REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 33. Marzo de 2013
páginas 39-52

Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria

Lilia P. Aké, Juan D. Godino, Margherita Gonzato

Fecha de recepción: 21/06/2012
Fecha de aceptación: 7/02/2013

Resumen	En este trabajo sintetizamos algunas de las características del razonamiento algebraico elemental que motivan la posibilidad y el interés de su desarrollo desde los primeros niveles educativos. Así mismo, reseñamos las expectativas de aprendizaje del razonamiento algebraico en algunas propuestas curriculares para los distintos niveles de educación primaria. Con el fin de facilitar el reconocimiento por parte de los maestros de los rasgos característicos del razonamiento algebraico escolar incluimos ejemplos de actividades matemáticas clasificadas según tres niveles de algebrización. Esta propuesta puede facilitar al profesor distinguir las actividades aritméticas de las propiamente algebraicas, junto con otros dos tipos en los que el nivel de algebrización es intermedio. **Palabras clave**: razonamiento algebraico, niveles de algebrización, formación de maestros, orientaciones curriculares.
Abstract	In this paper we summarize some characteristics of elementary algebraic thinking that motivate the possibility and interest of its development from the earliest levels of education. Likewise, we review the learning expectations for algebraic reasoning proposed for the different levels at the primary education curriculum. Examples of mathematical activities classified into three levels of algebraization are included in order to facilitate the teachers' recognition of the school algebraic thinking features. This proposal may help the teacher to distinguish arithmetic from proper algebraic activities, as well as from two other types of activities with incipient or intermediate algebraization levels. **Keywords:** algebraic reasoning, algebraization levels, teacher training, curriculum guidelines**.**
Resumo	Neste trabalho sintetizamos algumas das características do pensamento algébrico elementar, os quais motivam a possibilidade e interesse do seu desenvolvimento desde os primeiros níveis educativos. Também apontamos as expectativas de aprendizagem do pensamento algébrico em algumas propostas curriculares para os distintos níveis de educação primária. Com o propósito de facilitar o reconhecimento, por parte dos professores, de aspectos característicos do pensamento algébrico escolar, incluímos exemplos de atividades matemáticas classificadas segundo três níveis de algebrização. Esta proposta pode facilitar ao professor distinguir as atividades aritméticas das propriamente algébricas, junto com outros dois tipos, nos quais o nivel de algebrização é intermediário. **Palavras-chave**: raciocínio algébrico, os níveis de algebraization, formação de professores, currículo diretrizes.

1. Introducción

Diversas investigaciones y directrices curriculares proponen introducir ideas y modos de pensar propias del álgebra desde los primeros niveles de educación primaria. Este es el caso de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) donde se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad para trabajar con los niños desde los primeros grados. Como afirman Godino y Font (2003), ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados K-12).

Como mostraremos en la sección 2 de este trabajo el *álgebra escolar* incluye no sólo las ecuaciones y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos (planteamiento de ecuaciones en la resolución de problemas), sino también el estudio de los patrones numéricos y geométricos, la determinación de reglas generales y el reconocimiento y uso de propiedades de las operaciones que caracterizan la estructura de los sistemas numéricos. En la sección 3 sintetizamos las expectativas de aprendizaje del razonamiento algebraico elemental que proponen documentos curriculares (NCTM, 2006; CCSS, 2011). En la sección 4 describimos ejemplos de actividades matemáticas que permiten distinguir entre el razonamiento aritmético del propiamente algebraico, distinción que no es clara en las mencionadas directrices curriculares y otras publicaciones que proponen desarrollar el pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos (Cai y Knuth, 2011; Molina, 2009). Finalizamos este trabajo con algunas implicaciones para la formación de profesores de educación primaria.

2. Algunas características del álgebra escolar

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones.

Algunas características del razonamiento algebraico[1] que son sencillas de adquirir por los niños, y que, por tanto, deben conocer los maestros en formación, son:

1. El uso de símbolos permite expresar de manera eficaz las generalizaciones de patrones y relaciones. Entre los símbolos destacan los que representan variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones.
2. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números. Las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula.

[1] En Godino, Castro, Aké, y Wilhelmi (2012) se presenta un análisis más sistemático de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental.

3. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados. La idea de función comienza con actividades elementales con patrones, que a menudo se piensa que es un precursor necesario para otras formas de generalización matemática. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes ya sea físicas, geométricas o numéricas.

Godino y Font (2003) constatan la existencia en la escuela de una concepción tradicional y limitada del álgebra escolar denominada "aritmética generalizada". Esta concepción supone que el álgebra es un campo de las matemáticas donde se manipulan letras que representan números no especificados. Así, los objetos que se ponen en juego en la aritmética y la "aritmética generalizada" son los mismos: números, operaciones sobre números y relaciones entre los números; las diferencias entre ambas partes de las matemáticas está en la generalidad de las afirmaciones:

1. La aritmética trata con números específicos expresados mediante los numerales habituales:

$$20; \quad -7; \quad {}^{14}/_{5}; \quad 4{,}75; \quad \sqrt{3}$$

O mediante expresiones numéricas en las que los números se combinan con los símbolos de las operaciones aritméticas:

$$45 \times 12; \quad \frac{73 + 5{,}4}{3}; \quad (13 - 7{,}4)^3$$

2. El álgebra trata con números no especificados (incógnitas, variables) representados por letras, como *x*, *y*, *t*, *v*, o bien expresiones con variables:

$$3x - 5; \quad x^2 - x + 5; \quad (x+5)(x-7); \quad 3uv + 4v + u + v + 1$$

Este *tipo de álgebra* está presente desde los primeros niveles educativos. Siempre que se necesite expresar una generalización, el simbolismo y las operaciones algebraicas resultan de gran utilidad.

Es necesario, sin embargo, que los maestros tengan una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. Algunas características del álgebra que son fáciles de apreciar son:

1. El uso de símbolos, habitualmente letras, que designan elementos variables o genéricos de conjuntos de números, u otras clases de objetos matemáticos.
2. La expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones.

Pero estas características del álgebra son sólo su parte superficial. La parte esencial es la actividad que se hace con estos instrumentos. Las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden realizar con estos medios, son instrumentos de *modelización matemática* de problemas procedentes de la propia matemática (aritméticos, geométricos), o problemas aplicados de toda índole (de la vida cotidiana, financieros, físicos, etc.). Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución. La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

Esta concepción ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, puesto que la modelización algebraica es una cuestión de menor o mayor grado. Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización.

3. Estándares sobre álgebra en primaria

Como hemos indicado el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) propone incluir un bloque temático sobre álgebra en los diseños curriculares para la educación infantil y primaria. Para dicho bloque se establecen 4 estándares de contenido algebraico, a saber: Comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y analizar el cambio en diversos contextos.

Estos estándares han sido desarrollados de manera más explícita para los distintos niveles o grados en el documento *Curriculum Focal Points* (NCTM, 2006), donde se amplían y ejemplifican las directrices de los Principios y Estándares 2000. Los focos curriculares son temas y nociones matemáticas importantes que permiten estructurar y organizar un diseño curricular y unas secuencias de instrucción a lo largo de esos niveles. Son tres los criterios empleados para considerar un tema concreto como un foco curricular (p. 5):

1. Ha de ser matemáticamente importante desde el punto de vista de los estudios posteriores en matemáticas y también por su uso en aplicaciones dentro y fuera de la escuela.
2. Se debe ajustar a lo que ya se conoce sobre el aprendizaje de las matemáticas.
3. Ha de conectarse de manera lógica con las matemáticas en los niveles anteriores y posteriores.

Los puntos focales del NCTM (2006) han sido desarrollados por otro documento curricular más reciente en el que se proponen expectativas de aprendizaje más explícitas para cada uno de los grados escolares y cada dominio del contenido, en particular, el algebraico. Se trata del documento, *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM, 2011)*[2].

Indicamos a continuación, para cada uno de los grados escolares de primaria, los contenidos algebraicos que se proponen en el CCSSM (2011).

[2] National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2011). Disponible en, http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

3.1. Expectativas de aprendizaje para los grados 1 y 2

El documento Common Core State Standard for Mathematics propone las siguientes directrices (p. 15):

Representar y resolver problemas de sumar y restar.

1. Resolver problemas verbales que requieren una suma de tres números cuya suma sea menor o igual que 20, por ejemplo, usando objetos, dibujos, y ecuaciones con *símbolos para el número desconocido* para representar el problema.

Comprender y aplicar propiedades de las operaciones y las relaciones entre la suma y la resta.

1. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para sumar y restar (sin usar términos formales). Ejemplos: Si se conoce que $8+3=11$, entonces también se conoce que $3+8=11$ (Propiedad conmutativa de la adición). Para sumar $2+6+4$, los dos segundos números se puede sumar para tener una decena, de manera que $2+6+4=2+10=12$ (Propiedad asociativa de la adición).
2. Comprender la sustracción como un problema de sumando desconocido. Por ejemplo, restar $10-8$ encontrando el número que sumado a 8 da 10

Trabajar con ecuaciones que involucran la suma y la resta.

1. Comprender el significado del signo igual, y determinar si son verdaderas o falsas las ecuaciones que involucran la adición y sustracción. Por ejemplo, ¿cuáles de las siguientes ecuaciones son verdaderas y cuáles falsas? $6=6$; $7=8-1$; $5+2=2+5$; $4+1=5+2$.
2. Determinar el número desconocido en una ecuación de suma o resta que relaciona tres números. Por ejemplo, determinar el número desconocido que hace verdadera la ecuación en cada una de las ecuaciones, $8+�=11$; $5=�-3$.

Para el grado 2 el CCSS propone similares directrices sobre álgebra que para el grado 1, en este caso involucrando las operaciones de sumar y restar números menores que 100.

3.2. Expectativas de aprendizaje para el grado 3

El documento CCSS incluye las siguientes directrices para desarrollar el pensamiento algebraico en el tercer grado:

Representar y resolver problemas que impliquen la multiplicación y la división

1. Determinar el número desconocido en una ecuación en la que interviene una multiplicación o una división relacionando tres números. Ejemplo: Determina el número que falta para hacer que la ecuación sea verdadera en cada una de las siguientes expresiones: $8\times\blacktriangle=48$; $5=�\div 3$.

Comprender las propiedades de la multiplicación y la relación entre multiplicación y división.

1. Aplicar las propiedades de las operaciones como estrategias para multiplicar o dividir. Ejemplos: Si se conoce que $6\times 4=24$, entonces también se conoce que $4\times 6=24$ (Propiedad conmutativa de la multiplicación).

Sabiendo que 8 × 5 = 40 y que 8 × 2 = 16, se puede hallar 8 × 7 como 8 × (5 + 2) = (8 × 5) + (8 × 2) = 40 + 16 = 56 (Propiedad distributiva).

2. Comprender la división como un problema de factor desconocido. Por ejemplo, resolver 32 ÷ 8 encontrando el número que multiplicado por 8 da como resultado 32.

Resolver problemas que implican las cuatro operaciones, e identificar y explicar patrones aritméticos.

1. Resolver problemas verbales de dos etapas usando las cuatro operaciones. Representar estos problemas usando ecuaciones con letras que están en lugar de la cantidad desconocida. Evaluar que las respuestas son razonables usando cálculo mental y estrategias de estimación, incluyendo el redondeo.
2. Identificar patrones aritméticos (incluyendo patrones en las tablas de sumar o de multiplicar), y explicarlos usando las propiedades de las operaciones. Por ejemplo, observar que 4 veces un número es siempre par, y explicar por qué 4 veces un número se puede descomponer en dos sumandos iguales.

3.3. Expectativas de aprendizaje para el grado 4

El documento CCSS incluye las siguientes directrices para desarrollar el pensamiento algebraico en el cuarto grado:

Usar las cuatro operaciones con números naturales para resolver problemas

1. Resolver problemas verbales de varias etapas planteados con números naturales y que tienen respuesta natural usando las cuatro operaciones, incluyendo problemas en los que el resto debe ser interpretado. Representar estos problemas usando ecuaciones con una letra para indicar la cantidad desconocida. Evaluar el carácter razonable de las respuestas usando cálculo mental y estrategias de estimación, incluyendo el redondeo.

Generar y analizar patrones.

1. Generar un patrón numérico o geométrico que sigue una regla dada. Identificar las características aparentes del patrón que no estaban explícitas en la propia regla. Por ejemplo, dada la regla "Sumar 3" y que empieza en el 1, generar términos de la secuencia resultante y observar que los términos aparecen alternando entre números pares e impares. Explicar informalmente porqué los números continuarán alternando de ese modo.

3.4. Expectativas de aprendizaje para el grado 5

En el grado 5 el CCSS se incluye la siguiente directriz en relación al desarrollo del razonamiento algebraico:

Analizar patrones y relaciones.

1. Generar dos patrones numéricos usando dos reglas dadas. Identificar relaciones aparentes entre los términos correspondientes. Formar pares ordenados constituidos por los términos que se corresponde en los dos patrones, y graficar pares ordenados sobre el plano de coordenadas. Por ejemplo, dada la regla "Sumar 3" empezando en el número 0, y dada la regla "Sumar 6" a partir del 0, generar términos de las secuencias resultantes, y

observar que los términos de una secuencia son el doble de los términos correspondientes en la otra secuencia. Explicar informalmente porqué esto es así.

3.5. Expectativas de aprendizaje para el grado 6

El documento *Common Core State Standards for Mathematics* (2011) es más explícito en cuanto a los tipos de conocimientos y competencias algebraicas a desarrollar en los estudiantes de 6º grado. Concretamente proponen las siguientes directrices:

Aplicar y extender conocimientos previos de aritmética a expresiones algebraicas.

1. Escribir, leer, y evaluar expresiones en las que se usan letras en lugar de números.
   - Escribir expresiones que registren operaciones con números y con letras en lugar de sólo números. Por ejemplo, expresar el cálculo "Restar *y* de 5" como $5 - y$.
   - Identificar partes de una expresión usando términos matemáticos (suma, término, producto, factor, cociente, coeficiente); ver una o más partes de una expresión como una única entidad. Por ejemplo, describir la expresión $2(8 + 7)$ como un producto de dos factores; ver $(8 + 7)$ tanto como una única entidad como una suma de dos términos.
   - Evaluar expresiones para valores específicos de sus variables. Incluir expresiones que surjan de fórmulas usadas en problemas reales. Realizar operaciones aritméticas, incluyendo aquellas que implican exponentes naturales, en el orden convencional cuando no hay paréntesis para especificar un orden particular (Orden de operaciones). Por ejemplo, usar las fórmulas $V = s^3$ y $A = 6s^2$ para encontrar el volumen y área superficial de un cubo con lados de longitud $s = {}^1/_2$.
2. Aplicar las propiedades de las operaciones para generar expresiones equivalentes. Por ejemplo, aplicar la propiedad distributiva a la expresión $3(2 + x)$ para producir la expresión equivalente $6 + 3x$; aplicar la factorización a la expresión $24x + 18y$ para producir la expresión equivalente $6(4x + 3y)$; aplicar las propiedades de las operaciones a $y + y + y$ para producir la expresión equivalente $3y$.
3. Identificar cuando dos expresiones son equivalentes (esto es, cuando las dos expresiones designan al mismo número independientemente de qué valor se sustituye en ella). Por ejemplo, las expresiones $y + y + y$ y $3y$ son equivalentes porque designan el mismo número cualquiera que sea el valor que tome y.

Razonar sobre y resolver ecuaciones e inecuaciones con una variable.

1. Comprender la resolución de una ecuación o inecuación como un proceso de responder una cuestión: ¿qué valores de un conjunto especificado, si existe, hace la ecuación o inecuación verdadera? Usar la sustitución para determinar si un número dado en un conjunto especificado hace a una ecuación o inecuación verdadera.
2. Usar variables para representar números y escribir expresiones cuando se resuelve un problema matemático o del mundo real; comprender que una

variable puede representar un número desconocido, o, dependiendo del propósito que se tenga, cualquier número de un conjunto especificado.

3. Resolver problemas matemáticos o del mundo real escribiendo y resolviendo ecuaciones de la forma $x+p=q$, para casos en que p,q y x son números racionales no negativos.
4. Escribir una inecuación de la forma $x>c$, o $x<c$ para representar una restricción o condición en un problema matemático o del mundo real. Reconocer que las desigualdades de la forma $x>c$, o $x<c$ tienen un número infinito de soluciones; representar soluciones de tales inecuaciones sobre diagramas numéricos lineales.

Representar y analizar relaciones cuantitativas entre variables dependientes e independientes

1. Usar variables para representar dos cantidades en un problema del mundo real que cambian en relación a otra; escribir una ecuación para expresar una cantidad, pensada como variable dependiente, en términos de la otra cantidad, pensada como variable independiente. Analizar la relación entre las variables dependiente e independiente usando gráficas y tablas, y relacionar estas a la ecuación. Por ejemplo, en un problema que implica movimiento con velocidad constante, listar y graficar pares ordenados de distancias y tiempos, y escribir la ecuación $d=65t$ para representar la relación entre distancia y tiempo.

4. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar

Los estándares sobre álgebra que encontramos en los documentos curriculares, así como los ejemplos de tareas usadas en las investigación sobre "álgebra temprana" (Carraher y Schliemann, 2007), incluyen dentro del "pensamiento algebraico" actividades muy diferentes, algunas de las cuales usualmente no son consideradas como algebraicas. En estos documentos curriculares el *contenido algebraico* se incluye frecuentemente entrelazado con los *números y operaciones*. Las fronteras entre lo que se puede considerar claramente algebraico y lo que no es algebraico son difusas, lo que puede ser una dificultad para el profesor que decide asumir el compromiso de promover el pensamiento algebraico en sus alumnos.

En esta sección incluimos ejemplos de actividades que pueden ayudar a clarificar los rasgos característicos del álgebra en la educación primaria. Para ello proponemos clasificar las actividades en cuatro grupos, cada uno definiendo un nivel diferente de razonamiento algebraico. Partimos de la siguiente caracterización de "sentido algebraico". Se trata de la capacidad de un sujeto para:

1. Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
2. Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.
3. Reconocer patrones, regularidades y funciones.

4. Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta interpretable en la situación dada.

Este sentido algebraico se puede desarrollar en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido (medida y geometría), vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización y el cálculo analítico.

4.1. Tareas con nivel 0 de algebrización: ausencia de razonamiento algebraico

Nos parece conveniente distinguir entre actividades netamente aritméticas de las que suponen un primer nivel de algebrización, lo que no parece claro en las orientaciones curriculares y en algunas investigaciones. El mero uso de una notación simbólica para indicar un dato desconocido en un problema no parece suficiente para hablar de la presencia de pensamiento algebraico.

En los libros de educación primaria encontramos abundantes enunciados de actividades como las siguientes:

Ejemplo 1.

Calcula el término que falta: 1.500 – 925 = ___

Suponiendo que el resultado 575 se obtiene mediante el algoritmo usual de la sustracción, el número desconocido, representado por una línea horizontal (___), es simplemente el resultado de efectuar la operación indicada en el primer miembro de la igualdad; el signo igual expresa el resultado de la operación. Se trata, por tanto de una actividad típicamente aritmética. El trabajo consiste en calcular el número particular que se debe asignar a la línea horizontal de la derecha.

Ejemplo 2.

Realiza estas sumas y compara los resultados:

a) 24.386 + 6.035　　　6.035 + 24.386

b) 24.386 + 6.035 + 715　　　6.035 + 715 + 24386

Si un alumno se limita a realizar las operaciones pedidas y comprobar que los resultados son iguales dos a dos, la actividad matemática realizada no implica ningún nivel de razonamiento algebraico.

Ejemplo 3.

El Ayuntamiento plantó al comienzo de la primavera 25 cajas de petunias. Cada caja contenía 20 petunias. Tras unos días de sequía murieron 72 petunias. ¿Cuántas quedan aún?

Un alumno puede razonar del siguiente modo: El número total de petunias que se plantaron fueron 25 cajas, por 20 petunias en cada caja, total 500 petunias. Como después se estropearon 72, habrá que descontarlas del total, o sea, quedan 500 – 72 = 428; 428 petunias.

En esta práctica matemática intervienen números particulares, operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación. Es cierto que en la tarea el sujeto debe reconocer la ocasión de aplicar los conceptos de multiplicación y sustracción de números naturales, además del concepto de número natural aplicado como medida del tamaño de colecciones discretas. Sin embargo, estos procesos de particularización no los consideramos como propios del razonamiento algebraico: las reglas que definen las situaciones de uso de tales conceptos no se hacen *explícitas* en la realización de la tarea.

4.2 Tareas con un nivel incipiente de algebrización

En el ejemplo 2, un alumno podría haber razonado de la siguiente forma: “puesto que 24386 + 6035 es 30421, entonces para calcular 24.386 + 6.035 + 715 es suficiente añadir 715 al resultado 30421, dando como suma total 31136”. Asimismo, podría haber razonado que los resultados son iguales dos a dos, puesto que el orden en que se suman dos términos es irrelevante. El alumno no tiene porqué nombrar a estos razonamientos “propiedades asociativa y conmutativa”; lo esencial es que establece una relación genérica entre números y unas propiedades reutilizables de sus operaciones, lo que corresponde a un nivel incipiente de algebrización.

En el caso de prácticas matemáticas que ponen en juego incógnitas y relaciones (ecuaciones) el uso de materializaciones simbólicas (__, …, [ ], ○) para las cantidades desconocidas marca un primer nivel de algebrización si la determinación del valor desconocido no se hace mediante la mera asignación del resultado de operaciones sobre objetos particulares. Asimismo, la aplicación de propiedades relacionales y estructurales del semigrupo $\mathbb{N}$ de los naturales, expresadas con lenguaje numérico y natural, es también propia del nivel 1 de algebrización.

Ejemplo 4.

Determina el valor que falta en cada una de las siguientes expresiones.

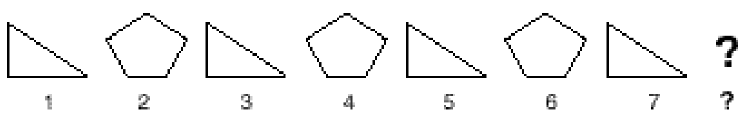
a) $5 + 11 = 11 + \_$ *b)* $10 + \blacklozenge = 15 + 15$ *c)* $3 \times \blacksquare = 672$

La tarea a) se puede resolver sin realizar directamente las operaciones, evocando la propiedad conmutativa de la suma de los números naturales. La b) se puede resolver mediante descomposición y aplicando la propiedad asociativa, 10 + ♦ = 10 + 5 + 15 = 10 + (5 + 15) = 10 + 20, luego el número que falta es 20. La c) se puede resolver reconociendo que la división es la operación inversa de la multiplicación.

En los tres casos las tareas se resuelven evocando propiedades algebraicas de las operaciones con números naturales, y no realizando los cálculos sobre los números particulares que intervienen, o mediante ensayo y error. Esta es la razón por la que le asignamos un primer nivel de algebrización.

Ejemplo 5.

Continúa las siguiente secuencia; describir la regla que se sigue y determina, ¿qué figura (triangulo ó pentágono) corresponde a la posición 89 de la secuencia?, ¿y a la posición 100 de la secuencia?



Si se enuncia la regla general de tal manera que el alumno reconoce que a todos los números pares le corresponde siempre un pentágono y a todos los números impares le corresponde siempre un triángulo, entonces estamos en un nivel 1 de algebrización. Si el alumno se limita a escribir los términos que siguen en algunos casos, sin expresar alguna regla general la actividad sería de nivel 0.

4.3 Tareas con un nivel intermedio de algebrización

Ejemplo 6.

Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

Una posible solución al problema anterior sería: Si Juan tuviera 2 monedas podría jugar; al meterlas en la máquina obtendría 4, pagaría 4 y se quedaría con 0, por lo que no podría volver a jugar. Si Juan tuviera 3 monedas, al meterlas en la máquina obtendría 6, al pagar 4 se queda con 2. Vuelve a meterlas, obtiene 4; al pagar 4 se queda sin dinero. Luego Juan tenía al principio 3 monedas.

La actividad matemática desarrollada en esta resolución no pone en juego ningún nivel de algebrización. El sujeto trabaja con valores particulares de las variables de la tarea y opera aritméticamente con ellos.

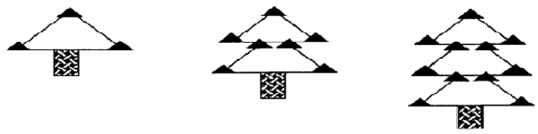
Ahora veamos otra posible solución al mismo problema: Juan comienza con *n* monedas (cantidad desconocida); al ponerlas en la máquina obtiene $2n$; paga 4 y se queda con $2n-4$. Introduce $2n-4$ en la máquina y obtiene el doble, o sea, $2(2n-4)$. Al pagar 4 se queda sin dinero, es decir:

$$2(2n-4)-4=0;\ \ 4n-8-4=0;\ \ 4n-12=0;\ \ n=3$$

Esta segunda solución es claramente de nivel 2. La cantidad desconocida de monedas (incógnita) se representa simbólicamente mediante una ecuación de la forma $Ax+B=C$.

Ejemplo 7.

Completa la secuencia de árboles, hasta la décima posición, indicando el número de triángulos negros que hay en cada árbol. ¿Cuántos triángulos tendrá la figura de la posición 100?



1 **2** **3**

Supongamos que un estudiante realiza el siguiente planteamiento: Se observa que a excepción de la punta y la base del árbol hay siempre 4 triángulos colocados de modo horizontal en las posiciones centrales; para conocer el número de triángulos en un árbol cualquiera, a la posición le resto una unidad, la multiplico por 4 (número de triángulos en las posiciones centrales) y le sumo 3 (número de triángulos de los extremos, en la base y la cúspide). A esta actividad matemática en la cual se logra expresar una regla general en un lenguaje natural le asignamos un nivel 1 de algebrización. Si el alumno es capaz de expresar que la relación entre la posición del árbol y el número de triángulos está definida como $4(n-1)+3$, la actividad matemática realizada pone de manifiesto un nivel intermedio de algebrización (nivel 2), dado que se logra establecer una regla general expresada en un lenguaje simbólico-literal.

4.4 Tareas con un nivel consolidado de algebrización

En el ejemplo 7 el tratamiento analítico de la expresión $f(n) = 4(n-1) + 3$ para obtener la expresión canónica equivalente $f(n) = 4n - 1$ indica un mayor dominio del cálculo algebraico, por lo que asignamos a esta actividad un nivel 3 de algebrización.

Ejemplo 8:
Pedro tiene una cierta cantidad de dinero. María tiene cuatro veces más dinero que Pedro. Si Pedro ganara 18.00 euros más, entonces tendría la misma cantidad de dinero que María. ¿Puedes calcular cuánto dinero tiene en total Pedro? ¿Cuánto dinero tiene María?

Un estudiante resuelve el problema de la siguiente manera: Sea x el dinero que tiene Pedro; expresamos como $4x$ el dinero que tiene María. Si Pedro ganara 18 euros más entonces tendría la misma cantidad de dinero que María; por tanto,

$$x + 18 = 4x;\ \ 18 = 4x - x;\ \ 3x = 18;\ \ x = 6$$

La actividad matemática realizada por el resolutor supone un nivel 3 de algebrización ya que se ha planteado de manera simbólica una ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$ y se ha operado con la incógnita para resolverla.

5. Síntesis e implicaciones

En este trabajo hemos sintetizado algunos estándares curriculares que proponen expectativas de desarrollo del razonamiento algebraico en los escolares de educación primaria, así como características básicas de dicho razonamiento. También hemos presentado ejemplos de actividades clasificadas según tres niveles progresivos de algebrización. Es necesario reconocer que las fronteras entre los niveles pueden a veces ser difusas y que dentro de cada nivel es posible hacer distinciones que podrían llevar a proponer nuevos niveles. Sin embargo, nuestra propuesta puede ser útil para orientar la acción del maestro de primaria que trate de impulsar la progresión del pensamiento matemático de los alumnos hacia niveles progresivos de generalización y eficacia en la representación y el cálculo.

En síntesis proponemos utilizar tres criterios para distinguir los niveles de razonamiento algebraico elemental:

1. La presencia de “objetos algebraicos” - que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación.
2. Tipo de lenguajes o representaciones usadas.
3. El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como “algebra temprana” (Carraher y Schliemann, 2007) proponemos distinguir dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para diferenciarlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es “hacer explícita la generalidad”, en el campo de las relaciones (equivalencia y orden), estructuras, el estudio de las funciones y la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad. En la tabla 1 se describen sintéticamente ejemplos de tareas, objetos algebraicos, tipos de lenguajes y tratamientos característicos de cada nivel de algebrización.

Tabla 1. Niveles de algebrización de tareas matemáticas

<table>
<tr><th>Nivel</th><th>Descripción de tareas</th><th>Objetos algebraicos</th><th>Lenguaje</th><th>Tratamiento</th></tr>
<tr><td>0</td><td>– Se realizan cálculos. Se pone énfasis en realizar operaciones y obtener un resultado.</td><td>– Ninguno</td><td>Aritmético</td><td>Operacional</td></tr>
<tr><td>1</td><td>– Descomposición de números
– Relaciones inversas entre las operaciones
– Propiedades de las operaciones
– Igualdad como indicador de equivalencia de expresiones
– Cantidades indeterminadas
– Uso de símbolos (Δ,__,■ [ ], ◯) para representar una indeterminación: un valor faltante, un número generalizado, una incógnita, una variable, etc.
– Uso de literales para modelizar situaciones. Plantear ecuaciones de la forma $ax = b$ e inecuaciones de la forma $cx \leq p$.
– Representar, analizar y generalizar patrones, utilizando tablas, gráficas o palabras. Reconocer la variable independiente, dependiente y la regla de correspondencia.</td><td rowspan="3">– Propiedades de las operaciones
– Equivalencia
– Ecuación
– Inecuación
– Patrones
– Función
– Incógnita
– Variable</td><td>Natural, numérico, simbólico…</td><td>No se realizan operaciones explicitas con el valor desconocido</td></tr>
<tr><td>2</td><td>– Propiedades de las operaciones
– Igualdad como indicador de equivalencia de expresiones
– Cantidades indeterminadas
– Uso de literales para modelizar situaciones. Plantear ecuaciones de la forma $ax + b = c$ e inecuaciones de la forma $cx + d \leq p$.
– Representar, analizar y generalizar patrones, utilizando símbolos y literales.</td><td>Simbólico literal</td><td>No se realizan operaciones explicitas con el valor desconocido o con las variables</td></tr>
<tr><td>3</td><td>– Propiedades de las operaciones
– Igualdad como indicador de equivalencia de expresiones
– Cantidades indeterminadas
– Uso de literales para modelizar situaciones. Plantear ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ e inecuaciones de la forma $cx + d \leq px + q$
– Representar, analizar y generalizar patrones, utilizando símbolos y literales
– Reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas simples y resolver ecuaciones lineales</td><td>Simbólico literal</td><td>Tratamiento analítico de expresiones</td></tr>
</table>

Si queremos desarrollar el razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y mejorar el tratamiento del álgebra en secundaria, el profesor debe ser el principal agente del cambio. La distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental que hemos descrito en este trabajo, junto con los ejemplos ilustrativos de los mismos, puede ser útil en la formación matemática de maestros de educación primaria. El estudio y discusión de ejemplos similares a los presentados en este trabajo puede permitir el desarrollo en los maestros de un *sentido algebraico,* al permitir reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN) y Fondos FEDER y el Proyecto EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad.

Bibliografía

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 26 (42B),* 483-511.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y estándares 2000*. Reston VA: NCTM. Traducción, M. Fernández (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales), 2003.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics. A quest for coherence.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2011). Common core state standards for mathematics. (Disponible http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)

Lilia Aké Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas por la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, México. Becaria doctoral del Programa MAEC-AECID en el DPTO. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Facultad de Educación, Campus de Cartuja, Granada, España**.** **lake86@gmail.com**
Juan D. Godino, es Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada/UGR. Catedrático de Didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada/UGR. Granada, España. Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071 Granada, España.: **jgodino@ugr.es**
Margherita Gonzato es becaria del Programa de Formación de Profesorado Universitario (MEC) en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Facultad de Educación, Campus de Cartuja, 18071 Granada (España). **mgonzato@ugr.es**