REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 36. Diciembre de 2013
páginas 123-130

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Variaciones de un problema isoperimétrico, conjeturas y teoremas

Problema

¿Cuál es la figura plana, que encierre la mayor área, que se puede formar con una cuerda de 22 cm de longitud?

En el presente artículo narramos y hacemos comentarios y reflexiones sobre experiencias muy interesantes al resolver y crear problemas en talleres con profesores de secundaria. Llegamos a este problema, luego de generalizaciones y conjeturas, partiendo del siguiente episodio de una clase:

El profesor Vásquez, de cuarto año de media, propone el siguiente problema a sus alumnos:
Hallar las dimensiones del rectángulo cuyo perímetro sea 22 cm y que tenga la mayor área posible.
Después de unos minutos:

- La mayoría dice que tales dimensiones son: largo 6 cm y ancho 5 cm.
- Algunos siguen pensando.
- Julia dice que las dimensiones son: largo 5,5 cm y ancho igual (5,5 cm).

Ya manifestamos en el número anterior, que parte de la estrategia que proponemos para estimular el desarrollo de la capacidad de crear problemas de matemáticas en los profesores, es desarrollar talleres en los que se les presenta episodios de clases en torno a un problema y se les invita a: i) resolver el problema; ii) proponer un problema que facilite la resolución del problema dado y ayude a aclarar las reacciones descritas de los alumnos (un “problema pre”); y iii) proponer un problema que desafíe al alumno más allá de la solución correcta del problema dado (un “problema pos”). Todo esto en forma inicialmente individual y luego grupal, con el apoyo de quien (o quienes) conduce(n) el taller.

El problema del episodio es conocido y está entre los llamados problemas isoperimétricos, cuya presencia en la historia la encontramos ya en los escritos de Virgilio, hace más de 21 siglos, cuando narra la intervención de la princesa Dido en los inicios de la ciudad de Cartago.

Comentamos algunos pasajes de lo trabajado en los talleres con profesores.

Solución del problema del episodio:

Pasajes interesantes e ilustrativos de la solución los mostramos en el apéndice de este artículo. Invitamos al lector a resolver el problema, antes de leer tal apéndice.

Algunos problemas creados

<u>Problema Pre-1 (Individual)</u>

Completa la siguiente tabla

l	*a*	*2l + 2a*	*Área*
10		22	
	2	22	
		22	
5,5		22	

¿Cuánto debería tener el rectángulo de largo y de ancho para que tenga la mayor área?

<u>Problema Pre-2 (Grupal)</u>

En una hoja cuadriculada, dibuja tres rectángulos de perímetro 22 y halla el área de cada uno de ellos.

Comentarios 1

1.1. Ambos problemas se perciben bastante orientadores para facilitar la comprensión y solución del problema del episodio. El Problema Pre-1 no modifica la información ni el requerimiento del problema del episodio, pero hace una presentación que induce a explicitar dimensiones de rectángulos de perímetro 22 y áreas diferentes, lo cual es básico para resolver el problema.

1.2. Al socializar el Problema Pre-1, se comentó que sería preferible que el cuadro tenga una fila más con el dato de una de las dimensiones con un número decimal – por ejemplo 5,3 – para afianzar la consideración de dimensiones que no sean en números enteros. También se comentó que la pregunta ya no debería hacerse, puesto que eso corresponde ya al problema del episodio y el problema pre debe ser preparatorio de tal problema.

1.3. El Problema Pre-2 modifica el requerimiento del problema del episodio y ofrece bastante libertad al alumno para realizar lo pedido. El requerimiento es construir libremente un conjunto de rectángulos que tengan la propiedad indicada (perímetro 22) y hallar el área de cada rectángulo construido por el propio alumno. Se induce a descubrir que existen rectángulos con el mismo perímetro y con áreas diferentes.

Aunque lo usual es considerarlo de esa manera, debería explicitarse en el enunciado del problema que la unidad de longitud debe ser tomada considerando la longitud de cada lado de un cuadradito del papel cuadriculado y la unidad de área debe ser tomada considerando un cuadradito del papel cuadriculado. Ciertamente, no necesariamente el cuadradito más pequeño.

Habría que orientar adecuadamente a los alumnos para que no se refuerce la tendencia a considerar solo dimensiones con números enteros.

El rol orientador del profesor es muy importante para explotar las posibilidades matemáticas y didácticas de esta actividad. A manera de problemas pos, en relación a este problema, pueden proponerse preguntas adicionales como:

- *¿Cómo haces para dibujar un rectángulo de perímetro 22 que tenga uno de sus lados de longitud 4,5?*
- *¿Qué pasa si el perímetro es un número impar?*
- *¿Qué pasa si adoptas como unidad de longitud el doble de la longitud del cuadradito más pequeño del papel cuadriculado?*
- *¿Cómo dibujarías un rectángulo en el que sea evidente que la unidad de longitud adoptada es la longitud de la diagonal del cuadradito más pequeño del papel cuadriculado? Dibuja uno de ellos y escribe su perímetro.*

Problema Pos-1 (Individual)

El perímetro de una gigantografía rectangular debe ser de 14 metros. José cobra S/. 20,00 el metro cuadrado por colocar un aviso publicitario en ella. ¿Cuál es la máxima cantidad de dinero que podría recibir José por un aviso en esa gigantografía?

Problema Pos-2 (Grupal)

Se quiere cercar un terreno rectangular que colinda con un cerro. Si se cuenta con 40 metros de cerca metálica ¿cuál será el área máxima posible a cercar sin considerar el lado del cerro? Observar la figura.

Comentarios 2

2.1. En ambos problemas se ha pasado a un entorno extramatemático y tienen un nivel de dificultad ligeramente mayor que el problema del episodio. Se perciben como posibles de ser afrontados con éxito por quienes comprendieron y resolvieron el problema del episodio, con el mismo entorno matemático.

2.2. En el Problema Pos-1, el contexto extramatemático está en un marco urbano interesante, poco usual en este tipo de problemas. Es claro que la información ha sido modificada y se ha añadido un precio por metro cuadrado; así, el requerimiento, siendo esencialmente el mismo, tiene una presentación diferente, con una connotación económica.

2.3. El Problema Pos-2 tiene también contexto extramatemático, inclusive la presentación está referida a un terreno, pero la información está modificada en lo cuantitativo y en lo relacional. El requerimiento no ha sido modificado.

En conversaciones con algunos participantes del taller, comentamos la posibilidad de crear nuevos problemas pos, considerando otra figura geométrica, manteniendo el contexto intramatemático. Así, planteamos las siguientes preguntas

- *¿Qué pasaría si en el problema del episodio se considera el perímetro de un triángulo en lugar del perímetro de un rectángulo?*
- *¿Qué pasaría si en el problema del episodio se considera el perímetro de un polígono de n lados en lugar del perímetro de un rectángulo?*

Uno de los participantes preguntó:

- *¿Y si damos como parte de la información la longitud de alguno de los lados?*

A lo cual otro añadió:

- *Tendría que ser en el caso de un triángulo o de un polígono de cinco o más lados, porque si en un rectángulo conoces uno de los lados y el perímetro, ya conoces todo.*

Aprovechamos la situación para preguntar:

- *¿Si se conocen las longitudes de los cuatro lados de un cuadrilátero, el cuadrilátero queda determinado?*

Se generó una discusión con ejemplos concretos y se llegó a un consenso favorable a que el cuadrilátero no queda determinado. Hicimos notar que un caso particular es que hay infinitos rombos cuyos lados son, por ejemplo de longitud 5 cm.

- *¿Cómo usar este resultado para crear nuevos problemas pos en relación al problema del episodio?*

Luego de algunas propuestas y ajustes, propusieron el siguiente problema:

Problema Pos-3

Determinar el cuadrilátero de área máxima cuyos lados son de longitudes 3 cm, 5 cm, 6 cm y 2 cm.

Aplaudimos la idea y sugerimos posponer la solución del problema para continuar en la onda creativa de problemas.

Inmediatamente propusieron cambiar en el problema anterior la información del cuadrilátero por algún otro polígono con longitudes especificadas de sus lados.

(¡Cuidado! Para tener realmente un problema, el polígono no puede ser un triángulo.)

Sugerimos desprendernos de los polígonos.

Luego de unos instantes de silencio y desconcierto, surgió la idea de dar como información solo el perímetro de la figura y como requerimiento encontrar la figura de área máxima con tal perímetro. Así llegamos al siguiente problema, que es el propuesto al inicio de este artículo.

Problema Pos-4

¿Cuál es la figura plana, que encierre la mayor área, que se puede formar con una cuerda de 22 cm de longitud?

Hubo satisfacción al llegar a este problema, y el convencimiento de que su solución tendría que usar el cálculo diferencial. Comentamos que no. Que este viejo problema – recordamos la leyenda de la Princesa Dido – fue resuelto por Steiner en 1836, asumiendo la existencia de tal figura plana.

Comentarios 3

3.1. Con el diálogo, sugerencias y preguntas, se llegó a proponer problemas sumamente interesantes, que llevan a hacer figuras y cálculos para trabajar el ensayo y error, a reforzar el aprendizaje de conceptos geométricos y a intuir conjeturas cuyas demostraciones o rechazos pueden estar en un entorno matemático que excede lo que usualmente se considera en la secundaria. Por ejemplo, un tema interesante e importante, no tocado en la discusión, pero inherente a los problemas isoperimétricos, es el de la convexidad.

3.2. Observar y demostrar que de todos los rombos cuyos lados miden 5 cm, el cuadrado es el que tiene área máxima, es un buen punto de partida para conjeturar que de todos los polígonos de *n* lados, con perímetro dado, el de área máxima es el polígono regular. Ciertamente, este es un teorema.

3.3. El Problema Pos-3 lleva a preguntarse si existe tal cuadrilátero y, de manera más general, si dados 4 números positivos cualesquiera, siempre existe el cuadrilátero cuyos lados tengan tales longitudes. Son preguntas que llevan a investigar y a avivar la curiosidad científica, tan importante en los profesores de matemática, para que a su vez la contagien a sus estudiantes. El uso de software como GeoGebra, Cabri o Mathematica puede ayudar a fortalecer o descartar las conjeturas que se vayan haciendo.

3.4. Un teorema importante, relacionado con el Problema Pos-3, cuya demostración no requiere cálculo diferencial es:

Teorema: Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia tiene área mayor que cualquier otro cuadrilátero con lados de las mismas longitudes en el mismo orden[1].

3.5. También en el libro citado de Niven (pp. 82, 83 y 231) se encuentra demostrado el teorema alusivo al Problema Pos-4:

Teorema: Entre todas las curvas planas simples cerradas de un perímetro dado, el círculo encierra la mayor área.

Ante la inquietud sobre el uso del cálculo diferencial para estos problemas, hicimos notar que en los problemas de optimización que se afrontan con el cálculo diferencial, el objeto optimizante es un número o un vector (se busca un número o un vector que dé el valor máximo o mínimo de una función); en cambio en el Problema Pos-4 el objeto optimizante es una curva. Puede reformularse considerando como objeto optimizante una función (buscar una función que maximice una función área, que en este caso se suele llamar funcional, por ser su variable una función) y estamos así en el *cálculo de variaciones,* creado por Euler con posterioridad al cálculo diferencial.

[1] En Niven, I. (1981). *Maxima and minima without calculus*. USA: Mathematical Association of America, se encuentran las demostraciones de éste (p. 53) y del teorema mencionado en el comentario 3.2 (p. 81). Se encuentran también numerosos problemas y resultados importantes de optimización.

Comentario final

Estímulos adecuados conducen a desarrollar la capacidad de crear problemas y se puede llegar a proponer problemas muy interesantes y que amplían el horizonte matemático, al plantear dificultades que requieren el manejo de conceptos o resultados en un entorno matemático más avanzado que el del problema de un episodio inicial.

Para desarrollar la capacidad de crear problemas en los profesores, consideramos muy importante una fase de "entrenamiento" con mucha libertad a partir de un episodio dado, cuidadosamente presentado; sin embargo, considerando que tal capacidad de los profesores debe usarse para favorecer el aprendizaje de sus alumnos, es fundamental una segunda fase en la que se considere la creación de problemas en el marco del diseño de una clase, con temas específicos. Ciertamente, la libertad es fundamental en toda actividad creativa y será el conocimiento matemático y la experiencia didáctica del orientador los que permitan encontrar el equilibrio adecuado, tanto en un taller con profesores, como en una clase con alumnos de secundaria o primaria.

Apéndice

Resolviendo el problema del episodio

Hallar las dimensiones del rectángulo cuyo perímetro sea 22 cm y que tenga la mayor área posible.

Resumimos parte de las conversaciones con grupos de trabajo de profesores de matemáticas de secundaria, al resolver el problema.

Todos llegaron a una ecuación como $x + y = 11$, donde x e y representan las dimensiones del rectángulo.

Por ensayo y error – y en algunos casos haciendo una pequeña tabla como la que mostramos a continuación – varios consideraron que las dimensiones que maximizan el área del rectángulo (o sea el producto xy), son 6 cm y 5 cm.

x	y	xy
1	10	10
2	9	18
3	8	24
4	7	28
5	6	30
6	5	30
7	4	28
8	3	24

En la tabla mostraron que, con los valores que van dando a las variables, el producto más alto que se alcanza es 30.

Ante la sugerencia de tener en cuenta la respuesta de Julia en el episodio mostrado ($x = y = 5{,}5$) unos la descartaron inmediatamente porque en el problema se pide un rectángulo y la solución de Julia es con un cuadrado. Otros hicieron el producto y al obtener 30,25 – que evidentemente es mayor que 30 – se detuvieron a pensar en tal posibilidad.

Se les sugirió recordar las definiciones de rectángulo y cuadrado y examinar sus relaciones. Luego de discusiones grupales, se concluyó que los cuadrados son casos particulares de los rectángulos (rectángulos cuyo largo y ancho tienen la misma longitud) y que entonces Julia tiene razón. Así, se afirmó que la solución es el cuadrado cuyos lados miden 5,5 cm.

Se les preguntó entonces

- *¿Cómo están seguros de que 30,25 cm² es la mayor área de un rectángulo de perímetro 22 cm?*

Usando la calculadora algunos hicieron otras multiplicaciones:

$$5{,}6 \times 5{,}4 = 30{,}24$$

$$5{,}58 \times 5{,}42 = 30{,}2436$$

Se reafirmaron en que 30,25 es el valor máximo.

Reflexionamos sobre la importancia de tener un argumento contundente, más allá de los cálculos de casos particulares y del apoyo de la tecnología.

Algunos profesores definieron la función área: $A(x; y) = xy$

Un profesor, usando la ecuación $x + y = 11$ obtuvo la función área en términos de una sola variable:

$$f(x) = x(11 - x) = 11x - x^2$$

y usando cálculo diferencial obtuvo

$$f'(x) = 11 - 2x$$

Luego de igualar a cero, concluyó que $x = 5{,}5$ da el valor máximo.

Ante la pregunta ¿por qué?, otro colega le recuerdó el criterio de la segunda derivada: como $f''(x) = -2 < 0$, el valor obtenido da un máximo.

Al invitarlos a pensar en una solución que no requiera cálculo diferencial, algunos profesores escribieron la función f completando cuadrados:

$$f(x) = \frac{121}{4} - \left(x - \frac{11}{2}\right)^2$$

O sea:

$$f(x) = 30{,}25 - (x - 5{,}5)^2$$

De esta expresión concluyeron que la gráfica de la función es una parábola que se abre hacia abajo y que tiene su vértice en el punto $\left(\frac{11}{2} ; \frac{121}{4}\right)$. En consecuencia, el valor máximo de la función es $\frac{121}{4}$ (o sea 30,25), que se obtiene cuando $x = \frac{11}{2}$. Todo esto coincide con los cálculos hechos anteriormente.

Una nueva pregunta:

- *¿Será indispensable usar el criterio gráfico para concluir que $30{,}25$ es el valor máximo que obtiene f? ¿Se puede usar un argumento en el registro algebraico?*

Después de varios comentarios sueltos, planteamos nuevas preguntas:

- *¿Cuál es el signo de toda expresión algebraica elevada al cuadrado?*
- *¿Qué relación tienen con $\frac{121}{4}$ los valores que se obtienen de f(x) para diversos valores de x?*

Las respuestas a las preguntas hicieron concluir que, para cada valor de x, siempre se le resta algún número no negativo a $\frac{121}{4}$ y, en consecuencia, el valor máximo que alcanza f(x) es cuando se le resta el número cero; es decir, el valor máximo es $\frac{121}{4}$, cuando $x = \frac{11}{2}$.