REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 37. Marzo 2014
páginas 139-145

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Oportunidades para estimular el pensamiento matemático. Triángulos de área máxima o de área mínima

Problema

El profesor Huerta entrega a sus alumnos de cuarto año de secundaria cuatro hojas de papel. Cada una tiene dibujado en el centro una circunferencia, cuyo radio mide 3cm. Les pide que en cada hoja dibujen un triángulo, ya sea inscrito o circunscrito en la circunferencia, de modo que su área sea la mayor posible o la menor posible. Deben describir cada triángulo y especificar las dimensiones matemáticas de sus lados. ¿Cuántos triángulos diferentes (no congruentes entre sí), de tales características, se pueden dibujar?

Este problema resulta de uno de los problemas creados por profesores de secundaria en un taller de creación de problemas realizado con 31 participantes y considero que brinda excelentes oportunidades para estimular el pensamiento matemático.

El punto de partida fue el siguiente episodio:

> El profesor Zamora, de cuarto año de media, propone el siguiente problema a sus alumnos:
>
> **Hallar las dimensiones del triángulo rectángulo que tenga la mayor área posible y esté inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 8cm.**
>
> Después de unos minutos:
>
> - La mayoría dice que tales dimensiones son: 16cm., $8\sqrt{2}$cm. y $8\sqrt{2}$cm.
> - Algunos tienen dibujado un triángulo isósceles con base en una cuerda y altura correspondiente mayor que 8cm.
> - Teresa tiene dibujado un triángulo que es la solución correcta, pero no se anima a decir su respuesta.

Además de pedir a los participantes que resuelvan el problema, se les pidió que crearan un problema que tenga en cuenta las reacciones de los alumnos del profesor Zamora, de modo que su solución contribuya a que los alumnos que tengan que resolver el problema del episodio, tengan una percepción más clara de él y de su solución (un “Problema Pre”, según lo establecimos en artículos anteriores sobre creación de problemas). Se les pidió escribir el enunciado del problema y explicar cómo ayudaría la solución de este problema creado, a que los alumnos resuelvan correctamente el problema inicial, evitando dudas o inseguridades similares a las de los alumnos del profesor Zamora.

El análisis de las soluciones presentadas por los participantes del taller y de las correspondientes propuestas de problemas o secuencias de tareas, sería materia de un artículo específico. Por ahora, adelantamos que es una muestra evidente de la relación estrecha entre la competencia matemática y la competencia de análisis didáctico en la docencia, y de lo importante que es fortalecer la primera para desarrollar mejor la segunda.

Otra tarea que se pidió a los participantes del taller, fue crear un nuevo problema, cuya solución se facilite habiendo resuelto correctamente el problema del episodio (un "Problema Pos", según lo establecimos en artículos anteriores sobre creación de problemas). Se les pidió escribir el enunciado y una solución del problema creado.

En este artículo, nos detendremos en esta parte de las tareas encomendadas en el taller. Comentaremos algunos de los problemas creados por los profesores participantes y destacaremos las oportunidades para estimular el pensamiento matemático que se presentan al asumir tareas de creación de problemas.

Ciertamente, es fundamental resolver el problema del episodio para ubicarse bien en el contexto. Algunos profesores resolvieron el problema usando cálculo diferencial, otros usando la desigualdad entre media aritmética y media geométrica, otros usando trigonometría y otros usando un argumento muy sencillo que lleva a la solución. Lo anotamos como nota de pie de página e invitamos al lector a leerla solo después de haber resuelto el problema[1]. En verdad, esperaba que la gran mayoría de participantes en el taller use tal argumento.

A continuación, algunos problemas creados por los profesores participantes en el taller:

Problema 1.

Un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia posee el área máxima posible. Si dicha área es de 100cm², hallar la longitud de la circunferencia.

Comentario

El profesor recoge bien la idea de usar una solución correcta del problema del episodio. Aunque no lo dice explícitamente, está usando el hecho que el triángulo rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio dado queda determinado de manera única, salvo la ubicación específica de los vértices. Es parte del pensamiento matemático reconocer o intuir estas situaciones y muy valioso que se las presentemos a los alumnos. Puede percibirse claramente que el autor construye su problema como si partiera de la solución de un problema similar al del episodio; así, ahora el requerimiento es similar a lo que en el problema del episodio era la información y la información es similar a lo que en tal problema era el requerimiento.

[1] Si el triángulo inscrito es rectángulo, su hipotenusa tiene que ser un diámetro. Para que su área sea máxima, es necesario que la altura correspondiente a tal hipotenusa sea máxima, lo cual ocurre cuando esa altura es igual al radio y así el triángulo rectángulo inscrito tiene que ser de catetos iguales. En consecuencia, las longitudes de sus lados son 16cm., $8\sqrt{2}$ cm. y $8\sqrt{2}$ cm.

En la figura 1 presentamos la solución del autor del problema:

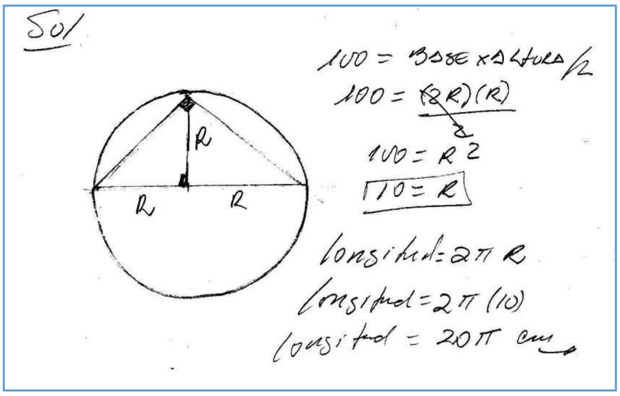

Figura 1

Una manera de resolver el problema, relacionando más explícitamente conceptos matemáticos, es identificar la función biunívoca que hace corresponder el radio R > 0 de cada circunferencia, con el área máxima de los triángulos rectángulos inscritos en la circunferencia. Por el problema del episodio, sabemos que tal función es $f(R) = \frac{2R \times R}{2} = R^2$. Así, según la información del problema, se tiene $f(R) = R^2 = 100$ cm^2 y en consecuencia $R = 10$ cm.

El problema no podría resolverse si se omitiera la información de *área máxima* del triángulo rectángulo inscrito, pues si bien la hipotenusa siempre sería $2R$, la altura correspondiente podría ser cualquier número h entre 0 y R y se tendría la ecuación de dos variables $Rh = 100$ cm^2, con infinitas soluciones. Por ejemplo, una circunferencia de radio 20cm y un triángulo rectángulo de hipotenusa 40cm y altura correspondiente 5 cm; o una circunferencia de radio 30cm y un triángulo rectángulo de hipotenusa 60cm y altura correspondiente $\frac{10}{3}$ cm.

Problema 2.

Determinar las dimensiones de un rectángulo si una de sus diagonales mide 10cm y su área es la mayor posible.

Solución del autor

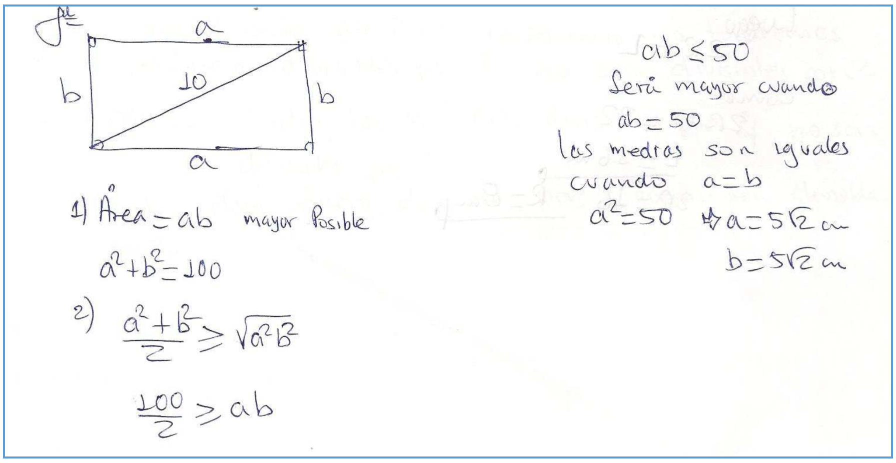

Figura 2

Comentario

La novedad de este problema está en mantener el vínculo con el problema del episodio, pero referirse a un rectángulo y no a un triángulo, y no hacer referencia a una circunferencia. Es claro que las ideas fundamentales en la solución del problema del episodio estuvieron presentes para la formulación de este problema; sin embargo en la solución misma, el autor se deja llevar por la relación entre media aritmética y media geométrica y busca aplicar un teorema según el cual, *si la suma de n números positivos es constante, entonces su producto es máximo cuando tales números son iguales*. Con este criterio resuelve el problema del episodio y lo repite para resolver el problema que propone.

Si bien es correcto repetir un método de solución de un problema anterior, reconociendo que es fundamentalmente el mismo, dado en otro contexto matemático, es importante hacer notar que el problema se puede resolver usando el resultado esencial del problema del episodio, que es caracterizar el triángulo rectángulo de área máxima, inscrito en una circunferencia dada, como un triángulo isósceles (de catetos iguales), cuya hipotenusa es el diámetro de la circunferencia. Así, el problema queda resuelto como un "corolario" de tal resultado, pues basta considerar la diagonal del rectángulo como el diámetro de una circunferencia y así el rectángulo de área máxima y diagonal de longitud 10, será la unión de dos triángulos rectángulos de área máxima, inscritos en tal circunferencia, con hipotenusa común de longitud 10, que son los que tienen catetos de longitud $5\sqrt{2}$.

Otra manera de hacer evidente la relación con el problema del episodio es la siguiente: llamando x, y a las dimensiones del rectángulo de diagonal 10, su área es xy, la cual es máxima si $xy/2$ es máxima, esto último es el área de un triángulo rectángulo de 10 cm. de hipotenusa. Así, el problema es el de hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo de área máxima conociendo su hipotenusa, que es esencialmente el problema del episodio y ya se sabe que tal triángulo es de catetos de igual longitud.

Vemos que la creación de este problema, a partir del problema del episodio, brinda la oportunidad de usar criterios propios del pensamiento matemático.

Estas ideas están presentes en algunos problemas creados y resueltos por otros participantes del taller, como podemos ver en el siguiente problema.

Problema 3

Hallar las dimensiones de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 2 de tal manera que tenga área máxima.

Solución del autor:

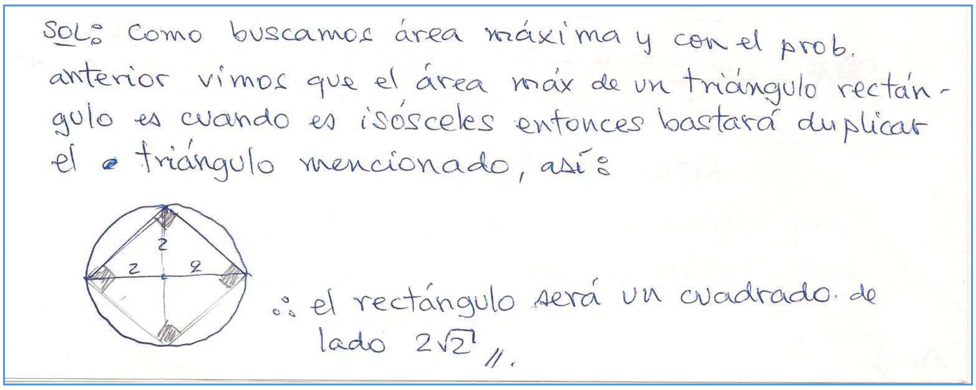

Figura 3

A continuación presentamos el enunciado y el intento de solución de un problema particularmente interesante, propuesto por uno de los profesores participantes:

Problema 4

Determinar las dimensiones de un triángulo rectángulo que tenga la mayor área posible y que esté circunscrito a una circunferencia de radio 8 cm.

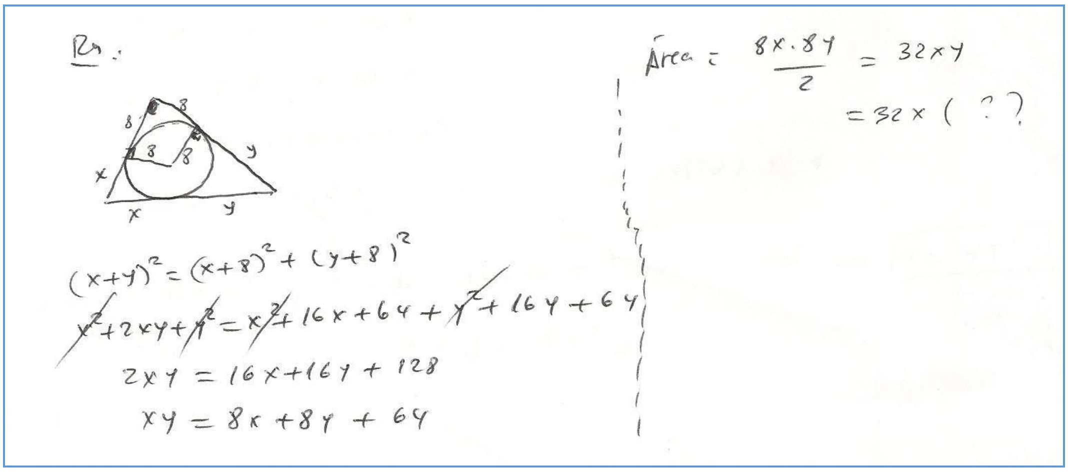

Figura 4

Comentario

Vemos que el autor del problema tiene la interesante idea de considerar triángulos circunscritos a una circunferencia, pero no llega a una respuesta final. No encuentra las dimensiones del triángulo que busca. ¿Existe tal triángulo?

El problema presenta una excelente oportunidad para ejercitar una faceta muy importante del pensamiento matemático: la existencia de una solución; en este caso, la del valor óptimo de una función; y más específicamente, plantearnos la pregunta ¿existe un triángulo rectángulo circunscrito a una circunferencia, que tenga área máxima?

Con una circunferencia dada, digamos de radio 2 cm, podemos construir muchos triángulos rectángulos circunscritos a ella y percibir intuitivamente que el área puede ser tan grande como se desee. Por ejemplo, podemos construir un triángulo rectángulo de área cercana a los 200 cm^2.

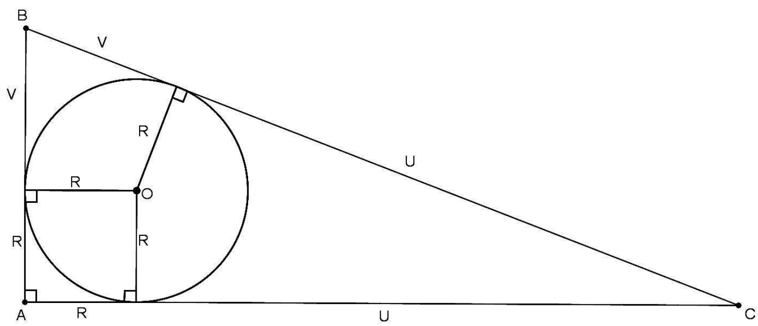

Figura 5

Considerando la figura 5 con el radio de la circunferencia R = 2, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(2 + u)(2 + v) = 400$$
$$(2 + u)^2 + (2 + v)^2 = (u + v)^2$$

Al resolverlo, obtenemos los valores:

$$u \approx 95{,}91$$
$$v \approx 2{,}09$$

Y en consecuencia las dimensiones del triángulo rectángulo circunscrito a la circunferencia de radio 2 cm, de área cercana a 200 cm^2 son:

Catetos: 97,91 cm. y 4,09 cm.; Hipotenusa; 98 cm.

Es interesante observar cómo a medida que un cateto se hace más grande, el otro se hace más pequeño y que la hipotenusa se aproxima más a una posición paralela al cateto mayor. Ocasiones para examinar ideas de límites de funciones.

Surge entonces la conjetura de la no existencia de un triángulo rectángulo de área máxima, circunscrito a una circunferencia dada. Evidentemente habría que demostrar o rechazar la conjetura, lo cual es propio del pensamiento matemático y esto lleva a considerar funciones, a resolver ecuaciones teniendo como parámetros el área del triángulo y el radio de la circunferencia, a examinar desigualdades, etc. Las diversas formas de examinar esta conjetura, son un desafío muy significativo al pensamiento matemático.

Paralelamente, surge la pregunta sobre la existencia de un triángulo rectángulo circunscrito a una circunferencia de radio dado, cuya área sea mínima. Parece natural conjeturar que sí; más aún, que es isósceles. Su demostración o refutación es otro reto interesante. La optimización usando cálculo diferencial con una función de dos variables y una restricción es un camino, pero queda el reto de seguir un camino sin este poderoso recurso.

Más preguntas y nuevos problemas

Podemos preguntarnos, de manera más general, si existe o no un triángulo circunscrito a una circunferencia dada, que tenga área máxima o área mínima. Una idea interesante a considerar es que dada una circunferencia, se pueden construir triángulos isósceles circunscritos a ella, cuya área sea tan grande como se desee, pues la base opuesta al ángulo formado por los lados congruentes, tendrá longitud necesariamente mayor que la longitud del diámetro de la circunferencia y la altura correspondiente será más grande cuanto más cercana a la longitud del diámetro sea tal base.

Crear “problemas pos” a partir del problema del episodio mostrado, lleva a hacerse preguntas con pensamiento matemático y así resulta natural preguntarse sobre la existencia de triángulos de área máxima o triángulos de área mínima, inscritos en una circunferencia dada. Para hacer más evidentes estos cuestionamientos y los retos de las demostraciones o refutaciones de las conjeturas que surjan, he propuesto la tarea del inicio de este artículo, que además recoge la iniciativa del autor del problema 4, al considerar triángulos circunscritos.

¿Existe un triángulo de área mínima inscrito en una circunferencia de radio 3? Es otra oportunidad para ejercitar la intuición y para buscar una formalización a la

conjetura que surja para responder a la pregunta. El caso particular del triángulo rectángulo permite tener ya fijado un lado (la hipotenusa) y observar que la altura correspondiente puede hacerse tan pequeña como se desee, como se ilustra en la figura 6.

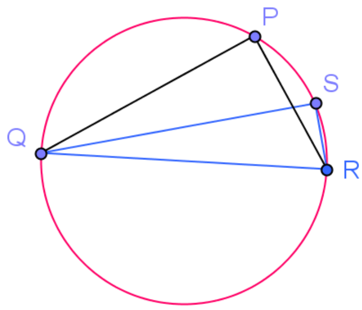

Figura 6

En la figura vemos los triángulos inscritos QPR y QSR, ambos con el diámetro QR como uno de sus lados y en consecuencia rectos en P y en S respectivamente. Es claro que el área del triángulo QSR es menor que el área del triángulo QPR y que es fácil construir otro triángulo rectángulo inscrito, con la misma hipotenusa y área aún menor. El proceso puede repetirse y concluir que es imposible obtener un triángulo rectángulo inscrito en esa circunferencia, que tenga área mínima (obviamente estamos refiriéndonos a triángulos cuyos vértices son tres puntos diferentes en la circunferencia dada).

Algunos elementos de análisis han sido dados, pero cada lector, ejercitando su pensamiento matemático, puede escoger sus propios caminos para demostrar o refutar las conjeturas que haga. Ciertamente, puede ser útil e ilustrativo usar herramientas informáticas como Cabri, GeoGebra, Mathematica o alguna otra