REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 53-70

Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico

Silvia Vrancken, Adriana Engler

Fecha de recepción: 4/11/10
Fecha de aceptación: 10/07/12

Resumen	Para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, la variación y los infinitesimales. Esta etapa se caracterizó por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo, en interacción constante con problemas geométricos y físicos. Presentamos los aspectos más importantes del estudio histórico-epistemológico realizado en el marco de una investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. Abarca una revisión histórica de la evolución de la matemática de la variación y el cambio teniendo en cuenta el papel otorgado a la visualización y a las representaciones utilizadas así como los obstáculos que surgieron en esa evolución. **Palabras clave**: derivada, representaciones, visualización.
Abstract	To get to what currently is known as derivative, there had to pass several centuries of investigation of mathematical ideas related to tangents, variation, and infinitesimals. This period was unique in having a component fundamentally visual and intuitive, in constant interaction with geometry and physics problems. We present the most important aspects of the historical epistomology study performed under the research framework about teaching and learning of derivatives. It covers a historical revision of the evolution of the mathematics of change and variation, considering the role of visualization and the utilized representations, as well as the obstacles that emerged from that evolution. **Keywords:** derivative, representations, visualization
Resumo	Para chegar ao que actualmente se conhece como derivada, tiveram que decorrer em vários séculos de desenvolvimento das ideias matemáticas relacionadas com as tangentes, a variação e os infinitesimales. Esta etapa caracterizou-se por ter um componente fundamentalmente visual e intuitivo, em interacção constante com problemas geométricos e físicos. Nos apresentamos os aspectos mais importantes no estudo histórico-epistemológico feito no marco duma investigação sobre o ensino e a aprendizagem da derivada.Inclui uma revisão histórica da evolução da matemática da variação e a mudanza, tendo en conta o papel outorgado à visualización das representações utilizadas bem como os obstáculos que surgiram nessa evolução. **Palavras-chave:** derivada, representações, visualización

1. Introducción

La matemática juega su rol principal cuando es necesario cuantificar o medir cualquier fenómeno y las variaciones que se producen. Se crean modelos abstractos para describir dichos fenómenos y la medición del cambio en los mismos es un aspecto esencial de la variación y el elemento eje en la formación del concepto de derivada. El cálculo tiene reconocida su importancia porque permite encontrar las leyes que describen esos cambios, medirlos y predecirlos.

Por otro lado, el cálculo es la rama de la matemática en la que el número de problemas que suelen presentarse en los procesos de enseñanza y aprendizaje es mayor. A pesar de que la determinación de razones de cambio (idea fundamental del cálculo) está presente de una u otra manera en la vida diaria, todo lo relacionado con él resulta muy abstracto para el alumno en el aprendizaje formal y desemboca en graves problemas para su enseñanza. En general se observa que, si bien el estudiante logra resolver ejercicios y problemas sencillos, surgen grandes dificultades al momento de ingresar en el campo disciplinar y alcanzar a comprender satisfactoriamente los conceptos y métodos de pensamiento que rigen este campo de la matemática.

Enmarcados en este contexto nos propusimos tomar uno de los objetos básicos del cálculo, la derivada, para abordar en una investigación. La derivada es el concepto matemático que permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Son múltiples las aplicaciones de este concepto, ya sea en el ámbito de la matemática como en situaciones correspondientes a otras ciencias.

Dado que el interés de nuestra investigación se centra en comprender cómo los alumnos construyen la derivada y teniendo en cuenta la complejidad de los elementos implicados en el proceso de aprendizaje, intentamos dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y el didáctico (Cantoral y Farfán, 2000).

Por este motivo realizamos una serie de estudios preliminares que tuvieron en cuenta las características del saber en juego (dimensión histórica-epistemológica), las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza (dimensión cognitiva) y el estudio del medio en el que se establecen las relaciones entre alumno, docente y saber (dimensión didáctica). Reconociendo que en el aprendizaje escolar no están exentas las interacciones sociales, incorporamos una cuarta componente, la sociocultural, como integradora de las otras tres, reforzando de esta manera el enfoque sistémico a los fenómenos abordados.

En este trabajo presentamos el análisis correspondiente a la primera dimensión. Por razones de extensión desarrollamos los aspectos que a nuestro entender son los más importantes.

2. Análisis histórico-epistemológico

Un estudio de este tipo debe responder a la pregunta sobre cómo se constituye el objeto de conocimiento. Interesa identificar las situaciones problemáticas a las que las personas han dedicado sus esfuerzos, las características, propiedades y grado de emergencia del concepto, así como las representaciones simbólicas asociadas. Ruiz (1998, p. 105) expresa que el objetivo debe ser “aportar información acerca de la evolución del concepto en los distintos momentos históricos, tratando de identificar las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios del desarrollo de esta noción”.

El análisis epistemológico juega un papel importante en la enseñanza. Al respecto, Farfán (1997) expresa que provee de historicidad a los conceptos matemáticos que normalmente la enseñanza presenta como objetos universales tanto en tiempo como en espacio. Posibilita además la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado, contribuyendo de esta manera a desterrar otra de las ficciones de la escuela, la concepción de que los objetos de enseñanza son copias simplificadas, pero fieles de los objetos de la ciencia.

La idea de buscar en el desarrollo histórico e epistemológico de conceptos pautas para la enseñanza nos provee de un acercamiento metodológico. Cada persona reproduce durante la adquisición de un conocimiento, en síntesis, las etapas por las que atravesó el ser social, en la historia, para la aprehensión de dicho concepto.

En el aprendizaje individual del concepto no sólo se reproducen las etapas esenciales, históricamente hablando, sino también los tropezones que se dieron en su desarrollo histórico. Resulta importante reconocer las nociones que a lo largo de la historia se han mostrado resistentes a su evolución y generalización y que se constituyen por lo tanto en obstáculos para el aprendizaje.

El origen del cálculo está relacionado con los incrementos y las cantidades de cambio. El estudio de la variación en los fenómenos dinámicos es lo que condujo en sus comienzos al estudio de la derivada y al desarrollo del análisis. Los procesos de medir, cuantificar y establecer leyes para el cambio y la variación están en el origen de la noción actual de derivada y su evolución histórica.

Entre los siglos XIV y XVII el interés científico se centró en el estudio de las cualidades en situaciones como el movimiento, la intensidad luminosa o la intensidad de calor. Durante el siglo XVII se trataron grandes problemas para la ciencia que influyeron en su desarrollo y posteriormente en su formalización. Estos problemas surgieron por un lado de la mecánica, con el estudio del movimiento, y por otro lado de la geometría, donde lo que se buscaba era la determinación de tangentes a una curva dada. Newton y Leibniz relacionaron estos dos problemas y proporcionaron un método general para resolverlos. Esta conexión fue gracias a la poderosa herramienta que resultó el método de las coordenadas, que les permitió representar gráficamente la dependencia entre dos variables. Contaban ya con elementos que les permitieron representar funciones y, gracias al poder de estas representaciones gráficas, fue más sencillo relacionar los problemas (Badillo, 2003).

En este sentido, las diversas representaciones de la función y la derivada aparecen desde un principio íntimamente relacionadas, teniendo cada una de ellas un origen histórico y epistemológico diferente.

En base a lo expuesto decidimos estudiar la evolución de estos conceptos en relación a los problemas de variación tratados en los distintos períodos históricos, analizando su desarrollo con respecto al papel otorgado a la visualización y a las distintas representaciones utilizadas. Se consideraron también las concepciones que históricamente se han configurado como resistentes a su evolución y generalización y por lo tanto pueden considerarse como obstáculos epistemológicos. Atendiendo a estos factores hemos dividido el análisis en varias secciones (Castiblanco, Urquina, Acosta y Rodríguez, 2004).

2.1. El mundo antiguo. Los esbozos del estudio de las nociones de variable y dependencia. La representación verbal

Desde la época prehistórica el hombre observó fenómenos naturales relacionados con magnitudes físicas variables: el cambio de posición de las ramas de los árboles por la acción del viento, el cambio en la posición del sol, la luna y las estrellas y su relación con la sucesión del día a la noche, los procesos de producción agrícola y el vínculo con la posición de los astros. Esta observación lo llevó a desarrollar las primeras tecnologías materiales y simbólicas, como herramientas, lenguaje gestual y lenguaje verbal icónico, que sentaron las bases para el surgimiento de sistemas de representación escritos mucho más complejos.

La consolidación de la escritura, hacia el 3000 a.C., promovió la aparición de diversos instrumentos de registro a través de los cuales ha sido posible conocer el saber social y cultural construido a partir de la antigüedad.

Los aportes de las civilizaciones mesopotámicas, en particular la babilónica (2000 a.C. a 600 a.C.), constituyen las referencias conocidas más antiguas sobre el estudio de fenómenos de cambio y de la determinación de leyes cuantitativas a través de tablas.

Su interés estuvo centrado principalmente en la astronomía. Realizaron observaciones sistemáticas de fenómenos que se repetían periódicamente, relacionados con el sol, la luna y los planetas. Efectuaron una compilación de los hechos en tablillas de arcilla que han llegado hasta nuestros días. Sus estudios comprendieron problemas de variaciones continuas, como los períodos de visibilidad de un planeta en relación con el ángulo que forma con el sol o la luminosidad de la luna en intervalos de tiempos iguales. Atraídos por la astrología, su tarea fundamental fue intentar predecir sucesos. Más allá de anotaciones empíricas, en las tablillas se encuentran los intentos por aritmetizar observaciones difícilmente medibles, así como interpolaciones, lineales y geométricas.

Avanzaron en lo que se denomina *álgebra retórica*, en la que los problemas se enunciaban y solucionaban sin utilizar de manera organizada notaciones algebraicas como las actuales. No usaban letras para representar cantidades variables. Los mismos términos, longitud, área y volumen, cumplían con esa finalidad. A pesar de que no figuraban generalizaciones, sino sólo casos concretos, esto no significa que no existiera en su pensamiento conciencia de la generalidad de las reglas o principios. De ser así, no se podría explicar la analogía entre problemas del mismo tipo (Boyer, 1986, c.p. Ruiz, 1998).

Si bien es difícil encontrar aspectos que permitan intuir la existencia de conceptos como variable y función, no es posible desconocer sus aportes en cuanto a los intentos de cuantificar y establecer regularidades en sus tablas.

La civilización griega (alrededor de 2800 a.C. a 600 d.C.) dejó también un inmenso legado. A partir del siglo VI a.C. se preocuparon, especialmente los pitagóricos, por explicar no sólo el cómo sino el por qué de las cosas, lo que impulsó la transformación de la matemática en una ciencia deductiva.

La visualización constituyó una herramienta común de su actividad matemática. Los pitagóricos concibieron y trataron los números y sus relaciones utilizando piedrecillas que llamaban cálculos. Platón se acercó al conocimiento a través de los sentidos. La imagen jugó un papel importante de evocación, permitiendo que la idea o concepto quede almacenada en la memoria. Los Elementos de Euclides contienen muchas imágenes que no se pueden separar del texto para su comprensión.

Desde la época de Heráclito y Zenón fueron tratados problemas vinculados con el movimiento, la continuidad y el infinito, a los cuales Aristóteles dedicó gran parte de su física. En el pensamiento griego existía una idea primitiva de función en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables. Sin embargo estas ideas fueron externas a la matemática.

Al estudiar el movimiento de los cuerpos, Aristóteles se preguntaba sobre cuáles son las causas reales del movimiento. Este marco originó descripciones cualitativas del fenómeno de variación. Por ejemplo, para el caso de la piedra que cae libremente o por un plano inclinado, no generó procedimientos para cuantificar el movimiento, simplemente indagó acerca de la naturaleza del cuerpo que cae y la forma en que se modifican sus atributos durante la caída.

Esta filosofía fue la razón de que, por mucho tiempo, los matemáticos se expresaran en términos de incógnitas y no de variables. Esto los condujo a las proporciones y las ecuaciones y no las funciones. Los griegos consideraron las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades numéricas.

Son atribuibles a los pitagóricos la determinación de algunas leyes simples de la acústica, que constituyen un intento por buscar relaciones cuantitativas de dependencia entre variables físicas, como ser las longitudes de las cuerdas y los tonos de las notas emitidas al pulsarlas. No obstante, este aspecto cuantitativo de las leyes de la naturaleza no fue tratado ampliamente.

El carácter geométrico de la matemática griega, el papel preponderante de las proporciones y la disociación entre número y magnitud son los principales obstáculos que hicieron que en la época antigua el estudio de fenómenos de cambio sea aún muy reducido y que no sea posible hablar de la formulación explícita de nociones como variable, dependencia o función. Otro factor importante es el escaso desarrollo del simbolismo, las expresiones algebraicas no existían, a excepción de los interesantes intentos de Diofanto, aunque en forma retórica, conceptualmente relacionados con la dependencia funcional (Azcárate y Deulofeu, 1996).

2.2. La Edad Media. Avances en las nociones de variable y dependencia. Representación cinemática y geométrica. Primeras notaciones simbólicas.

Este período, que abarca desde la caída del Imperio Romano occidental en el siglo V a.C. hasta el siglo XV, se caracteriza por una larga etapa de oscuridad en Europa. Fueron los árabes, quienes tomaron el relevo de los griegos en cuanto al estudio de las ciencias y permitieron que su legado llegara a occidente. No hubo en esta época cambios sustanciales pero sí algunos resultados concretos. Se incrementó el número de funciones consideradas, que abarcó casi todas las funciones trigonométricas, y se ampliaron también los métodos de estudio.

A partir del siglo XIII, ya en el mundo occidental, la matemática tiende a ocupar un lugar más importante en las ciencias de la naturaleza. Se pone en duda la estricta demarcación entre ella y las ciencias físicas. La preocupación era descubrir lo real, lo permanente, lo inteligible, tras el mundo cambiante de la experiencia, ya sea esa realidad algo cualitativo, según se lo concebía al principio de este período, o algo matemático, como se lo pensó luego (Crombie, 1979, c.p. Ruiz, 1998).

Una de las principales cuestiones que se analizaron fueron los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento. “Se preguntaban por qué los planetas brillan, por qué el viento sopla, por qué se forma el arco iris, por qué la lluvia cae, mientras que el fuego sube. Trataban de encontrar un modelo de universo que respondiese a estas cuestiones” (René de Cotret, 1985, c.p. Ruiz, 1998, p. 111).

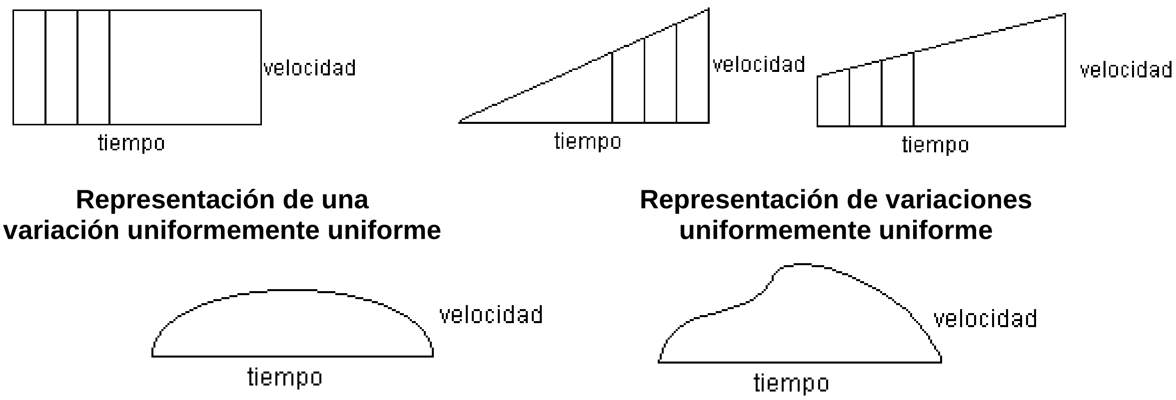
Las escuelas de filosofía natural de Oxford y París, dos de los principales núcleos científicos de la época, hicieron grandes aportes para el desarrollo de la noción de función. Partiendo de las doctrinas aristotélicas, realizaron estudios cuantitativos de distintos fenómenos, entre los cuales se destaca el estudio del movimiento local no uniforme, empezando a desplazar el interés del por qué suceden los cambios al cómo suceden. Analizaron fenómenos sujetos al cambio, como el calor, la luz, la densidad, la velocidad, llamados cualidades o formas, que pueden tener diversos *grados* de *intensidad* que cambian entre dos límites establecidos. Una *forma* era cualquier cantidad o cantidad variable de la naturaleza. La *intensidad* o *latitud* de una forma era el valor numérico que había que asignarle, en relación a otra forma invariable que llamaban *extensión* o *longitud*, como el tiempo, la distancia o la cantidad de materia. En Inglaterra los estudios tuvieron una orientación preponderantemente cinemática-aritmética, mientras que en Francia se desarrollaron en dirección a la geometría.

Durante el segundo cuarto del siglo XIV, un grupo de lógicos y filósofos naturales del Colegio de Merton, entre ellos Heytesbury, Bradwardine y Swineshead, abordaron el problema de la cuantificación del cambio. Estudiaron las variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo o desde un punto a otro del tiempo. Referidos al caso del movimiento y la velocidad, sus aportes más importantes son las definiciones de velocidad uniforme y de movimiento uniformemente acelerado, así como sus intentos por definir velocidad instantánea. A partir de estos conceptos lograron deducir la regla del movimiento uniformemente acelerado que hoy conocemos.

El trabajo más completo y original sobre la intensificación y disminución de formas y cualidades fue el llevado a cabo por Oresme (1323-1382) en su tratado *De configurationibus qualitatum et motuum,* en el que describe su teoría de las latitudes de las formas, abriendo un nuevo camino en los estudios cinemáticos aritméticos realizados, proponiendo una aproximación geométrica. Su estudio de la variación fue independiente de cualquier contexto físico. Las representaciones eran imaginarias y cualitativas y nunca las verificó mediante mediciones. Oresme se preguntaba por qué no hacer un dibujo de la manera en que las cosas varían. De esta manera utilizó recursos geométricos para el estudio de la variación.

A modo de ejemplo presentamos el caso en el que se representa la velocidad de un móvil en función del tiempo. La longitud es un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo. Para cada instante, se traza un segmento perpendicular (latitud) que representa la intensidad de la velocidad en ese instante. Los extremos superiores de las latitudes determinan una curva.

Según D´hombres (1987, en Ruiz, 1998), Oresme al principio trabajó con los movimientos en forma general pero luego distinguió tres configuraciones distintas (Figura 1): las uniformemente uniformes (asociadas a un movimiento con velocidad constante), las uniformemente diformes (movimiento uniformemente acelerado) y las diformemente diformes (movimientos con aceleración no constante).



Representación de una variación uniformemente uniforme

Representación de variaciones uniformemente uniforme

Figura 1 Representación de variaciones diformemente diformes

Con este tipo de representaciones, Oresme pretendía que sea más sencillo comprender la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos, de manera de hacer posible dar una representación de todos ellos. Sus dibujos recuerdan a la representación gráfica de una función en un sistema de ejes cartesianos, sin embargo en su trabajo, la línea superior, de intensidades, no aparece aislada sino que el fenómeno se representa a través de toda la figura, por su forma (rectángulo, triángulo, etc.) y por la superficie que queda debajo de la curva, es decir por la integral de la curva. Por eso no pueden ser considerados como una expresión de la dependencia en el sentido actual.

A pesar de esto, su obra no deja de ser un adelanto hacia la geometría analítica y la introducción en la geometría de la idea de movimiento. Captó la idea fundamental de que una función de una variable se puede representar por una curva.

Azcárate y Deulofeu (1996, p. 44) expresan que, en el transcurso de estos estudios, “comienzan a aparecer conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, aceleración, todos ellos íntimamente ligados a la idea de función”.

2.3. Siglos XV y XVI. La transición a la representación simbólica (algebraica). El desarrollo de la noción de variable y función

En este período sobresale el avance del simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular. Ambos aspectos favorecieron el desarrollo del concepto de función. Se destaca la obra durante el siglo XVI de algebristas italianos, especialmente de Viète cuya contribución a la creación del álgebra simbólica fue decisiva. La introducción de signos para numerosas operaciones y la utilización de letras para representar cantidades desconocidas y coeficientes arbitrarios, fue importante para la representación de funciones por medio de fórmulas.

El intento por dar solución a problemas surgidos de la navegación marítima, el desarrollo del capital comercial y de la industria, propició el descubrimiento de varias de las leyes generales de la naturaleza y su modelación mediante fórmulas matemáticas. Resalta la obra de Kepler, quien, en la primera mitad del siglo XVI, formuló matemáticamente sus leyes sobre el movimiento de los planetas.

Los avances gráficos en la representación de formas variables no fueron adoptados de manera inmediata. Ya en la transición hacia el siglo XVII, fue Galileo (1564-1642) quien, en su libro *Dos nuevas Ciencias* de 1638, recupera los aportes de Oresme.

Galileo estudió el movimiento local y la rapidez, enfrentándose al problema de la caída de los cuerpos. Realizó un estudio cuantitativo buscando relacionar los conceptos de velocidad, aceleración y distancia recorrida con la ayuda de leyes inspiradas en la observación y experimentación. Usando instrumentos para tomar medidas, estableció leyes que son auténticas relaciones funcionales.

Considerando un cuerpo que cae libremente hacia la Tierra, no intentó hallar por qué cae, sino cómo cae, es decir en qué forma matemática la distancia recorrida y la velocidad alcanzada dependen del tiempo y el espacio transcurrido. En la descripción y análisis de cuerpos en caída libre aplicó el resultado del colegio de Merton sobre el valor medio de una cualidad uniformemente acelerada.

En sus desarrollos, Galileo utilizó un método expositivo de estilo euclidiano, sin ningún simbolismo. Su único recurso fue la representación gráfica de las magnitudes espacio, tiempo y velocidad. Para la visualización del desplazamiento y el tiempo usó recursos equivalentes, líneas que se pueden recorrer. Enunciamos el teorema I, proposición 105 de su libro *Dos nuevas Ciencias* (en Carrasco, 2005, p. 35):

> El tiempo en que cualquier espacio es atravesado por un cuerpo que empieza en reposo y es uniformemente acelerado, es igual al tiempo en que ese mismo espacio se cruzaría por el mismo cuerpo que se mueve a una velocidad uniforme cuyo valor es la media de la velocidad más alta y la velocidad justo antes de que la aceleración empezara.

Para su demostración, Galileo utilizó una gráfica, que se presenta en la siguiente figura (Figura 2), coherente en el aspecto visual con la situación de caída que se está modelando. Utilizando una representación bidimensional velocidad-tiempo, representó el tiempo sobre la línea vertical AB y las velocidades instantáneas mediante segmentos perpendiculares a AB. Representó también el espacio en una línea vertical auxiliar CD.

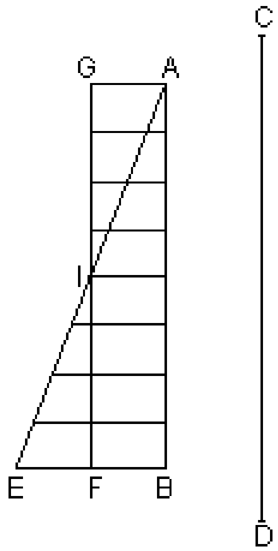


Figura 2 Gráfica de Galileo

En esta gráfica, A es el instante en que se inicia el movimiento, BE es la velocidad en el tiempo B o velocidad final del móvil y BF es la mitad de la velocidad anterior.

Construyó el rectángulo ABFG de base BF y prolongó los segmentos velocidad hasta FG. El triángulo ABE describe el movimiento uniformemente acelerado del móvil. El rectángulo ABFG describe un movimiento uniforme de velocidad constante BF que sucede en el mismo tiempo que el anterior.

El área de ABE coincide con el área de ABFG. La suma de las líneas paralelas contenidas en ABE es igual a la de las líneas paralelas contenidas en ABFG. De esto, concluyó que los espacios recorridos por los dos móviles son iguales.

A partir de estos trabajos, entre otros, se fueron desarrollando las ideas de variación y cambio como abstracciones obtenidas de la realidad.

Otro avance importante de la segunda mitad del siglo XVI, según expresan Azcárate y Deulofeu (1996), que permitió llegar a considerar las funciones como relaciones entre conjuntos de números más que como entre cantidades, fueron los progresos realizados en la extensión del concepto de número, con la configuración de los números reales y la aparición de los números imaginarios.

2.4. Siglo XVII. El surgimiento de la matemática de las variables

El poderoso instrumento algebraico desarrollado en los años precedentes permitió a Descartes (1596 -1650) y a Fermat (1601-1665) introducirse en el mundo de la representación analítica. Desarrollaron el método de las coordenadas expresando las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos a través de relaciones numéricas, generando la geometría analítica.

Su importancia radica en el hecho de poder traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. Por primera vez se utiliza el hecho de que una ecuación es una manera de expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de modo que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable correspondientes a determinados valores de la otra.

Diudonné (1989, c.p. Ruiz, 1998, p. 119) expresa que “el método de las coordenadas constituye también el fundamento de los otros dos grandes progresos realizados en el siglo XVII: la introducción de la noción de función y el cálculo infinitesimal".

Al surgir nuevas curvas se presentaron nuevos problemas. Los griegos de la antigüedad clásica concebían la recta tangente a una cónica en un punto, como la recta que toca a la curva en ese punto pero no la corta al prolongarla.

La introducción de la geometría analítica, el auge de las ciencias naturales y las exigencias de la mecánica, propiciaron nuevas soluciones que relacionaron el problema de la tangente con los fenómenos de variación. En particular tres problemas se presentaban como acuciantes: determinar la velocidad de los cuerpos en movimiento, dada la velocidad del movimiento determinar la trayectoria en un tiempo determinado, y el problema de los máximos y mínimos.

Los aportes de Fermat a la resolución de estos problemas fueron tales que Lagrange, Laplace y Tannery, entre otros, lo denominaron el inventor del cálculo. Tratando de determinar los máximos y los mínimos de ciertas funciones, observó que una curva tiene en cada uno de sus puntos una dirección, definida por la recta tangente a la curva en dichos puntos, tal que donde la función tiene un máximo o un mínimo, la tangente es horizontal.

En su obra *Methodus ad disquerendam maximan et miniman* publicada en 1637 expuso su método para encontrar el valor extremo de algunas variables y propuso una manera de resolver el problema de las tangentes utilizando ideas cercanas a los infinitesimales.

Utilizó elementos de tipo gráfico visual, así como ideas intuitivas de cambio y lo que pasa con estos cambios cuando se hacen muy pequeños. Su proceso se basó en la idea que si una secante s rota sobre uno de los puntos de intersección de manera que el punto más próximo se acerca indefinidamente al primero, entonces la secante s se aproxima a la posición definida t. La recta que tiene esa posición se llama tangente a la curva, y el punto fijo, punto de contacto (o punto de tangencia). De todas las rectas que pasan a través de ese punto, la tangente es la que proporciona la mejor aproximación al curso de la curva en ese punto. Por ese motivo, la dirección de la tangente en el punto se llama también dirección de la curva en el punto.

Fermat (en Ribnikov, 1987, citado por Dolores, 1996), consideró un pequeño arco MN (Figura 3) de una curva algebraica polinomial f(x). Por medio del trazado de la secante SMN se construye el triángulo MNP de manera que MNP $\approx$ SMR, de donde la longitud de la subtangente[1] SR está dada por SR = $\frac{MR\,.\,MP}{PN}$, expresión que en términos modernos se escribiría: $SR = \frac{f(x).h}{f(x+h)-f(x)}$.

[1] La subtangente es la distancia del punto S que se encuentra en la intersección de la tangente con el eje de las abscisas y el punto R que es la abscisa del pie de la perpendicular trazada desde el punto M.

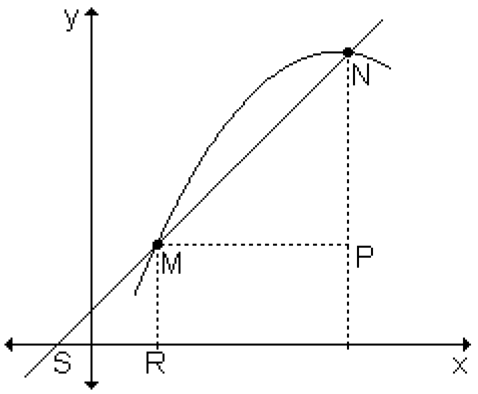


Figura 3 Gráfica de Fermat para el problema de la tangente

Después pasa de la secante a la tangente, poniendo *h* = 0 (aunque no menciona que *h* debe *aproximarse* a cero o que se *haga* cero, sino sólo que el término que contiene a h debe ser eliminado) de manera que, si s = SR, en términos modernos la expresión anterior quedaría escrita como $s = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Esto significa que la longitud de la subtangente, con la que la tangente queda determinada, se obtiene del cociente de la función entre su derivada.

Cantoral y Farfán (2004, p. 72) expresan que "este método de Fermat, independientemente de los problemas de existencia de límites, dependía de la existencia de una relación explícita entre la variable *y* y la variable *x* de la forma $y = f(x)$".

De manera similar pero utilizando explícitamente los infinitesimales en la resolución del problema de la tangente, Isaac Barrow publicó en 1670 su obra Lecciones de Geometría.

Observamos cómo en esta etapa la visualización jugó un papel importante. En su obra, Descartes explica y da importancia al papel de las imágenes y figuras en lo que respecta al pensamiento matemático. Afonso (2002, p. 59) se refiere al respecto, citando un pensamiento extraído de *Reglas para la dirección del espíritu*:

> ... es preciso servirse de todos los recursos del entendimiento, de la imaginación, de los sentidos y de la memoria: ya para intuir distintamente las proposiciones simples; ya para comparar debidamente lo que se busca con lo que se conoce, a fin de reconocerlo.... Es útil también en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente.

Nacimiento del cálculo

El período que comienza en el siglo XVII, caracterizado por la síntesis entre los métodos geométricos de Cavalieri y Barrow, por los métodos analíticos de Descartes, Fermat y Wallis y por la asimilación del hecho de que el trazado de tangentes y cuadraturas eran procesos inversos e interrelacionados permitió la elaboración de un aparato algorítmico que brindaba métodos generales para el tratamiento de curvas estudiadas en la época. Estos avances fueron un elemento importante en la formación del Análisis Infinitesimal. Su nacimiento fue la culminación de un largo proceso, que consistió en la acumulación de elementos del cálculo diferencial e integral así como de la teoría de series.

Ribnikov (1974, c.p Ruiz, 1998, p. 122) manifiesta:

> Las causas que motivaron este proceso fueron los problemas de la mecánica, la astronomía y la física. Estas ciencias no sólo planteaban a las matemáticas problemas, sino que la enriquecían con sus representaciones de magnitudes continuas y movimientos continuos y, sobre todo, con la esencia y forma de las dependencias funcionales. En una estrecha interacción de las matemáticas y las ciencias contiguas se elaboraron los métodos infinitesimales que son la base de las matemáticas variables.

En el último cuarto del siglo XVII, el inglés Isaac Newton y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, de manera diferente e independiente sistematizaron y generalizaron las ideas y procedimientos que habían sido abordados hasta el momento.

Tanto el cálculo de Newton como el de Leibniz trataban de cantidades variables. En Newton cantidades que variaban con el tiempo. En Leibniz una sucesión de valores infinitamente próximos. El primero tuvo una idea intuitiva de movimiento continuo próxima al concepto de límite. El segundo concibió el continuo geométrico formado por segmentos infinitesimales.

El primero en descubrir el cálculo fue Newton, pero su miedo a publicar le hizo guardar su descubrimiento en secreto. Uno de sus aportes fundamentales es la interpretación geométrico-cinemática de los conceptos fundamentales del análisis matemático. Siguiendo a su maestro Barrow, tomó el tiempo como argumento y analizó las variables dependientes como cantidades continuas que tienen cierta velocidad de cambio.

En su obra *Método de las Fluxiones* (1665-1666) estudió las magnitudes variables que representan diversas formas de movimiento mecánico continuo. A las magnitudes que varían continuamente las llamó *fluentes* (nuestras funciones actuales) y las consideró como variables dependientes del tiempo, después introdujo las velocidades de las fluentes que las denominó *fluxiones*. Para calcular las fluxiones les imponía a las fluentes la condición de una variación infinitesimal y las representaba por x e y. En términos actuales éstas son las derivadas de x e y con respecto a t $\left(x = \frac{dx}{dt}; y = \frac{dy}{dt} \right)$ y la razón entre ellas es la derivada de y con respecto a x $\left(\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx} \right)$.

Las fluxiones o velocidades de las fluentes son *razones de cambio instantáneas*, y expresan la rapidez con que cambia una variable respecto a otra en un instante. Esta es la idea física fundamental que subyace en el concepto actual de derivada.

Asoció también el concepto de fluxión con el problema de las tangentes. De manera muy similar a las ideas desarrolladas por sus predecesores, consideró una curva $f(x, y) = 0$ como el lugar geométrico determinado por la intersección de dos rectas en movimiento, una vertical y la otra horizontal, las coordenadas x e y del punto en movimiento son funciones del tiempo t y están representadas por las rectas horizontal y vertical, respectivamente (Figura 4). El movimiento resulta de la composición del movimiento horizontal cuya velocidad está representada por el módulo del vector *x* y la del movimiento vertical por el módulo del vector *y*.

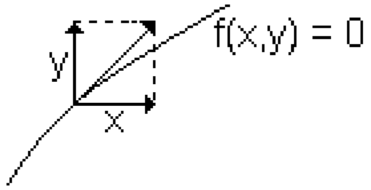


Figura 4 Vector velocidad como composición del movimiento horizontal y el vertical

Por medio de la ley del paralelogramo se obtiene el vector resultante cuya dirección determina la tangente a la curva y que tiene como pendiente $\frac{y}{x}$.

En 1671 escribió el artículo *"Un tratado del método de series y fluxiones"*, en el cual estableció la manera de expresar y trabajar relaciones algebraicas complicadas rescribiéndolas como series infinitas de términos más sencillos. Asoció el manejo de las series infinitas con las velocidades de cambio, las que a su vez utilizaba para determinar la fluente, lo que fluye. Presentó así los dos problemas principales del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración, en términos de movimiento. Es decir, dada la ley para la distancia determina la velocidad y, dada la velocidad, determina la distancia. Relacionó los dos problemas, haciendo una herramienta utilizable lo que hoy conocemos como teorema fundamental del cálculo.

Muchos de sus resultados aparecen en su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural*, editada por primera vez en 1687 y con dos nuevas ediciones en 1713 y 1726. Presentamos el lema VI de la sección primera del libro primero para analizar el tratamiento que Newton le daba a la tangente:

> Si cualquier arco ACB, en una posición dada, es subtendido por su cuerda AB, y en cualquier punto A situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta AD prolongada en ambos sentidos, si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo BAD contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última instancia... (Isaac Newton, 1713. Traducción de Antonio Escohotado. En Serna, 2007, p. 93).

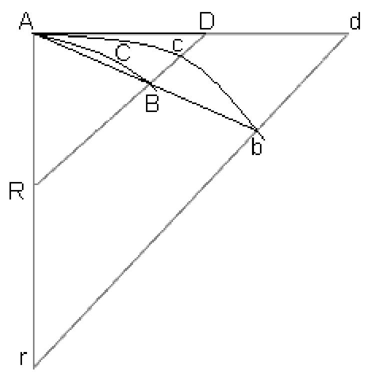


Figura 5 Tratamiento de Newton al problema de la tangente

Newton tuvo en cuenta la idea de lo infinitamente pequeño y cómo, al realizarse el proceso, la cuerda subtendida tiende a ser la tangente a la curva en el punto A. Trabajó la idea del paso al límite ya que dicha tangente es el límite al que llega la cuerda AB. Utilizó ideas variacionales al mencionar que los puntos A y B se acercan uno al otro y se encuentran. Construyó las figuras como un argumento necesario para dar las explicaciones.

Leibniz, más conocido como filósofo, presentó su cálculo entre 1673 y 1676. Su descubrimiento fue posterior al de Newton, aunque fue el primero en publicarlo. Basándose en una concepción geométrica llegó a resultados similares, obteniendo un método para la resolución del problema de las tangentes y la determinación de áreas y volúmenes.

Inspirándose en sus primeros trabajos sobre sucesiones de sumas y diferencias de números, traslada sus ideas al contexto continuo, como ser el caso de las variables asociadas a las curvas geométricas. Comienza a desarrollar toda una teoría de sumas y diferencias infinitesimales, a partir de la cual obtiene sus nociones de *diferencia* e *integrales*. Introdujo la notación que actualmente usamos para ambas nociones.

Decía que en una sucesión infinita de valores de una variable, que nombramos x, la diferencia entre dos valores sucesivos es el diferencial de x (dx), que es infinitesimal o despreciable comparado con los valores de x. Además, la suma de todas las diferencias (que el anotaba $\int dx$) da como resultado la variable completa x. Es decir: $\int dx = x$.

Definió diferencial de una ordenada de una curva cualquiera, dy, como un segmento cuya relación a dx, es igual a la relación entre la ordenada y la subtangente $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{y}{S_t}\right)$. Se dio cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando las mismas tienden a cero y que el cálculo de un área depende de la suma de las ordenadas o de los rectángulos cuya abscisa tiende a cero, convenciéndose que eran problemas equivalentes.

En un artículo publicado en 1673, usó por primera vez el término "función". Inicialmente, no para designar la relación formal entre la ordenada de un punto y su abscisa, sino en el sentido corriente que describe la función de un órgano en un organismo, o en una máquina. Significaba por ejemplo, tener un punto de contacto con la curva, ser perpendicular a la curva, considerar su subtangente, etc.

Posteriormente utilizó la palabra en un sentido más general, aunque todavía poco preciso y referido siempre a cuestiones geométricas, identificando la noción de función con ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas, tangentes, normales, etc., asociadas con la posición de un punto en una curva.

Se observa en este período una tendencia de los matemáticos en general a rechazar explicaciones que implicasen suposiciones arbitrarias. Newton veía como desfavorable el hecho de no poder traducir con una fórmula cualquier expresión, mientras que se mostraba satisfecho con cualquier concepción que, mediante una fórmula, permitiera abordar algo real de manera eficaz. Sierpinska (1989, c.p. Ruiz, 1998) expresa que se promovió una actitud hacia las matemáticas, según la cual lo principal es proveerse de un conjunto de algoritmos que capaciten a los científicos para resolver problemas. La eficacia de los cálculos formales se convirtió en un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de función.

La concepción mecánica de curva presente en matemáticos como Galileo, Torricelli, Roberval o Newton, que hacía que las curvas no fueran consideradas como gráficas de la relación funcional, sino más bien como trayectorias de puntos en movimiento resultó otro obstáculo al desarrollo de la concepción de función.

2.5. Siglos XVIII y XIX. La consolidación del sistema de representación simbólico

Durante el siglo XVII los objetos de estudio del análisis infinitesimal eran las curvas geométricas, tarea realizada esencialmente en el marco de la geometría cartesiana y relacionada con la mecánica y la física. Durante el siglo XVIII comienza a perder este carácter a favor de la aritmetización y del uso casi exclusivo del álgebra.

Con los trabajos de Jean Bernoulli, Leonard Euler y Lagrange se consolida la noción de función como representación de procesos de variación y cambio así como el sistema de representación simbólico. La ampliación del concepto de función se desarrolló ampliamente en el siglo XIX con los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros.

El impacto del cálculo infinitesimal fue tan grande que durante casi todo el siglo XVIII los matemáticos se dedicaron a explorar sus aplicaciones obteniendo resultados importantes en el cálculo variacional, la astronomía, la hidrodinámica y otros campos de la mecánica. El análisis fue cobrando cada vez mayor importancia e independencia como disciplina, perdiendo su carácter geométrico y mecánico a favor del uso casi exclusivo del álgebra. A partir de mediados del siglo XIX se comienza a desconfiar de la intuición y de lo visual y los matemáticos empiezan a trabajar en una fundamentación rigurosa del cálculo.

En 1820, Cauchy hizo un aporte importante en la reconstrucción de los fundamentos del análisis cuando, sobre la base de la teoría de los límites, introdujo el lenguaje algebraico de las desigualdades. Esto llevó a la aparición de definiciones sólidas sobre convergencia de series, límite, continuidad y diferenciabilidad. En 1823 definió la derivada de f(x) como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, siempre que este límite exista.

Con el perfeccionamiento del concepto de límite, la construcción de la teoría de los números reales, la teoría de conjuntos y el desarrollo de la teoría de las funciones, se le da al análisis matemático una estructura lógica coherente, con la que los conceptos básicos son definidos rigurosamente a partir de los números reales y las funciones. La derivada es definida como un límite existente para funciones continuas. Se define continuidad en términos del límite y éste por medio de los ε y δ.

Con la introducción de la teoría de conjuntos el concepto de función alcanza un nuevo grado de generalidad. Al considerar una definición en términos conjuntistas, todas las anteriores corresponden a casos particulares. Con esta definición se pone de manifiesto una caracterización estática, como colección de pares de elementos, quedando oculto el carácter dinámico de asignación entre variables. Azcárate y Deulofeu (1996, p. 53) manifiestan que con esta definición, la noción de función "pierde muchos de los atributos que tenían las definiciones clásicas, como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad del concepto de función".

2.6. La última etapa. La interacción entre sistemas de representación en el estudio de la variación y el cambio

El rigor conferido al estudio del análisis a finales del siglo XIX y durante el siglo XX, transformó las concepciones sobre la matemática en los distintos campos y sobre la manera de concebir los sistemas de representación de procesos o fenómenos de variación y cambio. Afonso (2002) manifiesta que la Teoría de Conjuntos de Cantor y las paradojas en torno a los fundamentos de la matemática condujeron a que los matemáticos de la época hicieran hincapié en los aspectos formales y desecharan argumentos visuales. La influencia del formalismo fue fundamental en la investigación, extendiéndose además a la estructura de los libros de texto en todos los niveles de la enseñanza.

En conexión con la teoría de conjuntos, los conceptos de variable y de función adquirieron mayor precisión, hecho esencial para el desarrollo posterior del análisis. Nace a comienzos del siglo XX, con matemáticos como Borel, Lebesgue, Luzón y su escuela, una nueva rama del análisis: la teoría de funciones en una variable.

La base proporcionada por el desarrollo del análisis y la física matemática, junto a las nuevas ideas de la geometría y el álgebra, lleva al desarrollo de una nueva rama de la matemática, el análisis funcional, que juega un papel preponderante en la matemática moderna, con los importantes trabajos de matemáticos como Hilbert, Riesz y Banach.

El desarrollo desde la primera mitad del siglo XX de las tecnologías informáticas y su evolución hasta llegar al uso de sistemas gráficos y algebraicos ejecutables, ha abierto un extenso campo de experimentación y desarrollo, con importantes repercusiones en el campo de la educación.

Desde las últimas dos décadas del siglo XX la enseñanza de la matemática ha experimentado una enorme evolución. La mediación de herramientas computacionales permite la interacción entre sistemas de representación, constituyéndose en una poderosa herramienta para observar, representar, modelar y simular situaciones de variación y cambio. En numerosas investigaciones de educación matemática, se resalta la tendencia hacia la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático (Afonso, 2002).

3. Conclusiones

Revisando algunos aspectos del estudio realizado, resalta en primer lugar el hecho de que el origen y la evolución del cálculo diferencial trata sobre incrementos y cantidades de cambio. Las ideas que llevaron a Newton y a Leibniz a la invención del cálculo se fueron gestando desde muchos siglos antes a estos matemáticos. En esas etapas anteriores los problemas se abordaron de manera general y desde diferentes perspectivas, especialmente numéricas y geométricas, pero el mayor logro se alcanzó al estudiar el cambio más sencillo, el cambio de posición. Se produjo un gran progreso al intentar describir cómo se realiza el movimiento sin preocuparse por qué se realiza de esa manera.

El paso más importante fue relacionar los problemas de la mecánica, conectados con el estudio del movimiento, y los antiguos problemas de la geometría, consistentes en la determinación de tangentes a una curva dada. El problema de la tangente era estudiado desde la época de los griegos de la antigüedad clásica. Sin embargo, con la transición de la matemática de las constantes a la matemática de las variables, la tangente a una curva comienza a adquirir un carácter variacional. El método de determinar la tangente a partir de la pendiente de una secante y hallar el límite de esa pendiente cuando uno de los puntos de corte se aproxima tanto como se quiera al otro, fue el método utilizado por Newton para el cálculo de velocidades instantáneas y fue la base gráfica del cálculo de derivadas en los libros clásicos.

Para llegar a lo que actualmente se conoce como derivada, formalizando una definición rigurosa en términos del límite, tuvieron que transcurrir varios siglos de desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con las tangentes, con la variación y con los infinitesimales. Esta etapa se caracterizó por tener un componente fundamentalmente visual e intuitivo, en interacción constante con problemas geométricos y físicos.

En el siglo XX la actividad matemática sufrió la influencia de una corriente formalista, que rechazó la visualización como herramienta de demostración y análisis. Se considera la derivada como un concepto abstracto definido en términos del límite e inserto en una estructura determinada por el rigor matemático. Así ha llegado a la actualidad y de esa manera es introducida generalmente en la enseñanza.

Sin embargo, en las últimas décadas, se observa una renovación del papel de la visualización e interés por el estudio del rol que juega el uso de distintas representaciones de un concepto en el desarrollo de esta forma de pensamiento.

Estos aspectos relacionados al desarrollo histórico de la derivada sugieren un camino que puede ser explorado en la enseñanza. No se trata de reproducir en el aula cada uno de los episodios que tuvieron lugar en la historia de su desarrollo, sino de recuperar las ideas, estrategias y procedimientos claves que contribuyeron a su formación. En este sentido Wenzelburger (1993, p. 2) manifiesta:

> ...de esta manera podría obtener del proceso histórico de desarrollo del análisis matemático indicaciones importantes acerca del fin y propósito de esta rama de las matemáticas.
>
> La enseñanza del cálculo se debería orientar en esta génesis que tuvo lugar en la historia de la ciencia matemática: una formación lenta de conceptos matemáticos a través de la liberación de las percepciones sensoriales la intuición primaria.

Es razonable entonces intentar la formación de este concepto explotando el potencial que las nociones de variable y función tuvieron en la modelación de los problemas del movimiento, de manera que esto prepare el terreno para estudiar los problemas de la rapidez de la variación por medios infinitesimales. La idea es considerar el estudio de la variación como una especie de eje rector del que se desprende el contenido temático, otorgando un lugar central a la visualización y al manejo de distintas formas de representación de las funciones.

Bibliografía

Afonso, R. (2002). *Problemas de convergencia en un contexto de software educativo*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de La Laguna.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas* (Primera Reimpresión). Editorial Síntesis, Madrid. España.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. La derivada un concepto a caballo entre la Matemática y la Física*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra: España.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: Cantoral, R. (ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME*-8, 69-91. Grupo Editorial Iberoamérica, Sevilla.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo*. Thomson Editores, México.

Carrasco, E. (2005). *Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo*. Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Castiblanco, A.; Urquina, H.; Acosta, E. y Rodríguez, F. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Serie Documentos. Colombia.

Dolores, C. (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis doctoral. Instituto Superior Pedagógico: Enrique J. Varona. La Habana.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Universidad de Jaén. Servicio de publicaciones, Jaén.

Serna, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la Tangente.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Wenzelburger, E. (1993). *Didáctica Cálculo diferencial*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Vrancken Silvia. Profesora en Matemática.Magíster en Didácticas Específicas por la Universidad Nacional del Litoral. Línea de investigación:Educación Matemática ocupándose en especial de las dificultades de enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo y la incorporación de las TIC en el aula. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral-Santa Fe. **Argentina.svrancke@fca.unl.edu.ar**

Engler Adriana. Licenciada en Matemática Aplicada. Magíster en Educación Psicoinformática. Actualmente es alumna del Doctorado en Matemática Educativa (IPN–CICATA. México). Investigadora en Educación Matemática, en especial sobre enseñanza y aprendizaje de los principios del cálculo e incorporación de nuevas tecnologías en el aula. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral-Santa Fe. Argentina. **aengler@fca.unl.edu.a**r