REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 35. Septiembre de 2013
páginas 135-143

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema

Problema

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00 y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60. ¿Cuánto es el pago mínimo que puede hacerse por la compra de n vasitos de yogur, según la información dada? Explicitar la función correspondiente.

Este problema fue propuesto como un "problema pos" luego de trabajar en un taller con profesores de matemáticas de educación secundaria, en torno al siguiente episodio en clase:

En el grupo de estudios de matemáticas, el profesor propone el siguiente problema a los alumnos:

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00 y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60. ¿Hay una sola forma de comprar 9 vasitos de yogur gastando lo menos posible?¿Cuál?

Después de unos minutos:

- La mayoría dice que sí, que solo hay una forma.
- Carmen dice que hay muchas formas de comprar 9 vasitos de yogur.
- Toño dice que hay dos formas de comprar 9 vasitos de yogur, gastando lo mismo.
- Sara dice que el problema es muy fácil.

En el *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*, recientemente realizado en Montevideo, expuse con pormenores mi propuesta de estrategias para estimular en los profesores el desarrollo de la capacidad de crear problemas. Parte de esa propuesta es crear problemas haciendo variaciones a un problema dado, en el marco de un episodio en clase (como el presentado líneas arriba). Así, se propone a los profesores que en trabajo inicialmente individual y luego grupal, creen dos problemas:

- uno con el propósito de ayudar a los alumnos a aclarar su comprensión del problema dado y a llegar a una solución correcta del mismo. A tal problema se le denomina "*problema pre*".
- y otro cuya solución se facilite por haber resuelto correctamente tanto el "problema pre" como el problema dado en el episodio descrito; un problema con el propósito de retar a los alumnos a ir más allá de una solución correcta del problema dado. A tal problema se le denomina "*problema pos*".

Con el propósito de compartir experiencias y reflexiones en torno a la creación de problemas de matemáticas, a continuación transcribo y comento dos de los "problemas pre" propuestos en los grupos de trabajo en el Mini curso que desarrollé en el VII CIBEM.

Problema pre_1

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00 y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60.

1) *¿Cuánto se paga por comprar 9 vasitos en la bodega A?*
2) *¿Cuánto se paga por comprar 9 vasitos en la bodega B?*
3) *¿Cuánto se paga por comprar 9 vasitos combinando un paquete en la bodega A y un paquete en la bodega B?*

Problema pre_2

En un kiosco venden cajas de alfajores de 6 unidades a S/. 10 y de 12 unidades a S/. 20. ¿De cuántas maneras puedo comprar 18 alfajores? ¿Cuánto gasto en cada una de las posibilidades? ¿Hay alguna más barata?

Comentarios

1. Tendremos en cuenta los elementos básicos en un problema: *Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático* (comentados en *El rincón de los problemas* del número anterior de *UNIÓN*).
2. Podemos observar que en relación al problema dado en el episodio descrito, en el primer problema no se ha modificado la información, el contexto ni el entorno matemático; solo se ha modificado el requerimiento, considerando diversos casos específicos de compra de 9 vasitos de yogur. Es clara la intención de hacer evidente las diversas posibilidades, para que luego se entienda lo que se pide en el problema inicial, mostrado en el episodio en clase.
3. En el segundo problema se ha modificado la información y el requerimiento. En la información se mantiene la misma estructura que en el problema del episodio, pues el precio de la caja de 12 alfajores es el doble del precio de la caja de 6 alfajores. El requerimiento se hace con una cantidad que se

relaciona con la información de manera similar a la que se relaciona en el problema del episodio. Es decir, se da información de precios *Q* y 2*Q* de paquetes de *n* y 2*n* objetos respectivamente y se hace un requerimiento sobre la compra de 3n objetos (*Q* y *n* representan números naturales). Si bien el contexto sigue siendo extra matemático, se ha modificado la presentación de tal contexto, pues ya no se trata de vasitos de yogur sino de alfajores. Cabe mencionar que el grupo que propuso este problema estaba integrado por docentes de Argentina, Uruguay y Paraguay, y que los alfajores son parte de las golosinas típicas en estos países. La situación es más sencilla que la del episodio, por no haber precios unitarios y también es clara la intención de hacer evidente las diversas posibilidades de comprar una cantidad fija de alfajores, con el añadido explícito de pensar sobre la existencia de una opción más barata.

4. En el problema del episodio y en el problema 1, el entorno matemático es el mismo: operaciones de multiplicación y adición de números enteros positivos; de multiplicación de un número entero positivo por un decimal positivo; y de adición de números enteros positivos y decimales positivos. En el problema 2, el entorno matemático es de operaciones de adición y multiplicación de números enteros positivos (ya no se considera operaciones con números decimales).
5. La solución del primer problema, mostrada por el grupo que lo creó es la siguiente:

   - *Bodega A, 9 vasitos: S/.12,50*
   - *Bodega B, 9 vasitos: S/. 12,00*
   - *Bodega A y Bodega B: 6 vasitos + 3 vasitos: S/.8 + S/.4 = S/. 12.*

   Esto nos hace pensar que la intención del grupo fue pedir cuánto es *lo mínimo* que se paga por comprar 9 vasitos de yogur en cada uno de los tres casos que presenta. Sin embargo, el problema, tal como está redactado, sin referirse al pago mínimo, ofrece otras interesantes posibilidades. Así, para responder a las preguntas 1 y 2 se deben considerar todas las posibles formas de comprar 9 vasitos de yogur en la bodega correspondiente. Para responder a la pregunta 1, hay dos formas de comprar 9 vasitos de yogur en la bodega A:

   1.1 Un paquete de 6 vasitos, a S/. 8, y 3 vasitos individuales a S/. 1,50 cada uno. En tal caso se paga un total de S/. 12,50.

   1.2 9 vasitos individuales a S/. 1,50 cada uno. En tal caso se paga un total de S/. 13,50.

   Análogamente, para responder a la pregunta 2, hay cuatro formas de comprar 9 vasitos de yogur en la bodega B:

   2.1 3 paquetes de 3 vasitos, a S/. 4 cada uno. Se paga S/. 12.

   2.2 2 paquetes de 3 vasitos y 3 vasitos individuales a S/.1,60 cada vasito. Se paga S/. 2 x 4,00 + S/.3 x 1,60. Total: S/. 12,80.

2.3 1 paquete de 3 vasitos y 6 vasitos individuales. Se paga un total de S/. 13, 60.

2.4 9 vasitos individuales. Se paga un total de S/. 14,40.

La pregunta formulada en la parte 3 del problema sí lleva a una sola posibilidad, que es la que mostró el grupo.

6. Este problema (el primero) fue puesto a consideración de otro grupo de profesores en otro taller sobre creación de problemas, y propusieron que una manera de formular las preguntas 1 y 2 para que las respuestas sean las que dio el grupo que las creó, son:

   1’) ¿Cuánto es lo mínimo que se puede pagar por la compra de 9 vasitos en la bodega A?

   2’) ¿Cuánto es lo mínimo que se puede pagar por la compra de 9 vasitos en la bodega B?

7. Lo expuesto en los comentarios 5 y 6 nos suscita reflexiones como las siguientes, en relación a la redacción del texto de un problema creado:

   ❖ Poner especial atención para que lo que se escribe refleje exactamente lo que el o los autores del problema tienen en mente, sobre todo en el requerimiento.

   ❖ Es muy importante resolver el problema creado, con mente abierta a las interpretaciones posibles, sobre todo de la información y el requerimiento, según lo expresado en el enunciado. Suele ocurrir que quien crea un problema, considera como interpretación y solución solo la que tiene en mente al momento de crearlo y no “toma distancia” para ver otras posibles interpretaciones y soluciones a lo que dice en el enunciado del problema.

   ❖ Un problema creado inicialmente con un propósito, puede realmente abrir posibilidades didácticas y matemáticas muy interesantes, más allá de tal propósito, en las que no se pensó al momento de crearlo.

8. La solución mostrada por el grupo que creó el Problema pre-2, fue:

   Opciones:

   - *3 cajas de 6 alfajores: 3 x S/. 10 = S/. 30*
   - *1 caja de 12 alfajores y 2 cajas de 6 alfajores: S/. 20 + S/. 10 = S/. 30*

   En las dos opciones se paga lo mismo: S/. 30.

   En efecto, según la información dada, estas son las dos únicas posibilidades y ninguna es más barata que la otra.

En cuanto a “problemas pos”; es decir a aquellos posteriores a la comprensión y solución correcta de los “problemas pre” y del problema del episodio, creados con la intención de que quienes lo resuelvan amplíen el panorama matemático que les brinda el problema del episodio, a continuación transcribo y comento dos problemas:

el que creó uno de los grupos y se comentó en la fase de socialización en la segunda sesión del Mini curso desarrollado en el VII CIBEM; y el que propuse en otro curso-taller con profesores de secundaria en el Perú y que llevó al "descubrimiento" de una función que no está considerada en el curriculum de la educación secundaria en el Perú (Es el problema con el que se comienza el presente artículo.)

Problema pos_1

Con la misma información dada en el problema del episodio,

a) Dar cuatro cantidades distintas de vasitos de yogur, para las cuales se obtenga el menor precio por vasito.

b) ¿Qué característica común tienen los números que respondió en (a)?

c) ¿Hay más cantidades que pueden ser respuesta de (a)? ¿Puede generalizar?

d) Si la cantidad de vasitos a comprar no es múltiplo de 3, ¿en cuál de las dos bodegas es más barato?

Problema pos_2

En la bodega A, venden paquetes de 6 vasitos de yogur por S/. 8,00 y cada vasito individual a S/. 1,50; pero en la bodega B, venden el mismo producto en paquetes de 3 vasitos por S/.4,00 y cada vasito individual a S/. 1,60. ¿Cuánto es el pago mínimo que puede hacerse por la compra de n vasitos de yogur, según la información dada? Explicitar la función correspondiente.

El primero de estos problemas induce a la generalización, considerando múltiplos de 3 y múltiplos de 6 y una oportunidad para recordar y usar el hecho que si un número es múltiplo de 6 entonces es múltiplo de 3, pero que lo recíproco no es cierto. La parte (d) lleva a la construcción cuidadosa de una función que – según el contexto dado – a cada número natural que no es múltiplo de 3 le hace corresponder la letra A o la letra B. Es interesante hacer la lista de asignaciones considerando, por ejemplo cantidades (enteras) de 1 a 16 e ir observando regularidades. Notar que las autoras del problema cuidaron no considerar los múltiplos de 3, porque, por ejemplo, por 6 vasitos de yogur se paga igual en la bodega A y en la bodega B y ya no se tendría la asignación única para el número 6, como lo exige la definición de función. Sin embargo, 9 es múltiplo de 3 y la compra de 9 vasitos es más barata en la bodega B. Situación similar se presenta para 3 y 15, que también son múltiplos de 3. Esto lleva a pensar que puede ampliarse el dominio de la función que asigna la bodega en la que es más barato comprar cierta cantidad de vasitos de yogur.

En cuanto al segundo "problema pos", una manera natural de comenzar a resolverlo es obtener el pago mínimo que corresponde a algunos valores de *n* (evidentemente, números enteros positivos), teniendo en cuenta que lo más barato es pagar S/.4 por cada 3 vasitos de yogur y S/. 1,50 por cada vaso individual. Así, llamando *f* a la función pedida, tendremos, por ejemplo:

$$f(1) = 1{,}50$$

$$f(2) = 2 \text{ x } 1{,}5 = 3$$

$$f(3) = 1x4$$

$$f(4) = 4 + 1\ x1{,}50 = 5{,}50$$

$$f(5) = 4 + 2x1{,}50 = 7$$

$$f(6) = 2x4$$

…

$$f(9) = 3x4 = 12$$

$$f(10) = 3x4 + 1x1{,}50 = 13{,}5$$

$$f(11) = 3x4 + 2x1{,}50 = 15$$

…

Un profesor de secundaria se entusiasmó con el problema y para formalizar la función hizo uso de la propiedad "todo número natural es múltiplo de 3; múltiplo de 3, más1; o múltiplo de 3, más 2", lo cual significa que $n = 3k$, $n = 3k + 1$ ó $n = 3k + 2$, para k número natural[1]. Así, obtuvo la siguiente función:

$$f(n) = \begin{cases} 4k \ \ si\ n = 3k \\ 4k + 1{,}5 \ \ si\ n = 3k + 1 \\ 4k + 2 \times 1{,}5 \ \ si\ n = 3k + 2 \end{cases}$$

Grande fue su sorpresa cuando le comenté que era una buena formalización, y que un siguiente paso sería obtener una expresión "en una sola línea" en la que la variable n figure explícitamente en la expresión que define la función, sin la intervención de la variable k. Le sugerí que observe cuidadosamente los pasos que da para determinar cuánto es lo mínimo que pagaría por la compra de 127 vasitos de yogur y luego por la compra de 236 vasitos de yogur.

Luego de un interesante diálogo que reproduzco en el apéndice de este artículo, el profesor me trajo la siguiente expresión para la función f, muy contento de haber redescubierto la función "mayor entero" en una situación cotidiana.

$$f(n) = 4\left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right] + \left(\frac{n}{3} - \left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right]\right) \times 3 \times 1{,}5$$

Observar que $\left[\!\left[\frac{n}{3}\right]\!\right]$ es el mayor entero menor o igual que $\frac{n}{3}$ (la parte entera de $\frac{n}{3}$) que nos dice el mayor número de paquetes de 3 vasitos de yogur correspondientes a los n que se desean comprar. Por eso la multiplicación por 4, que es el precio de cada paquete de 3. La expresión entre paréntesis es la parte decimal de $\frac{n}{3}$. Ésta será 0, 1/3 ó 2/3, según n sea múltiplo de 3; múltiplo de 3, más 1; o múltiplo de 3 más 2. Al multiplicarla por 3 se obtiene el resto de la división euclidiana, que es 0, 1 ó 2 (el número de vasitos que deberá comprarse en forma individual) y al multiplicarla por 1,5 ya se tiene el importe por la compra de tales vasitos.

[1] Esto es consecuencia natural de hacer la división euclidiana de un número natural cualquiera entre 3 y observar que el residuo será 0, 1 ó 2.

Comentarios finales

1. Las experiencias tenidas en los talleres desarrollados con profesores, partiendo de episodios en clases en torno a la solución de problemas específicos y proponiendo la creación individual y grupal de "problemas pre" y "problemas pos", que luego se resuelven y comentan grupalmente, confirman que es una estrategia que
   - estimula la capacidad de crear y resolver problemas que tienen los profesores
   - lleva a reflexiones didácticas y matemáticas sobre el uso de la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas.
   - posibilita encontrar en un problema creado mayores potencialidades que las que se pensaron al crearlo.
2. Un aspecto muy importante al crear un problema es la redacción adecuada de su enunciado, para que exprese con claridad – sobre todo – la información y el requerimiento.
3. Crear problemas haciendo variaciones al requerimiento y al entorno matemático de un problema dado y pensando en generalizaciones, lleva a ampliar el horizonte matemático inicial, como hemos ilustrado con el uso de la relación entre múltiplos de 3 y múltiplos de 6 y con el paso de un registro verbal relacionado con una función, a un registro algebraico de tal función, pasando por el "descubrimiento" de la función mayor entero en un contexto cotidiano.
4. Vemos una vez más que la creación de problemas está estrechamente ligada a la resolución de problemas y que contribuye al desarrollo del pensamiento matemático al brindar oportunidades – a alumnos y profesores – para examinar generalizaciones e iniciarse en la investigación y en el hacer matemáticas.

Apéndice

Diálogo con un profesor de secundaria, participante en uno de los talleres sobre creación de problemas, ofrecido por el autor, en torno al problema que se presenta en este artículo.

– *Observa bien los pasos que sigues para determinar cuánto es lo mínimo que se pagaría por la compra de 127 vasitos de yogur, y luego por la compra de 236 vasitos de yogur.*

➢ *(Luego de hacer varias operaciones) Cada cantidad la divido entre 3; el cociente entero lo multiplico por 4 y el residuo lo multiplico por 1,5.*

– *Muy bien. Has usado la división euclidiana. Ve la forma de obtener el resultado sin restringirte a ella. Por ejemplo, usando una calculadora.*

- *Pero al dividir con la calculadora obtendré cifras decimales…*
- *Precisamente por eso, te sugiero usar la calculadora; para que veas la forma de obtener el resultado usando adecuadamente la información que te da las cifras decimales.*
- *(Usando su calculadora) 127 entre 3 me da 42.333333….*
- *¿42.333333… qué? Quiero decir, ¿qué expresa este número?, ¿vasitos de yogur?*
- *Mmm… No… Paquetes de 3 vasitos…*
- *Claro. Entonces tienes que separar la parte entera y ver cómo tratas la parte decimal.*
- *La parte entera la multiplico por 4 y la parte decimal por 1,5.*
- *Cuidado. Recuerda que S/.1,50 es el precio de un vasito, no de un paquete de tres vasitos de yogur.*
- *Verdad! Tengo que convertir paquetes a vasitos… ¿Multiplicando por 3?*
- *Claro!*
- *Entonces la parte decimal la multiplico por 3 y luego por 1,5.*
- *Perfecto. Y entonces ¿cuál sería el pago total mínimo que harías por 127 vasitos de yogur?*
- *42x4 + 0,333333…x3x1,5. O sea 169,5.*
- *Muy bien! Ahora hazlo de manera similar considerando 236 vasitos de yogur. Divide 236 entre 3 y luego trata de obtener el resultado escribiendo todo "en una sola línea" en la pantalla de tu calculadora. Debes usar el resultado de la división y los paréntesis para expresar algunas operaciones. Examinando con cuidado lo que vas haciendo, estoy seguro que mañana me puedes traer por escrito una explicación del procedimiento a seguir con cualquier número natural n.*

El profesor se despidió mostrando gran inquietud por pensar en el asunto. Al día siguiente tuvimos el siguiente diálogo:

- *Ya le tengo la respuesta.*
- *Me lo imaginaba! Dime.*
- *Para saber la cantidad mínima que pagaré por n vasitos de yogur, divido n entre 3. La parte entera la multiplico por 4 y la sumo a la parte decimal multiplicada por 3 y por 1,50.*
- *Excelente! Lo que has dicho, puedes expresarlo formalmente usando una función que hace corresponder a cada número real x el mayor entero que sea menor o igual que tal número x.*
- *Esa función… la función mayor entero… la estudié en la universidad, pero no la volví a ver, porque en la secundaria no se enseña. Ya no me acuerdo…*

– *No es complicada. Recuerda que todo número real x siempre lo puedes ubicar entre dos números enteros consecutivos; es decir, para todo número real x, existe un número entero k tal que k ≤ x < k + 1. La función mayor entero hace corresponder a cada número real su correspondiente número entero k. Como ves, k es el mayor entero menor o igual que x. Así, el mayor entero menor o igual que 5,333 es 5. ¿Te das cuenta por qué, verdad?*

➢ *Porque 5 ≤ 5,333 < 5 +1.*

– *Claro. Bueno, la expresión mayor entero de x se suele representar simbólicamente con un doble corchete que encierra a x. Así, el mayor entero de 5,333 se representa por* $[\![5{,}333]\!]$ *y entonces se tiene* $[\![5{,}333]\!] = 5$*. Ahora puedes usar esta función y su representación simbólica para expresar en una sola línea, y en términos de n, lo que me has enunciado verbalmente respecto a la forma de obtener el pago mínimo de n vasitos de yogur.*