UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

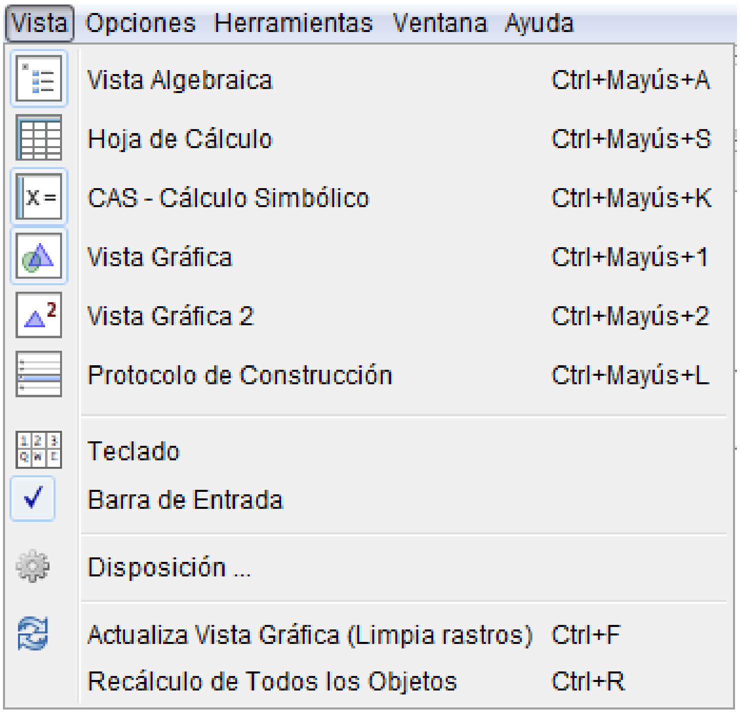
ISSN: 1815-0640
Número 34. Junio de 2013
páginas 151-167
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Cálculo Simbólico también es posible con GeoGebra

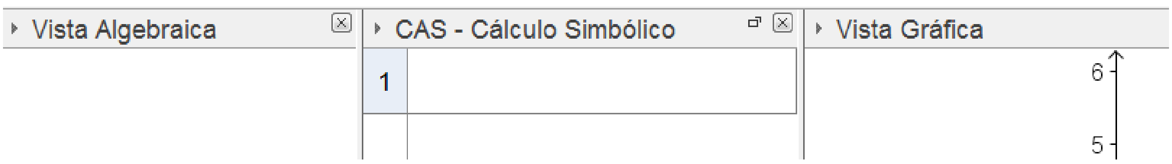
Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Antes de exponer las posibilidades que ofrece las nuevas opciones que GeoGebra ha incorporado a través de su vista de cálculo simbólico, recordaré lo que podíamos realizar hasta la aparición de la última versión, para valorar las mejoras.

Para las opciones que ofrece la versión 4.2 de GeoGebra disponemos de una nueva vista, la vista CAS, a la que se accede de manera similar al resto de vistas disponibles en GeoGebra.



Al abrir esta vista observaremos que aparecerá una línea en blanco, con el número 1 a la izquierda.

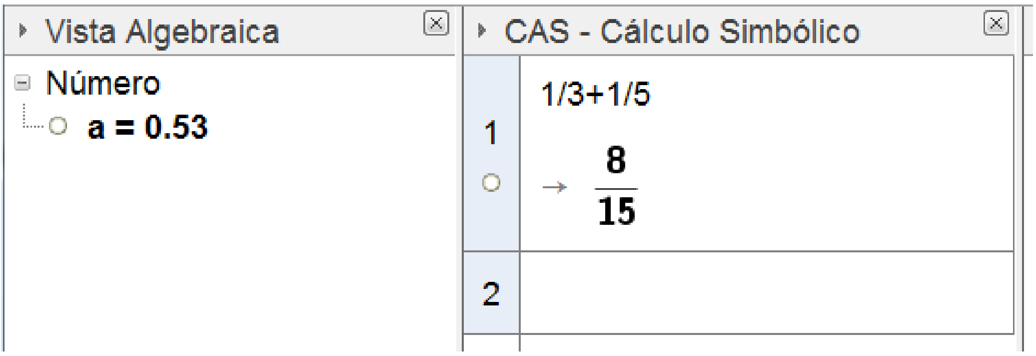


La forma de trabajar de esta vista es similar a la utilizada en la mayoría de programas de cálculo simbólico.

Todas las entradas aparecen numeradas de forma correlativa y a cada entrada corresponderá una expresión de salida o resultado.

Repasemos lo que hasta ahora podíamos hacer con las versiones anteriores de GeoGebra.

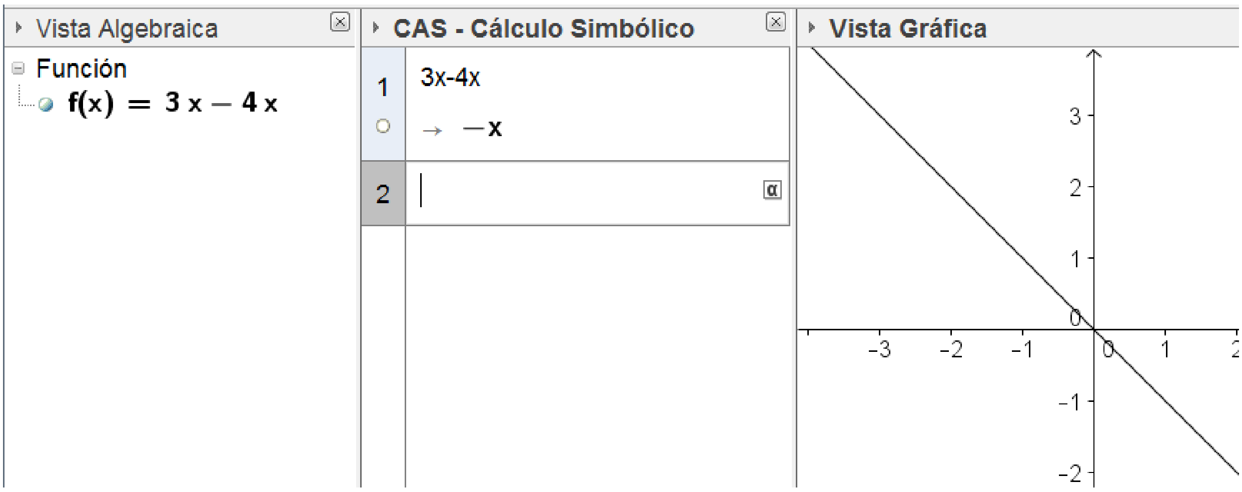
Al efectuar cualquier operación numérica a través de la línea de entrada, los resultados aparecerán en la vista algebraica, expresados en forma aproximada. Por ejemplo, al introducir en la línea de entrada la expresión 1/3+1/5; el resultado que aparecerá en la vista algebraica será el valor a=0.53, mientras que si efectuamos esta misma operación a través de la vista CAS, el resultado será 8/15, expresado en forma exacta.



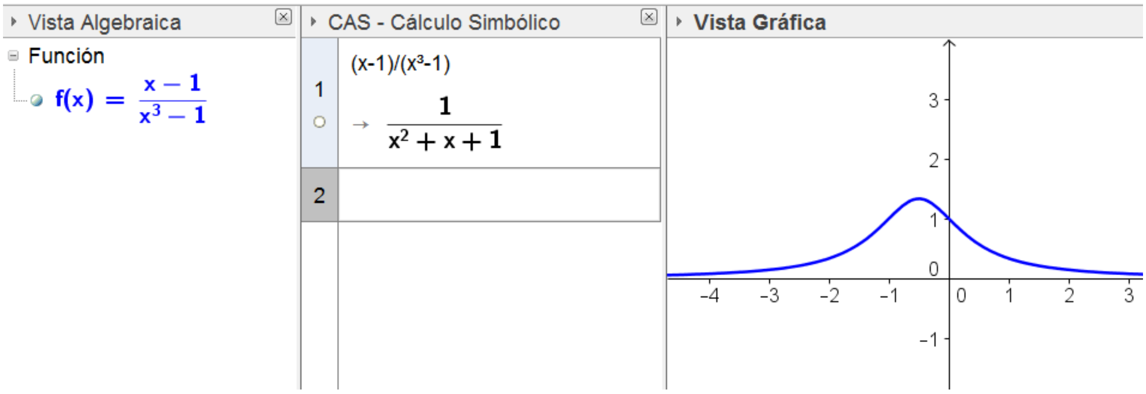
Si en lugar de una expresión numérica, introducimos una expresión simbólica en la línea de entrada ¿qué ocurre? Por ejemplo si escribimos 3x-4x, en la vista algebraica aparecerá la definición de una función:

f(x)=3x-4x

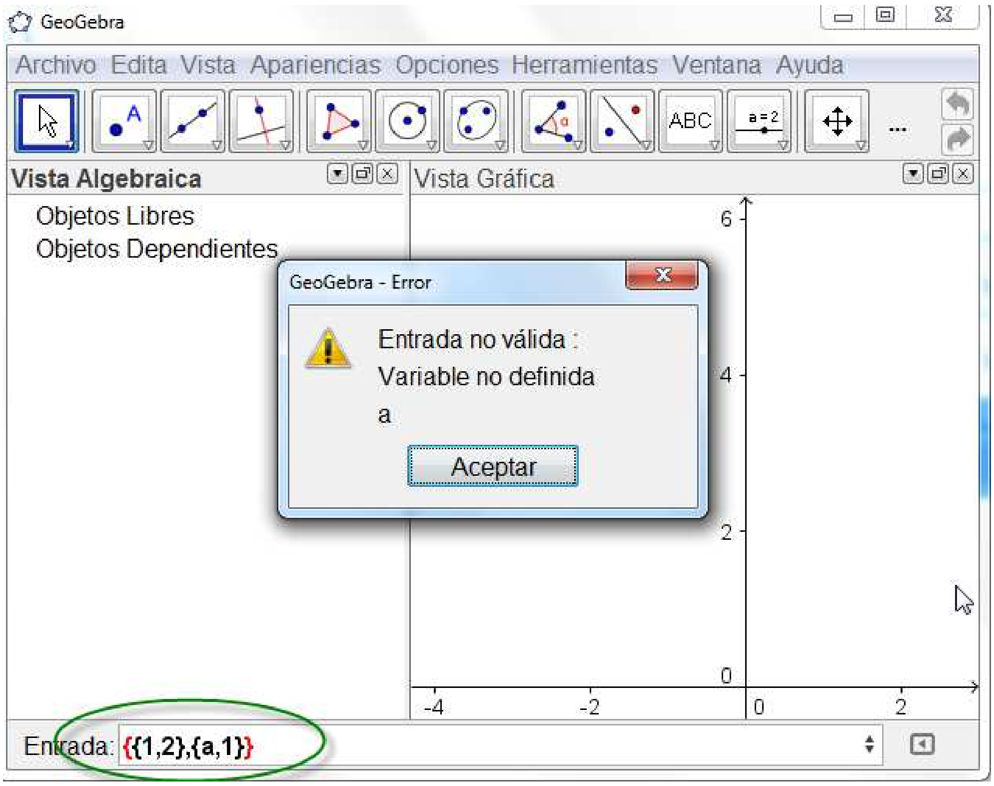
De manera automática, en la vista gráfica aparecerá la representación de la función anterior, en este caso de la función f(x)=-x, aunque como podemos observar no ha efectuado las operaciones en la vista algebraica y por tanto, la expresión no aparece simplificada; lo que si ocurrirá al introducir la expresión en la vista CAS.



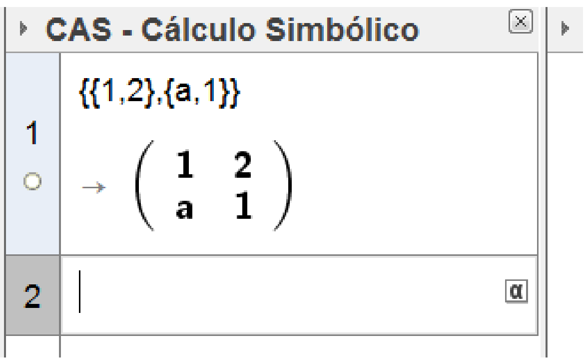
Lo mismo ocurrirá con cualquier otra expresión que sea susceptible de simplificación, tal como aparece en la imagen siguiente al introducir la expresión $\frac{x-1}{x^3-1}$.



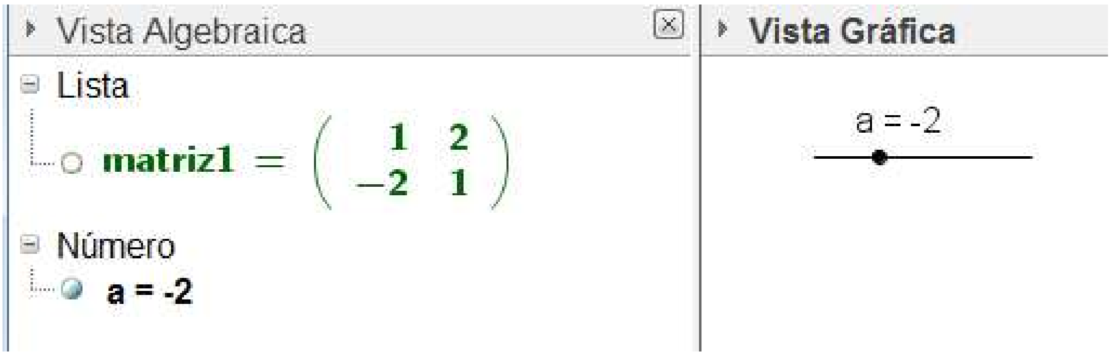
Si ahora introducimos una expresión con más de una variable nos llevaremos alguna sorpresa. Por ejemplo, para que todo no sean funciones, al introducir los elementos de una matriz {{1,2},{a,1}} aparecerá un mensaje de error para indicarnos que queremos utilizar una variable previamente no definida.



Sin embargo, la misma expresión será correcta cuando se introduce en una de las filas de la vista CAS.

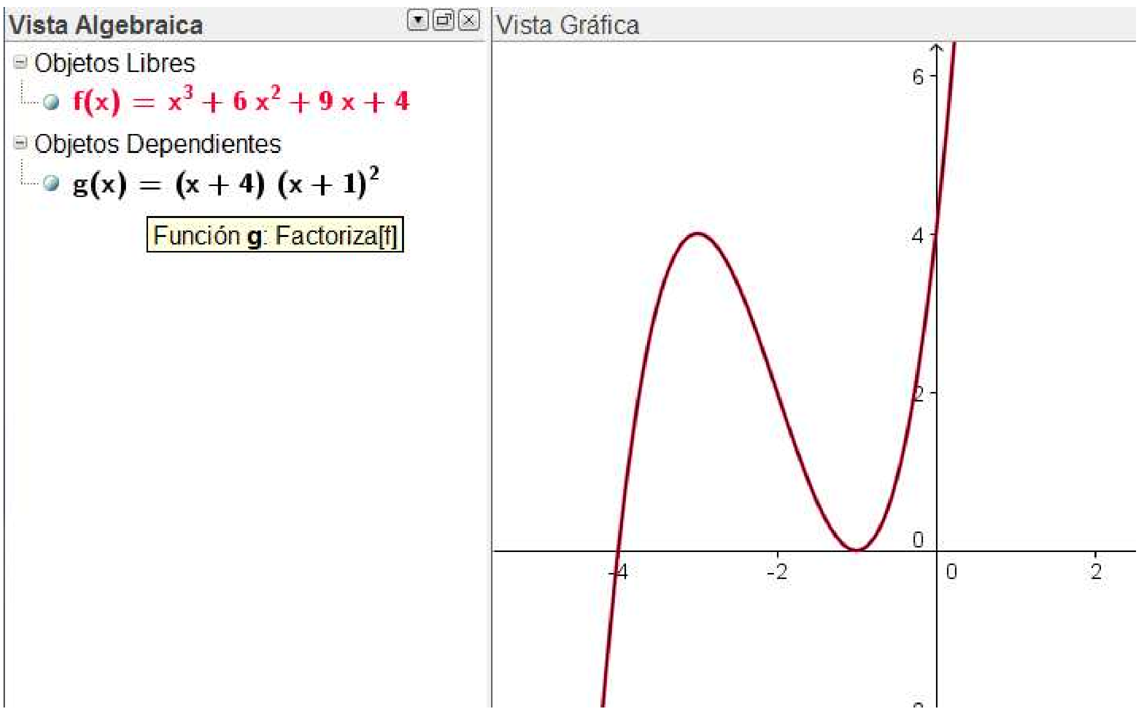


La opción que nos queda, si deseamos utilizar esta matriz en la vista algebraica será definir previamente la variable a como un deslizador.



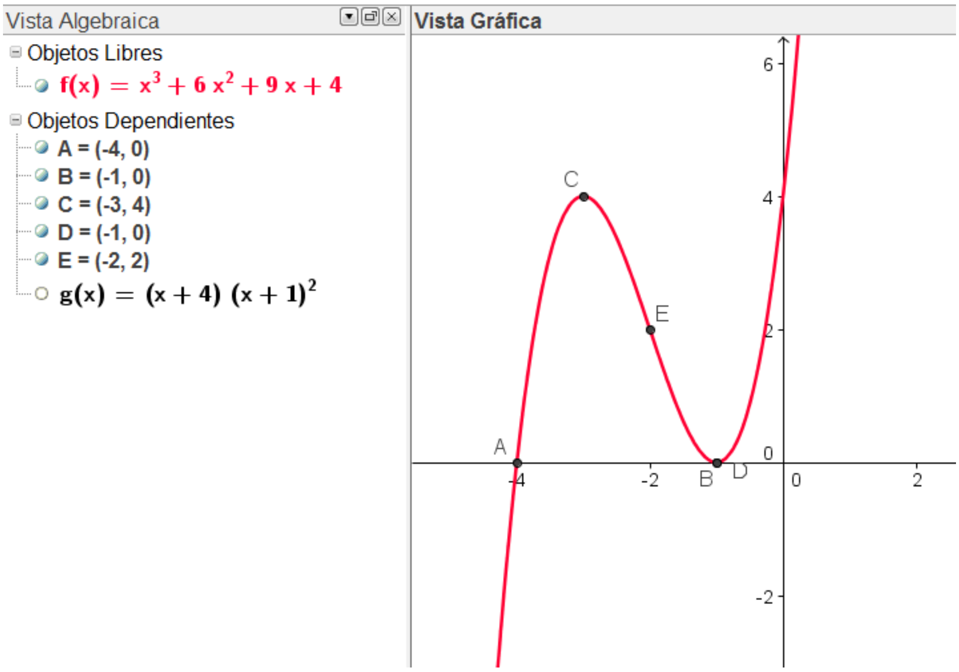
Otras de las tareas que teníamos resueltas con las versiones anteriores de GeoGebra era el estudio de funciones, aunque limitado a funciones polinómicas.

Así, de un polinomio se podría obtener su descomposición en factores utilizando el comando **Factoriza**.



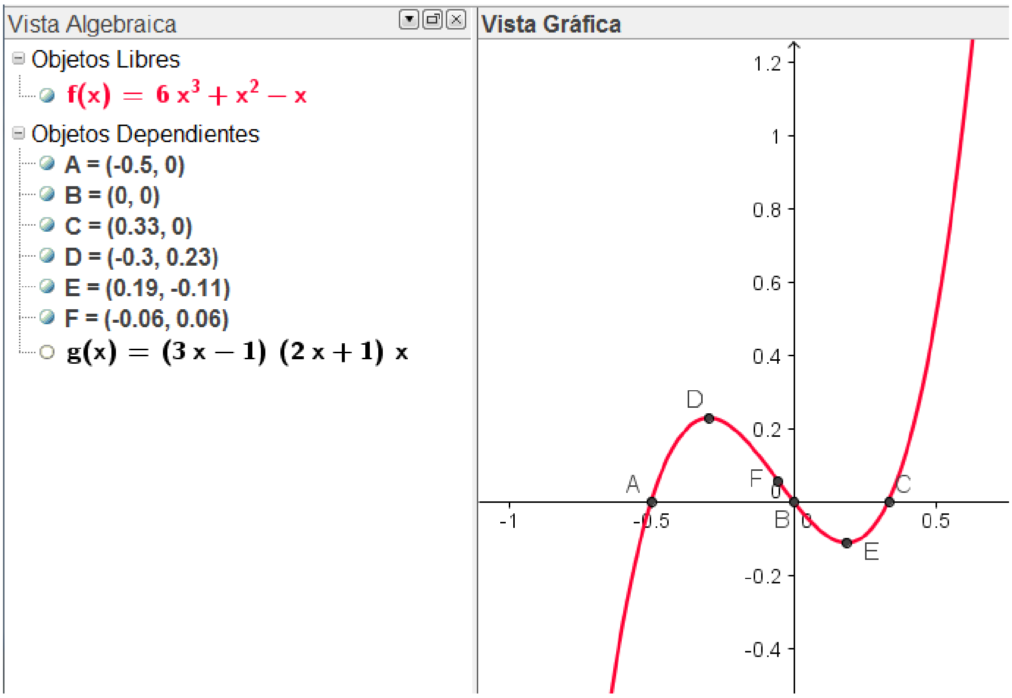
Una vez representada también se podrán obtener los valores que corresponden a puntos críticos: raíces, extremos y puntos de inflexión, utilizando los comando correspondientes: **Raíz**, **Extremo** y **PuntoInflexión**, respectivamente.

UNIÓN



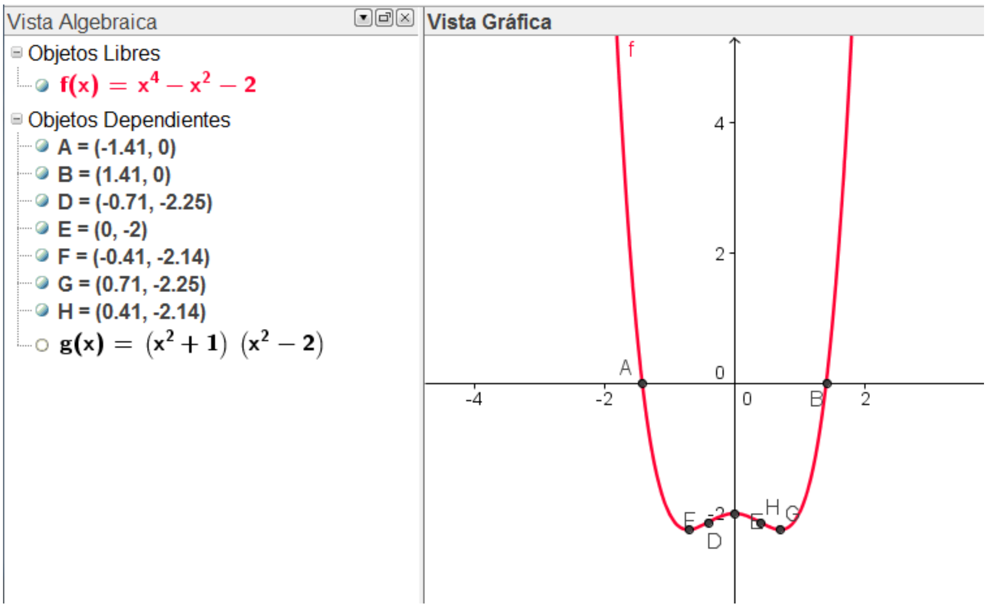
Veamos qué ocurre si realizamos los mismos procesos para la función $f(x) = 6x^3 + x^2 - x$.

Al igual que en el ejemplo anterior, obtendremos la descomposición en factores y el resto de valores, aunque en este caso, expresados en forma aproximada.



Probemos con otro polinomio, con $f(x) = x^4 - x^2 - 2$.

Los resultados que obtenemos también aparecen en forma aproximada y en la descomposición en factores no mostrará aquellos que corresponden a raíces irracionales y mucho menos, las que resulten de valores complejos.



Las opciones y comandos que ofrece la incorporación del cálculo simbólico a partir de la versión 4.2 de GeoGebra, no solo resuelven las incidencias anteriores, sino que además amplían las posibilidades de GeoGebra, que permitirán su uso en otros bloques de contenidos; lo que hace que poco a poco GeoGebra se convierta en un recurso imprescindible y sobre todo casi único, para el profesorado interesado en incorporar las TIC a su aula.

El cálculo simbólico en GeoGebra

Si comparamos GeoGebra con otros programas de CAS existentes en el mercado, quizás nos pueda parecer que le queda mucho por hacer; pero como ya he comentado, solo hay que darle tiempo a GeoGebra.

En esta comparación a favor de GeoGebra siempre estará su característica de software libre (por ejemplo, al compararlo con Derive) y si la comparación la realizamos con otros mucho más potentes, por ejemplo con Maple o Mathematica, además de la característica anterior hay que tener en cuenta que para ciertos niveles educativos más que potencia se requieren otras características como sencillez, intuición o dinamismo, por lo que GeoGebra es suficiente para el desarrollo de la mayoría de los contenidos.

A modo de resumen, las opciones que ofrece la vista CAS de GeoGebra nos permite trabajar los siguientes contenidos:

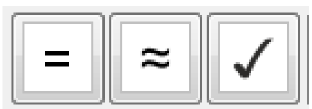
- Factorización de números y polinomios.
- Operaciones con fracciones algebraicas
- Resolución de ecuaciones.
- Resolución de sistemas de ecuaciones.
- Discusión de sistemas.
- Cálculo diferencial.
- Cálculo integral.
- Cálculo de límites.
- Sumas y productos de series.

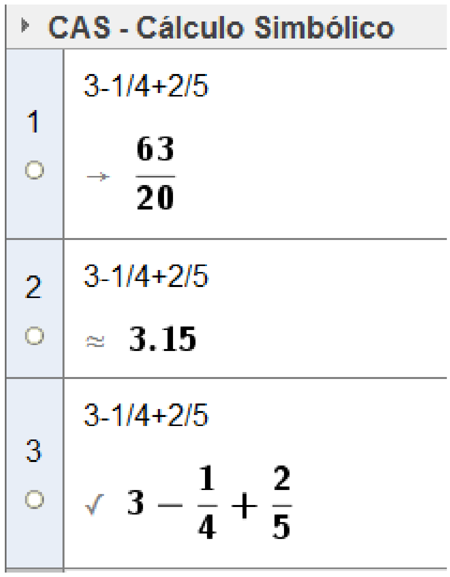
- Simplificación de expresiones trigonométricas.
- Vectores y matrices.
- Resolución de ecuaciones diferenciales.

La vista CAS

Como ocurre con el resto de vistas disponibles en GeoGebra, la vista CAS dispone de una barra de herramientas propia.

Como ya hemos observado en los ejemplos iniciales, podemos realizar sencillas operaciones numéricas o simbólicas en esta vista, obteniendo los resultados de forma directa. Si nos fijamos en los tres primeros botones de la barra de herramientas, tendremos las opciones necesarias para obtener un resultado en forma exacta, en forma aproximada o dejarlo si realizar ninguna operación.

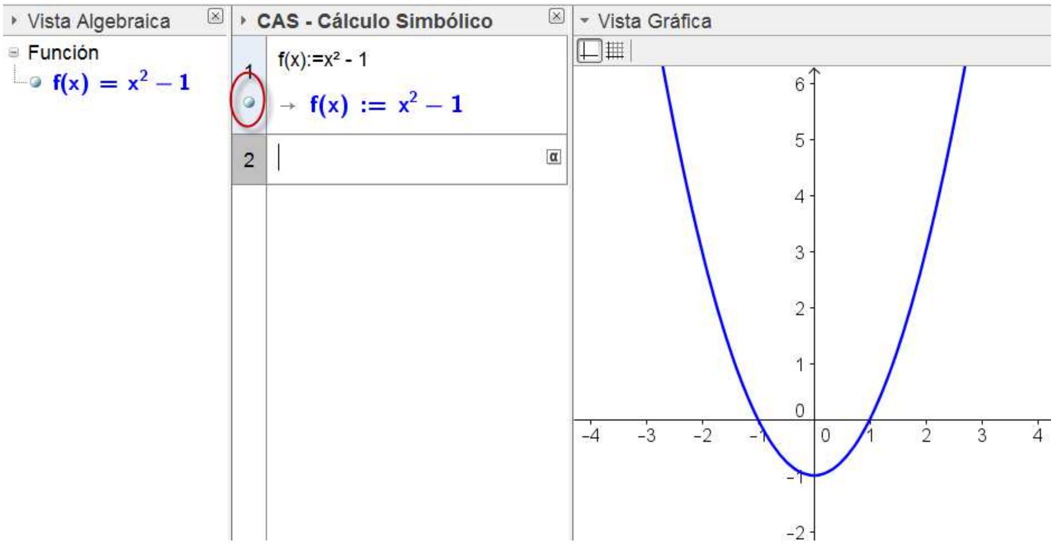




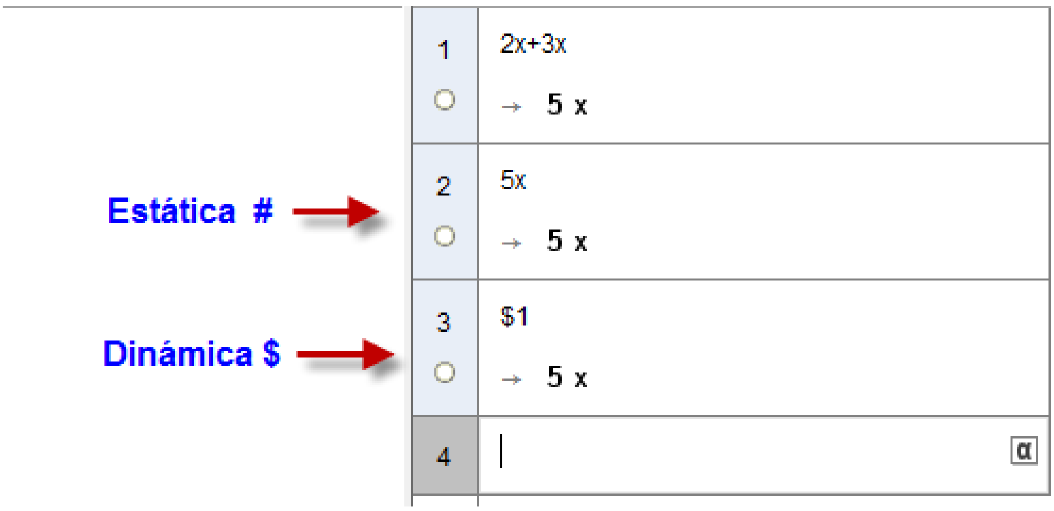
Como era de esperar, disponemos de las opciones necesarias para facilitar la edición de cualquier expresión contenida en cualquiera de las filas, sin olvidar que podemos pulsar directamente sobre una expresión de entrada, para modificarla y por tanto, para obtener los nuevos resultados.

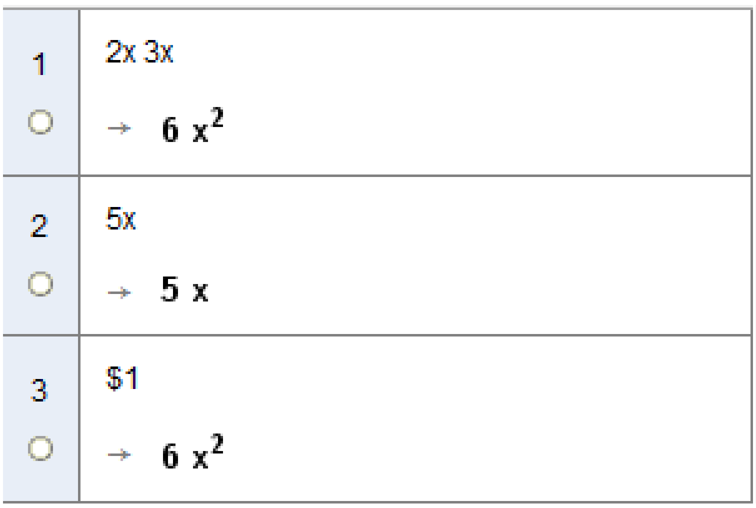
Las distintas vistas están relacionadas, de manera que cualquier valor contenido en una de ellas se podrá utilizar en otra de las vistas disponibles en GeoGebra.

Por ejemplo, si escribimos una expresión simbólica (cuya variable sea x) en la vista CAS, bastará con marcar el círculo (Ocultar/Mostrar) para obtener la definición de la función en la vista algebraica y su representación en la vista gráfica.



Además, entre las expresiones contenidas en las filas se podrán establecer relaciones que serán estáticas o dinámicas, de manera que al cambiar los valores de las celdas iniciales, no cambien o cambien, según el caso, todas las celdas relacionadas.

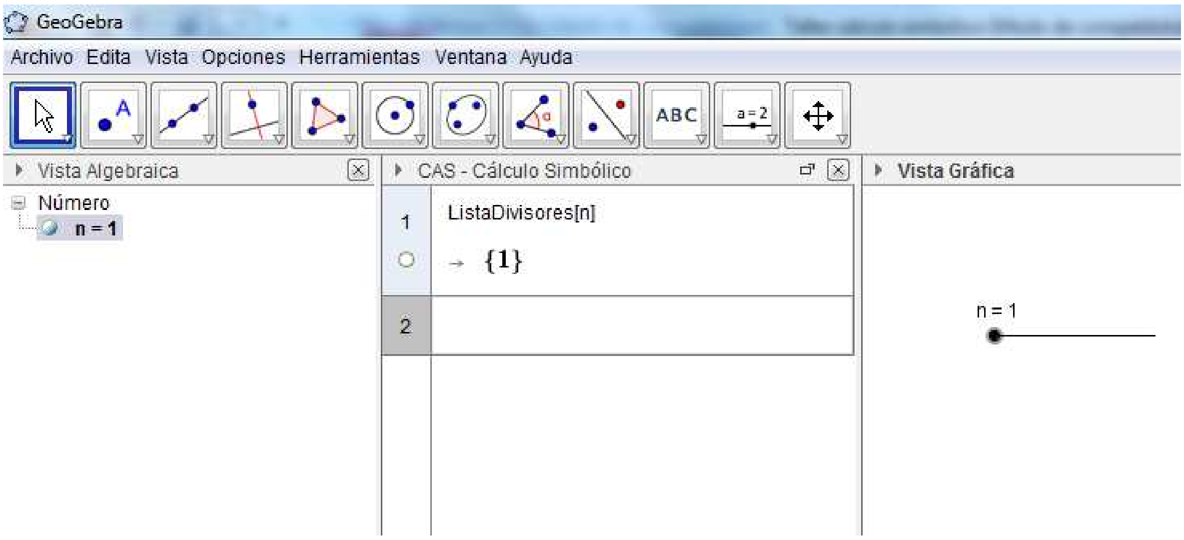




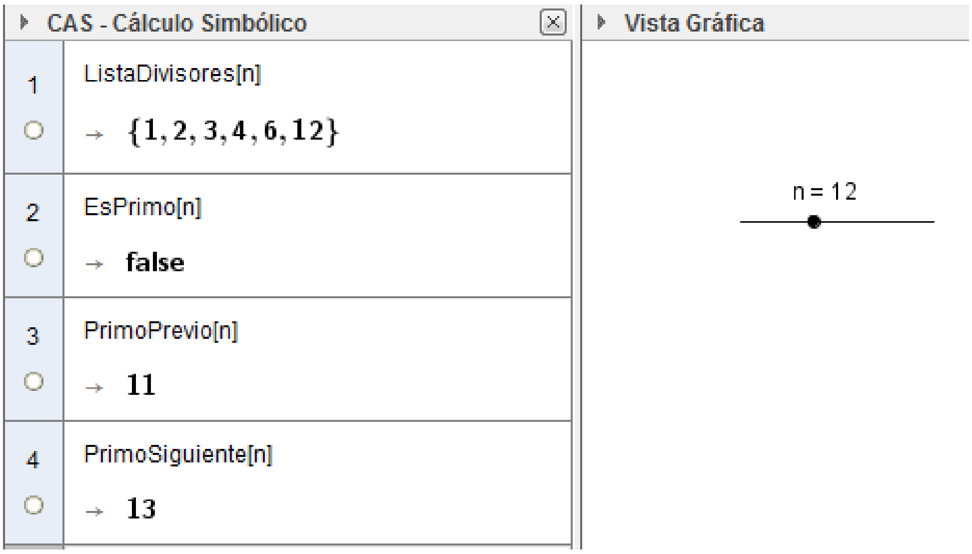
Continuando con los distintos botones disponibles en la barra de herramientas, el siguiente botón permite descomponer en factores números o polinomios. Este botón, corresponde por tanto, al comando **Factoriza**. Realicemos un ejemplo sencillo sobre números primos.

Actividad

Con ayuda de un deslizador, determina la lista de divisores de los números menores que 100 para establecer cuáles son primos y cuáles no.



Esta actividad se puede completar con otros comandos y funciones disponibles para trabajar con números primos.



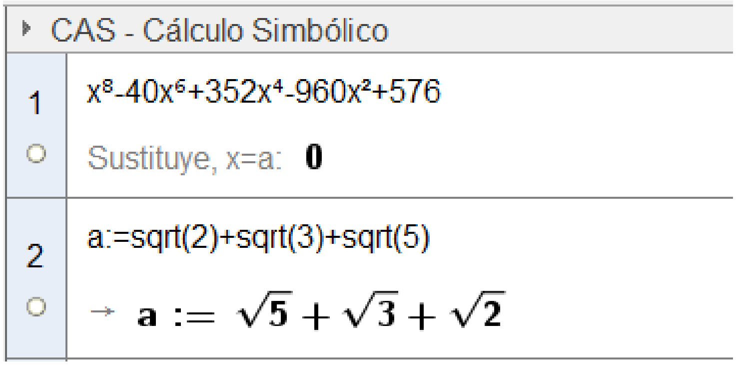
Continuamos con los dos siguientes botones que encontramos en la barra de herramientas que facilitan el desarrollo de una expresión o la sustitución de un valor o expresión en una expresión dada.

Lo mejor es comprobar su utilidad con un ejemplo.

Actividad

Comprobar que a es una raíz del polinomio p(x).

$$\mathrm{a} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \qquad p(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576$$



Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

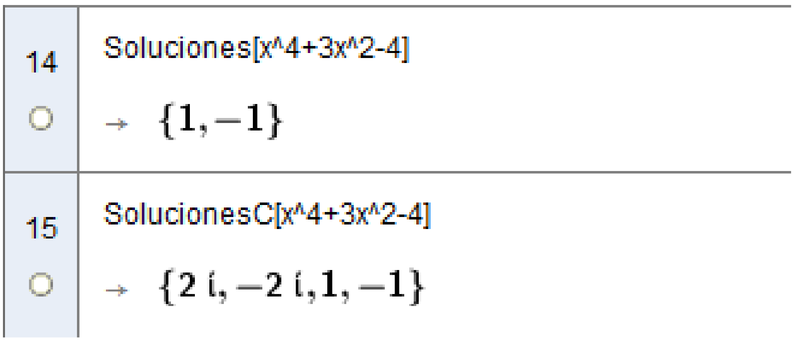
Entre las actividades que permiten las nuevas opciones de Geogebra se encuentran la resolución de ecuaciones, en su sentido más amplío, lo que supone que no estarán reducidas a ecuaciones polinómicas.

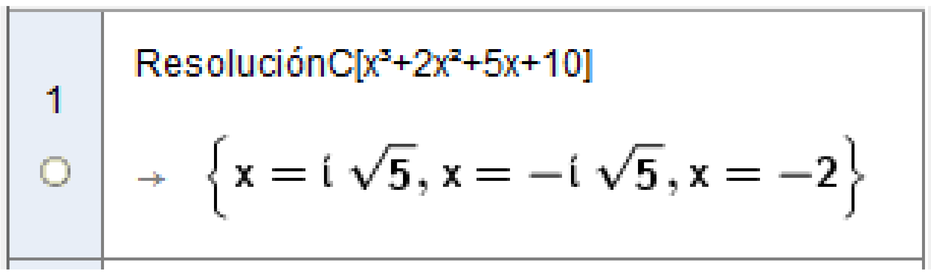
Como sabemos, en la vista algebraica disponemos de los comandos **Raíz** y **RaízCompleja** para obtener las raíces de un polinomio, según el tipo y según lo valores, el resultado aparecerá en forma exacta o aproximada.

Al utilizar en la vista CAS los comandos **Soluciones** o **Resuelve**, que corresponde al siguiente botón de la barra de herramientas, obtendremos, siempre que sea posible, las raíces en forma exacta de una ecuación que puede ser polinómica o no, como ocurre en los ejemplos siguientes.

Hasta ahora, todas las raíces obtenidas han sido reales, ¿qué haremos para hallar las raíces complejas?

Para obtener los factores complejos disponemos del comando **FactorC** (como complemento a **Factoriza**) y **SolucionesC** o **ResoluciónC**, como complemento a los comandos **Soluciones** o **Resuelve**.

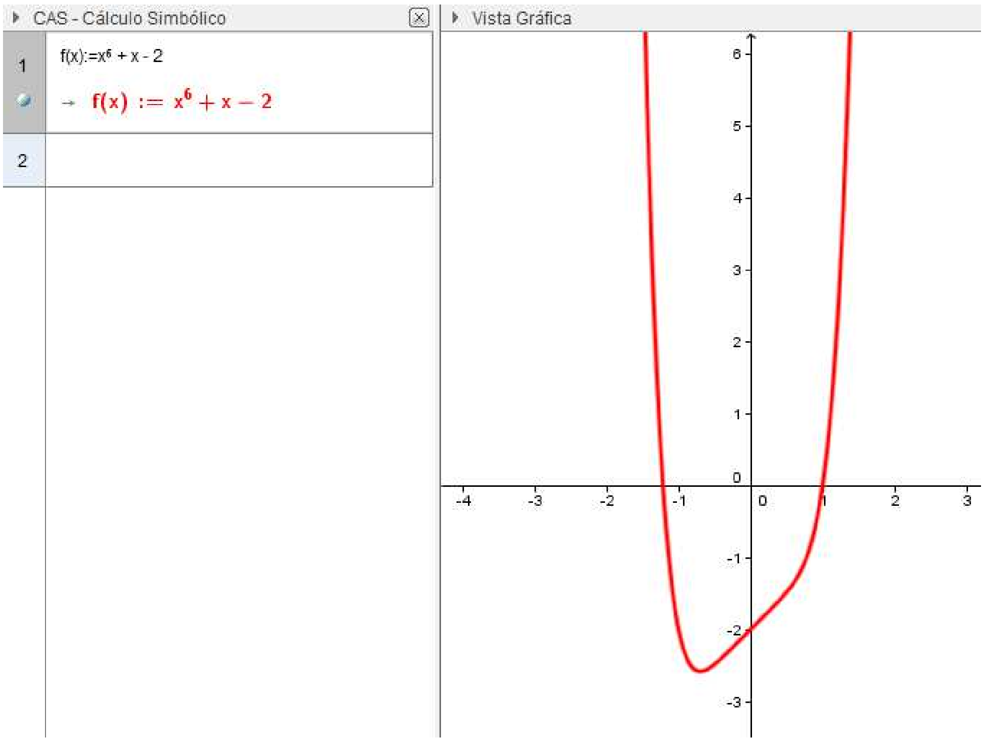




Intentemos ahora resolver la ecuación polinómica $x^6+x-2=0$.

Utilizando los comandos ya conocidos, obtenemos como soluciones la lista de valores **{ ?, 1}**.

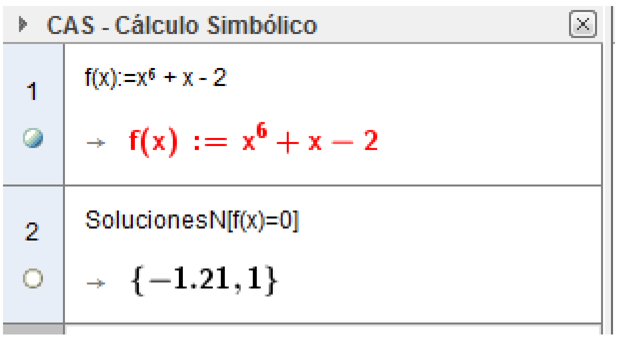
Al tratarse de un polinomio de grado seis y tener una raíz real (x=1), supone que al menos tendrá otra raíz también real que GeoGebra no es capaz de hallar de forma exacta y por tanto, representa con el signo "?". Podemos comprobar su existencia aprovechando la facilidad que el programa nos ofrece para representar cualquier función.



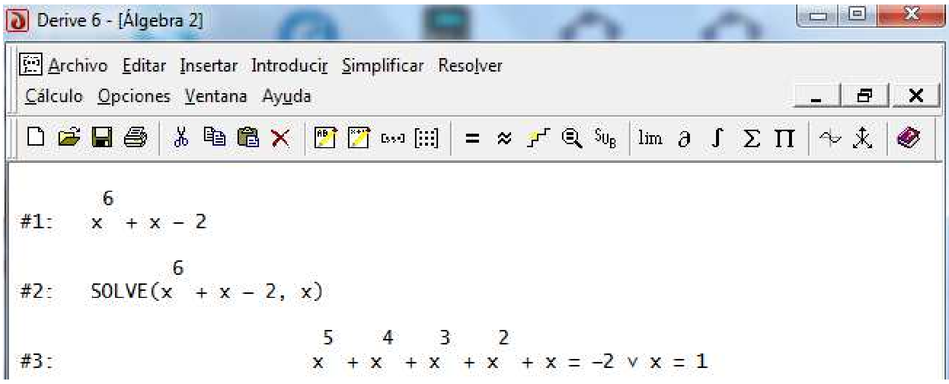
Por tanto, solo nos queda resolver de forma aproximada la ecuación anterior para obtener la raíza que falta que observamos existe en el intervalo [-2, -1].

Además, podemos determinar, a partir de la gráfica de la función, que el resto de raíces de esta ecuación son complejas, aunque por ahora GeoGebra no es capaz de obtener una aproximación.

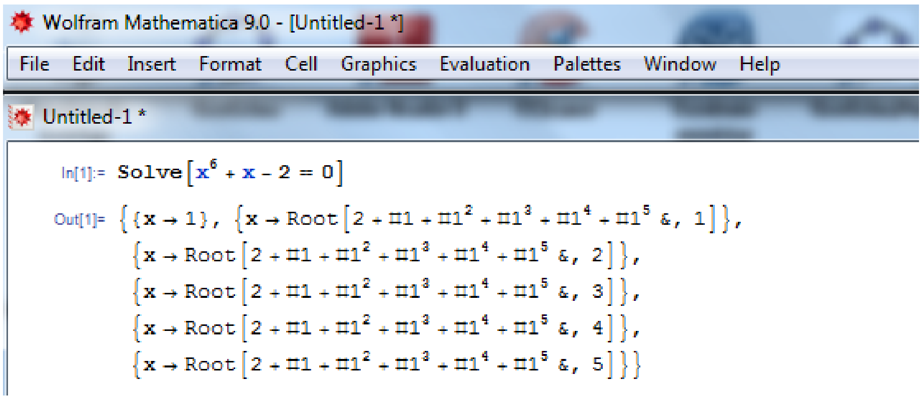
Para hallar la raíz real es necesario recurrir a los comandos **SolucionesN** o **ResuelveN** y como alternativa al botón correspondiente disponible en la barra de herramientas.



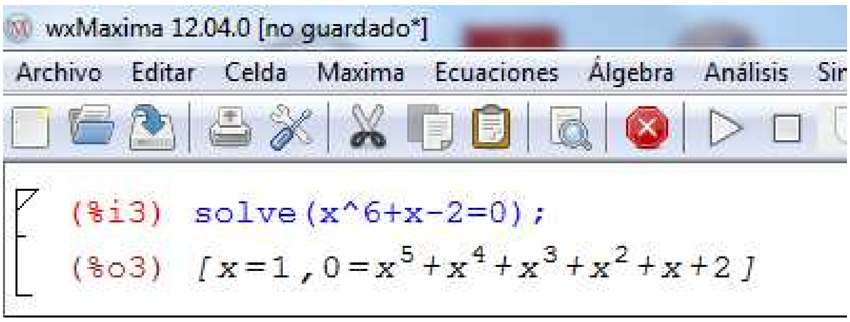
Los cálculos anteriores no debemos considerarlos que están por debajo de los que se obtendrán con otros programas, como podemos ver en las imágenes siguientes:



Derive



Mathematica



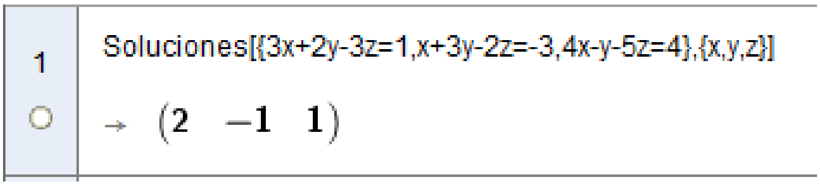
WxMaxima

Los comandos anteriores utilizados en la resolución de ecuaciones permitirán resolver un sistema de ecuaciones lineales o no, en los que la dificultad estará en la notación ya que es necesario escribir tanto las ecuaciones como incógnitas utilizando estructuras del tipo listas (valores entre llaves separados por comas), aunque como alternativa, puede ser de utilidad las referencias a otras filas de la vista CAS a través de los símbolos **$** y **#**.

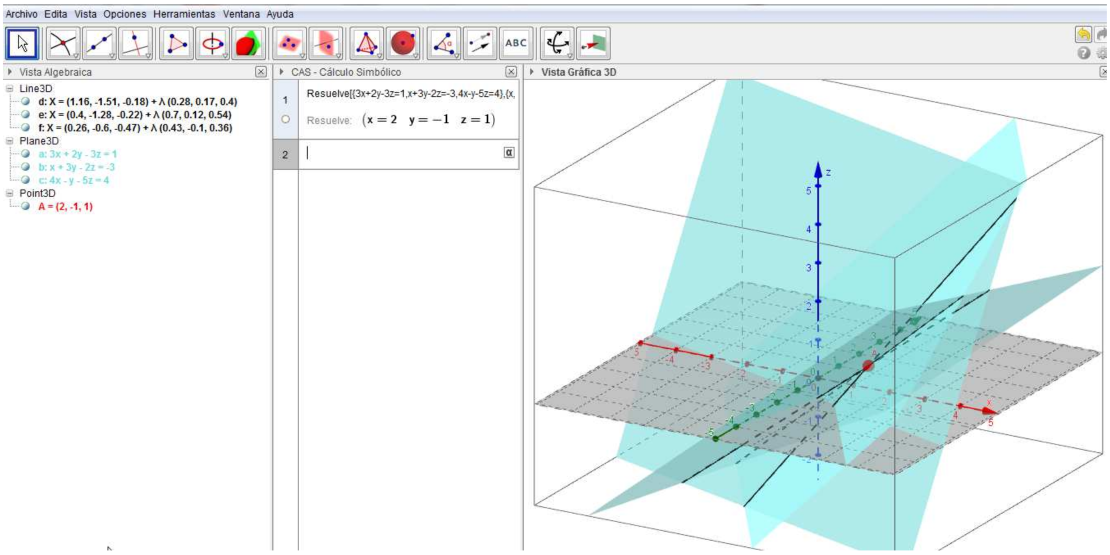
<u>Actividad</u>

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-3z=1 \\ x+3y-2z=-3 \\ 4x-y-5z=4 \end{array}\right\}$$



Para un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, la versión 5 beta de GeoGebra ofrece la posibilidad de representar los planos para encontrar la solución de manera gráfica y por tanto, también algebraica, aunque sea de forma aproximada.



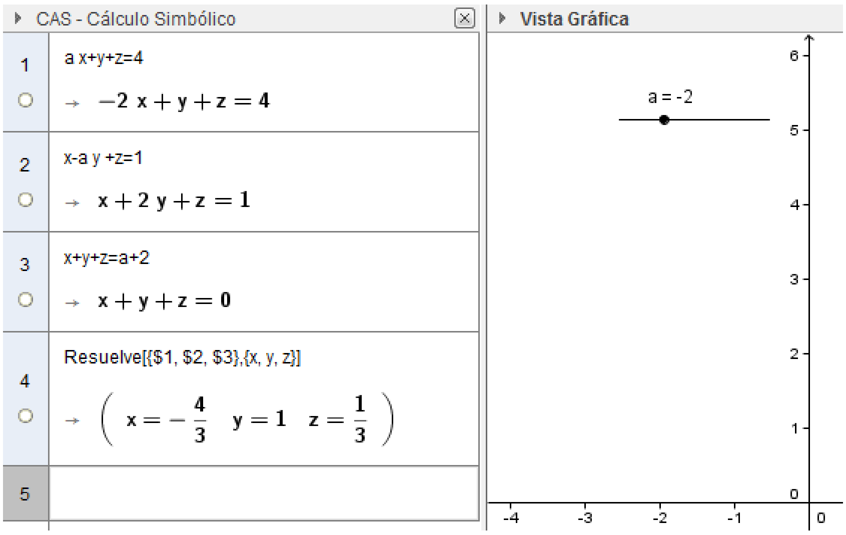
De manera similar, se realizará la discusión de un sistema de ecuaciones con parámetros.

Además, si el parámetro se crea previamente como un deslizador, permitirá observar los cambios que se producirán en el sistema de ecuaciones al variar el parámetro.

<u>Actividad</u>

Discutir y resolver, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} a\,x+y+z=4 \\ x-a\,y+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\}$$



Cálculo diferencial e integral

Pasemos a otro bloque de contenidos y para ello, nos fijamos en el siguiente bloque de botones, los dedicados al cálculo diferencia y al integral.

Para estas dos tareas apenas hay diferencias con las opciones disponibles en versiones anteriores ya que desde la línea de entrada, a través de la vista algebraica era posible derivar e integral, aunque en este último caso, al devolver el resultado de una integral definida, este aparecerá expresado en forma exacta al realizarlo desde la vista CAS.

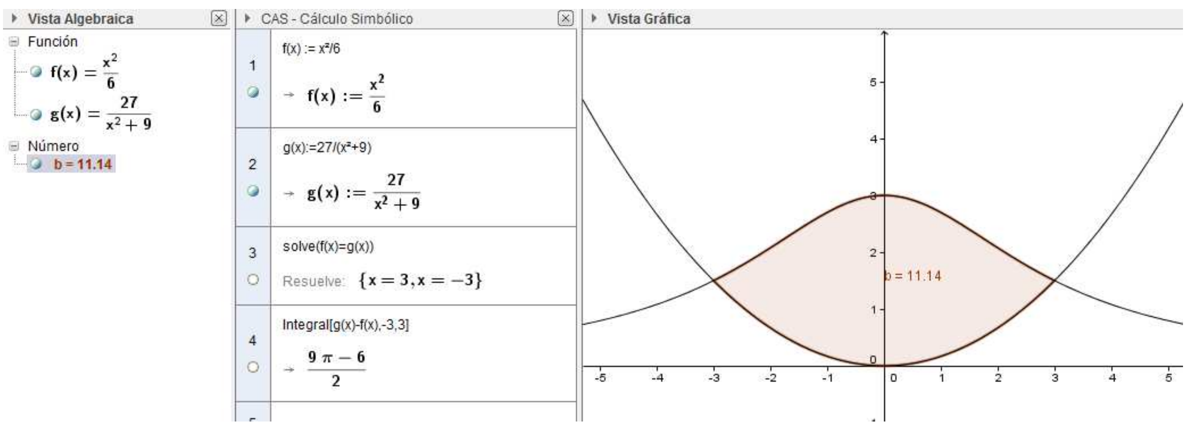
Evidentemente, hay que pensar que las opciones de CAS han incrementado la potencia de GeoGebra al menos en cuanto al cálculo integral.

Como en otros cálculos expuestos anteriormente, la diferencia entre la vista CAS y la algebraica está en la forma de representación de los resultados, en forma exacta en la primera y aproximada en la segunda, como podemos comprobar en la siguiente actividad:

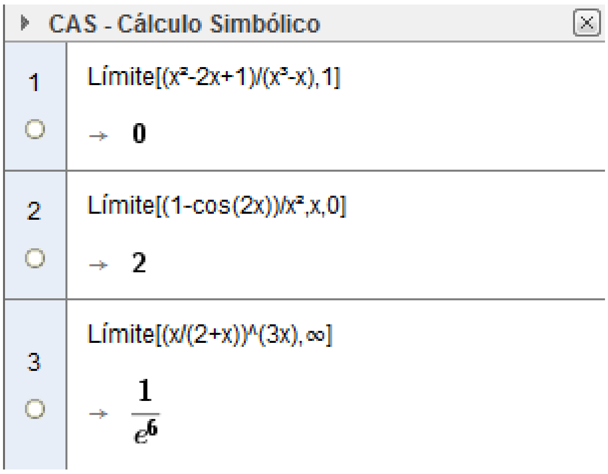
Actividad

Hallar el área encerrada entre las dos curvas siguientes:

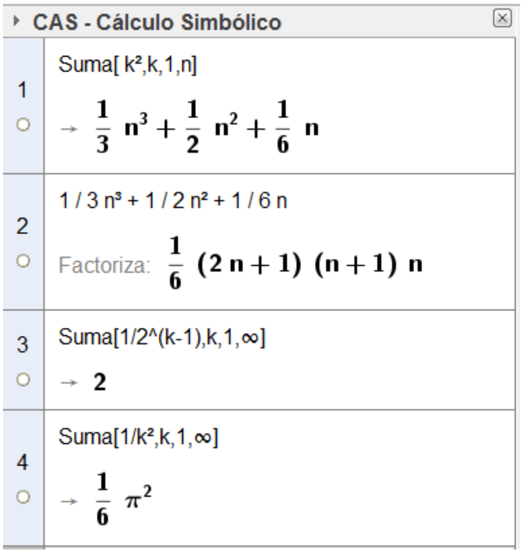
$$y = \frac{x^2}{6} \qquad y = \frac{27}{x^2+9}$$



Lo que sí ha incorporado la versión 4.2 de GeoGebra han sido las opciones para el cálculo de límites, para las que disponemos de los comandos **Límite**, **LímiteInferior** y **LímiteSuperior**, estos dos últimos para obtener los límites laterales.



También ha incorporado los comandos necesarios para obtener sumas y productos de series, tanto finitas como infinitas, a través de los comandos **Suma** y **Producto**, respectivamente.



Álgebra matricial

Para completar la exposición de las opciones que ofrece la nueva versión de GeoGebra para trabajar el cálculo simbólico, veremos los comandos disponibles para trabajar con vectores y matrices.

Como indiqué al comienzo de mi intervención, aparecerá un mensaje de error al definir un vector o una matriz que tenga un elemento simbólico, salvo que previamente se haya creado como un deslizador.

Esto no ocurrirá en la vista CAS en la que tanto vectores como matrices podrán tener elementos numéricos o simbólicos sin necesidad de definiciones previas.

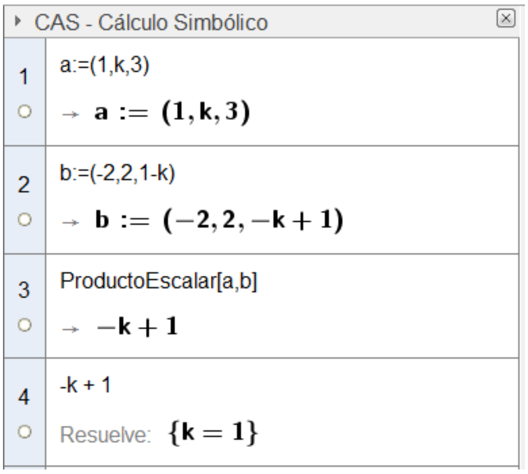
A las operaciones básicas con vectores y matrices ya disponibles desde la vista algebraica, la nueva versión le añade, además de ofrecer los resultados en forma exacta, como ya sabemos, la posibilidad de trabajar con elementos simbólicos en matrices y vectores, como queda reflejado en la actividad siguiente:

<u>Actividad</u>

Dados los vectores a y b.

Hallar k para que sean perpendiculares.

$$\vec{a} = (1, k, 3) \qquad \vec{b} = (-2, 2, 1 - k)$$



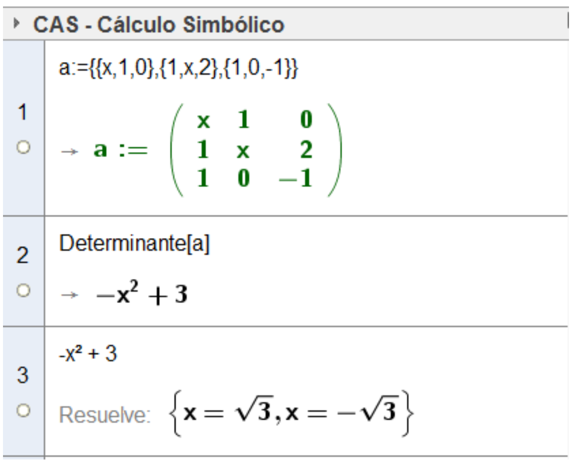
De manera análoga se realizarán los cálculos con matrices, en las que para definirlas en la vista CAS hay que tener en cuenta utilizar los símbolos **:=**.

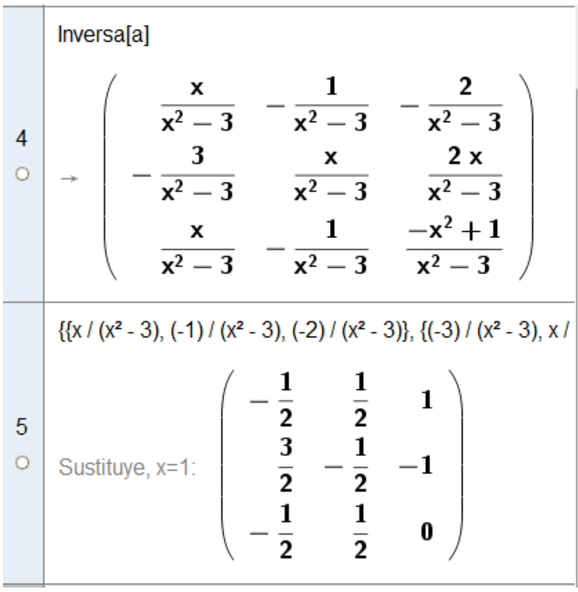
<u>Actividad</u>

Determina los valores de x para los cuales la matriz A es singular.

Halla la matriz inversa para x =1.

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$





Para trabajar con matrices, además de los comandos **Determinante** e **Inversa**, utilizados anteriormente, disponemos de otros como **Dimensión**, **Identidad[n]**, **Traspone** o **RangoMatriz**, cuyo significado es evidente.

Y como en ejemplos anteriores, también para realizar operaciones con matrices y vectores podemos definir los elementos simbólicos como deslizadores para estudiar qué ocurre al cambiar su valor y de esta forma aprovechar las características dinámicas de GeoGebra, de modo que la manipulación de los objetos, algo habitual en GeoGebra, faciliten la experimentación y la investigación y por tanto, el aprendizaje por descubrimiento para lo que este programa es uno de los mejores recursos que podemos utilizar, sino el mejor, al menos para los que desde hace años estamos ilusionados con el uso de las TIC.

La vista CAS ofrece más opciones que os animo a descubrir.

En mi intervención he intentado mostrar aquello que considero de más utilidad esperando que estéis de acuerdo conmigo en que podemos concluir que el cálculo simbólico también es posible con GeoGebra.