

El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria

Emilse Gómez Torres, Juan Jesús Ortiz de Haro, Carmen Batanero,
 José Miguel Contreras

Fecha de recepción: 19/02/2013
 Fecha de aceptación: 10/09/2013

<p>Resumen</p>	<p>En este trabajo analizamos el lenguaje de la probabilidad en dos series de libros de texto españoles de Educación Primaria. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo). El lenguaje numérico se desarrolla de acuerdo a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza; se encuentra también, amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.</p> <p>Palabras clave: Representaciones, currículo implementado, significados de la probabilidad, lenguaje formal.</p>
<p>Abstract</p>	<p>In this paper we analyze the language of probability in two series of Spanish primary school textbooks. Results suggest a wealth and variety of verbal expression and dominance of colloquial versus formal language; language is associated to different (intuitive, classical, frequentist and formal) meanings of probability. Numerical language is developed according the different number systems are introduced in teaching; also, there is a wide use of tabular and graphical representations. Some differences in the textbooks point to the important role of the teacher in selecting and using these books in teaching.</p> <p>Keywords: representations, implemented curriculum, meanings of probability, formal language</p>
<p>Resumo</p>	<p>O presente estudo analisa a linguagem da probabilidade em dois conjuntos de livros didáticos para a escola primária espanhol. Os resultados mostram a riqueza e diversidade da linguagem e domínio da linguagem coloquial versus linguagem formal associado com significados diferentes de probabilidade (intuitiva, frequência, clássica formal). A linguagem numérica desenvolve de acordo com a introdução de diversos sistemas numéricos no ensino; também se percebe o uso extensivo de representações de tabelas e gráficos. Algumas diferenças entre os livros indicam o importante papel do professor para selecionar e utilizar esses livros no ensino.</p> <p>Palavras-chave: representações, currículo implementado, significados de probabilidade, linguagem formal.</p>

1. Introducción

En los documentos curriculares actualmente vigentes en España, se sugiere iniciar el estudio de la probabilidad desde la Educación Primaria (6-12 años). Así, en el Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006), en el *Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad* se incluyen los siguientes contenidos:

“Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad” (p. 43098; primer ciclo).
“Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar” (p. 43099; segundo ciclo).
“Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso” (p. 43101; tercer ciclo).

Como vemos, este documento sugiere transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue al final de la etapa a asignar algunas probabilidades sencillas. Consideraciones similares se realizan en programas de otros países (p. e. NCTM, 2000).

Al considerar la enseñanza del lenguaje de la probabilidad, hemos de tener en cuenta que el niño de 6-7 años ya ha usado anteriormente términos y expresiones para referirse a los sucesos aleatorios, aunque no siempre con el mismo significado que tratamos de enseñar. También es importante el lenguaje que se presenta en los libros de texto que usa el niño, que son uno de los principales recursos educativos, ya que muchas de las decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar con los niños están mediadas por los libros de texto (Stylianides, 2009).

Cordero y Flores (2007) indican que el discurso matemático escolar es determinado con frecuencia por el libro de texto, además prácticamente regula la enseñanza y el aprendizaje, debido en parte a las creencias de los actores del sistema didáctico. En la enseñanza de la estadística y probabilidad, el libro contribuye a la formación del propio docente (García, 2011).

En este trabajo se presenta un estudio sobre el lenguaje de la probabilidad en algunos libros de texto a lo largo de la Educación Primaria, con el fin de orientar al profesor en su uso y alertarle de posibles problemas de interpretación de este lenguaje por parte de los niños. Para ello se han elegido dos series completas de libros de texto de editoriales de amplia difusión en España, realizando un análisis que utiliza la metodología propuesta por Cobo (2003). Una vez presentado brevemente el marco teórico y método utilizado, se aportan los resultados sobre las expresiones verbales, lenguaje numérico y simbólico, lenguaje tabular y representaciones gráficas, comparando las dos series en cada ciclo de la educación primaria.

2. Fundamentos

2.1. Marco teórico

Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel, 2007). Estos libros son un producto del proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1991), es decir, la adaptación de conocimiento matemático formal a conocimiento matemático para ser enseñado.

Un elemento fundamental en la construcción del conocimiento matemático es el lenguaje utilizado, que, iniciándose a partir del lenguaje cotidiano del niño, progresivamente se transforma en otro de mayor nivel de abstracción. Schleppegrell (2007) destaca los retos lingüísticos de la enseñanza de las matemáticas, debido a los múltiples sistemas semióticos utilizados para construir conocimiento: lenguaje oral, escrito, símbolos y representaciones como gráficos y tablas. Por tanto el lenguaje del libro de texto consta no sólo de vocabulario y símbolos, sino de representaciones complejas, puede afectar al aprendizaje de las matemáticas si los alumnos tienen dificultad en su comprensión (Orton, 1990). Son también importantes las relaciones lógicas implícitas que enlazan los elementos del discurso matemático en los libros de texto (Lemke, 2003; O'Halloran, 1999, 2003; Veal, 1999; Chapman, 1995).

El lenguaje matemático es fundamental en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que postula que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de un sujeto (persona o institución) al resolver problemas, y que estas prácticas están mediadas por el lenguaje, que es, a la vez, instrumento representacional y operativo. Los autores también indican la presencia de posibles conflictos semióticos al interpretar el lenguaje matemático, entendiendo por tales *“cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)”* (Godino, Batanero y Font, 2007, p.133).

Otro punto que fundamenta nuestro análisis es la diferenciación entre algunos de los significados actuales de la probabilidad (Batanero, Henry y Parzysz, 2005): significado intuitivo (o uso no formalizado de ideas sobre azar y probabilidad), significado clásico (probabilidad como cociente entre casos favorables y posibles); significado frecuencial (probabilidad como límite al que tiende la frecuencia relativa en un número suficientemente elevado); y significado subjetivo (probabilidad como grado de creencia personal).

La investigación sobre la presentación de la probabilidad en los libros de texto es muy escasa y concentrada en la educación secundaria; menor aún la que se concentra en el lenguaje. A continuación resumimos estudios relevantes para nuestra investigación.

Ortiz, Batanero y Serrano (2001) analizaron el lenguaje utilizado en dos libros de texto de Educación Secundaria, distinguiendo entre el lenguaje de lo aleatorio y el lenguaje de la probabilidad. Respecto al experimento aleatorio observan una mayor riqueza del lenguaje empleado en uno de los textos, con una gama más variada de adjetivos y expresiones, ejemplos de generadores aleatorios asociados a una concepción frecuencial de la probabilidad y tablas de números aleatorios. Concluyen que en este libro hay un mayor énfasis en el concepto de aleatoriedad y la fenomenología del azar. El mismo texto presenta un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial; distingue entre "probabilidades teóricas" y "experimentales"; y conecta la probabilidad con el estudio de la estadística.

A pesar de que la mayor parte de los problemas se deben resolver usando conceptos combinatorios, no hay referencias explícitas ni vocabulario o notación sobre ellos. Ortiz (2002) complementa este estudio analizando otros elementos de los textos, como los problemas propuestos, definiciones y propiedades. También ilustra algunos sesgos en los significados de la probabilidad presentados e indica

que el profesor debe mantener una permanente vigilancia epistemológica en el uso de textos para evitar su transmisión a los alumnos.

Serradó y Azcárate (2006) analizaron la estructura de las unidades didácticas sobre probabilidad en cuatro series de libros de texto para la Educación Secundaria Obligatoria. Las cuatro editoriales, a partir del establecimiento de los objetivos introducen una actividad inicial para motivar y evaluar los conocimientos previos de los estudiantes. Las mayores diferencias se encuentran en el desarrollo de las unidades didácticas, pues dos editoriales organizan los contenidos de forma lineal, introducen las nociones teóricas de forma deductiva, y las actividades son fundamentalmente de aplicación, sin utilizar recursos manipulativos ni fomentar el trabajo colaborativo. Las otras dos organizan los contenidos de forma helicoidal, con una estructura de discurso de carácter inductivo, alternando las nociones teóricas y las actividades, utilizando recursos manipulativos y trabajo cooperativo.

A partir del análisis de la estructura de las unidades didácticas, se pueden determinar dos tendencias: una de corte tradicional, donde se incluirían los libros de texto de dos editoriales, y otra de corte innovador, donde estarían los libros de texto de las otras dos editoriales. Este estudio se completa en Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) mostrando que la caracterización escolar de la noción de probabilidad en los libros de texto se asimila, con preferencia del significado clásico en unas editoriales y del frecuencial para otras, sin formalizar las relaciones entre las dos aproximaciones.

Además de estos trabajos sobre probabilidad, otros analizan el lenguaje usado para presentar conceptos estadísticos en libros de texto. Entre ellos destacamos el de Cobo y Batanero (2004) quienes analizaron los problemas propuestos, algoritmos de cálculo, definiciones, propiedades, lenguaje y argumentos sobre la media aritmética en 22 libros de texto de secundaria. En relación al lenguaje, destacan la gran variedad de representaciones empleadas por los distintos libros de texto, sobre las notaciones y símbolos señalan la dificultad del uso del sumatorio y de los subíndices. Por último, aprecian que en algunos textos faltan ciertos elementos, concretamente gráficos y representaciones simbólicas, que pueden influir en las dificultades que encuentran los estudiantes cuando analizan un conjunto de datos.

García (2011) analiza el lenguaje utilizado sobre inferencia estadística en cuatro libros de texto de segundo curso de Bachillerato para Ciencias Sociales. Para cada concepto se estudia el significado en el Diccionario de la Real Academia Española; en los manuales universitarios y en los libros analizados. Los resultados mostraron que los libros de texto, en ocasiones aportan un significado incorrecto, con lo que no contribuyen a resolver los problemas conceptuales de los estudiantes. Por otro lado, mientras el contexto de trabajo es determinante en el significado de los conceptos, algunos libros de texto no usan el contexto matemático sino más bien el contexto cotidiano al definir un concepto.

Lavalle, Micheli y Rubio (2006) analizaron el lenguaje gráfico en la presentación de los conceptos de regresión y correlación en siete textos de matemáticas de secundaria en Argentina. Los resultados muestran que los libros de texto refuerzan la importancia de la correlación con el uso de diferentes diagramas y solicitando a los estudiantes que analicen el tipo y grado de relación lineal. Con respecto al tratamiento del tema, el nivel de profundidad depende de la edad del alumno, comenzando con los alumnos de menor edad mediante una aproximación intuitiva.

Para complementar los citados trabajos analizaremos el lenguaje matemático utilizado en algunos libros de texto de Educación Primaria. En lo que sigue se presentan el método y resultados del estudio.

3. Método

Las dos series de libros de texto analizadas se eligieron por ser los más utilizados en Andalucía en el curso 2011-2012 (se hizo una consulta a la Consejería de Educación). Cada una de estas editoriales tiene uno o dos proyectos o series vigentes, dependiendo del ciclo. Nuestra muestra intencional está constituida por los libros de texto que se incluyen como anexo y a los que se hará referencia en el texto como Serie 1 o 2.

El análisis fue cualitativo y adapta la metodología de Cobo (2003):

1. Identificación de las páginas o los capítulos de los libros de texto donde se incluyen temas de azar o probabilidad. División del texto en secciones independientes (párrafos, ejemplos, ejercicios) que se toman como unidades de análisis.
2. Fijación a priori de las siguientes variables para el análisis: expresiones verbales, símbolos, expresiones numéricas, representaciones tabulares y gráficas.
3. Para cada una de estas variables se determinan las categorías en que pueden clasificarse diferenciadamente; por ejemplo, para la variable “expresión verbal” las categorías están dadas por palabras o expresiones usadas con sentido probabilístico en el texto. Estas categorías se determinan mediante revisiones sucesivas de los textos, de un modo cíclico e inductivo.
4. Establecimiento de la presencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra, a través de la comparación del contenido de estos textos. Selección de ejemplos en los textos y elaboración de tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre el uso del lenguaje en estas colecciones.

4. Resultados y discusión

4.1. Expresiones verbales

En primer lugar se analizaron expresiones verbales, para las cuáles Shuard y Rothery (1984) distinguen tres categorías:

- 1) palabras específicas de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano;
- 2) palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos, y
- 3) palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos. Como veremos, en nuestro estudio la mayoría de los vocablos pertenecen a las dos últimas categorías.

Tabla 1. Expresiones verbales incluidas en los libros de texto

Concepto	Expresión verbal	Significado a que se asocia
Aleatoriedad	Acertar, Adivinar	Clásico, frecuencial, intuitivo
	<i>Aleatoria</i>	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Asegurar resultado	Frecuencial, intuitivo
	Azar	Intuitivo
	No saber	Frecuencial, intuitivo
	Saber qué saldrá	Clásico, intuitivo
	Saber de antemano	Clásico
	Saber resultados posibles	Clásico
	Sin mirar	Clásico, intuitivo
	Suerte	Clásico, intuitivo
Espacio muestral	Cuántos	Clásico, frecuencial
	<i>Tabla (de doble entrada)</i>	Clásico
	Todos los posibles; formas posibles	Clásico
Esperanza matemática	Apostar	Clásico, frecuencial, intuitivo
	<i>Estimar</i>	Frecuencial
	<i>Fiable. Predecir</i>	Frecuencial
	Juego (Juego) justo	Clásico, frecuencial, intuitivo
Experimento aleatorio	Coger/sacar objeto	Clásico
	<i>Datos</i>	Frecuencial
	Distribuir cartas	Clásico
	Elegir/extraer	Clásico, intuitivo
	<i>Experiencia</i>	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Girar peonza/ruleta	Clásico
	Juego de pares y nones	Intuitivo
	Lanzar dado/moneda	Clásico
	Observar	Frecuencial
	Parchís	Clásico
	Sacar (salir) bola/carta	Clásico
	Sacar (salir) resultado	Frecuencial
	Situación	Clásico, frecuencial, intuitivo
	Sorteo (lotería)	Clásico
	<i>Tabla (de datos)</i>	Frecuencial
	Tirar (lanzar) chapa, dardo	Frecuencial
	Probabilidad	<i>Cálculo de probabilidades</i>
<i>Comparar probabilidad</i>		Clásico
<i>Medir, valorar</i>		Clásico
Ocurrir sucesos		Clásico, frecuencial, intuitivo
<i>(Nº. de) posibilidad(es) entre</i>		Clásico
<i>Posibilidad</i>		Intuitivo
<i>Probabilidad</i>		Clásico, frecuencial
Seguridad		Intuitivo
Suceso y tipos	Bastante/poco probable	Intuitivo
	<i>Casos favorables/casos posibles</i>	Clásico
	Hay más/tantas/menos posibilidad	Intuitivo
	Más fácil de conseguir	Clásico
	Más, menos, muy probable	Intuitivo
	Ocurre siempre/a veces/ nunca	Intuitivo
	<i>Posibles resultados</i>	Intuitivo
	Probablemente	Intuitivo
	Resultado	Intuitivo
	<i>Seguro posible/imposible</i>	Clásico, frecuencial
	<i>Suceso</i>	Intuitivo
	<i>Suceso muy/igual/poco probable</i>	Clásico, frecuencial, intuitivo
Variable aleatoria	<i>Estadísticas</i>	Frecuencial
	<i>Probabilidad estimada</i>	Frecuencial

Identificamos un gran número de expresiones diferentes ligadas a la probabilidad en los textos analizados, que hacen alusión a algunos de los conceptos probabilísticos, a sus propiedades, o a procedimientos asociados y a significados diferenciados de la probabilidad. En la Tabla 1 presentamos estos términos, resaltando con cursiva aquellos que son específicamente matemáticos. Esta diversidad de términos pudiera aumentar la dificultad del tema, sobre todo si se utilizan términos del lenguaje cotidiano con otra acepción; por ejemplo, en el lenguaje ordinario el término seguro a veces se emplea para referirse a un suceso de probabilidad cercana a uno, mientras que en matemáticas, siempre indica un suceso de probabilidad uno (Ortiz, 2002).

Los conceptos con mayor riqueza de lenguaje verbal son el experimento aleatorio, los sucesos y sus tipos, y la aleatoriedad. La mayoría de expresiones ligadas a experimento aleatorio y aleatoriedad son verbos (asociados con procedimientos), y las ligadas a los sucesos adjetivos (propiedades de la tipología de sucesos). La mayor parte de las expresiones se refieren al significado clásico, habiendo casi el mismo número de expresiones asociadas al significado intuitivo. Pocas expresiones están asociadas al significado frecuencial, de poco peso (o nulo) en las editoriales, a pesar de recomendarse en el currículo.

Un resumen se presenta en la Tabla 2; observamos que las expresiones matemáticas específicas son pocas, y que de acuerdo a las normativas españolas el lenguaje de azar se incluye en todos los ciclos. Asimismo, se concluye que la Serie 1 presenta un mayor uso de lenguaje específico y más riqueza verbal en general. Al igual que el estudio de Ortiz (2002) con textos de secundaria, observamos más riqueza de lenguaje verbal referido a experimento aleatorio, aleatoriedad, sucesos y sus tipos, que con respecto a conceptos más avanzados.

Tabla 2. Número de expresiones, según tipología, incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Expresiones cotidianas	4	6	26	18	19	21
Expresiones específicas de aleatoriedad y probabilidad			10	4	12	6
Expresiones específicas de los juegos de azar	1	2	8	6	7	7

4.2. Lenguaje numérico

En los libros analizados es frecuente el lenguaje numérico, observándose números enteros, fracciones y decimales. Los números enteros se introducen desde primer ciclo con función nominal o numérica. En el primer caso, el entero representa un valor (posible, imposible o seguro) de la variable aleatoria de interés o un suceso en el experimento; por ejemplo, al preguntar “¿Cuál es la probabilidad de sacar un 3 al lanzar un dado en el juego de parchís? [...] ¿y un número menor que 7?” ([T10], p. 215). En el segundo caso, el entero representa un valor numérico, ya sea el número de casos favorables o posibles, en el significado clásico, o las frecuencias absolutas, en el significado frecuencial.

Las fracciones se utilizan desde segundo ciclo principalmente para representar el valor de la probabilidad o la frecuencia. Un ejemplo es el siguiente: “La probabilidad de que Ana saque una varilla azul es $7/10$ ” ([T10], p. 215). En algunos casos y desde el tercer ciclo se hace la equivalencia de estas fracciones con números decimales. Como el siguiente ejemplo en la estimación frecuencial de la

probabilidad: “Probabilidad estimada de que mañana no falten menos de 3 [...] 0,67” ([T5], p. 211).

En ambas editoriales los números enteros se utilizan en todos los ciclos (Tabla 3), mientras que la representación con números decimales, de acuerdo al currículo se retrasa hasta tercer ciclo. Asimismo, se concluye que la serie 2 presenta un mayor uso de fracciones para representar probabilidades o frecuencias relativas, en particular en el tercer ciclo.

Tabla 3. Tipos de números incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Números enteros	X	X	X	X	X	X
Números decimales					X	
Fracción representa probabilidad			X		X	X
Fracción representa frecuencia relativa			X		X	X

4.3. Lenguaje simbólico

La mayor parte del lenguaje simbólico es común con otros bloques de contenido y se introduce en el ciclo en que el niño aprende dicho contenido o en el siguiente ciclo. Por ejemplo, el símbolo de la suma (+) se utiliza desde segundo ciclo para calcular el número de casos posibles en un suceso compuesto o para obtener los valores posibles en un experimento compuesto sencillo. La igualdad (=) se usa también desde segundo ciclo; por ejemplo, como símbolo de equivalencia entre dos fracciones, o entre una fracción y un número decimal (Figura 1). La desigualdad se encontró en la segunda serie, en tercer ciclo, como símbolo de relaciones de orden en la comparación de probabilidades.

Como $\frac{7}{10} > \frac{2}{10}$, es más probable que Rebeca saque una varilla azul ([T8], p. 218).

	Frecuencia absoluta (aciertos)	Total de preguntas del test	Frecuencia relativa
María	14	16	$\frac{14}{16} = 0,875$

Figura 1. Uso de lenguaje tabular y simbólico ([T10], p. 210)

En la serie 1 se introduce lenguaje simbólico específico de la probabilidad; éste es muy variado e incluso complejo con relación al nivel de enseñanza. En particular, hemos observado el uso combinado de letras y notación funcional, aunque sólo en los textos del último curso, combinándolo con descripciones en lenguaje verbal, esquemas o gráficos, para iniciar la formalización del tema. Un ejemplo al formalizar la asignación clásica de probabilidad se muestra a continuación, donde la flecha simboliza representación, de manera que “P” (el significante que la sigue) significa “probabilidad de un suceso” (significado). El símbolo de igualdad simboliza asignación numérica, mediante la regla de Laplace, es decir, una fracción cuyos términos están descritos en lenguaje verbal.

$$\text{Probabilidad de un suceso} \rightarrow P = \frac{n.º \text{ de casos favorables}}{n.º \text{ de casos posibles}} \quad ([T5], p. 208)$$

En otro ejemplo, que mostramos en lo que sigue, los símbolos representan operaciones o equivalencias: P denota probabilidad estimada del suceso de interés; la primera igualdad representa la asignación hecha a P , la fracción, la frecuencia relativa del suceso. La segunda igualdad indica que la fracción también corresponde a la operación división (representado con el símbolo “:”). El símbolo \approx indica una probabilidad estimada, P se aproxima al decimal 0,27. Probabilidad estimada de que mañana no falte nadie; $P = 4/15 = 4:15 \approx 0,27$ " ([T5], p. 211).

En ambas editoriales observamos ausencia de cualquier notación en el primer ciclo (Tabla 4), y uso de símbolos y operaciones de suma e igualdad en el segundo ciclo. La serie 2 usa el símbolo de desigualdad para la comparación de probabilidades; la serie 1 usa el símbolo de aproximación para la estimación de probabilidades o para la aproximación de fracciones a números decimales, y usa el símbolo de probabilidad y notación funcional.

Tabla 4. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Igualdad (=)			X	X		
Suma (+)			X	X		
Desigualdad (>)						X
Aproximación (\approx)					X	
División (:)					X	
Letras como símbolos					X	
Notación funcional			X		X	

Observamos también que las expresiones cotidianas son más frecuentes que las formales y simbólicas en estas colecciones, acorde con la edad de los niños; a diferencia de los hallazgos de Ortiz (2002) que encontró una presentación más formal, en textos dirigidos a estudiantes de 14 o 15 años. Una diferencia con el estudio de Ortiz es la mayor consistencia en el uso de lenguaje numérico y simbólico, en nuestras dos editoriales; aunque su presencia es mucho menor que en los textos analizados por dicho autor. Estas diferencias se relacionan con objetivos didácticos, pues los textos de Primaria se orientan a la fundamentación mientras que los textos de Secundaria se orientan a la consolidación y formalización.

4.4. Lenguaje tabular

El lenguaje de tipo tabular se usa con frecuencia, y su estructura avanza en complejidad con los cursos. Su principal uso es la presentación de datos. Sólo al final de la Educación Primaria se relaciona explícitamente con la probabilidad, al presentar las frecuencias relativas como estimaciones de probabilidades, facilitando su articulación con la estadística y la introducción del significado frecuencial. Un primer uso de las tablas es presentar listados de datos, que pueden constituir el espacio muestral en el experimento de interés o se usan para efectuar un recuento (ambos casos se dan en la Figura 2).

Eva ha anotado los nombres de sus amigos y amigas.
Completa la tabla en tu cuaderno y contesta.

Alberto, Marta, Silvia, Alberto, Alberto, Marta, Marta, Silvia, Silvia, Alberto, Marta, Alberto, Marta, Alberto	<table border="1"> <thead> <tr> <th>AÑOS</th> <th>RECUESTO</th> <th>TOTAL</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>MARTA</td> <td>HHH</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>ALBERTO</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>SILVIA</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	AÑOS	RECUESTO	TOTAL	MARTA	HHH	5	ALBERTO			SILVIA		
AÑOS	RECUESTO	TOTAL											
MARTA	HHH	5											
ALBERTO													
SILVIA													

- ¿Cuántos amigos y amigas tiene Eva?
- ¿Cuál es el nombre que más se repite?

Figura 2. Listado de datos y tabla de recuentos ([T2], p. 204)

Otro uso está en las tablas de frecuencia, que se consolidan en el segundo ciclo con la presentación de frecuencias absolutas o relativas para resumir la información de una población o de una muestra, aunque no se estudia explícitamente el muestreo. Estas tablas de frecuencias ofrecen una estructura de relaciones, más allá de los números consignados en ellas (por ejemplo, relacionando cada valor de la variable con su frecuencia). En ocasiones también se presentan tablas de datos agrupados en intervalos al finalizar la Primaria; puesto que el agrupamiento en intervalos es un paso previo a la introducción de las variables aleatorias continuas, la interpretación de la frecuencia de un intervalo facilita la comprensión, posterior en Secundaria, de la probabilidad en intervalos de dichas variables. El ejemplo de la Figura 3 utiliza intervalos de edad desigual, lo que podría ser una fuente de conflicto potencial en los niños.

DATO (grupo de edad)	FRECUENCIA (n.º de habitantes)
0 - 14 años	665
15 - 24 años	527
25 - 49 años	1 857
50 - 64 años	770
65 - 79 años	555
80 años o más	206

Si los datos son muy numerosos, se agrupan en intervalos.

Figura 3. Tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos ([T4], p. 204)

La tabla de doble entrada se presenta en el segundo ciclo con algunas celdas en blanco para ser completadas a partir de operaciones aditivas; las actividades propuestas están dirigidas a su lectura e interpretación (no a su construcción). Este tipo de tabla implica un nivel de razonamiento más complejo porque establece relaciones entre tres objetos matemáticos, relaciona las dos variables que se ubican en filas y columnas con las frecuencias absolutas que se ubican en las celdas de esa matriz. También se puede ver como representación de un espacio muestral producto en un experimento compuesto.

Esta frecuencia conjunta es un concepto preliminar de la probabilidad conjunta y, si los niños han comprendido la noción parte-todo, permite introducir intuitivamente su cálculo. Asimismo, la comprensión de la noción parte-todo facilita la introducción de la probabilidad condicional cuando se relaciona una celda con el total de su fila o de su columna, en lugar de hacerlo con el total de la tabla. En el ejemplo de la Figura 4 las preguntas están formuladas en términos de frecuencias absolutas, que se pueden asociar con probabilidad simple (en a), conjunta (en b) y condicional (en c y d).

En esta tabla se recogen las preferencias deportivas de los niños y niñas del colegio de María. Completa la tabla en tu cuaderno y contesta.

	NIÑAS	NIÑOS	TOTAL
NATACIÓN	23	25	
TENIS	12	10	
FÚTBOL	18		45
ESQUÍ		20	41
BALONMANO	19	21	40
TOTAL	93	103	

- ¿Cuántos niños y niñas prefieren el tenis?
- ¿Qué significa el número 18 de la tabla? ¿Y el número 20?
- ¿Cuál es el deporte preferido por las niñas? ¿Y por los niños?
- ¿Cuál es el deporte que menos prefieren los niños y niñas?

Figura 4. Tabla de doble entrada ([T2], p. 205)

Aparecen pocas tablas de frecuencias relativas en el estudio de la probabilidad. El ejemplo de la Figura 5 difiere del formato estándar; su propósito es facilitar la comparación de la aparición de un suceso en tres experimentos diferentes. Este tipo de tabla es un preámbulo para la noción de probabilidad condicional; cada frecuencia relativa en la última columna se puede ver como la proporción de aparición de un suceso (acertar) variando el suceso condicionante (persona que contesta el test). Su construcción es una fuente de conflicto potencial para un niño que está aprendiendo las tablas de frecuencias tradicionales; por ejemplo, pierde sentido que la suma de valores en todas las filas corresponda al total.

	Frecuencia absoluta (aciertos)	Total de preguntas del test	Frecuencia relativa
María	14	16	$\frac{14}{16} = 0,875$
Paulo	12	15	$\frac{12}{15} = 0,8$
Elisa	28	40	$\frac{28}{40} = 0,7$

Figura 5. Tabla para comparación de frecuencias ([T10], p. 210)

Observamos en ambas editoriales el aumento en la complejidad de las tablas acorde con el ciclo educativo (Tabla 5). Notamos que la serie 1 presenta más riqueza en el lenguaje tabular, desde segundo ciclo, con la inclusión de al menos una tabla de frecuencias con datos agrupados y una tabla de doble entrada. El lenguaje tabular se vincula principalmente con la estadística y, en general, los autores no hacen mención de la relación entre estadística y probabilidad, ni resaltan que la suma de las frecuencias relativas debe ser igual a uno.

Tabla 5. Tipos de tablas incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
	Listado de datos			X	X	
Tabla de recuento	X	X				
Tabla de frecuencias sin agrupar			X	X		
Tabla de frecuencias con datos agrupados					X	
Tabla de doble entrada			X			
Tabla de frecuencias relativas					X	X
Tabla con frecuencias relativas en formato no estándar					X	

Esta progresión es paralela al incremento del número de objetos matemáticos y la complejidad de las relaciones en estas tablas. En el primer ciclo, los niños realizan listados de datos y completan tablas de recuentos; en el segundo, los niños completan tablas de frecuencias absolutas (con una o dos variables); y en el tercero, los niños completan tablas de frecuencias relativas con una variable y tablas de frecuencias absolutas de doble entrada. También se usa como introducción a la probabilidad condicional (significado subjetivo) a través de las tablas de doble entrada.

En nuestro estudio hay más diversidad de lenguaje tabular, aunque de menor complejidad, que en Ortiz (2002). En concordancia con este autor, las diferencias entre las editoriales son visibles; también observamos el tratamiento separado para los contenidos de estadística y los de probabilidad.

4.5. Lenguaje gráfico

Aunque los diagramas de barra, de sectores y pictogramas, están más relacionados con la estadística que con la probabilidad, éstos son tenidos en cuenta también en este tema como base para la comprensión de la distribución de probabilidades y el significado frecuencial. Hemos encontrado en el estudio de la probabilidad: gráficos de barra, circulares, pictogramas, histogramas y diagramas en árbol.

El gráfico de barras sirve como preparación para el estudio en la secundaria del gráfico de probabilidades para variables aleatorias discretas. Su uso es muy amplio a partir de primer ciclo, tanto con actividades de lectura como de construcción y asociado al significado frecuencial de la probabilidad a partir del segundo o tercer ciclo. También se usa como apoyo en la argumentación (ver Figura 6).

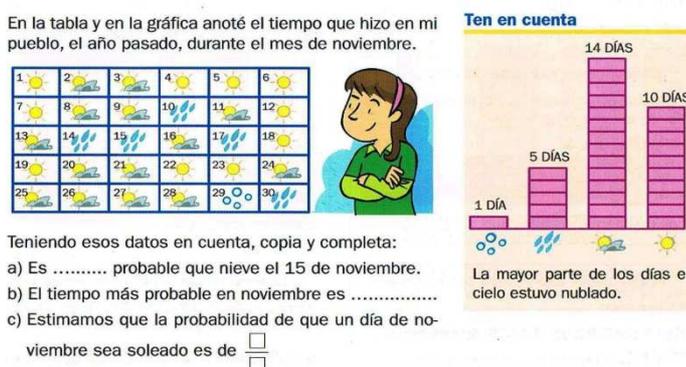
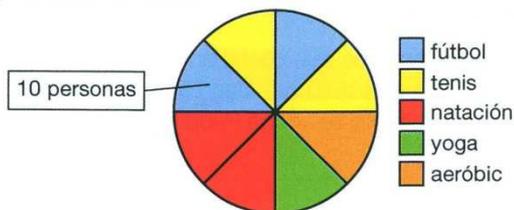


Figura 6. Uso de gráfico de barras en un problema de probabilidad ([T3], p. 211)

El pictograma es apropiado para representar las frecuencias absolutas de una variable cualitativa o discreta con pocos valores; su uso es frecuente a partir de segundo ciclo, enfocado a su lectura más que a su construcción. Apenas se usa en el contexto de probabilidades.

El gráfico de sectores es apropiado para representar proporciones (o frecuencias relativas) de una variable cualitativa o discreta con pocos valores; también se introduce con frecuencia a partir de segundo ciclo, pero poco en el contexto de probabilidades. Un ejemplo asociado al significado frecuencial se presenta en la Figura 7; es de notar que este gráfico tiene un error, que facilita su confusión con una ruleta, pues se representan sectores separados correspondientes al mismo valor de la variable (fútbol y tenis).

Este gráfico muestra las personas que practican cada deporte de los que se ofertan en un polideportivo. ¿Cuántas personas están apuntadas en total?



- Si se elige al azar a una persona cuando entra en el polideportivo, ¿qué probabilidad hay de que juegue al fútbol? ¿Y al tenis?

Figura 7. Gráfico de sectores en contexto probabilístico ([T9], p. 219)

El histograma es apropiado para representar las probabilidades (o frecuencias observadas) de una variable continua; su uso es escaso en los libros y básicamente orientado a la lectura. Un ejemplo se muestra en la Figura 8 donde la actividad se orienta a la interpretación de los datos resumidos después de una recolección.

Con los datos de este histograma, construye en tu cuaderno la tabla de frecuencias de esa distribución:



a) ¿Qué grupo de edad tiene mayor frecuencia absoluta? ¿Y relativa?

Figura 8. Uso de un histograma en un problema ([T5], p. 199)

Además de estos gráficos estadísticos, hemos encontrado el diagrama en árbol para representar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio de varias etapas, aunque no se hace una conexión explícita con el cálculo de probabilidades compuestas o condicionales. En el ejemplo de la Figura 9 se pregunta por el tamaño del espacio muestral compuesto de tres etapas simples, cada una con dos resultados. Cada posible resultado del experimento compuesto está representado por un trío ordenado de dibujos. El diagrama en árbol se presenta como un recurso sistemático de enumeración.

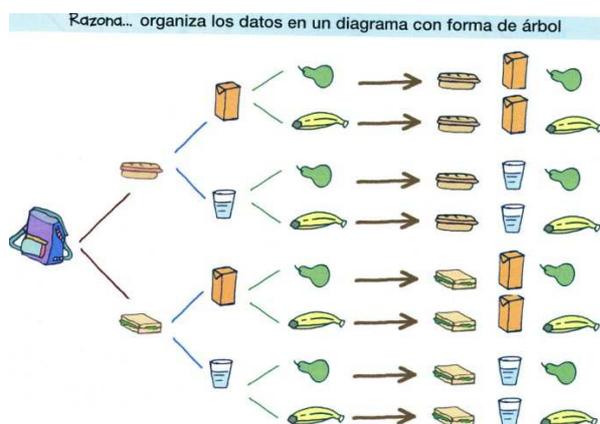


Figura 9. Uso de un diagrama en árbol en un experimento compuesto ([T7], p. 122)

Tabla 6. Tipos de gráficos incluidos en los libros de texto

	Primer ciclo		Segundo ciclo		Tercer ciclo	
	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2	Serie 1	Serie 2
Gráfico de barras	X	X	X	X	X	X
Gráfico circular			X	X	X	X
Pictograma				X	X	X
Histograma					X	
Diagrama en árbol				X	X	

En ambas editoriales (Tabla 6) el uso de gráficos de más complejidad avanza con la formación. Al igual que en el uso de lenguaje tabular, la serie 1 desarrolla más el significado frecuencial, apoyado con el histograma; y notamos que el uso de esta representación no se usa en la serie 2. El pictograma, por el contrario, se adelanta en la serie 2 respecto a la serie 1.

En concordancia con Ortiz (2002), las diferencias entre las editoriales son visibles en cuanto al uso de lenguaje gráfico. Los dos estudios coinciden en la presencia de gráficos de barras y de diagrama en árbol; entre los restantes, en nuestro estudio aparecen dos de menos complejidad (gráfico circular y pictograma), con respecto a los observados por este autor (gráficos cartesianos, diagramas de flechas y de Venn), y el histograma (de mayor complejidad y riqueza probabilística).

5. Conclusiones

En este trabajo hemos mostrado la relevancia que tiene el lenguaje en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y especialmente en el campo de la probabilidad, así como la gran riqueza y diversidad de lenguaje en las dos series de textos analizados.

Nuestro análisis sugiere que la presentación de la probabilidad en los textos podría llevar un uso diferenciado de diversas representaciones (tabular, verbal, gráfica y numérica), dependiendo de la editorial y el ciclo educativo.

El lenguaje predominante en todos los ciclos es el verbal de uso cotidiano. Los lenguajes numérico y simbólico se introducen gradualmente, en concordancia con su aparición en otros bloques de contenido en el área de matemáticas, aunque no se relacionan de forma explícita. Los lenguajes tabular y gráfico, que se utilizan desde primer ciclo en contexto de estadística, aparecen menos ligados a la probabilidad.

Todos estos resultados han de interpretarse con precaución, pues, de acuerdo a Lowe y Pimm (1996), el impacto del libro de texto depende no sólo del mismo libro, sino del lector, y del profesor, así como de las interacciones que determinan su uso en el aula. En este sentido el profesor debe buscar estrategias para que los estudiantes progresen desde el lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático más avanzado que les permita interpretar los significados más técnicos de la probabilidad. Ello requiere que los profesores relacionen lenguaje cotidiano y lenguaje formal, mediante el cual se construye el conocimiento matemático, facilitando el aprendizaje de los estudiantes (Veel, 1999; O'Halloran, 1998; Chapman, 1995).

La reflexión final es el importante papel de los escritores de libros de texto que marcan un nuevo nivel en la transposición didáctica del tema, al fijar y concretar lo establecido en los diseños curriculares; sin disminuir la importancia del profesor que, finalmente, en el aula decide no sólo el libro de texto que recomienda a sus alumnos, sino las partes de éste a usar en la enseñanza y los recursos con que debe ser complementado. Esperamos con este trabajo contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en particular de la aleatoriedad y la probabilidad, en los niveles de la Educación Primaria, así como facilitar la labor del profesorado en el aula.

Bibliografía

- Batanero, C., Henry, M., Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cobo, B., Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.
- Cordero, F., Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socio epistemológico en el nivel básico a través de los libros

- de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.
- Chapman, A. (1995). Intertextuality in school mathematics: The case of functions. *Linguistics and Education*, 7(3), 243–262.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- García, I. (2011). Análisis de los términos de inferencia estadística en bachillerato. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 51-73.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(4), 344-369.
- Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (3), 383-406.
- Lemke, J. L. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 215–234). Ottawa: Legas.
- Lowe, E., Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 371-409. Dordrecht: Kluwer.
- MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.
- O'Halloran, K. L. (1998). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. *Linguistics and Education*, 10(3), 359–388.
- O'Halloran, K. (1999). Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematics texts. *Semiotica*, 124(1/2), 1–29.
- O'Halloran, K. L. (2003). Educational implications of mathematics as a multisemiotic discourse. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 185–214). Brooklyn, NY y Ottawa, Ontario: Legas.
- Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, 38, 5-14.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: M.E.C., Morata.
- Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly*, 23, 139-159.
- Serradó, A., Azcárate, P. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Serradó, A., Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya. Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 38, 91-112.
- Shuard, H., Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.

Veel, R. (1999). Language, knowledge and authority in school mathematics. En F. Christie (Ed.), *Pedagogy and the shaping of consciousness: Linguistic and social processes* (pp. 185–216). London: Continuum.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis

- Serie 1: Editorial Anaya:
 - [T1]. Pérez, E., Marsá, M., Díaz, C., Ferri, T., Cid, O. (2011). Matemáticas 2. Proyecto “Una a una”.
 - [T2]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., Martínez, L. (2008). Matemáticas 3. Proyecto “Abre la puerta”, reedición 2011.
 - [T3]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P., Martínez, L. (2008). Matemáticas 4. Proyecto “Abre la puerta”, reedición 2011.
 - [T4]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. (2009). Matemáticas 5. Proyecto “Abre la puerta”.
 - [T5]. Ferrero, L., Gaztelu, I., Martín, P. (2009). Matemáticas 6. Proyecto “Abre la puerta”. Viñetas
- Serie 2: Editorial S.M.
 - [T6]. Labarta, P., Santaolalla, E., Ferrandíz, B., Galve, R. (2011) Matemáticas. 2 Primaria. Conecta con Pupi, reedición 2012.
 - [T7]. Peña, M., Aranzubía, V., Santaolalla, E. (2008). Matemáticas 3º. Proyecto Tirolina, reedición 2011.
 - [T8]. Peña, M., Aranzubía, V., Santaolalla, E. (2008). Matemáticas 4º. Proyecto Tirolina, reedición 2011.
 - [T9]. Peña, M., Santaolalla, E., Aranzubía, V., Sanz, B. (2009). Matemáticas 6º, Proyecto Timonel, reedición 2010.
 - [T10]. Aranzubía, V., Santaolalla, E., Roldán, J., Pérez, E. (2009). Matemáticas 6º, Nuevo proyecto Planeta Amigo.

Reconocimiento: Proyecto EDU2010-14947, (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Emilse Gómez Torres. Profesora Asistente del Departamento de Estadística de la Universidad Nacional de Colombia. Estadística por la Universidad Nacional de Colombia, MSc en Estadística de la Universidad Nacional de Colombia y Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Ha publicado en revistas colombianas sobre estadística. egomezt@unal.edu.co

Juan Jesús Ortiz de Haro. Profesor Titular del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada. Miembro del Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada. Ha realizado numerosas publicaciones en revistas nacionales e internacionales sobre probabilidad y estadística. jortiz@ugr.es

Carmen Batanero. Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada. Licenciada en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y Doctora en Matemáticas (Estadística) por la Universidad de Granada, España. Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación

matemática. Fue miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Comisión on Mathematical Instruction) y Presidenta de IASE (International Association for Statistical Education). Ha coordinado varios congresos y proyectos de educación estadística. batanero@ugr.es

José Miguel Contreras. Profesor ayudante doctor de la universidad de Granada. Licenciado en ciencias matemáticas y en Ciencias y Técnicas, máster en estadística aplicada y Doctor en Didáctica de la Matemática. Miembro del Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada. Ha publicado en revistas nacionales e internacionales sobre didáctica de la probabilidad. jmcontreras@ugr.es.

