticas es el uso permanente que deben hacer las instituciones dedicadas a la formación y capacitación de profesores de la información sobre educación matemática en general en publicaciones especializadas y en las páginas web de foros nacionales e internacionales. A continuación damos una relación de algunas de ellas, particularmente importantes, que sugerimos sean consultadas tanto por instituciones educativas como por profesores en formación y en servicio.

- RELIME (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa) http://www.clame.org.mx/relime.htm

- UNION (Revista de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática) http://www.fisem.org/web/union/
- UNO (Revista de didáctica de las matemáticas) http://uno.grao.com/
- NÚMEROS (Revista de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas). http://www.sinewton.org/numeros/
- SUMA (Revista de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas) *www.revistasuma.es*
- *Educational Studies in Mathematics*

  http://www.springer.com/education+%26+language/mathematics+education/journal/10649
- Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) http://www.seiem.es/.
- Psychology of Mathematics Education (PME), http://igpme.org/
- Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME) http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/
- International Comission on Mathematical Instruction http://www.mathunion.org/icmi/home/
- National Council of Teachers of Mathematics http://standards.nctm.org/

5.3 En relación a la resolución de problemas en las clases

La resolución de problemas, como ya lo hemos dicho, es esencial en el aprendizaje de las matemáticas y el reto es lograr que en las clases sean ocasiones para que los alumnos disfruten de la belleza de las matemáticas, desarrollen su intuición y pensamiento científicos y tengan experiencias de investigación. En ese sentido, puntualizamos algunas pautas para la resolución de problemas:

- Comprender el problema, identificar la dificultad.
- Conjeturar una solución o un camino para llegar a la solución.
- Organizar la información.
- Experimentar, buscar regularidades.
- Hacer tanteos inteligentes
- Establecer relaciones lógicas.
- Aplicar conocimientos matemáticos.
- Justificar las conclusiones intermedias y finales.
- Encontrar sentido a lo que se desarrolle y a lo que se encuentre, en el contexto del problema.
- Verificar la solución encontrada.
- Examinar otros caminos de solución.
- Modificar el problema para examinar otros casos (¿qué pasaría si ….?) Modificar datos, cambiar la dificultad, considerar casos particulares, pensar en generalizaciones, etc.

Intencionalmente no hemos usado letras ni números en estas pautas porque no son un conjunto de pasos ordenados, uno luego de otro, que deben seguirse para resolver un problema. Parece obvio que lo primero será comprender el problema; sin embargo, por ejemplo, muchas veces la comprensión completa puede obtenerse luego de algunas experimentaciones y del rechazo de algunas conjeturas. Es un reto para los profesores de matemáticas preparar cuidadosamente problemas adecuados para sus clases, considerando actividades individuales y actividades en grupo, partiendo de una situación inicial y proponiendo cuestiones de dificultad graduada en torno a tal situación. A continuación damos detalles de dos problemas usados en experiencias didácticas:

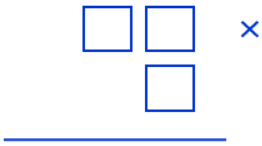
Problema 1:

> *Hallar el mayor producto que se puede obtener multiplicando un número de dos dígitos por otro de un dígito, si tales dígitos deben ser diferentes y pertenecientes al conjunto* {2; 7; 5}

Es un problema sencillo, que propuesto de manera más atractiva ha sido experimentado con niños de cuarto grado de primaria. Veamos una forma de proponerlo considerando una situación inicial y actividades individuales y grupales, que fue usada con alumnos de educación básica, con universitarios y con profesores (con ligeras variaciones, según los casos):

Situación:

> *María escribió en la pizarra los dígitos 2, 7 y 5. La profesora le pide a Pedro que escriba estos dígitos en las siguientes casillas, en cualquier orden, pero sin repeticiones, y que haga la multiplicación indicada.*



Actividades individuales

a) *¿Es posible que Pedro escriba los dígitos de modo que el producto que obtenga sea mayor que 140? En caso afirmativo mostrar y en caso negativo explicar.*

b) *¿Cuántos números pares podría obtener Pedro como resultado de las multiplicaciones, según las diversas maneras de ubicar los dígitos en las casillas?*

Actividades grupales

A. *Comparar y examinar los resultados obtenidos en las actividades individuales.*

B. *¿Cuál es el mayor número que se puede obtener como resultado de una de las multiplicaciones posibles?*

C. *¿Cómo estar seguros de la respuesta a la pregunta anterior?*

D. *Que uno de los integrantes del grupo dé tres dígitos diferentes cualesquiera, todos mayores que cero. Escribir tales dígitos en las casillas, de modo que se obtenga como producto el mayor número posible.*

E. *Encontrar y explicar una regla que permita hacer la actividad anterior sin necesidad de hacer multiplicaciones de tanteo.*

F. *Inventar un problema inspirado en la situación dada.*

Las actividades individuales han sido dadas para familiarizar a cada alumno con la situación dada; la actividad grupal A incentiva la comunicación, el intercambio de resultados individuales, el aprendizaje en grupo y la mayor comprensión de los problemas afrontados individualmente. La actividad grupal B es otra forma de enunciar el problema inicial. Las actividades C, D y E estimulan la búsqueda de una justificación, la experimentación y la generalización. La actividad F estimula la creación de problemas.

Un análisis más detenido de una experiencia didáctica con este problema, en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, puede encontrarse en el número 11 de UNIÓN (Malaspina, 2007). En el número 18 de UNIÓN (Malaspina, 2009a) se analiza una experiencia didáctica con alumnos de secundaria, considerando factores de dos dígitos.

Problema 2

> *Expresa el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto {1, 3, 5, 7, 9}. Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.*

Así formulado, es un problema de programación lineal entera con 5 variables. Lo creamos con el propósito de mostrar que el usual método gráfico para resolver problemas de programación lineal no es aplicable y que es importante ir más allá de los algoritmos, sin reducirse a rutinas, y buscando el desarrollo de la intuición optimizadora. Convenientemente adaptado y en un contexto lúdico, fue resuelto por niños de segundo grado de primaria de Perú y de España. La experiencia didáctica fue expuesta en la 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 34) y está publicada en las actas (Lacasta, Malaspina y Wilhelmi, 2010). En el número 19 de UNIÓN (Malaspina, 2009b) se analizan aspectos didácticos y matemáticos en torno a este problema.

6. Creación de problemas

En los diversos enfoques teóricos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se da – con justa razón – especial importancia a la resolución de problemas. Ciertamente, un objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas es lograr que los estudiantes sepan resolver problemas; y no solo los que figuren en los textos o en las evaluaciones de matemáticas, sino los que se les presenten en la vida cotidiana durante su vida estudiantil y luego en su vida ciudadana y en el ejercicio técnico o profesional. Evidentemente, es muy importante conocer técnicas y seguir ciertas pautas para resolver problemas; sin embargo, en la vida cotidiana y en el ejercicio técnico o profesional, los problemas no aparecen ya redactados como en los textos. Es fundamental entonces – con mayor razón en el contexto global que describimos en el primer apartado – saber identificar el problema como consecuencia de seleccionar la información pertinente y de plantearse preguntas adecuadas. Esta es una capacidad que no es estimulada en la vida estudiantil porque, en el mejor de los casos, el énfasis en los cursos de matemáticas está en la resolución de problemas y no en la creación de problemas. Más aún, se pierden muchas ocasiones de fortalecer el aprendizaje de los alumnos trabajando con problemas contextualizados en su propio medio y con problemas que resulten de iniciativas o preguntas de los propios alumnos.

Surgen entonces como interrogantes naturales: ¿cómo crear, estimular y desarrollar en los profesores la competencia de crear problemas de matemáticas?, ¿qué aportes hay en los enfoques teóricos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas acerca de la creación de problemas?, ¿qué investigaciones se han hecho sobre la creación de problemas en el campo de la educación matemática?, ¿qué pautas pueden orientar en la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas?

Es, pues, un reto para los investigadores en educación matemática desarrollar investigaciones para responder a estas interrogantes y complementar así las numerosas ya existentes sobre resolución de problemas. En los números 28, 29, 30 y 31 de UNIÓN, en *El Rincón de los Problemas*, (Malaspina, 2011b, 2012) se exponen algunas experiencias desarrolladas en el Perú al respecto.

Queda hecha la invitación a que investiguemos más sobre la creación de problemas de matemáticas que estimulen el aprendizaje de esta disciplina y concluimos con el siguiente párrafo de Einstein e Insfeld (1938):

> La formulación de un problema es a menudo más importante que su solución, que puede ser simplemente un asunto de habilidades matemáticas o experimentales. Formularse nuevas preguntas, nuevas posibilidades, considerar preguntas antiguas desde una perspectiva nueva, requiere imaginación creativa y marca un avance real en la ciencia. (p. 92)

Bibliografía

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty, M., Siufi, G. y Wagenaar, R. (2007) *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe final-Proyecto Tuning-América Latina*. Universidad de Deusto; Universidad de Groningen. Recuperado de http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php?option=com_docman&Itemid=191&task=view_category&catid=22&order=dmdate_published&ascdesc=DESC

Boas, R.P. (1990). *George Pólya. A Biographical Memoir*. Washington D.C.: National Academy of Sciences

Bunge, M. (2003) Entrevista de Martha Paz. Disponible en. http://mariobunge.com.ar/entrevistas/lo-importante-es-el-conocimiento-no-la-informacion

Castells, M. (1997). *La era de la información. Economía, sociedad y cultura. Vol. 1. La Sociedad Red.* Madrid: Alianza.

Corral, N, (2010). Félix Klein. La enseñanza de las matemáticas y el software libre. Recuperado de http://www.ciem.unican.es/encuentros/klein/sites/default/files/archivos/corral.pdf

Corry, L. (2002). David Hilbert y su filosofía empiricista de la geometría, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *9 (1)* 27-44.

Corry, L. (2004). *David Hilbert and the Axiomatization of Physics. From 'Grundlagen der Geometrie' to 'Grundlagen der Physik'*. Dordrecht: Kluwer.

Dieudonné, J. (1974). Devons-nous enseigner les mathématiques modernes? . *Bulletin de l' Association de Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Publique. 292*, pp. 69 – 79.

Einstein, A. & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. New York: Simon and Schuster.

Freudenthal, H. (1963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement modern des mathématiques? *L'Enseignement Mathématique 9.* pp. 28 – 44.

Freudenthal, H. (1967). Review of Dieudonné, Algèbre linéaire et géométrie
Élémentaire. *American Mathematical Monthly 74/6,* pp. 744–748

Gascón, J. (1998) Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Vol. 18/1*, nº 52, pp. 7-33

Godino, J.D. (2010) *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica.* Disponible en:
http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *Vol. 1*, n.2 pp. 3-7.

Himanen, P. (2001). *The Hacker Ethic.* New York: Random House.

Kleiner (1986): Famous problems in mathematics: An outline of a course. *For the learning of mathematics*, 6 (1)

Lacasta, E., Malaspina, U. & Wilhelmi, M. (2010*).* Optimization through measurement situations in Grade 2. *En Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Belo Horizonte, Brasil. Vol 3, pp. 201- 208.

Malaspina, U. (2007). El rincón de los problemas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, No. 11, pp. 197 – 204. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/11/Union_011_018.pdf

Malaspina, U. (2009a). Producto máximo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, No. 18, pp. 129 – 134. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/18/Union_018_014.pdf

Malaspina, U. (2009b). ¿Programación lineal en primaria? *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, No. 19, pp. 157 – 161. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/revistas/19/Union_019_018.pdf

Malaspina, U. & Font, V.(2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 75, No.1, pp.107–130.

Malaspina, U. (2011a) *Intuición y resolución de problemas de optimización. Un análisis ontosemiótico y propuestas para la educación básica*. Alemania: Lap Lambert Academic Publishing GMBH & Co.KG -Editorial Académica Española.

Malaspina, U. (2011b). Sobre creación de problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 28*, Diciembre, pp. 159 – 164. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/28/archivo_16_volumen28.pdf

Malaspina, U. (2012a). Hacia la creación de problemas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 29*, Marzo, pp. 155 – 160. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/29/archivo13.pdf

Malaspina, U. (2012b). Resolviendo y creando problemas con profesores de educación básica. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 30*, Junio, pp. 151 – 158. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/30/Archivo_14_de_volumen_30.pdf

Malaspina, U. (2012c). Creando problemas para la educación primaria. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. No. 31*, Setiembre, pp. 131 – 137. Disponible en: http://www.fisem.org/web/union/images/stories/31/archivo_13_de_volumen_31.pdf

Perero, M. (1994) *Historia e historias de matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Polya, G. (1945) *How to solve it*. Princeton University Press.

Sierra, M. (2004). Pensamientos de Miguel de Guzmán acerca de la Educación Matemática. *Números, Vol 59*, pp. 89 – 93.

Springer, T. & Dalen, D. (Eds.) (2009) *Hans Freudenthal, Selecta*. Zürich: European Mathematical Society Publishing House

Steiner, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics,* Vol 5. n. 2, pp. 11-17.

Thom, R. (1970). Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique? *L'Age de la Science 3*, pp. 225 – 236.