UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 33-63

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Uso del Modelo MTSK para la Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en Secundaria: El caso de la Proporcionalidad

Christian Camilo Fuentes Leal

Fecha de recepción: 18/11/2019
Fecha de aceptación: 28/08/2020

Resumen

En este documento se exploran algunas reflexiones a partir de un estudio del caso sobre el conocimiento especializado del profesor de secundaria en la enseñanza de la proporcionalidad a partir del modelo MTSK. En este estudio se implementó la metodología bottom-up, top-down, además de estrategias de análisis como la triangulación de instrumentos y la triangulación de especialistas, las cuales aportaron en la construcción de relaciones (observadas y evocadas) entre los subdominios del MTSK.

Los resultados están relacionados, entre otros sobre el rol del conocimiento de los temas (KoT) para el desarrollo de los demás subdominios del modelo, además de reflexionar sobre los aportes teóricos y metodológicos de esta investigación con respecto a indagaciones previas, con respecto al modelo, además de posibles los impactos en términos investigaciones del conocimiento del profesor como objeto de estudio.
Palabras clave: Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK), Pensamiento proporcional, Estudio de caso.

Abstract

This paper explores some reflections from a case study on the specialized knowledge of the secondary school teacher in the teaching of proportionality from the MTSK model. In this study, the bottom-up, top-down methodology was implemented, in addition to analysis strategies such as instrument triangulation and specialist triangulation, which contributed to the construction of relationships (observed and evoked) between the subdomains of the MTSK.
The results are related, among others, on the role of knowledge of topics (KoT) for the development of the other subdomains of the model, in addition to reflecting on the theoretical and methodological contributions of this research with respect to previous inquiries, with respect to the model. , in addition to the possible impacts in terms of research on the teacher's knowledge as an object of study.
Keywords: Specialized knowledge of the Mathematics teacher (MTSK), Proportional thinking, Case study.

Resumo

Este artigo explora algumas reflexões de um estudo de caso sobre o conhecimento especializado do professor do ensino médio no ensino da proporcionalidade a partir do modelo MTSK. Nesse estudo, foi

implementada a metodologia de baixo para cima, de cima para baixo, além de estratégias de análise como triangulação de instrumentos e triangulação especializada, que contribuíram para a construção de relações (observadas e evocadas) entre os subdomínios do MTSK. Os resultados estão relacionados, entre outros, ao papel do conhecimento de tópicos (KoT) para o desenvolvimento dos demais subdomínios do modelo, além de refletir sobre as contribuições teóricas e metodológicas desta pesquisa em relação a inquéritos anteriores, em relação ao modelo., além dos possíveis impactos em termos de pesquisa no conhecimento do professor como objeto de estudo.
Palavras-chave: Conhecimento especializado do professor de Matemática (MTSK), Pensamento proporcional, Estudo de caso.

1. Introducción

La construcción del pensamiento proporcional como concepto matemático, ha sido objeto de estudio por reconocidos investigadores en educación matemática como Karplus (1983), Freudenthal (1983), Streefland (1993), Hart (1988), entre otros. Esta relevancia está dada desde mismos los planteamientos iniciales de la psicología cognitiva Piagetiana, donde se considera que el pensamiento proporcional es uno de los requisitos que el individuo debe acceder para pasar de la etapa de las operaciones concretas al de las operaciones formales.

En este sentido, dada la complejidad y amplitud de este concepto matemático se considera necesario seguir construyendo investigaciones que aporten en su comprensión profunda de la proporcionalidad como concepto articulador de diferentes áreas del pensamiento matemático, este tipo de investigaciones aportan en la construcción de propuestas de enseñanza del concepto, ajustes en la construcción de programas de formación de profesores de matemáticas, la creación de espacios académicos en el marco de las carreras de magisterio donde se reflexione y estudie sobre la superación de las dificultades en la enseñanza de la proporcionalidad, la comprensión de conocimientos previos asociados a la proporcionalidad, como el significado de la noción parte todo, unidad de medida y conocimientos posteriores como tratamiento algebraico de situaciones.

Actualmente diversas investigaciones de autores como Rivas, Godino y Castro (2012), Ruiz (2006), Rivas, Rondón y Triviño (2017), Oller (2012), Godino y Batanero (2012), Fernández y Llinares (2012), Ceballos (2012), Caputo y Soto (2013), Balderas y Guerra (2014) han indagado sobre la construcción del pensamiento proporcional, la relación entre el conocimiento especializado del profesor y la proporcionalidad, ellos han mostrado la persistencia de las dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad tanto en los estudiantes como en profesores en ejercicio, mostrando así una tensión entre trascendencia de la proporcionalidad como concepto en la enseñanza de las matemáticas y la persistencia de las dificultades relacionada con su comprensión y uso a lo largo de diferentes etapas escolares.

La anterior tensión genera la necesidad de elaborar investigaciones que tengan como objeto de estudio la comprensión del conocimiento que moviliza un profesor para la enseñanza de este concepto en los contextos educativos, buscando así una reflexión y comprensión que permita abordar una transformación de las prácticas pedagógicas de los profesores; proponiendo así como objeto de estudio de la presente investigación el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria relacionado con la proporcionalidad.

Por lo cual se considera que por medio de investigaciones que aborden el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria asociado con la enseñanza de la proporcionalidad se aporta tanto en la superación de las dificultades en su aprendizaje como a la construcción de nuevas propuestas de enseñanza.

Para esto se consideró necesario hacer uso de propuestas teóricas como el modelo MTSK, construido en la Universidad de Huelva, donde se han realizado valiosos aportes en la construcción de una línea en investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el marco de las actividades del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM), además donde se han dirigido diferentes tesis doctorales como Montes (2015), Vasco (2015), Flores (2015), Escudero (2015), Aguilar (2015), Liñán (2017) en las cuales indagaron sobre el conocimiento especializado del profesor, mostrando de esta forma un conocimiento extenso y una larga trayectoria en la investigación sobre el objeto de estudio.

2. Referentes Teóricos y Metodológicos

Con respecto a los referentes teóricos, dado que en objeto de estudio es el conocimiento del profesor con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad, será necesario hacer una aproximación o sensibilización teórica desde diferentes perspectivas, en primer momento será necesario hacer una sensibilización disciplinar y didáctica con respecto el concepto de proporcionalidad desde una perspectiva disciplinar, en un segundo momento una caracterización del modelo MTSK el cual es desarrollado por la Universidad de Huelva, y finalmente una revisión sobre investigaciones previas sobre el conocimiento especializado del profesor relacionado con la proporcionalidad, pues estas aproximaciones constituyen una parte de vital importancia para comprender el conocimiento que se puede asociar al profesor de matemáticas.

Con relación a los referentes metodológicos, se caracterizará el tipo de investigación elegida, los criterios de selección de la informante, en nuestro caso una profesora de matemáticas de educación secundaria en un colegio público de la ciudad de Bogotá, además de mostrar la fundamentación de la forma en la cual se obtuvieron los datos a analizar en esta investigación.

2.1 Aproximación disciplinar sobre Proporcionalidad

Inicialmente en el proceso de sensibilización teórica sobe la proporcional, es necesario comprender a este concepto como un una construcción humana, es decir que construido a lo largo de la historia iniciando por los aportes del antiguo Egipto, con problemas de tipo práctico sobre proporcionalidad expuestos en el papiro del Rhind analizado por Chace (1979), pasando por la propuesta axiomática deductiva de la Grecia clásica en Euclides (1991), quien recoge sistemáticamente el tratamiento de la proporcionalidad por matemáticos como Pitágoras, Eudoxo o Thales, caracterizados por el uso magnitudes homogéneas (segmentos).

En oriente la cultura China en el texto del siglo III Los Nueve Capítulos, se plantea el “lu” como herramienta para comprender el razonamiento en la construcción de la regla de tres, esta se adapta mejor a las dinámicas comerciales y mercantiles que la propuesta Griega, pues proponen relaciones entre un conjunto de números, sin necesidad que estas sean homogéneas, estos elementos son propuestos por autores como Dauben (1998), Chemla (2005) y Kangshen (1999).

Posteriormente, autores como Rashed (1999) propone el texto Los Comentarios de Omar Al- Khayyam a Los Elementos, publicado en el siglo XI en lo actualmente ocupa el territorio Iraquí donde se presenta una definición alternativa de igualdad de razones a la presentada por Euclides, pues para el autor dos razones son iguales si ambos pares de magnitudes dan lugar a misma sucesión de enteros tras el proceso de antifairesis; a esta definición él la llama como la “razón verdadera”, diferenciándola de la definición geométrica de Euclides a la cual nombra como “razón usual”.

Un último aporte a tener en cuenta en la comprensión moderna de la proporcionalidad está en la publicación de la traducción de Los Elementos por Campanos de Novara en 1255, pues en este texto se presenta la definición del concepto de “denominación de una razón” aritmetizando la idea de razón propuesta en Los Elementos, buscando asociar un número a cada razón; esta propuesta se relaciona con la asignación que en la que actualmente se asocia una razón a un número racional, característica que según Rommevaux (1999) contribuyó en la comprensión contemporánea de la razón como fracción y como número racional.

La revisión sobre la evolución histórica de la proporcionalidad aportó en aspectos como la comprensión de posibles problemas y obstáculos epistemológicos, la transformación de significados y representaciones que se han construido para acceder al concepto, además de una aproximación a la fenomenológica por medio del estudio de las situaciones reales que fueron génesis como la necesidad de comparar la cuantificación de cualidades de magnitudes como la amplitud angular, la longitud, el peso, la superficie, la capacidad, la masa, la velocidad, entre otras.

Con respecto a una primera aproximación disciplinar sobre la definición, es necesario caracterizarla inicialmente como una relación de equivalencia entre dos cantidades de magnitud extensiva. En los planteamientos de Gucaneme (2002) se menciona que usualmente se define a la proporcionalidad como la igualdad entre dos razones, planteamiento que para el autor es difuso e impreciso, dando espacio para dificultades en su comprensión; esta situación hace necesario que se deban construir diferentes aproximaciones para definir este concepto.

Por ejemplo, en Vergnaud (1990) se relaciona la proporcionalidad a partir del campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Entendiendo estas como el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. Igualmente, el autor considera este el campo conceptual está constituido por el conjunto de conceptos (proporción simple y compuesta, función lineal, múltiplo, combinación lineal, fracción, divisor, razón, proporción) y teoremas (propiedades de isomorfismo de la función lineal y su generalización a las relaciones no enteras, propiedades que se refieren al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas, y algunas propiedades específicas de la bilinealidad) que permiten analizar estas situaciones.

Una segunda aproximación está en Fiol y Fortuny (1990) quienes muestran la proporcionalidad a partir de la teorías sobre funciones para mencionan que dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades $f: M \rightarrow N$ tal que:

I. Si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$, la relación de orden es monótona.

II. y $f(a+b) = f(a) + f(b)$, es decir, se conserva el orden y la suma.

III. Si la magnitud es continua, la proporcionalidad f queda unívocamente determinada dando la cantidad homóloga $f(a)$ de una cantidad cualquiera y en particular las cantidades correspondientes $f(a)$ a una unidad.

Los autores definen la constante de proporcionalidad a partir de M y N como dos magnitudes proporcionales continuas, donde f sea la correspondencia entre sendas cantidades e y u dos unidades respectivas de M y N.

$$f: M \rightarrow N$$

$$e \rightarrow u$$

Escribiendo que sí $f(e) = k \cdot u$, se podrá decir entonces que k es la constante de proporcionalidad respecto de las unidades e y u. En este sentido, la constante de la proporcionalidad es una representación de la correspondencia y por eso se denota como $k = [f]\,\{e\}\,\{u\}$. Como las magnitudes M y N pueden ser descritas completamente por sus medidas m_e y m_u respectivamente, entonces la proporcionalidad f puede expresarse como una aplicación g de R^+ en R^+.

Desde una tercera perspectiva, Van de Walle (2001) plantea la proporcionalidad como una relación multiplicativa entre magnitudes, la cual permite determinar el valor cantidad de magnitud en función de otra cantidad de magnitud de la cual se conoce su medida, por medio de relaciones de proporcionalidad entre cantidades de distintas magnitudes.

Finalmente, una cuarta perspectiva de definición de proporcionalidad está en Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero y Flores (2016) quienes la caracterizan como una relación de equivalencia entre dos cantidades de magnitudes extensivas[1], de tal forma que cuando se hace la comparación de dos cantidades de magnitudes (a partir de la construcción de razones) se obtiene el mismo valor.

La proporcionalidad se puede dar en dos situaciones, la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa, las cuales a su vez se pueden presentar en un contexto geométrico o uno aritmético.

Con respecto a la proporcionalidad directa, esta se define como una relación de correspondencia entre dos variables cuando el cociente entre las cantidades que se corresponden siempre es el mismo. A ese cociente se lo conoce como constante de proporcionalidad. Este tipo de proporcionalidad tiene dos propiedades, la primera menciona que al multiplicar (o dividir) una de las cantidades por un número, la cantidad correspondiente se multiplica (o divide) por el mismo número y la proporción se mantiene, y la segunda dice que al sumar (o restar) dos valores de una de las cantidades se obtiene un número correspondiente con la suma (o resta) de los valores correspondientes de la otra cantidad.

Por otro lado, se dirá que la proporcionalidad será inversa si las cantidades de dos magnitudes vinculadas entre sí varían de modo tal que su producto permanece constante. Esta relación está caracterizada por la propiedad que menciona que al multiplicar una de las cantidades por un número, la cantidad correspondiente se divide por el mismo número, y la proporción se mantiene. Es decir, que, al doble de una cantidad, le corresponde la mitad de la otra; al triple de una cantidad, le corresponde la tercera parte de la otra; y así sucesivamente. De tal forma que, al realizar el producto entre las cantidades, éste no varía.

Con respecto a los contextos en los que se da la proporcionalidad, del contexto numérico se hace uso de este cuando se busca encontrar una relación de proporcionalidad directa o inversa entre dos variables numéricas; en cambio, cuando se indaga sobre cuerpos, formas, objetos de los cuales se quieren replicar a diferente tamaño o cuando su medición no es posible físicamente se hará uso del contexto geométrico, por ejemplo, en la construcción de maquetas, mapas o medir alturas de edificios de grandes alturas.

2.2 Aproximación didáctica al concepto de proporcionalidad

De acuerdo a la revisión bibliográfica sobre la enseñanza de la proporcionalidad se pudo concluir que esta se puede abordar desde diferentes propuestas, por ejemplo, Fiol y Fortuny (1990) comentan que los términos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado ubicándolos a partir de la noción de función lineal, pues esta noción es un modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones, expresiones y fenómenos; para los autores, el concepto de

[1] Donde la unión de la cantidad de magnitud sea sumativa, como por ejemplo la cantidad de superficie.

función lineal se considera como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de proporcionalidad.

Los autores consideran que la comprensión de la proporcionalidad puede realizarse dando diferentes representaciones, mostrando la importancia de la conversión de una representación a otra. Algunos ejemplos esta traslación se muestra en la tabla 1, en esta se hace énfasis en descripciones verbales, tablas de valores, gráficas, formulas y ejemplos.

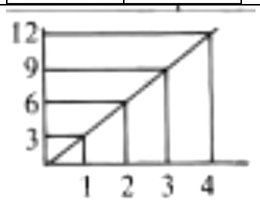
De \ ***A***	***Situaciones descripción verbal***	***Tablas de valores***	***Gráficas***	***Fórmulas***	***Ejemplos***
Situaciones descripción verbal	Analogía Redacción	Mediaciones Particularizar Concretar	Esbozar Visualizar	Algebraizar Obtener un modelo	(el perímetro de un triángulo equilátero es el triple del lado)
Tablas de valores	Reflexiones Describir	Interpretar Extrapolar	Señalizar	Generalizar Relacionar Ajustar	X Lado / Y Perímetro: 1 / 3 2 / 6 3 / 9 4 / 12
Gráficas	Interpretar	Seleccionar Lectura de puntos	Cambios de sistema de referencia Cambio de escala	Generalizar Relacionar Ajustar	
Fórmulas	Explicar Reconocimiento de parámetros	Calcular Tabular	Esboza Representa	Transformación algebraica Operaciones	$y = 3x$ $\frac{y}{x} = 3$

Tabla 1. Representaciones sobre proporcionalidad propuestas por Fiol y Fortuny (1990)

La anterior tabla se considera fuente importante en el proceso de sensibilización teórica, pues el de conocimiento sobre diferentes tipos de registros de representación portan en la comprensión de qué elementos debe priorizar el profesor en la enseñanza de la proporcionalidad, además de establecer posibles dificultades que el estudiante pueda tener al pasar de un tipo de representación a otra.

Como una estrategia de condensar de los elementos en común encontrados de diferentes propuestas de enseñanza en la tabla 2 se muestra una relación con diferentes planteamientos didácticos a tener en cuenta en la enseñanza de la proporcionalidad de acuerdo a diferentes momentos.

Categoría/ Autores	***Características asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad***

Conocimientos previos a la proporcionalidad Fiol y Fortuny (1990), Rapetti (2003), Azcarte y Deulofeu (1990), Guarín y Escolano (2009), Freudenthal (1983), Godino y Batanero (2012), Fernández y Linares (2012), Khoury (2002)	Trabajo preliminar de conceptos como razón y proporción. Trabajo de la fracción como racional y decimal. Razón aritmética como división entre dos cantidades de magnitud. Comprensión de la división como reparto (la mitad, la tercera parte) y la multiplicación como suma abreviada (el doble, el triple) Uso y comparación y medición de razones Explorar razones no enteras Razón como índice comparativo Operación con Naturales, Enteros, fracciones y racionales, y porcentajes Presentar el concepto de razón por medio del contexto de la medida. Trabajar aspectos cualitativos sobre las razones Trabajar la razón como la medida de cantidad de una magnitud relacionada con otra cantidad de magnitud. Modelización del mundo real y material concreto. Trabajo con magnitudes de diferente naturaleza Trabajo con métodos intuitivos para posteriormente introducir el método de regla de tres Uso de contextos geométricos Uso de gráficas cartesianas y tablas Trabajar el significado de la relación entre 1 a muchos Exploración de situaciones aditivas a situaciones multiplicativas
Conocimientos en la iniciación a la proporcionalidad Fiol y Fortuny (1990), Solomon (1987), Vega (2006), Fiol y Fontuny (1990), Ruiz (2006), Ceballos (2012), Torres, y Deulofeu (2018), Guarín y Escolano (2009)	Uso de diferentes sistemas de representación y conversión entre estos. Interpretación de tablas y de las magnitudes tratadas Interpretación de la constante de proporcionalidad Uso situaciones de proporcionalidad geométrica, para posteriormente trabajar otros contextos. Método de unitización
Conocimientos asociadas a la proporcionalidad Fernández y Linares (2012), Guarín y Escolano (2009), Azcarte y Deulofeu (1990), Vega (2006), Godino y Batanero (2012), Torres y Deulofeu (2018), Solomon (1987) Guarín y Escolano (2009), Solomon (1987)	Establecer las condiciones cuando exista o no la proporcionalidad entre dos razones Método de regla de tres con diferentes medios Método de reducción a la unidad, para posteriormente trabajar repartos proporcionales, porcentajes, escalas e interés simple. Cálculo de cantidades desconocidas Proporcionalidad inversa Aritmetización de razones, ya sean de la misma o diferente magnitud. Problemas de comprensión de la proporcionalidad trascendiendo el uso aritmético Uso de relaciones multiplicativas Proporcionalidad como relación en ambos sentidos Trabajo de proporcionalidad como igualdad entre razones aritméticamente equivalentes $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}; ad = bc$ Semejanza de triángulos y polígonos
Conocimientos que aportan a conceptos posteriores asociados a la proporcionalidad Fiol y Fortuny (1990),	Trabajo de proporcionalidad asociado al concepto de función. Trabajo sobre paralelismo, cuerdas de una circunferencia, establecimiento de la pendiente Uso de la observación, reflexión y argumentación para comprender los conceptos de fracción y función Relacionar el pensamiento proporcional con otros procesos matemáticos

Azcarte y Deulofeu (1990), Solomon (1987), Rapetti (2003), Godino y Batanero (2012)	

Tabla 3. Síntesis de las características de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad

El mismo ejercicio se hizo en la tabla 3, donde se muestra los elementos comunes en términos de las posibles dificultades y errores en diferentes momentos con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad a partir de los planteamientos de diferentes autores.

Categorías/ Autores	Dificultad o error asociado a la proporcionalidad
Asociadas a conceptos previos a la proporcionalidad Rapetti (2003), Rivas (2013), Fernández y Llinares (2012)	Errores en el significado de la fracción como relación parte-todo y como cociente. No comprender de la razón como un índice comparativo, que generalmente expresa una relación multiplicativa entre dos medidas. No establecer la relación entre el uso de una razón como una fracción y viceversa. No usar razón como un índice comparativo.
Asociadas a la iniciación a la proporcionalidad Fiol y Fortuny (1990), Godino y Batanero (2002), Rodríguez y Pérez (2003), Carrillo *et al.* (2016),	No iniciar la enseñanza desde fuentes geométricas, primero a partir de dibujar o aparejar triángulos semejantes y más adelante rectángulos semejante, cualificando sus relaciones, comparando su base y su altura, para posteriormente iniciar la comparación de longitudes de figuras semejantes. Uso de métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de "regla de tres" sin introducir el dominio de otros intuitivos. La no utilización de la estrategia del valor unitario en la resolución de un problema. El no uso de situaciones reales que sean intuitivas para el estudiante, haciendo énfasis en las relaciones multiplicativas entre las cantidades de magnitud y diferenciarlas de las relaciones aditivas. Identificación equivocada de relaciones proporcionales de cantidades de magnitudes cuando no lo son.
Asociados al significado de conceptos relacionados a la proporcionalidad Guarín y Escolano (2009), Khoury (2002), Vega (2006), Godino y Batanero (2002), Rodríguez y Pérez (2003), Carrillo *et al.* (2016)	Realización de operaciones aditivas por medio de operaciones entre números como entes abstractos y no como expresión de las distintas cantidades de magnitud. Cálculo de la constante es un simple cálculo numérico sin interpretación alguna. Uso de tablas dadas únicamente en forma numérica es decir sin especificar de qué magnitudes se trata. Considerar las razones como entes numéricos abstractos.

	Presentar la razón como un número y no como medida, mostrando a la razón como un ente abstracto desconectado de las magnitudes ocupándose solamente de los aspectos numéricos. Falta de construcción de un significado del porcentaje como una aplicación específica del concepto de proporción. Uso de la linealidad en contextos donde no es aplicable, la sobrevaloración de la linealidad al resolver problemas pseudo proporcionales o no proporcionales en diversos contextos. Tratamiento descontextualizado, sin la búsqueda de comprensión conceptual de la proporcionalidad, causado por el abuso de la regla de tres. Uso exagerado de procedimientos de cálculo, junto con la habitual aritmetización de la medida, provocando la pérdida del significado de las magnitudes.
Asociados al pensamiento variacional Guarín y Escolano (2009), Rodríguez y Pérez (2003), Torres y Deulofeu (2018), Rivas (2013)	Definición errónea del valor de las incógnitas. Interpretación errónea de la solución y el erróneo establecimiento de las relaciones algebraicas. Resolución de situaciones en las que se presenta una variación simultánea de dos cantidades. Creer que "para la proporcionalidad directa: al aumentar una magnitud la otra también aumenta, y si disminuye una, la otra también lo hace, en cambio para caracterizar la proporcionalidad inversa se mencionan frases como "cuando una aumenta, la otra disminuye", sin mencionar la constante de variación. Asociar el concepto de proporcionalidad únicamente al hecho de doblar o triplicar magnitudes, en este caso el estudiante no entiende la proporcionalidad como una relación de doble sentido.
Asociado al uso de estrategias de proporcionalidad erronas Fernández y Linares (2012), Torres y Deulofeu (2018), Rivas (2013), Carrillo *et al.* (2016)	No complementar el significado del concepto de razón proveniente de la estructura aditiva (significado de uno a varios), incorporando nuevos significados generados independientemente de las estructuras aditivas. No trabajar situaciones no proporcionales No usar diferentes tipos de razones (enteras y no enteras) No distinguir entre situaciones que son organizadas de manera apropiada por razones, de aquellas que no lo son. Dificultad de razonar proporcionalmente distinguiendo las diferencias entre situaciones donde existen proporciones y donde no existen. Dificultades por dominio físico-empírico (uso inadecuado de tipos de razones de dos cantidades heterogéneas) y otra al dominio

	matemático (uso inadecuado de la recta numérica, la escritura de fracciones y números decimales). Uso incorrecto de una estrategia apropiada, el uso de una estrategia inapropiada, el ignorar parte de los datos, el uso de operaciones al azar con parte de los datos. Utilizar estrategias aditivas erróneas como cuando se establece la relación entre las razones es calculada a través de la sustracción entre sus términos. Errores al uso de escalas numéricas se consideran que estas surgen cuando no se indican las unidades, entendiendo la escala como independiente de la unidad elegida. Errores al calcular las medidas reales cuando el numerador de la escala numérica no es la unidad.

Tabla3. Síntesis de errores y dificultades en la enseñanza de la proporcionalidad

2.3 Caracterización del Modelo MTSK como marco de referencia para comprender la proporcionalidad

Dada la complejidad del conocimiento disciplinar (matemático) y didáctico del profesor se han elaborado diferente modelos para su análisis, en el presente documento se muestra el modelo MTSK como una propuesta teórica de comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas en el marco del grupo SIDM en la Universidad de Huelva, España, donde se ha trabajado y aportado en la comprensión del conocimiento profesional del profesor, en la tabla 4 se presenta grosso modo los dominios del modelo.

Dominio	***Subdomino***	***Categorías***	
Conocimiento matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos.	Concepciones
	Conocimiento de la estructura matemáticas (KSM)	Conexiones de complejización, las conexiones de simplificación, las conexiones de contenidos transversales y finalmente las conexiones auxiliares	
	conocimiento de la práctica matemática, (KPM)	Prácticas ligadas a la matemática en general y las prácticas ligadas a una temática en matemática.	
Conocimiento didáctico de contenido (PCK)	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (MKT)	Teorías personales o institucionales de enseñanza, los recursos materiales y virtuales y las actividades, tareas, ejemplos y ayudas	
	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Formas de aprendizaje, las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y las concepciones de los estudiantes sobre matemáticas	
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Contenidos matemáticos requeridos a enseñar, el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, y secuenciación de diversos temas.	

Tabla4. Dominios y subdominios del modelo MTSK

Una característica particular de la propuesta teórica es la inclusión de las concepciones y creencias de las matemáticas, de su aprendizaje y enseñanza como motor de las acciones de las categorías es un nuevo elemento que presentan los autores en la propuesta de conceptualización del conocimiento del profesor de matemáticas, en la figura I se muestra un esquema de la relación entre los diferentes componentes del modelo.

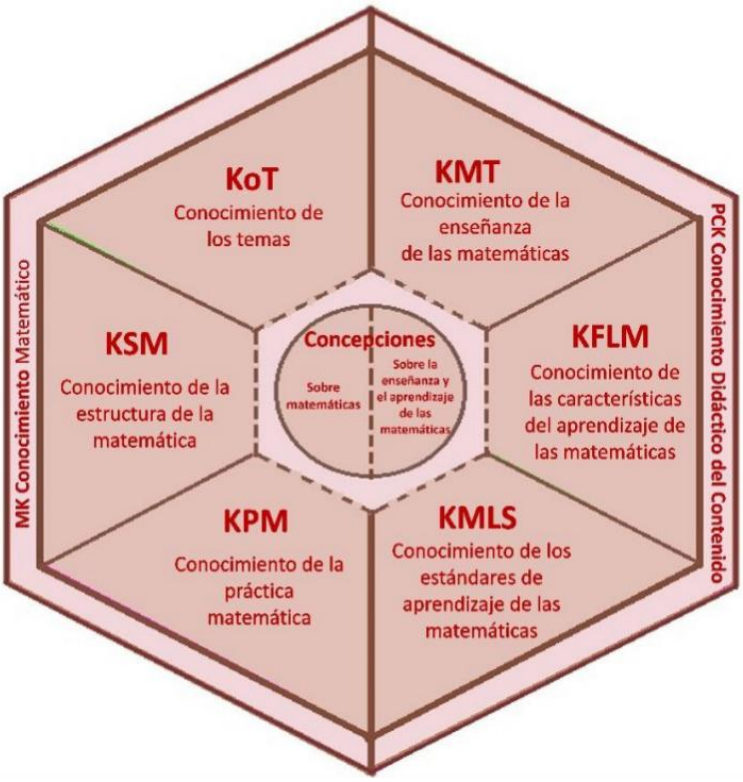


Figura I: Representación gráfica de modelo MTSK (extraído de Muñoz, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes. y Climent. (2015).)

Se considera que este modelo complejiza y amplía los modelos preexistentes del conocimiento del profesor, por varios motivos. En primer lugar, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas se caracteriza como aquel que el profesor necesita y usa para explicar matemáticas, prescindiendo de consideraciones pedagógicas generales no relacionadas a la disciplina. Por otro lado, el modelo considera el conocimiento que sustentan las acciones, de igual forma se considera que en el desarrollo de cierta acción de enseñanza, puede existir conocimiento de diferentes subdominios, es decir que no existe una relación univoca entre una acción y un subdominio, mostrando así la simultanead y complejidad del modelo.

2.4 Antecedentes de investigaciones sobre el conocimiento del profesor sobre la enseñanza de la proporcionalidad

Una vez se ha mostrado un panorama sobre diferentes aproximaciones disciplinares y didácticas a la proporcionalidad, además de una breve caracterización del modelo MTSK, es necesario caracterizar propuestas de comprensión del conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de la proporcionalidad como una estrategia de relacionar estos elementos.

Una primera investigación asociada al conocimiento del profesor y proporcionalidad está en los planteamientos Block (2001, 2006), quien indaga por los conocimientos de profesores de primaria sobre este concepto, por medio de un cuestionario. Producto de la investigación se concluye que dado a que los profesores que tenían experiencia en los primeros grados identificaron más fácilmente ciertos procedimientos no canónicos que los profesores que cuentan con experiencia en grados superiores, un mayor dominio de técnicas aritméticas más generales puede venir acompañado de un pérdida de sensibilidad hacia los procesos por los que pasan los estudiantes y hacia la forma en que determinadas variables de los problemas.

En Rivas, Godino y Castro (2012) se indaga sobre el desarrollo del conocimiento en la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria utilizando enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática GROS[2]. Por medio de esta investigación se estableció una la red de objetos y significados puestos en juego en la resolución de un problema matemático sobre proporcionalidad. Esta red se basó en la comprensión e identificación de los diferentes objetos matemáticos, como elementos lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposiciones y argumentos, en correspondencia con sus respectivos significados, puestos en juego en la resolución de un problema matemático en un contexto instruccional.

Estos aportes son complementados en Rivas (2013), quien en su tesis doctoral por medio del EOS[3] hace un análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de Educación Primaria en formación en la Universidad de Granada.

En una primera parte el autor hace un estudio con un grupo de profesores en formación en el cual se estable el conocimiento matemático de los futuros profesores sobre proporcionalidad como una construcción desarticulada, y basada en aspectos parciales, que no termina de integrarse en un conocimiento significativo sobre esa noción; posteriormente en una segunda parte de la investigación con otro grupo de estudiantes se hace una acción formativa centrada en el análisis epistémico de tareas de proporcionalidad propias de educación primaria, el cual aporta en el desarrollo del conocimiento especializado del contenido, además de dimensionar la complejidad del dominio instrumental de dicha herramienta.

Posteriormente, en Balderas y Guerra (2014) aplican a un grupo de profesores en las cuales indagan por diferentes interpretaciones de la proporcionalidad, observando que en la mayoría de las soluciones presentan tres tendencias: fuerte incidencia de los procedimientos “clásicos”, la regla de tres y el valor unitario; presencia menor de los procedimientos “internos” (al doble, el doble) que suelen ser

[2] Reconocimiento de objetos y significados
[3] Enfoque Ontosemiótico

menos formales, más intuitivos, además de una presencia más pequeña de procedimientos “algebraicos”.

En los planteamientos de Torres (2015), se reconoce el conocimiento del profesor como un constructo en constante transformación pues es puesto el juego el aula de clase activamente, plantea la importancia de un conocimiento disciplinar amplio y profundo, el rol el conocimiento del profesor sobre cómo puede usar ejemplos, representaciones, tipo de lenguaje o analogías para promover los aprendizajes de los estudiantes, además del cómo el conocimiento del profesor es usado para justificar decisiones con respecto a la coherencia de la planeación desde el contenido matemático.

Estos planteamientos son complementados en Amado y Muñoz (2015) presentan la caracterización de los conocimientos del profesor de matemáticas de acuerdo con lo indicado en investigaciones en educación matemática, en especial en referencia a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Esta caracterización se hace a partir de una búsqueda bibliográfica de la cual se obtuvieron 274 documentos entre artículos, libros y tesis de maestría y doctorado, que datan desde1929 hasta el año 2014. Por medio del modelo MKT propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008) concluyendo que en los artículos seleccionados para este trabajo se centran en gran medida en solo dos de los subdominios utilizados, el conocimiento del contenido y del estudiante y en el conocimiento del contenido y de la enseñanza, lo cual permite observar una tendencia y un especial por parte de los investigadores en educación matemática.

Finalmente, en Torres (2015), quien en su tesis doctoral indaga el conocimiento un profesor de Primaria y uno de Secundaria por medio del Knowledge Quartet identificando 39 indicadores pertenecientes a las categorías (11 para fundamentos, 11 para transformación, 7 para conexión, 4 para contingencia y 6 para la categoría general), mostrando que el primero asocia proporcionalidad a una relación entre magnitudes mensurales y el segundo a un factor de cambio, además, el profesor de primaria no problematiza la definición de proporcionalidad, mientras el de Secundaria sí lo hace, haciendo que el estudiante construya su propia definición de proporcionalidad.

Una característica interesante de esta investigación es la identificación de seis indicadores que no se pueden categorizar en el modelo de Knowledge Quartet, pues no están reorganizados directamente con la proporcionalidad, ni con los procedimientos, ni con las situaciones de contingencia, estos indicadores son:

- Explicitación de los objetivos marcados para la clase y claridad en el camino a seguir para llegar al objetivo.
- Generación por parte del profesor de una situación de aula interactiva.
- Explicitación reiterada de lo que se hace.
- Discusión activa del problema en la pizarra, escribiendo explicita y continuamente.

- Recapitulación del trabajo de los estudiantes en relación con los objetos de la clase.

Aunque estos indicadores no están asociados directamente con el concepto de proporcionalidad, se considera que justamente la identificación de indicadores que no están en las categorías del modelo del profesor Rowland hace necesario ampliar dicho modelo, en este caso por medio del modelo MTSK elaborado en la Universidad de Huelva.

2.2 Estudio de caso y comprensión del conocimiento del profesor: Caracterización del estudio

El uso de un paradigma cualitativo interpretativo se recomienda cuando el objetivo de las investigaciones esté relacionado con la comprensión de un fenómeno social, como en este caso, pues en este paradigma se considera el conocimiento como una construcción social, y la realidad como realidad es un construcción múltiple, renunciando así a la idea de objetividad y neutralidad, además de considerar la relaciones inseparables entre el investigador y el objeto estudio. De este modo, se optó por el estudio de caso de tipo instrumental en términos de Stake (2005), usando instrumentos como la grabación de las sesiones, la observación no participante y el cuaderno de campo.

Otro elemento importante dentro de la caracterización del estudio es el uso de la estrategia top down - bottom up, conceptos pertenecientes la teoría dirigida y teoría generada por Grbich, (2007), el primer momento top-down (de arriba hacia abajo) se caracteriza por hacer una indagación teórica sobre el objeto a estudiar, y se reflexiona de cómo esta información puede aportar para el análisis de la información.

Posteriormente en el segundo momento bottom-up (de abajo hacia arriba), se caracteriza por establecer cómo los datos del estudio de caso pueden aportar en la construcción de cuerpos teóricos nuevos o complementarios a los ya existentes, por medio de esta propuesta se construye una teoría emergente de los datos cuyos fundamentos están en una recogida y análisis sistemáticos de los datos, por medio de una continua reflexión y análisis.

Finalmente, con respecto a la caracterización y justificación de la selección de la informante y el contexto a investigar, se puede comentar que la institución en la cual se recolectaron los datos pertenece al sistema de educación pública en Bogotá, el grupo en el cual se recolectó la información fue un curso de 35 estudiantes grado décimo cuyas edades oscilan entre 14 y 17 años.

Con respecto a la selección de la profesora informante se debió a varios motivos, entre estos una experiencia de 18 años, una constante y amplia formación académica, pues cuenta con formación pedagógica como normalista en educación (profesora de primaria), formación matemática como ingeniera civil y postgrados en matemática educativa. Además de ser reconocida por ser una profesora proactiva, propositiva y receptiva ante las propuestas de los demás compañeros profesores del área de matemáticas.

3. Recolección y Análisis de la Información

La recolección de datos se llevó por medio de la observación y grabación en vídeo de cuatro sesiones de clase, cada una de dos horas. Este proceso fue acompañado por la toma de notas de campo, evidencias fotográficas de los trabajos y soluciones de los estudiantes.

Inicialmente, se pudo caracterizar elementos conceptuales trabajados en cada una de las sesiones, los cuales se presentan a continuación en la tabla 5, donde se pudo identificar una propuesta de enseñanza asociada a contextos geométricos.

Sesión / Temática	***Aspectos específicos***
Sesión 1 / razón entre segmentos	Definición de razón Razón en contextos geométricos Búsqueda de segmentos desconocidos Despeje de ecuaciones
Sesión 2 / Proporcionalidad entre segmentos	Definición de proporcionad entre dos pares de segmentos Definición de segmentos homólogos Construcciones geométricas asociadas a la proporcionalidad entre segmentos
Sesión 3 / Teorema de Tales	Aplicación del teorema de Tales entre rectas transversales que cortan un par de rectas paralelas
Sesión 4 / Semejanza de triángulos	Resolución de triángulos semejantes

Tabla 7. Aspectos temáticos trabajados en las clases.

Una vez se recolectó la información se procedió a transcribirla cronológicamente, esta fue dividida en unidades de información, entendiéndolas como frases o argumentos para expresar una idea. Un primer momento se basó en establecer una asociación entre una unidad de información y un subdominio del modelo MTSK, como estrategia de sistematización cada una de las relaciones entre las unidades de información y los subdominios fueron consignados en tablas en Excel que mejorarían su filtro y organización.

Posteriormente, se organizaron las unidades teniendo como criterios de clasificación temáticas como razón entre segmentos, proporción entre dos pares de segmentos, teorema de Tales, segmentos homólogos, rectas paralelas, simplificación de fracciones, semejanza de triángulos y despeje de ecuaciones lineales.

Dado que el propósito de este primer momento fue tener una idea general de los conocimientos movilizados en las cuatro sesiones, se construyeron diferentes representaciones gráficas buscando dar cuenta de los conocimientos movilizados en la enseñanza de cada una de las temáticas mencionadas anteriormente, en la figura II se ejemplifica la gráfica relacionad a los conocimientos asociados a la razón ente segmentos.

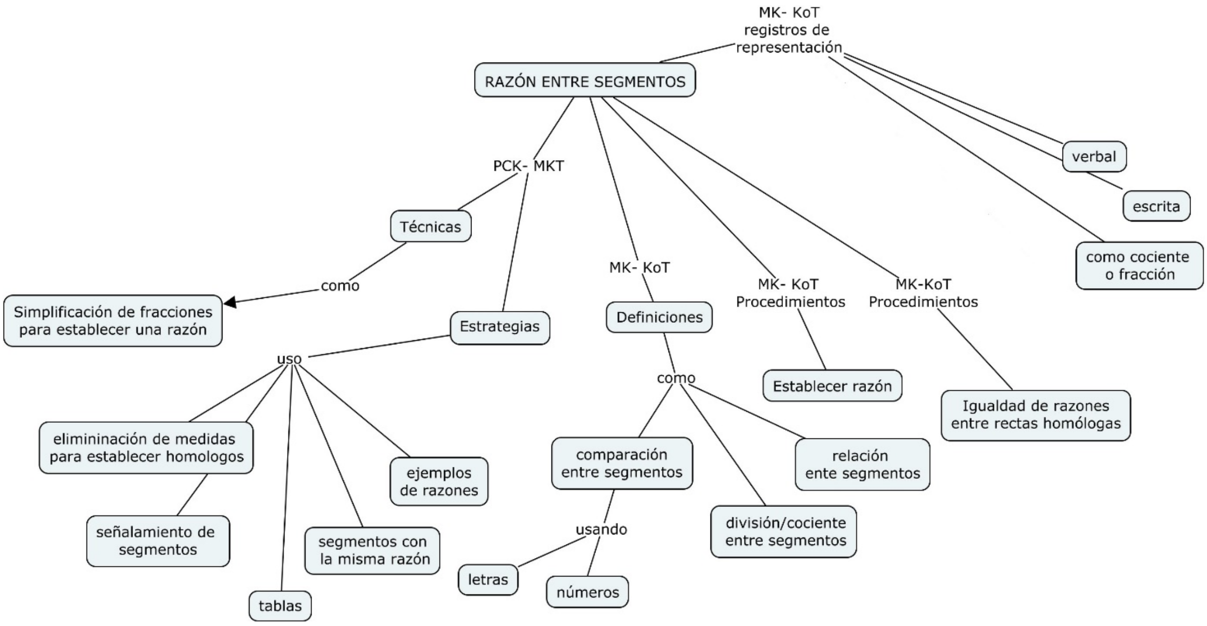


Figura II. Aproximación a MTSK asociado a la razón entre segmentos.

La construcción de estos esquemas gráficos aportó en la construcción de una primera visión panorámica de los datos, develando así su riqueza y complejidad. Al observar esta vastedad fue necesario establecer estrategias como la tabulación y organización de cada uno de los episodios a analizar, con diferentes criterios de clasificación, por ejemplo, a continuación, en la tabla 5 se muestra parte de la sistematización de las unidades de información de un episodio donde se la profesora hace una primera aproximación al significado de razón entre dos segmentos.

Dominio	***Subdom.***	**Cat.**	***Temática***	***Segmento***	***Comentario***
PCK	KMLS	Secuenciación	Razón entre números	(5,5) Ustedes habían manejado razones entre números enteros, pero cuando, pero cuando hablamos de segmentos debemos tener en cuenta la longitud del segmento.	Se hace referencia al uso de razones ente números enteros como un antecedente en la construcción de la razón entre dos segmentos
MK	KoT	Registro de represent	Razón entre segmentos	(7,7) Esta razón se puede escribir como 2 es a 4 o también se puede expresar como 2 : 4, esa es la razón.	Se ejemplifica diferentes formas (verbal y escrita) de presentar la razón entre dos segmentos.

PCK	KMT	Estrategias	Concepto de razón	(8,9) E: ¿siempre será a mitad? P: No, depende de la longitud del segmento, por ejemplo, yo puedo tener un par de segmentos, uno segmento AB 3 de unidades y el segmento CD de 5 unidades. ¿Cuál es la razón entre esos dos segmentos?	Se aclara que una razón no siempre es la mitad de un segmento a otro, haciendo uso de un ejemplo más trasparente para la construcción del concepto de razón.

Tabla 5. Dominios y subdominios del modelo MTSK

Una vez se hizo esta sistematización se procedió, como muestra la tabla 6 se a agrupar los indicadores asociados a una misma subcategoría del MTSK, en este caso KoT-propiedades. Esto como una estrategia de validar la consistencia entre las asociaciones entre unidades de información y subdominios del modelo.

Dominio	***Subdom.***	***Cat***	***Temática***	***Segmento***	***Comentario***
MK	KoT	Propiedades	Simplificación de fracciones	(138,138) En el primer punto les queda la razón 5 es a 3, esto no se puede simplificar porque ambos son impares y además no tienen divisores comunes	se menciona por cual propiedad no se puede simplificar una razón especifica
MK	KoT	Propiedades	Razón entre dos segmentos	(209,209) Además verificamos que si yo comparo un segmento con otro sobre la misma recta también será proporcional al homologo sobre la otra transversal	Propiedad de la razón por medio de rectas homologas
MK	KoT	Propiedades	Proporción entre dos pares de segmentos	(293,293) De esta forma sabemos que se pueden establecer las proporciones en diferente orden, pero ojo los segmentos tienen que ser correspondientes	Establecimiento de proporcionalidad entre segmentos correspondientes
MK	KoT	Propiedades	Congruencia entre ángulos	(304,304) Estos ángulos son iguales porque son correspondientes entre paralelas.	Congruencia de ángulos entre rectas paralelas.
MK	KoT	Propiedades	Semejanza de triángulos	(320,320) Sabemos que DE es paralela a BC, cuando se tienen dos líneas paralelas entones los triángulos son semejantes y si son semejantes entonces los lados son proporcionales	Propiedades de triángulos semejantes entre rectas paralelas (triángulos en posición de Tales)

Tabla 6. Dominios y subdominios del modelo MTSK

Una vez se tuvo esta información fue necesario establecer relaciones entre categorías por medio de mapas y esquemas visuales, como estrategias de comprensión del MTSK movilizado por la profesora.

4. Análisis de la Información

Con respecto a este momento, es necesario comentar que se usaron dos estrategias de validación del análisis, por un lado, se contó con la triangulación de expertos en este caso los fueron los participantes el SIDM y el director de la investigación; y por otro lado la triangulación de instrumentos, comparando la información obtenidas en las transcripciones, diario de campo, fotografías y entrevistas.

De acuerdo con análisis cronológico se identificaron 20 episodios, donde se encontraron 177 indicadores asociados a los diferentes subdominios del modelo MTSK, observando un predominio de categorías como el uso de las definiciones, propiedades y sus fundamentos, el uso de representaciones y procedimientos todos estos pertenecientes al KoT y también se observó el predominio del uso de estrategias, técnicas, tareas ejemplos pertenecientes al subdominio MKT, a continuación, en la tabla 7 se puede observar dicha distribución.

Subd.	Categoría	Cant. de Indicadores
KoT	Definiciones propiedades y sus fundamentos	41
	Procedimientos	35
	Fenomenología y sus aplicaciones	9
	Registros de representación	17
KSM	Conexión transversal	7
	Conexiones Auxiliares	7
KPM	Formas de validación y demostración	6
	Papel de los símbolos y el lenguaje formal	4
	Jerarquía y plan. Para la res. De problemas	4
	Práctica Matemática.	0
MKT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	33
	Recursos, materiales virtuales	7
KFLM	Fortalezas y dificultades	2
	Formas de interacción con el cont. Matemático	2
KMLS	Secuenciación con temas	3

Tabla 7. Distribución de los indicadores en las categorías del modelo MTSK.

Este análisis inicial aportó a tener una visón panorámica del conocimiento movilizado en las cuatro sesiones, para tener una comprensión más amplia fue necesario construir un análisis relaciones entre los subdominios, en cada una de los 20 episodios, además de incluir las relaciones entre las oportunidades e indicios, entendiendo los primeros como unidades que se pueden profundizar por medio de la sensibilidad teórica obtenida se puede y estos segundos como unidades de información donde su relación no es totalmente clara.

Inicialmente se encontraron 25 relaciones, a los cuales se sumaron 30 asociadas a indicios y oportunidades, para obtener un total de 55 relaciones de los diferentes subdominios del modelo MTSK en la enseñanza de la proporcionalidad, elementos que serán discutidos más ampliamente en el siguiente apartado.

5. Discusión de los resultados

Se considera que el modelo MTSK ha permitido sistematizar la información obtenida y además ha aportado en la comprensión de cómo está organizado el conocimiento movilizado por la profesora para la enseñanza de la proporcionalidad, a continuación, se abordará desde una perspectiva más específica se abordará desde cada uno de los subdominios del MTSK.

5.1 Con respecto al dominio de matemático (MK):

Este dominio está compuesto por tres subdominios, el conocimiento de los temas (KoT), contenido de la estructura de las matemáticas (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KMP), con respecto al KoT, se pudo observar, desde la primera sesión la necesidad y la importancia de la comprendan la definición de razón como una comparación entre dos cantidades de magnitud, a partir de una perspectiva geometría usando segmentos.

En la categoría donde se realizó un mayor énfasis fue en el conocimiento de las propiedades y la importancia de estas en la enseñanza de procedimientos, representaciones o formas de resolver un problema asociado a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica.

Especialmente se identificó el uso de las propiedades geométricas de rectas paralelas, triángulos y cuadriláteros que se pueden asociar a la proporcionalidad, la relación entre lados homólogos para establecer la proporcionalidad, el establecimiento de las longitudes entre transversales y paralelas estableciendo razones de diferentes formas, siempre y cuando los segmentos sean correspondientes y homólogos.

Asimismo, se observaron propiedades asociadas a la proporcionalidad y la semejanza, como por ejemplo la proporcionalidad entre los lados de dos triángulos como un criterio de la semejanza; además se determinaron fundamentos como los argumentos necesarios para establecer que en algunos casos es necesario dividir en ambos lados de la igualdad para despejar una incógnita.

Dado que las definiciones, propiedades y fundamentos mencionadas anteriormente están relacionadas con un abordaje de la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica, estaba preestablecido por la profesora, pues acuerdo de acuerdo a lo expresad por ella, una la perspectiva geométrica al ser de una naturaleza gráfica y al ser más susceptible a trabajar con material concreto como escuadras y lápiz, y por tanto es de mayor comprensión por parte de los estudiantes, planteamiento que evidencia también una relación entre KMT y KFLM.

Con respecto al conocimiento de la fenomenología asociado a la proporcionalidad, desde la primera sesión se pudo identificar conocimientos relacionados con el uso de situaciones del contexto real para establecer la proporcionalidad entre dos pares de segmentos usando el método de medios y extremos directamente para establecer una longitud desconocida, mostrando así la importancia que le da la profesora a la aplicación del conocimiento matemático en contextos reales con el propósito de dar un mayor significado en los estudiantes.

En relación con el conocimiento de los registros de representación se pudo evidenciar gran variedad, estos fueron modificadas y enriquecidas con el trascurso de las sesiones y de la preguntas y dificultades observadas por los estudiantes, característica que llevó una reflexión sobre la relación de esta categoría con el KMT y el KFLM.

Para dar cuenta del conocimiento de los registros de representación se clasificaron de acuerdo con sus características como lo muestra la tabla 8, es necesario comentar que estos se complementan y se relacionan, pues aportan en una comprensión más amplia de determinados contenidos asociados a la proporcionalidad.

Representaciones verbales	***Representaciones gráficas***	***Representaciones escritas***
Razón entre dos segmentos Proporcionalidad entre dos pares de segmentos	Como aquellas herramientas que aportan en la comprensión y resolución de un problema asociado a la proporcionalidad	Notacionales, como la representación escrita de segmentos por medio de expresiones como $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ y $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, la representación escrita de una razón como una división de segmentos y la representación escrita de rectas como $\vec{r}, \vec{s}$.

Tabla 8. Tipos de representaciones asociadas a la proporcionalidad en contextos geométricos

Con respecto al conocimientos de procedimientos como lo muestra la tabla 9 se identificaron también se identificaron tres grandes grupos relacionados entre sí, pues cada uno de estos aporta en la comprensión de propiedades asociadas a la proporcionalidad, en este caso desde un contexto geométricos.

Procedimientos de construcción	***Procedimientos algebraicos***	***Procedimientos de verificación***
Establecimiento de una razón Uso usando simplificación de fracciones Construcción de razones proporcionales dados cuatro segmentos Trazo de una recta paralela a una recta dada	Método de medios y extremos Despeje de ecuaciones lineales para verificar dos triángulos son semejantes con dos incógnitas	Confirmación de la relación de proporcionales entre segmentos homólogos Comprobación de la proporcionalidad entre lados de cuadriláteros

Búsqueda de un par de segmentos de tal forma que sean proporcionales con un par de segmentos dados.		

Tabla 9. Tipos de procedimientos asociadas a la proporcionalidad en contextos geométricos

Con respecto al conocimiento de la práctica matemática (KMP) se pudo identificar que desde la primera clase se hace uso de pruebas informales en geometría a través de la representación gráfica, la comprobación empírica del teorema de Thales y el uso del ejemplo para mostrar casos en los que no se cumple lo propuesto (contraejemplo), también se pudo identificar que la profesora hace uso implícito de las fases de resolución de problemas de Polya (entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás).

Finalmente, con respecto al conocimiento de la estructura da las matemáticas (KMS), en especial el conocimiento de conexiones transversales entre contenidos se pudo identificar que desde la primera clase el uso del concepto de ecuación como una igualdad, pues este es un concepto que fue necesario para la caracterización y comprensión de la proporcionalidad.

Por otro lado, se pudo identificar el despeje de ecuaciones para encontrar la longitud de un segmento, dados segmentos entre rectas paralelas, como una conexión auxiliar, pues, aunque hace parte de un conocimiento diferente a la proporcionalidad, el conocimiento sobre el despeje de ecuaciones es necesario para comprender y verificar representaciones, procedimiento y propiedades de la proporcionalidad entre dos pares de segmentos.

5.2 Con respecto al dominio didáctico de contenido (PCK)

Este dominio está compuesto por tres subdominios conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Con respecto al MKT, se puede comentar se pudieron identificar conocimientos relacionados con la resolución de problemas, en especial con el conocimiento de las fases de Polya, pues se considera que el uso de estas facilitó a la comprensión y la resolución de problemas asociados a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica.

Entre estas se destacan la comprensión de problemas en los que se pregunta por el valor de un segmento desconocido, ya sea de una recta cortada entre paralelas o un lado de una pareja de triángulos semejantes; la construcción de un plan, el cual en la mayoría de las ocasiones estaba relacionado con la elaboración de representaciones gráficas y establecimiento de segmentos homólogos, y posteriormente de ejecutar el plan por medio de las propiedades de la proporcionalidad, se hacía una validación o verificación del plan, el cual constaba en la verificación de la igualdad entre las dos razones generadas por dos pares de segmentos.

Con respecto al conocimiento movilizado sobre las fortalezas y debilidades asociadas a la proporcionalidad, se pudo observar el conocimiento sobre la capacidad de identificar la dificultad de nombrar una razón, de tal forma que supere la idea de fracción.

De igual forma, en el segundo episodio se observó el conocimiento de las dificultades (KFLM) cuando se involucran situaciones de medición que usan milímetros, pues, la profesora una vez identificó que los estudiantes construían razones con segmentos usando diferentes unidades de medidas (milímetros y centímetros), rápidamente aclaró que, para la construcción de razones, es necesario que estas tengan la misma unidad de medida. Para superar esta dificultad evidenciada en los estudiantes muestra diferentes ejemplos usando las mismas unidades de medida para longitud (milímetros, centímetros y metros); se considera que la superación de esta dificultad muestra una fuerte relación con el KMT (ejemplos) y el KoT (propiedades y registros de representación).

Para finalizar el análisis de este subdominio, se pudo encontrar que con respecto al conocimiento de los intereses y las expectativas de los estudiantes al abordar la proporcionalidad sólo se pudo identificar algunas oportunidades, se considera que esto, se debe a la metodología propuesta por la profesora, pues, en experiencias de aula como enseñanza por medio de proyectos o modelación de situaciones reales, se trabaja a partir de los intereses, expectativas y necesidades de los estudiantes.

Con respecto al segundo subdominio, KFLM, se evidenció el uso diferentes elementos de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad, como, el énfasis en la manipulación de material concreto haciendo sistematización y diferentes tipos de representación asociados a la proporcionalidad, la aproximación a los conceptos de razón y proporción de números enteros, para seguir con la interpretación, el cálculo y la comparación de porcentajes y la orientación y representación del espacio.

Sin embargo, no se tienen las evidencias suficientes para poder decir que la profesora conoce una teoría especifica de enseñanza asociada a la proporcionalidad, pues la propuesta de enseñanza se caracteriza por tener elementos de diferentes teorías, desde la tradicional haciendo uso de ejercicios hasta las propuestas de geometría activa, haciendo uso de material tangible e instrumentos de medida para longitudes.

Caso diferente sucede con la información encontrada con respecto al conocimiento de recursos materiales o virtuales asociados a la proporcionalidad, como lo muestra la tabla 10 se establecieron 4 tipos de conocimientos usados por la profesora.

Conocimiento del uso de instrumentos	***Conocimiento de ayudas audiovisuales***	***Conocimiento sobre el uso del lenguaje corporal***	***Conocimiento sobre potencialidades o limitantes***

Uso de escuadras para representar gráficamente problemas además de verificar propiedades asociadas a la proporcionalidad geométrica.	Uso de vídeos para ejemplificar problemas relacionados con la búsqueda de segmentos desconocidos usando la proporcionalidad.	Uso de señalamientos para facilitar en aprendizaje y la comprensión de los estudiantes de las propiedades, representaciones y procedimientos, por ejemplos	El conocimiento sobre las potencialidades y limitaciones de hoja en blanco para haces construcciones geométricas.

Tabla 10. Conocimientos de materiales asociadas a la proporcionalidad en contextos geométricos

Con respecto a la categoría del conocimiento de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, la mayoría de los indicadores están relacionados con el uso del ejemplo como estrategia para la enseñanza de propiedades, procedimientos y representaciones asociadas a la proporcionalidad geométrica.

Al clasificar los indicadores identificados se pudieron establecer tres grupos de indicadores, el primero está el uso del ejemplo, los cuales incluyen el uso de ejemplo para mostrar definiciones o propiedades, en el segundo grupo se encuentra el uso de los ejemplos para mostrar procedimientos y en el tercer grupo, se encuentra el uso del ejemplo como herramienta para clarificar dudas o superar dificultades (KFLM), entre ellos están indicadores como el uso de ejemplo más transparente en el cual la razón entre segmentos no sea el doble y el uso un ejemplo de proporcionalidad que puede ser solucionado de diferentes formas.

Finalmente, en el último grupo de esta categoría se pudieron identificar estrategias como preguntar por la relación entre dos razones para establecer la proporcionalidad entre estas, el uso de preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos, la evocación de conceptos construidos previamente (razón y proporción) como herramienta para resolver un problema, el uso de tablas de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos y el cambio de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes.

Se considera que el conocimiento de los ejemplos fue amplio y que está relacionado con el conocimiento matemático, especialmente con el KoT, además de las formas de validación y demostración (KPM), pues los ejemplos usados por la profesora por un lado fueron ideados especialmente para explicar propiedades como la igualdad de razones entre dos pares de segmentos, además de clarificar procedimientos específicos como la construcción de razones usando longitudes de diferentes tamaños y el despeje de ecuaciones.

5.3 Reflexiones finales

Con base a esta experiencia se quiso caracterizar el uso del MTSK como una propuesta potente de caracterización y comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, entendiendo el conocimiento como aquel que es puesto en juego; se considera que la presente experiencia aporta en la consolidación y fortalecimiento del MTSK como una herramienta de reflexión en y para la práctica del profesor de matemáticas y para la posible elaboración de propuestas de formación de profesores.

Con respecto al KoT, se pudo identificar que esta fue la categoría donde más se pudo obtener unidades de información, pues los procedimientos, propiedades y registros de representación se presentaron como los contenidos asociados a la proporcionalidad enseñados por medio de diferentes hilos conductores como por medio de prácticas matemáticas, ejemplos, estrategias, teorías de enseñanza y aprendizaje, conocimiento de fortalezas y dificultades, entre otros. Este primer elemento es importante, pues justamente en el conocimiento matemático, en especial el conocimiento de los temas gira el conocimiento especializado del profesor, pues este responde a la pregunta ¿qué se va a enseñar?

Al concluir sobre el KPM, se puede mencionar que, con base a la información analizada, la formalización del lenguaje matemático es un proceso a largo plazo, pues, pues aunque la clase fue grabada con estudiantes de 15 a 17 años, no se hizo uso lenguaje para demostraciones, simplemente se hizo uso de algunas notaciones formales para denotar conceptos, además de la verificación de propiedades por el uso de ejemplos, de igual forma se hace uso de ejemplos y contraejemplos como instrumentos de variación.

Asimismo, se puede concluir que los pocos indicadores relacionadas a las prácticas particulares del quehacer matemático, como la modelación, puede estar relacionada también con los pocos indicadores e indicios encontrados sobre teoría de enseñanza (KMT) asociados a la modelación y la resolución de problemas.

Al analizar el KSM se pudo concluir que esta categoría facilitó a ver cuál es la imagen que tiene la profesora sobre de la matemática como un conjunto de conceptos, procedimientos, representaciones y lenguajes, relacionados entre sí, además de mostrar desde la perspectiva de la profesora, cuál conocimiento se debe ver previamente (razón) para posteriormente llegar a otro (proporcionalidad).

Al observar el dominio de PCK, dentro de la propuesta del MTSK, teniendo en cuenta que este indaga en preguntas relacionadas al ¿cómo enseñar?, es decir ¿qué aspectos didácticos, pedagógicos, conceptuales y cognitivos se deben tener en cuenta para la enseñanza?, con respecto a la categoría del KMT, se puede mencionar que en este caso se pudo establecer diferentes relaciones entre esta categoría y especialmente el KoT, pues la claridad que poseía la profesora sobre propiedades, definiciones o registros de representaciones facilitó la puesta en juego de los conocimientos sobre la elaboración de ejemplos y la presentación de estrategias para superar dificultades presentadas por los estudiantes.

Con respecto a este dominio, también se puede concluir que la mayoría del conocimiento identificado está asociado a la categoría del KMT, especialmente a la subcategoría de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, exactamente 33 indicadores observados y 3 evocados. Por medio de estos indicadores se pudo determinar que el uso de los ejemplos y contraejemplos puede tener varios usos, entre estos para definir, para mostrar procedimientos, propiedades, además de clarificar dudas o superar dificultades.

Además, se puede concluir que, por medio del uso de ejemplos y contraejemplos, la profesora pudo demostrar su conocimiento sobre las potencialidades y limitaciones de estos, además del conocimiento de las propiedades, definiciones, prácticas matemáticas, además de un rico conjunto de representaciones (gestuales, verbales, numéricas, gráficas, icónicas, algebraicas, tabulares, en el plano cartesiano, entre otros).

De igual forma, se pudo concluir con respecto a las teorías de enseñanza, la identificación de mezcla entre teorías institucionales como la resolución de problema y las fases de Polya, y teorías personales producto de la experiencia, como por ejemplo, asumir que se debe iniciar por proporcionalidad desde una perspectiva geométrica debido a que esta se puede representanta de una forma naturalmente gráfica, elemento que facilita la comprensión de las características y propiedades como una propiedad entre cantidades de magnitudes.

Con respecto al conocimiento de los recursos y materiales virtuales, se pudo concluir que, de acuerdo a los indicadores, indicios y oportunidades identificadas, estos están relacionados con el conocimiento de los temas KoT, además del KFLM, en especial el conocimiento de las fortalezas y dificultades, en el sentido que es necesario que el profesor comprenda cómo determinado material puede potencializar o limitar la comprensión de las definiciones, propósitos, procedimientos o representaciones asociados al concepto de proporcionalidad, como por ejemplo el uso de escuadras y hojas blancas para las construcciones geométricas.

Al reflexionar sobre posibles conclusiones con respecto al KFLM, se puede comentar que se pudieron identificar indicadores asociados especialmente al conocimiento de las fortalezas y dificultades que pueden tener los estudiantes en el proceso de comprensión de la proporcionalidad, que como se comentó anteriormente está asociado al conocimiento de los temas como definiciones, propiedades, procedimientos y representaciones (KoT), además de los ejemplos, posibles materiales que puedan facilitar el aprendizaje (KMT).

De igual forma, se puede concluir que el conocimiento de las fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes con respecto a la proporcionalidad también está asociado a las teorías de aprendizaje (institucionales y/o personales), pues por medio de la caracterización de los indicadores se pudo apreciar que en el planteamiento de los ejemplos y representaciones presentadas por la profesora, ella verificaba que dicho ejemplo mostrara fácilmente la propiedad, el procedimiento o la definición que quería destacar, en caso que los estudiantes presentaran alguna dificultad de comprensión o confusión de la propiedad o definición a mostrar.

Por ejemplo, cuando la profesora identifica la dificultad cuando los estudiantes al suponen que la proporcionalidad es “ser el doble de” en vez de comprender la proporcionalidad como igualdad entre razones, cambia el ejemplo presentado, es decir, cambia las razones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ por las razones $\frac{3}{9}$ y $\frac{4}{12}$, mostrando así un ejemplo más transparente, además de mostrar un conocimiento asociado con las fortalezas y las debilidades (KFLM), y las propiedades (KoT) y función de sus teorías institucionales y personales de aprendizaje (MKT) sobre cómo se debería enseñar la definición del concepto de proporcionalidad entre segmentos.

Finalmente, con respecto al KMLS, se puede concluir que la mayoría de los indicadores identificados están asociados a los conocimientos sobre la secuenciación de temas anteriores y posteriores, en especial en cómo la proporcionalidad puede aportar en la comprensión de fenómenos de constantes de variación por medio de conceptos como función lineal y función afín.

Con respecto a los conocimientos previos que la profesora considera necesarios que los estudiantes ya deberían manejar, se destacaron el conocimiento de uso de razones enteras, simplificación de fracciones y la comprensión del concepto de razón para la aplicación del teorema de Thales; todos estos conocimientos previos están relacionados con definiciones, propiedades, procedimientos y representaciones, es decir con el conocimiento de los temas (KoT), mostrando así la relación entre el KMLS y el KoT.

De igual forma, se pudo concluir que con respecto al desarrollo conceptual o procedimental esperado se identificaron como oportunidades como la clasificación de triángulos, tratamiento algebraico de situaciones lineales, uso de instrumentos como la escuadra, simplificación de fracciones, estimación de la longitud de segmentos. Estos elementos que también están asociados a la categoría de temas, en especial los definiciones, propiedades, procedimientos y representaciones; evidenciando una vez más el rol protagónico que ha tenido el KoT en este estudio de caso, además de mostrar como los demás subdominios del MTSK se relacionan entre sí en función del conocimiento de los temas.

Referencias

Aguilar, A. (2015). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas.* Un estudio de caso (Tesis doctoral). Recuperado de: http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006.

Ausubel, D. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Azcárate, C., y Deulofeu, J. (*1990*). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Balderas, R., y Guerra, M. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Revista Educación Matemática, 26* (2), 7-32.

Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico.* (Tesis doctoral). México: CINVESTAV-IPN. Disponible en http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/93552/2001_Block_Tesis.pdf?sequence=1yisAllowed=y

Block, D. (2006). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. *19a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, (pp. 675-680)*. Montevideo: RELME. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/5601/1/BlockConocimientosAlme2006.pdf

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Caputo, L.y Soto, N. (2013). *Proporcionalidad directa e inversa: Dificultades en su aprendizaje. Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura* - UNNE. Disponible en http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2002/09-Educacion/D-008.pdf

Carrillo, J; Contreras, L; Climent, Montes, N; Escudero, D; y Flores E. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Paraninfo.

Ceballos, E. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja.* Documento de trabajo. disponible en http://www.bdigital.unal.edu.co/7758/

Chace, A. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus.* Reston, USA: Natural Council of Teachers of Mathematics.

Chemla, K. (2005). The interplay between proof and algorithm in 3rd century China: The operation as prescription of computation and the operation as argument. (editors) *Explanation and reasoning styles in mathematics,* pp. 123-145. Dordrecht, Holanda; Springer.

Dauben, J. (1998). Ancient Chinese mathematics: the Liu Hui al Jiu Zhang Suang Suan Shu vs Euclids Elements. *International Journal of Engineering Science, 36* (12-14) 1339-1359.

Escudero-Ávila, D. I. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456.

Euclides (1991). *Elementos, Libros V-IX*, Editorial Gredos, Madrid, 1991.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30* (1), 129-142.

Fiol, L. Fortuny, M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid.: Síntesis.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de*

Matemáticas (MTSK) (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Holand: Reidel, Dordrecht

Godino, J.; Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad para maestros*. Proyecto Edumat Maestros. España.

Grbich, C. (2007). *Qualitative Data Analysis: An Introduction*. Thousand. Oaks: Sage Publications.

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA* (7), 3-42. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1146/1/80_Guacaneme2002Una_RevEMA.pdf

Guairín, J. Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Revista Suma 62*, 5-48. Ddisponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/62/SUMA_62.pdf tu

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert y *M. Behr* (Eds.), *Number concepts andoperations in the Middle Grades 2.* (pp. 198-219). Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics

Hill, H, Ball, D, y Schilling, S (2008). Content Knowledge: Conceptualizing and measuring teachers topic-tpecific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400.Disponibe en https://www.jstor.org/stable/40539304

Kangshen, S. (1999). The nine chapters on the mathematical art. Beijing, China: Oxford University Press.

Khoury, H. (2002). Classroom challenge. exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. short. In: B. Litwiller; G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, p. 100 - 102.

Karplus, R (1983). "Proportional reasoning of early adolescents". In: R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Linán, M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria*. Tesis Doctoral Universidad de Huelva.

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/10944/Conocimiento_especializa do.pdf?sequence=4

Muñoz, M. Contreras, L. Carrillo J. Rojas, N. Montes, M. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española. 18, (3), 589-605. Disponible en http://hdl.handle.net/11441/51501

Nehm, R. y Ridgway, J. (2011). What do experts and novices “see” in evolutionary problems? *Evolution: Education and Outreach, 4*(4), 666-679. doi:10.1007/s12052-011-0369-7.

Oller, A. (2012). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid. Disponible en https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/1118/1/TESIS196-120828.pdf

Rapetti, V. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Revista suma,* (44). 65-77. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/44/065-070.pdf

Rashed, R. (1999). *Al- Khayyam mathematicien*. Paris, Francia: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf

Rivas, A., Godino, J. y. Castro, W. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Boletim de Educação Matemática*. 26. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574008

Rivas, M., Rondón, Y; Triviño, L. (2017). Conocimiento de futuros profesores de matemática sobre proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Rommevaux, S. (1999). *La proportionalté numérique dans le libre VII del Éléments de Campanus*. Revue d’Histoire des Mathématiques, 5 (1), 83-126.

Ruiz, M. (2006). La proporcionalidad como objeto de enseñanza del docente- *Memorias .I REPEM* La Pampa, Argentina, Disponible en http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Relatos/CRE12.pdf

Rodríguez, A., y Pérez, J. (2003). *La noción de proporcionalidad*. México: Ethos Educativos.

Solomon, A. (1987). Proportion: interrelations and meaning in mathematics. *FLM. Montreal*. (7) 1, 14-22.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realist approach. In Carpenter, T.P.; Fennema, E. y Romberg, T.A. (eds), Rational Numbers: An integration of research. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 289-325.

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, Morata.

Torres, E. (2015). *Conocimiento del profesor en la práctica: la enseñanza de la proporcionalidad*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Disponible en https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2015/hdl_10803_290741/etm1de1.pdf

Torres, E; y Deulofeu, J. (2018). *La enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en el paso de la educación primaria a la secundaria: el caso de Ainoa. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (99). 105-126. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/12902/

Vasco, D. L. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario* (Tesis doctoral). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11901

Van de Walle, J. A. (2001). Elementary and middle school mathematics. New York: Longman.

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander, España: SEIEM.

Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales, *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, (10), 2, 133-170. Disponible en http://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf

Vega, B. (2006). La proporcionalidad en el análisis didáctico de un libro de texto. *Revista educación matemática.* (21). Universidad Nacional de Córdoba. 1-13. Disponible en http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_21/pro_4.pdf

Christian Camilo Fuentes Leal: Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Magíster en Educación- Énfasis Educación Matemática por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Máster en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas por la Universidad Internacional de Andalucía - Universidad de Huelva, Doctorando en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y de las Matemáticas por la Universidad de Huelva.

Artículo: “Extractivismo y función lineal: Una experiencia en educación matemática desde una aproximación sociopolítica” Publicado en *Revista Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. (104), pp. 119-133. Julio 2020. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/104/Experaula_02.pdf
Artículo: “Articulación de la etnomatemática con las propuestas decoloniales: Una invitación a la re-existencia” Publicado en *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 12 (3), pp. 59-82. Julio 2020.
Disponible https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/524/474 cfuentesl@educacionbogota.edu.co, Bogotá, Colombia, Cod. Postal 110871. ORCID: 0000-0001-8582-8920