UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 161-175

Ideas para enseñar:

El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo

Orlando García Marimón, Luisa Morales

Fecha de recepción:19/12/12
Fecha de aceptación:24/04/13

Resumen	Estructurar un pensamiento matemático en los estudiantes es un fenómeno didáctico que se debe poner atención ¿Incorporar el contraejemplo y la conjetura en el aula posibilita que los estudiantes transiten de un pensamiento ingenuo a un pensamiento matemático? En cuanto al pensamiento ingenuo se caracteriza como un pensamiento inmediato e irracional, el cual evita dar pie a acceder al conocimiento de la realidad de manera científica porque está mal organizado, y se percibe como una característica predominante en muchos estudiantes de diversos niveles educativos. Por otro lado, un pensamiento matemático requiere elementos tales como la inducción, el pensamiento crítico y analítico, la modelación y la abstracción, así como el uso adecuado de contraejemplos y conjeturas. En este reporte se muestra un análisis sobre el papel que juega la incorporación de la conjetura y el contraejemplo cuando se pretenden instalar conceptos matemáticos del Cálculo. **Palabras clave**: Contraejemplos, recursos didácticos, cálculo.
Abstract	Structuring a mathematical thinking in students is an educational phenomenon in which attention must be paid. Does adding the counter and conjecture in the classroom allow students to transfer from a naive thought to mathematical thinking? Naive in thinking is characterized as an immediate and irrational thinking, which prevents the access to real scientific knowledge being poorly organized, and is seen as a prominent feature in many students from different educational levels. Moreover, mathematical thinking required elements such as induction, critical thinking and analytical, modeling and abstraction, as well as the proper use of counterexamples and conjectures. This report is an analysis of the role played by the incorporation of the conjecture and counterexample when trying to install mathematical concepts of Calculus. **Keywords**: counterexamples, teaching resources, calculus.
Resumo	Estruturar um pensamento matemático em estudantes é um fenômeno educacional que se deve prestar atenção Será que a adição do contra-exemplo e a conjectura na sala de aula permite que os alunos transitem de um pensamento ingênuo a um raciocínio matemático? Em quanto o pensamento ingênuo é caracterizado como um pensamento imediato e irracional, o que impede ter acesso ao conhecimento da realidade científica porque está sendo mal organizado, e é visto como uma característica proeminente em muitos estudantes de diferentes níveis educativos. Além disso, o pensamento matemático requeira elementos obrigatórios, tais como a indução, o pensamento crítico e analítico, e modelagem e abstração, bem como o uso adequado de contra-exemplos e conjecturas. **Palavras-chave:** contra-exemplos, recursos pedagógicos, calculo.

1. Introducción

Es bien sabido que el aprendizaje de las Matemáticas es un fenómeno complejo de interés principalmente didáctico que se presenta en todos los niveles educativos. Debido al bajo rendimiento de los estudiantes existe una preocupación que se observa en los resultados obtenidos en países latinoamericanos, como se da el caso de las pruebas de PISA[1] colocándolos por debajo de la media internacional[2]; y que en cierta forma este rendimiento lo manifiestan los estudiantes cuando no logran la estructuración de un pensamiento matemático adecuado.

A través de la historia el desarrollo del pensamiento matemático no ha sido en forma progresiva, más bien los conocimientos matemáticos han sufrido cambios drásticos por el papel importante que han jugado recursos como las *conjeturas* y los *contraejemplos* en la construcción y evolución de las Matemáticas. Aunque estos recursos son empleados por los investigadores, como parte de su quehacer en el caso de la estructuración de los "nuevos conocimientos", pocas veces son usados por el profesor en su práctica docente para el desarrollo y adquisición de conocimientos en el aula. Este trabajo analiza el papel que juega la incorporación de la conjetura y el contraejemplo cuando se desean instalar algunos conceptos fundamentales de las Matemáticas escolar y al pretender la resolución de problemas que la involucran en diferentes niveles educativos.

En una sociedad, los individuos continuamente están tratando de resolver los problemas que se les presentan diariamente cuando intentan obtener explicaciones o resultados para avanzar en su actividad. De una u otra forma la construcción del conocimiento sucede cuando los investigadores se hacen preguntas, e intentan responderlas dando soluciones que no necesariamente son siempre correctas; y sin embargo, les permiten crear estrategias para abordar el mismo problema desde otras perspectivas.

Por otro lado, algunas investigaciones en Matemática Educativa han analizado las equivocaciones de los alumnos como lo muestra Rico (1995); el cual realizó un estudio minucioso en torno a la *categorización y clasificación de los errores*. En ese trabajo se presentan sistemáticamente como *aquellos que se deben a la dificultad de lenguaje, otros debido a asociaciones incorrectas, otros sobre la aplicación de reglas*, *entre otros*; los cuales surgen en la necesidad de construir conocimientos matemáticos en el aula. Con estos elementos propuestos para el docente las percepciones erróneas pueden ser prevenidas o corregidas pero no siempre son fáciles de cambiar por concepciones correctas, como lo muestran algunos estudiantes cuando vuelven a cometer las mismas faltas.

La conjetura y el contraejemplo son recursos que en cierta forma han sido usados desde tiempos inmemoriales: como es el caso de Sócrates y su joven discípulo Teeteto, cuando discuten el significado de ¿qué es la ciencia? En ese diálogo Sócrates pone en tela de juicio las "conjeturas" de su discípulo, por ejemplo cuando Teeteto expone *… lo que se puede aprender con Teodoro, como la geometría y las otras artes de que has hecho mención, son otras tantas ciencias, y, hasta todas las artes, sea la de zapatero o cualquier otro oficio, no son otra cosa que*

[1] **Program for International Student Assessment**
[2] Habilidad Matemática de 406 (México), 370 (Colombia), Brasil (370) , y Media Internacional es 498. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006, p. 70)

ciencias, y Sócrates (con un contraejemplo) le contesta a su discípulo *…cuando se pregunta sobre qué es la ciencia, es ponerse en ridículo al dar por respuesta el nombre de una ciencia, puesto que es responder sobre el objeto de la ciencia, y no sobre la ciencia misma, que es a la que se refiere la pregunta*[3], con una refutación que ayuda a cambiar la respuesta de Teeteto (Platón, 2003). Aquí se observa cómo el maestro induce a "conjeturar" a su discípulo para modificar sus respuestas, lo cual le permite desarrollar un pensamiento mejor estructurado.

Frecuentemente los investigadores falsean sus propias conjeturas o bien las propuestas por otros colegas, y en parte lo hacen estructurando contraejemplos que pueden ayudar el logro de un enfoque distinto en sus investigaciones, llevándolos a la posible construcción de nuevos teoremas. De acuerdo a lo anterior Lakatos (1978) señala que *el descubrimiento ni sube ni baja sigue una trayectoria zigzagueante aguijoneado por los contraejemplos, se mueve a la conjetura ingenua a las premisas y vuelve de nuevo a eliminar la conjetura ingenua, sustituyéndola por el teorema*. Entonces construir conocimientos en las Ciencias requiere de recursos como la conjetura y el contraejemplo y así poder encontrar nuevas estructuras conceptuales.

Las Matemáticas como ciencia no escapan al uso de la conjetura y el contraejemplo, ya que científicos han logrado que a través de mostrar la validez de sus conjeturas su comunidad cambie los enfoques al identificar contradicciones o errores; lo cual permite incorporar otras nociones en una determinada teoría. Conforme a esto, Lakatos menciona que el uso del contraejemplo muestra la necesidad de modificar el objeto matemático por otro que lo convierta en un concepto más acabado. Y en ese sentido Castro y Puig (1997) dicen que *los asaltos al concepto por sucesivos contraejemplos son producidos como consecuencia de la prueba de teoremas y las formas de modificar el concepto*. En la historia de las Matemáticas diversos conceptos han sufrido cambios necesarios y en parte se debe al empleo de los contraejemplos, los cuales muestran incongruencias en el desarrollo de esas nociones matemáticas.

En la perspectiva de este trabajo de investigación, se pretende poner en práctica el papel de la conjetura y del contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas, para analizar qué tanto propician el cambio del pensamiento ingenuo y cómo fomentan a la estructuración de un pensamiento matemático adecuado en los estudiantes.

2. Sobre la conjetura y el contraejemplo

El hombre es un ser dotado de capacidades mentales que han evolucionado paulatinamente tratando de responder las interrogantes que afronta a diario; aunque algunas veces sus soluciones son inadecuadas, éste persiste haciendo cambios de perspectiva presentando nuevas ideas. Entonces en su formación ha usado la ayuda del método de ensayo y error para su desarrollo como individuo; el cual está sustentado con la Teoría de aprendizaje de Thorndike (1911) sobre ¿cómo aprenden los seres humanos? donde se afirma que *cuando aprendemos a jugar golf o tenis o billar,… no aprendemos principalmente de ninguna idea que se explique a nosotros, por ninguna inferencia que razonamos hacia fuera. Aprendemos por la selección gradual del acto o del juicio apropiado, por su asociación con las circunstancias o la situación requerida.* Sin embargo, surgen otras teorías sobre ¿cómo se aprende?

[3] Platón. (2003). *Diálogos. Volumen V: Parménides. Teeteto. Sofista. Político.* Madrid: Editorial Grecos.

con diversos enfoques; las cuales intentan explicar las formas de adquirir conocimientos, destrezas y habilidades necesarios como es el caso del conductismo o el constructivismo o el socioconstructivismo, entre otras.

Muchas de esas teorías apuntan sobre la idea que algunos individuos a través de buenas preguntas pueden elaborar conjeturas con la intención de resolver sus problemas, pero frente a problemas con otro grado de dificultad presentan un "pensamiento ingenuo" que obstaculiza el desarrollo hacia un pensamiento científico. Algo similar ocurre con algunos estudiantes cuando están intentando aprender Matemáticas, y que se refleja en sus desempeños escolares cuando no logran comprender conceptos, propiedades, estructuras matemáticas, entre otras que son necesarias para la construcción de un pensamiento matemático propio.

Sobre el desempeño escolar, las evaluaciones del sistema educativo muestran en cierta forma las limitaciones de los alumnos. En ese sentido, actualmente se realizan pruebas anuales a estudiantes mexicanos como es el caso de ENLACE (*Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares)* desde primaria, secundaria y media superior en donde se manifiestan particularmente errores en Matemáticas. ¿Será que existen pensamientos muy arraigados en los alumnos? ¿Es posible cambiar estas percepciones con elementos lógico-matemáticos que lleven a transitar de un pensamiento ingenuo hacia uno matemático?

El pensamiento ingenuo se expresa algunas veces en errores que representan una preocupación en el medio educativo y muchas veces el docente lo caracteriza como un aspecto negativo en el proceso de aprendizaje, pues en su postura la equivocación de los estudiantes en su trabajo matemático escolar es un fracaso y *no se abandonan por simple exposición a los conceptos científicos correctos* (Pozo, 2003). Algunos autores lo han denominado obstáculo[4] en el sentido que impide la construcción de otros conocimientos y el surgimiento de nuevas ideas.

No es muy frecuente que el docente le pregunte a sus estudiantes sobre sus ideas o "conjeturas" para buscar soluciones a los problemas planteados en el aula, simplemente éste les da las respuestas sin realizar ningún análisis ni discusión con ellos acerca de cómo es que se llegó a tales respuestas. Es decir, la clase se presenta de manera tradicional cuando generalmente el docente expone el contenido siempre de la misma forma (contestándose él mismo sus preguntas), y exhibe una "postura conductista" dando todo como algo acabado sin un análisis crítico sobre el tema abordado.

Sin embargo, muchas veces los estudiantes no entienden el por qué esas respuestas son las adecuadas; ya que ellos poseen sus propias ideas que posteriormente usan en la solución de sus problemas. Esas respuestas algunas veces no son las correctas y casi nunca cambian las percepciones erróneas (errores o pensamientos ingenuos) por las soluciones adecuadas negándose a analizar las equivocaciones construidas en el proceso de aprendizaje.

Además, dentro del quehacer educativo referente al aprendizaje de las Matemáticas, el contraejemplo es un recurso que puede hacer ver a los estudiantes de cualquier nivel educativo que su pensamiento ingenuo no siempre funciona. Por

[4] La noción de obstáculo está relacionada con la idea de aprendizaje por adaptación. (Brousseau, 1986).

lo tanto, requiere modificarlo para tener una percepción adecuada de los conceptos y estructuras matemáticas estudiadas.

Los errores[5] dentro de casos específicos de pensamiento ingenuo son elementos que se han estudiado logrando que ese camino sea el inadecuado al momento de resolver un problema en el aula, pero pocas veces son tomados desde otro ángulo comprendiendo que realmente ese camino es incorrecto para el mejor logro de los aprendizajes. En ese aspecto Carrión (2007) sostiene que *no es suficiente que un individuo sepa lo correcto; debe saber lo que es incorrecto porque, de esta manera, se puede identificar el punto donde termina lo correcto y empieza lo incorrecto*. Dentro de la investigación, los errores son tomados como concepciones previas que no permiten una evolución del pensamiento en el alumno imposibilitándolo cambiar a la estructuración de un pensamiento matemático.

Ahora, si un estudiante posee un pensamiento matemático bien estructurado, puede hacer un análisis crítico de estructuras matemáticas como otras concepciones propias de la ciencia, o diversas actividades que involucren a este tipo de pensar. Entonces, una preocupación para la Didáctica de las Matemáticas es intentar explicar ¿cómo se puede lograr estructurar un pensamiento matemático en los estudiantes? Con esta interrogante se intenta buscar elementos tanto en la Matemática como en la Didáctica, que sirvan para dar respuesta a esta inquietud dentro de la investigación presentada.

En ese sentido, el proceso de conjeturar como elemento de construcción de un pensamiento matemático para los estudiantes, la mayor parte de las veces es algo que no es fomentado por el docente en el aula dejando de observar los conocimientos previos que estos tienen. Los científicos no construyen los conocimientos fácilmente; más bien en la mayoría de las veces están elaborando nuevas conjeturas que más tarde pueden llegar a convertirse en conocimientos mejor estructurados como es el caso de definiciones, lemas, teoremas, corolarios y teorías completas que componen las ciencias. Es por ello que nuestro objetivo en esta investigación es mostrar el papel que juega la conjetura y el contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas.

Existe un recurso en Matemáticas que puede permitir en parte el cambio del pensamiento ingenuo de los estudiantes al que se le ha denominado "contraejemplo". El contraejemplo consiste en plantear al estudiante una situación a partir de una contradicción que tiene que resolver, la cual constituye contraria a la que se analiza en el sentido que difiere del objeto de estudio.

Por ejemplo, cuando en álgebra se pregunta el resultado de $(a + b)^2$ algunos estudiantes dan como "conjetura precipitada" sin un buen análisis $a^2 + b^2$; se sabe que este pensamiento ingenuo y otros se ha estudiado desde distintas perspectivas teóricas como el caso de Ruano et al. (2008), los cuales clasifican y analizan los errores cometidos por parte de los alumnos en álgebra. Pero la pregunta que surge es ¿por qué vuelven a presentar esta idea como solución?, cuando en realidad la respuesta es $a^2 + 2ab + b^2$. La ayuda del contraejemplo presenta casos donde se obtiene que la relación $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ no es válida, como se muestra cuando se asigna en particular $a = 1$ y $b = 2$. Con la ayuda de este pensamiento numérico $(1+2)^2 \neq 1^2 + 2^2 \Rightarrow 9 \neq 5$ se puede permitir un mejor tránsito a un pensamiento

[5] Concepto equivocado o juicio falso. (RAE).

algebraico; lo que sirve para mostrar una contradicción a la concepción errónea previamente establecida.

El empleo del contraejemplo permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje que generalmente es lo que realizan la mayoría de los estudiantes. De acuerdo con lo que afirma Santos (2007) *el uso de contraejemplos cumple una función fundamental en el establecimiento de argumentos matemáticos y es una actividad que los estudiantes necesitan practicar constantemente*.

Con el contraejemplo y la conjetura se puede avanzar en la estructuración de los razonamientos lógico-matemáticos necesarios en los estudiantes, para que puedan ser valorados y mejorados por el docente y por ellos mismos. De esta manera, sus razonamientos pueden ser refinados o hasta fortalecidos, lo que a la vez puede permitir la formación de un pensamiento crítico y analítico vital en la formación de los individuos de una sociedad.

En consecuencia, es necesario observar cómo el uso de estos recursos permite un análisis de los temas matemáticos, haciendo un contraste con la clase tradicional que todavía se da en las escuelas. Con lo cual, se intente obtener provecho de los mismos al posibilitar el fortalecimiento de un pensamiento matemático científico en los estudiantes.

En la Didáctica de las Matemáticas poco se ha reportado sobre la importancia y transcendencia de la conjetura y el contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas. Resulta pues necesario realizar investigaciones sistemáticas sobre tales temas lo que puede permitir poner atención en cómo estos recursos ayudan a la estructuración de un pensamiento matemático.

3. Construcción del saber matemático

El problema del aprendizaje de las Matemáticas está fuertemente vinculado con muchas variables que entran en juego dentro y fuera del aula de clases. Sin embargo, los estudiantes manifiestan muchas veces en sus desempeños académicos una falta de comprensión de las Matemáticas; el cual es el punto de partida de este trabajo de investigación. En el sentido de que se buscan analizar algunos elementos que intervienen en la construcción de un pensamiento matemático necesario para la compresión de las Matemáticas.

Algunos autores han tratado de caracterizar el pensamiento matemático para identificar cuándo un individuo lo pone en juego en diversas situaciones de su entorno. Una interpretación está relacionada con la capacidad de hacer matemática de parte un sujeto, dentro de las cuales se rescata las actividades de resolver problemas que involucra Matemáticas como es el caso particular del cálculo de tasas de interés en un banco, o la interpretación y análisis de datos estadísticos en una encuesta, entre otras.

Sin embargo, la mayor parte de las veces la “construcción de un pensamiento matemático” dentro de las actividades escolares sólo involucra el aprender a hacer como si eso fuera algo “mecánico”. Polya (1965) asegura que *para muchos estudiantes las matemáticas las pueden ver como un conjunto de rígidas reglas, algunas de las cuales se aprenden de memoria antes de los exámenes finales, y* *todas ellas se pueden olvidar después.* Entonces el aprendizaje de las Matemáticas solo se enfoca desde una perspectiva muy reducida sin intentar explicar otros elementos que entran en juego.

Todo lo anterior se refleja en la aula cuando se pide a los alumnos que resuelvan muchos ejercicios parecidos como una expresión del conductismo, cuando se observa las Matemáticas como algo principalmente algorítmico; lo que no permite una comprensión y análisis de que pensar matemáticamente incluye el aprender a conocer (logos), aprender a hacer (praxis) y aprender a ser profundizado en el objeto matemático estudiado en particular.

Sobre los aspectos antes mencionados se puede rescatar parte de los pilares de la educación en el informe de la UNESCO como lo reporta en Delors (1994) sobre el "*aprender a conocer*" que recae en adquirir conocimientos como su comprensión y contextualización para ser aprovechados a lo largo de la vida, el cual se entiende como una parte primordial para comprender el mundo que nos rodea porque el individuo accede en forma correcta a un razonamiento científico que lo hace involucrarse en el desarrollo de la humanidad. Relativo al "*aprender a hacer*" menciona que no es un *significado simple que tiene cuando se trata de preparar a alguien para una tarea material bien definida, para que participase en la fabricación de algo* sino que implica más allá de una mera transmisión de prácticas sociales rutinarias útiles en el desarrollo de una comunidad tanto actividades puramente físicas como otras de carácter de producción científica o intelectual. Sobre el *aprender a ser* se menciona de la capacidad de escoger responsablemente por medio de un *pensamiento autónomo y crítico y de elaborar un juicio propio, para determinar por sí mismos qué deben hacer en las diferentes circunstancias de la vida*, involucrando diversas formas de pensamientos que lleven a los estudiantes a ser tanto responsables como críticos en una sociedad de la que forman parte. Y entonces surge una pregunta ¿cómo es posible estructurar un pensamiento matemático en ellos?

3.1. Pensamiento matemático

El pensamiento matemático está relacionado con un saber erudito como sostiene Bachelard (1985, p.18) cuando habla de la formación de un espíritu científico sobre *la crisis del crecimiento del pensamiento implican una refundición total del sistema del saber*; para tal fin resulta importante dotar al estudiante elementos conceptuales que le permitan transitar de un pensamiento ingenuo a un pensamiento científico, referido a un pensamiento matemático (construido en parte por una comunidad de matemáticos) y que entre otros aspectos relevantes que lo conforman están lo crítico, analítico, entre otros.

Una de las tareas de la comunidad científica de matemáticos, es la que se refiere precisamente al desarrollo del saber erudito que entre otras actividades de su quehacer, están el caracterizar y definir diversos objetos abstractos con los que trabaja hasta llegar a obtener resultados generales que se expresan en teoremas y teorías completas. En cuanto al presente trabajo es de interés investigar lo relacionado con algunas formas de lograr que se desarrolle en los estudiantes su pensamiento matemático, que si bien en cierta forma se asemeja a lo que realizan los matemáticos profesionales, existen e intervienen otros elementos de carácter semiótico y sociocultural sobre los cuales se irá abundando más adelante.

Una aproximación a un pensamiento matemático está dada como un *concepto de carácter cognitivo, generalmente ubicado dentro de la psicología matemática y dentro de la psicopedagogía, que hace alusión al conjunto de representaciones mentales, o redes de conceptos de carácter matemático, y a los procesos cognitivos que actúan sobre esas representaciones*; tomada de la S. E. C.[6] (2005). Sin embargo, se resalta el hecho que no sólo debe observarse o interpretarse como algo puramente sicológico y que debe incorporar otros aspectos de carácter cultural, escolar o social entre otros.

En ese sentido, el pensamiento matemático, es la capacidad del individuo de usar las matemáticas para resolver diversas situaciones que se dan en su vida cotidiana ya sea este un matemático profesional o un estudiante como sostienen Cantoral et al. (2005) que *se desarrolla en todos los humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas* y como aquel que *no se reduce al pensar cuando se está ante una actividad matemática*; sino que se involucra dentro de las necesidades sociales y culturales de cada individuo que le permitan darle solución, siempre y cuando posea los elementos matemáticos adecuados.

En cierta forma la sociedad en que se encuentra inmerso un individuo demanda de la construcción de un pensamiento matemático como un requisito indispensable para entender al menos en parte el mundo matematizado que está en medio de muchas de sus diarias actividades, como el caso entre otros aspectos matemáticos de entender o interpretar las representaciones gráficas. Si por ejemplo, un inversionista quiere examinar la evolución del dólar estadounidense frente a otras divisas monetarias en una página de Internet; tiene la posibilidad de hacer estudios de comportamiento, y tendrá la necesidad de usar un pensamiento matemático para buscar soluciones a sus inquietudes cuando lee, interpreta y analiza la gráfica que le permitan tomar decisiones.

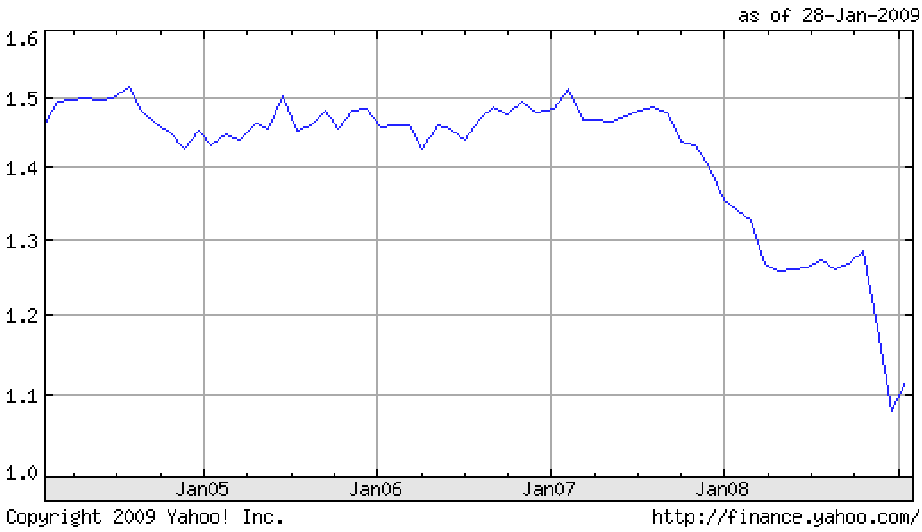


Figura 1. Tomado de Yahoo! México finanzas el jueves 29 de enero de 2009, 3:32PM MX de la relación de cambio de dólares estadounidenses a euros.

6 Secretaría de Educación de Colombia. Pruebas Comprender Matemáticas.

En forma más amplia dentro de los Cuadernos de Evaluación, S. E. C.[7] (2005) designan al pensamiento matemático como conjunto de representaciones mentales internas, redes de conceptos, se relaciona con las diferentes representaciones simbólicas externas - lenguaje verbal, íconos, símbolos matemáticos. Entonces si los alumnos poseen elementos matemáticos bien definidos como conceptos, las relaciones entre conceptos, representaciones geométricas, representaciones algebraicas, entre otros pueden ser capaces en menor o mayor escala de construir un pensamiento matemático adecuado usándolo en un contexto particular donde interviene lo crítico y lo analítico.

Se afirma entonces que estructurar un pensamiento matemático en los individuos es relacionarlo con lo crítico y lo analítico; donde un pensamiento crítico es buscar características invariantes que se observan como: la capacidad de discernimiento aunado a elementos para incorporar al debate, evaluación de los hechos o eventos que entran en juego, la búsqueda de contradicciones, el aspecto autocrítico, entre otras. Además, en un pensamiento analítico se identifican variables que intervienen en la situación problema, se incorpora un razonamiento lógico inductivo o deductivo que muestra, participa e interrelaciona el todo y las partes de un objeto estudiado.

El *pensamiento matemático* es un concepto en el que se hace referencia sobre la manera de pensar matemáticamente usando diversos elementos de la ciencia para resolver actividades que la requieran; pero involucrar a las Matemáticas es entre otros. Es decir, dentro del pensamiento matemático existe una variedad de pensamientos más específicos muchas veces entrelazados que usa el matemático y también pueden ocuparlos los estudiantes en sus procesos de razonamiento que ligados conforman o unifican un pensamiento matemático requerido.

3.2. Metodología.

La metodología que se ocupa en este trabajo es de tipo cualitativa sustentada en la Ingeniería Didáctica, de tal manera que se ha realizado un análisis de la relevancia de la conjetura y el contraejemplo en el medio escolar sobre el aprendizaje de las Matemáticas. Con respecto al análisis se toman como elementos de búsqueda de información una entrevista, un examen diagnóstico y la revisión de libros de textos; donde todo lo anterior es similar al trabajo realizado por un ingeniero pero en la Didáctica de las Matemáticas.

En ese mismo orden, Artigue et al. (1995) denominan a la Ingeniería Didáctica como *una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo de un ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control científico*. Una investigación que se sustenta en la Ingeniería Didáctica no se basa solamente en un cuadro teórico didáctico general, ya que se ocupan herramientas como la entrevista a un experto[8] que enriquecen el trabajo; y que ayuda a validar en parte lo mostrado en el marco conceptual sobre el papel de la conjetura y el contraejemplo al estructurar un pensamiento matemático.

[7] Secretaría de Educación de Colombia. (2005)
[8] *Ver sección 3.1 página 48*

La Ingeniería Didáctica (Artigue et al., 1995) presenta cuatro fases que permiten ayudar en el desarrollo del trabajo investigativo, y las cuales se explican a continuación.

- *Primera fase:* un análisis preliminar, *se estructura en torno al análisis del funcionamiento de un sistema, un equilibrio que por mucho tiempo fue estable pero que ahora se percibe como obsoleto.* En el trabajo se ubica la situación del aprendizaje de las Matemáticas en México y Panamá, haciendo un análisis general breve de algunas de las evaluaciones en parte de los dos sistemas educativos, revisando libros de texto de autores extranjeros usados en las aulas, entre otras actividades teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.
- *Una Segunda fase:* el análisis a priori y concepción, donde *el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema no fijadas por las restricciones*. En el trabajo se relación dos variables, el pensamiento ingenuo y el pensamiento matemático, pero a su vez qué papel en ese tránsito juegan la conjetura y el contraejemplo, donde todo lo anterior permite un análisis descriptivo de todas esas variables.
- *Tercera fase: la experimentación*, donde se ocupan variables para observar su desarrollo. En el trabajo no se realiza una intervención didáctica directa en el sistema; más bien se muestra cómo aparecen las variables en los libros de textos y cómo lo emplea el docente entrevistado, lo cual permite mostrar las ventajas de la conjetura y el contraejemplo en la educación.
- *Cuarta fase: análisis a posteriori*, *se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, a saber de las observaciones realizadas*. Hay un análisis a posteriori que realiza la investigación sobre las consecuencias de la incorporación de la conjetura y el contraejemplo que permitan algunas modificaciones de las prácticas tradicionales, donde se analiza en parte las formas de enseñanza del experto como el uso de estos recursos en libros de textos que se emplean para la preparación de las clases por parte de los profesores.

Douady (1995) sostiene que la Ingeniería Didáctica se considera un *producto*, el cual resulta de un análisis a priori que se realiza en el transcurso del trabajo de investigación. Además, los análisis a priori y a posterior permiten una confrontación y *se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación*, como sostienen Artigue et al. (1995), en el caso de este trabajo se buscan evidencias que permitan mostrar que tanto la puesta en escena en situación escolar de la conjetura y el contraejemplo, posibilitan el tránsito del pensamiento ingenuo al pensamiento matemático.

3.3. La Conjetura y el contraejemplo, recursos para el proceso de aprendizaje.

El tránsito de un pensamiento ingenuo a la estructuración de un pensamiento matemático es uno de los procesos que están tomando mayor interés en la Didáctica de las Matemáticas. Existen muchos elementos que entran en juego en este proceso del individuo que permiten el posible tránsito necesario en los alumnos.

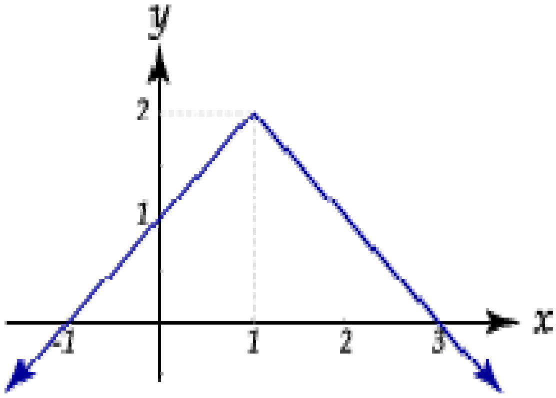
Muchas veces los estudiantes no entienden el por qué sus respuestas son inadecuadas; ya que ellos poseen sus propias ideas que posteriormente usan en la solución de sus problemas. Esas respuestas algunas veces no son las correctas y casi nunca cambian las percepciones erróneas (errores o pensamientos ingenuos) por las soluciones adecuadas negándose a analizar las equivocaciones construidas en el proceso de aprendizaje.

Un pensamiento ingenuo se puede manifestar en un error que requiere el uso de elementos auxiliares que posibiliten cambiar o modificar esas percepciones por otras; las cuales ayuden a transitar a un pensamiento matemático a los alumnos.

Hay elementos auxiliares para el proceso de enseñanza-aprendizaje, como es el caso de ejemplos que refuten la forma incorrecta de pensar sobre temas tratados por el alumno. Estos pueden ser necesarios para cambiar parte del contrato didáctico, el cual se da carácter principalmente acrítico en las unidades académicas observadas.

Dentro de los cursos de matemáticas examinados el contrato didáctico es tradicional (con una postura conductista, en general); porque la mayor parte de las veces solo se presentan las demostraciones formales de los teoremas y se hace poca referencia a sus recíprocos. Con respecto a los recíprocos, se tiene el caso de la afirmación que "*toda función continua es derivable"* (ejemplo de un curso de Cálculo); y para observar que este enunciado es falso se podría hacer un ejemplo que lo refuten como el siguiente:

Sea f la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<1 \\ -x+3 & si\ x\geq 1\end{cases}$. Su representación gráfica es la siguiente:



Los estudiantes se pueden percatar que la función no es derivable en x = 1; con lo cual el enunciado "*toda función continua es derivable"* no es verdadero por medio de la visualización gráfica presentada, en el cual existen dos derivadas porque la función tiene dos rectas. Pero es importante observar que si se busca entender por medios matemáticos más formales, se da caso de la definición de derivada en el punto x = 1 se muestra el siguiente fundamento:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+1)-f(1)}{h} \text{ no existe}$$

Pero ¿por qué no existe la derivada en ese punto? ¿Se pueden comprobar los siguientes hechos?

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h+1)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h+1)+1-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h+1)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(h+1)+3-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

En algunos libros de Calculo esos dos límites se conocen como *derivada por la derecha* y *derivada por la izquierda* cuando *f* se valúa en 1. Como estos dos límites difieren entonces la derivada no existe. Con lo cual se tiene que:

$$f'(x) = 1 \quad \text{si } x > 1,$$

$$f'(x) = -1 \quad \text{si } x < 1$$

Con todos estos argumentos presentados se expresa de una manera más formal que en efecto la derivada no puede evaluarse en el punto $x = 1$. Entonces con este ejemplo se tiene claro que no todos los enunciados presentados como afirmaciones en el aula son verdaderos.

Un ejemplo en matemática que refute un enunciado (como el caso del problema anterior) es conocido como un *contraejemplo*; el cual permite observar claramente cuando una conjetura no es correcta. Según la RAE un contraejemplo *es un ejemplo que contradice lo que se ha pretendido mostrar con otro*. Es decir, que el enunciado tomado como verdadero presenta ejemplos que lo refutan en un contexto que no cumbre con las mínimas expectativas para ser cierto. Esta idea está apoyada en que *es un elemento perteneciente al dominio de una determinada afirmación que no verifica lo afirmado. La existencia de un contraejemplo, desde un punto de vista lógico, es una crítica con la fuerza suficiente para refutar la afirmación, o sea, para hacer explícita su falsedad* (Calvo, 2002)

En ese sentido, muchas afirmaciones presentadas como conjeturas son falsas y en el caso del quehacer matemático es necesario refutarlas para poder limitar cuando se ha construido un nuevo conocimiento de otro que podría considerarse un obstáculo como sostiene Lakatos (1978) cuando se está construyendo el concepto de poliedro regular que forma parte del razonamiento matemático, cual se debería reflejar dentro de la práctica escolar cuando los alumnos presentan pensamientos ingenuos o errores o conjeturas con poca sustentación teórica. Entonces existe la necesidad de un cambio en las prácticas educativas tradicionales porque estas no permiten la estructuración de un pensamiento matemático en los estudiantes similar a los científicos ya que no introducen elementos como la conjetura y el contraejemplo.

Siguiendo con el hecho de examinar funciones especiales en el Cálculo, se cumplirá siempre que "*toda función con limite en* x_0 *es continua en* x_0". Esta afirmación se puede refutar presentado el siguiente contraejemplo:

Siguiendo con el hecho de examinar funciones especiales en el Cálculo, se cumplirá siempre que "*toda función con limite en* x_0 *es continua en* x_0". Esta afirmación se puede refutar presentado el siguiente contraejemplo:

Sea $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, ¿Qué pasa con la continuidad cuando $x = 2$?

Se tiene que $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$

Una función es continua si se cumple que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Sin embargo, en la función *f(x)* no es posible asignarle a $x = 2$ ya que no es posible dividir entre cero.

$|x-2| > 0$ Porque no puede tomar el valor de 0.

$$|x-2| > 0 \quad \to \quad |x-2| \neq 0 \quad \to \quad x-2 \neq 0 \quad \to \quad x \neq 2$$

Entonces con todos estos lineamentos tratados se puede construir una especie de jerarquización de las funciones con límites en x_0, funciones continuas en x_0 y funciones derivables en x_0. Se muestra un diagrama a continuación de las relaciones esas funciones.

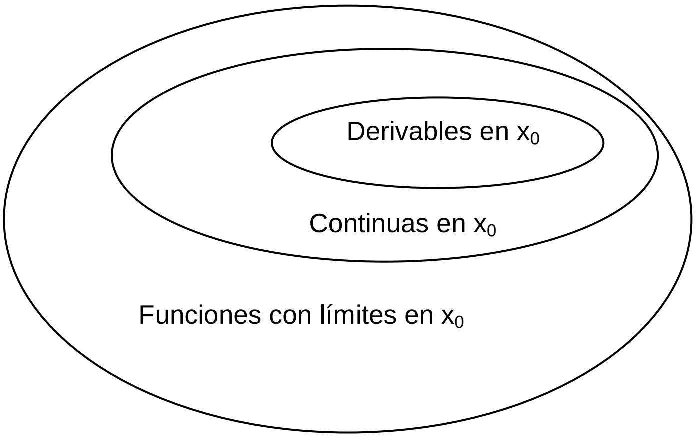


Figura 2. Estos conjuntos dan una relación estrecha entre estas estructuras matemáticas con diferentes categorizaciones en el estudio de Cálculo

Como se puede observar, si las afirmaciones no están claramente construidas con buenos argumentos lógico-matemáticos como los dos últimos enunciados ("*toda función con limite en x_0 es continua en x_0*" y "*toda función continua es derivable*"); es necesario el uso de contraejemplos (si existen) que posibiliten cambiar esos errores que frecuentemente exhiben los estudiantes.

El empleo de contraejemplos permite estimular el razonamiento en los estudiantes del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje que generalmente es lo que realizan la mayoría de los estudiantes. De acuerdo con lo que afirma Santos Trigo (2007) *el uso de contraejemplos cumple una función fundamental en el establecimiento de argumentos matemáticos y es una actividad que los estudiantes necesitan practicar constantemente*.

La postura del docente se muestra por su poca disponibilidad de usar recursos diferentes a los que generalmente presenta en el aula, con esta forma siempre aborda los temas sin un análisis crítico de la situación y por la falta de interés de los estudiantes al intentar encontrar las respuestas a las problemas planteados en el aula. Aquí la postura del estudiante es que él aprende los nuevos conocimientos sólo cuando el maestro le enseña, de tal manera que no es capaz de buscar por su propia cuenta soluciones a sus dudas.

Parte de las posturas que adoptan algunos profesores, como las anteriormente señaladas, repercuten en los estudiantes cuando reiteradamente cometen las mismas equivocaciones a la hora de realizar sus desarrollos matemáticos; mostrando en parte un pensamiento ingenuo al no tener control sobre ellos porque carecen de otros elementos que posibiliten un cambio. Desde esta perspectiva, puede ser el contraejemplo un recurso de aprendizaje de las Matemáticas que proporcione cambiar el pensamiento ingenuo a la estructuración de un pensamiento matemático.

Con este elemento presentado surge la necesidad de usar otras estrategias para la estructuración de un pensamiento matemático, el cual es fundamental incorporar en los estudiantes como miembros de una sociedad que explica en gran parte muchos fenómenos de la naturaleza con el uso de un lenguaje matemático.

4. Reflexión final

Todos los individuos tienen pensamientos inmediatos que en un momento pueden ser ingenuos, los cuales no se modifican tan fácilmente porque las estructuras conceptuales donde subyacen necesitan ser "sacudidas" (García, O. y Morales, L. 2012) Es necesario cambiar esos pensamientos con la ayuda de contraejemplos, que el profesor puede incorporar en el escenario didáctico para dotar a los estudiantes de elementos conceptuales que le permitan reforzar con argumentos coherentes la instalación de un pensamiento matemático.

El contraejemplo es un elemento que se puede usar en el quehacer educativo matemático, permitiendo cambiar los pensamientos ingenuos de los estudiantes, específicamente sus percepciones inadecuadas que causan una limitación para la compresión de un concepto matemático, lo que se convierte en un obstáculo cognitivo que imposibilita avanzar en la estructuración de un pensamiento matemático.

En el proceso investigativo se reafirmó que el desarrollo del pensamiento matemático es uno de los ejes principales al que se requiere poner atención dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, ya que sin su adecuada instalación los estudiantes difícilmente pueden tener un desempeño matemático competente.

En general, es necesario realizar cambios urgentes en las prácticas educativas tradicionales donde se pueda incorporar a la conjetura y al contraejemplo, para que los profesores ayuden a sus estudiantes a cambiar sus pensamientos ingenuos hacia la estructuración de un pensamiento matemático adecuado. Así, los estudiantes pueden tener herramientas para ser en cierta forma competitivos, críticos y analíticos en una sociedad que maneja muchas de sus informaciones en un lenguaje matemático

Reconocimiento: Investigación financiada por la Secretaria de Ciencia y Tecnología (SENACYT) en el programa Nuevos Investigadores 2011.

Bibliografía

Bachelard, G. (1985). *La formación del espíritu científico*. México: Editorial Siglo XXI.

Brousseau, G (1986) *Fundamentos y métodos de la Didáctica de las Matemáticas*. Investigaciones en Didáctica de la Matemáticas, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115.

Calvo, C. (2001) *Un estudio sobre el papel de definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R.A., Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 19-57.

Castro, E. y Puig, L. (1997). Representaciones y Modelización. Análisis fenomenológico, en Rico, L. (coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori. pp. 61-122.

Delors, J. (1994). *Los cuatro pilares de la educación*. *La educación encierra un tesoro*. México: Ediciones UNESCO. pp. 91-103

García, O. y Luisa, M. (2012). La incorporación de la conjetura y el contraejemplo. Alemania: Editorial Académica Española.

Lakatos, I. (1978) *Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid, España. Alianza Universidad (Traducción al castellano de: *Proofs and Refutations-The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: University Press, 1976).

Ministerio de Educación y Ciencia. (2006). *PISA 2006. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos de la OCDE. Informe en Español.* Madrid: Secretaria General Técnica. p. 70

Platón. (2003). *Diálogos. Volumen V: Parménides. Teeteto. Sofista. Político.* Madrid: Editorial Grecos.

Pozo, J. (2003). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Ediciones Morata, S.

RAE. *Diccionario de la Real Academia Española.* Disponible en la red en la dirección electrónica http://www.rae.es/rae.html

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y Clasificación de Errores cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización en Álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.

Santos, L. M. (2007) *La Resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivo.* México: Editorial Trillas.

Secretaria de Educación de Colombia. (2005). Pruebas Comprender de Matemáticas. Serie Cuadernos de Evaluación. Bogotá: Cargraphics S.A. http://www.sedbogota.edu.co/AplicativosSED/Centro_Documentacion/anexos/publicaciones_2004_2008/guias_eval_matematicas_5_9.pdf. *Ultima fecha de acceso en la red 10 de diciembre de 2012*

Thorndike, E. (1911). *Animal intelligence.* New York: Macmillan. Recuperado de la dirección de internet http://psychclassics.asu.edu/Thorndike/Animal/

Orlando García Marimón y Luisa Morales Maure tienen una Licenciatura en Matemática de la Universidad de Panamá, además de una Maestría en Ciencias Matemáticas y su Didáctica de la UAEH-México, investigadores del Instituto de Estudios Nacionales y SENACYT. **lui.mora@hotmail.com, nangarcia@hotmail.com**