UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 38. Junio 2014
páginas 135-141

El rincón de los problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Papiroflexia y elementos para construir indicadores sobre creación de problemas

Problema

Pedro tiene una hoja rectangular de papel ABCD, de 20 cm de largo por 12 cm de ancho, como se ilustra en la figura.

Pedro dobla la hoja de modo que el vértice C se ubica en el lado AD y el lado CD se superpone sobre el lado AD. ¿Es verdad que el área del trapecio que se visualiza es el 75% del área del rectángulo ABCD? ¿Por qué?

Si bien es cierto que es positivo crear un problema mediante variaciones a un problema dado, siendo tales variaciones modificaciones cuantitativas a la información dada en el problema, consideramos que crear un nuevo problema haciendo modificaciones cualitativas y cuantitativas a tal información, revela una mayor creatividad en ese acto creativo y puede adoptarse como un criterio para construir algunos indicadores de la capacidad de crear problemas.

Parece claro lo que se entiende por *modificaciones cuantitativas* a la información dada en el problema (cambiar las dimensiones de las figuras, los precios de los productos, las velocidades de los móviles, etc., según lo que se considere en el problema dado). Cabe aclarar lo que estamos entendiendo por *modificaciones cualitativas* a la información dada. Como su nombre lo indica, se refiere a las cualidades de los objetos intervinientes en la información del problema dado; es decir, a cambios de objetos y a cambios en las relaciones entre los objetos. En ambos casos, estas modificaciones en la información conllevan modificaciones en los requerimientos – pueden ser requerimientos muy evidentes o muy sutiles – y éste es otro criterio a tener en cuenta en la construcción de indicadores de la capacidad de crear problemas.

Conscientes de la importancia de introducir la creación de problemas en la formación de los docentes de primaria y del uso de material didáctico manipulable en esa actividad creadora, iniciamos experiencias didácticas en esa línea de trabajo, recurriendo a la papiroflexia y a la geometría elemental.

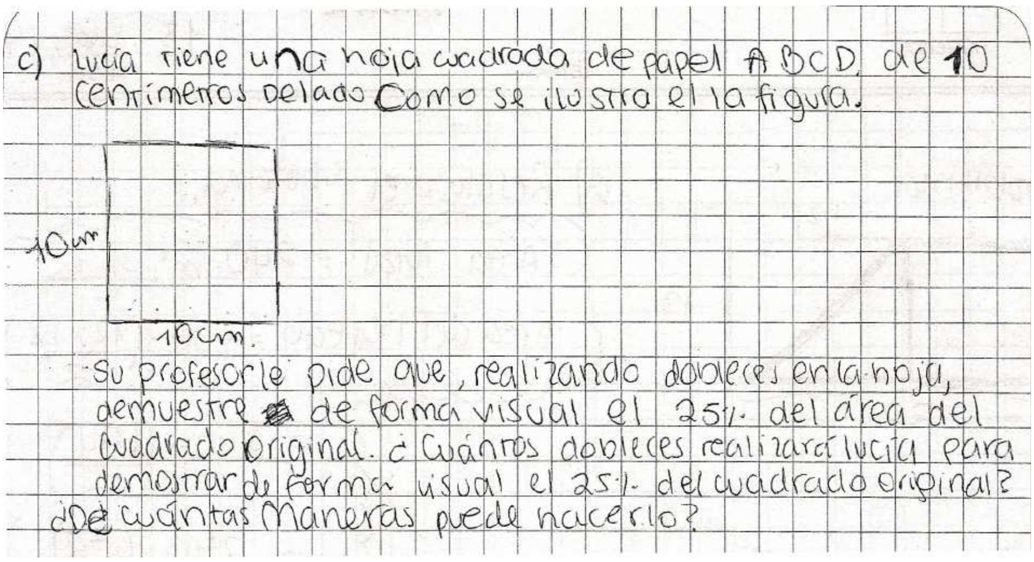
Hacer dobleces en una hoja o en una tira de papel puede brindar recursos valiosos para ilustrar propiedades de figuras geométricas planas y para crear problemas en este campo. El problema con el que iniciamos este artículo fue creado para ser usado como punto de referencia para la creación de otros problemas de geometría básica. Fue propuesto con ese fin a 23 alumnas del primer ciclo universitario de formación de docentes de educación primaria o inicial, en el marco del capítulo de Elementos de Geometría, del curso de Matemática. Concretamente, se pidió:

a) Resolver el problema
b) Identificar en el problema: Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático[1]
c) Crear un nuevo problema, modificando uno o más de los elementos del problema dado, identificados en (b)
d) Resolver el problema creado.

Los resultados fueron satisfactorios, pues el problema no solo fue resuelto correctamente por 19 de las alumnas, sino que 21 de ellas crearon nuevos problemas y 14 de estas lo hicieron introduciendo modificaciones relacionales a la información dada en el problema original (las otras 7 hicieron solo modificaciones cuantitativas) con las consiguientes modificaciones a los requerimientos.

A continuación reproducimos algunos de los problemas creados por las alumnas, con modificaciones cualitativas a la información dada en el problema original. Sobre los detalles de redacción nos ocuparemos posteriormente. Por ahora, ponemos la atención en las modificaciones cualitativas en relación al problema dado y a sus potencialidades didácticas y matemáticas.

Problema de la alumna 7



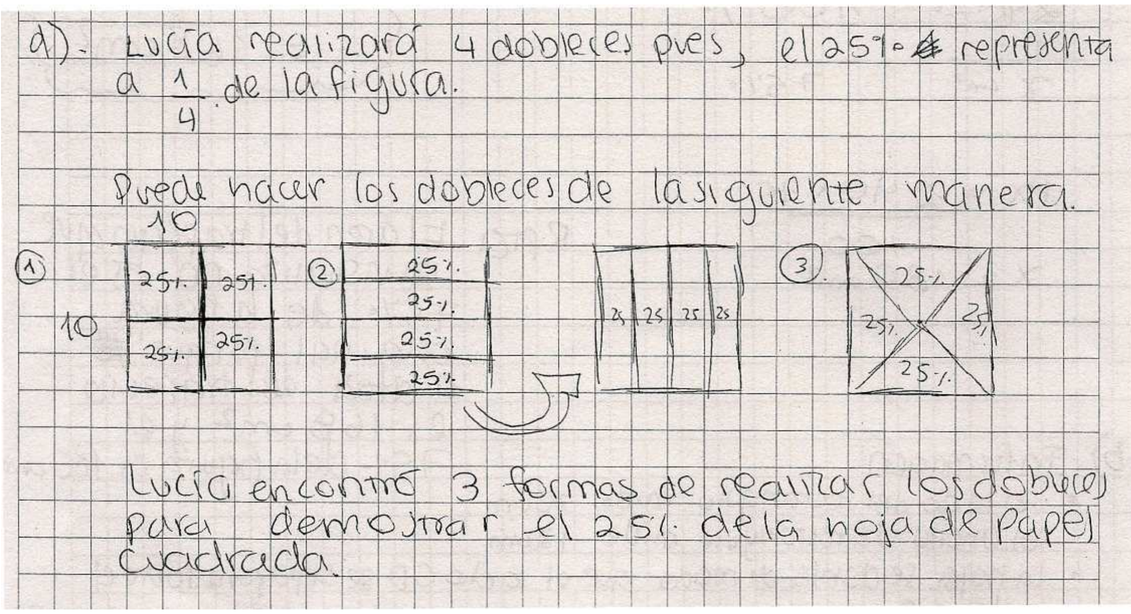
(*Lucía tiene una hoja cuadrada de papel ABCD, de 10 centímetros de lado como se ilustra en la figura. Su profesor le pide que realizando dobleces en la hoja demuestre de forma visual el 25% del área del cuadrado original. ¿Cuántos dobleces realizará Lucía para demostrar de forma visual el 25% del cuadrado original?*)

[1] Sobre estos elementos de un problema nos referimos ampliamente en nuestro artículo del No 34 de UNIÓN (*Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady)*

Las modificaciones cualitativas en relación al problema original se evidencian al no partir del mismo rectángulo sino de un caso particular interesante: un cuadrado con dimensiones asignadas por la alumna y al no mostrar un doblez sino pedir hacer dobleces como parte del requerimiento, lo cual es cualitativamente diferente en relación al problema original.

Es un problema sencillo, que permite el uso de la figura cuadrado, de formas de dividir la región cuadrada en cuatro partes con la misma área, de relacionar la cuarta parte de algo con su 25%, etc.

En su solución, la alumna mostró las tres maneras más "naturales" de hacer los dobleces.

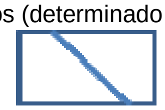


Lo interesante del problema, es que presenta no solo un reto alcanzable por niños de primaria, sino también que suscita preguntarse si las tres formas "naturales" de hacer los dobleces para mostrar una figura con el 25% del área del cuadrado original, son las únicas. Ante esta pregunta, con otras alumnas del curso, encontramos dos formas más. Esperamos haber despertado la curiosidad del lector y que encuentre estas maneras de hacer los dobleces.

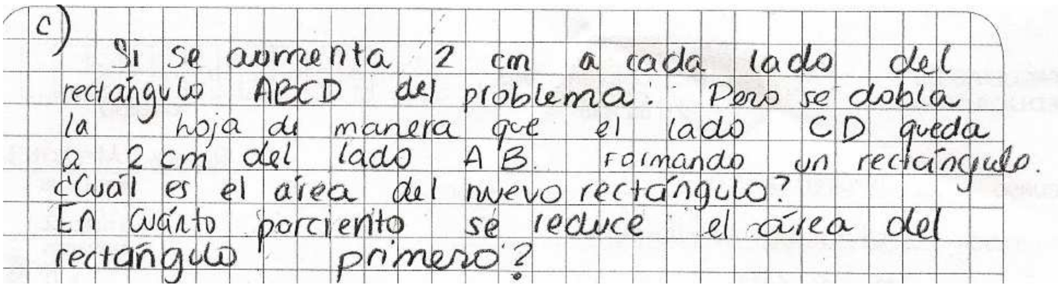
Por otra parte, con la misma idea, se podría pedir formas de hacer un solo doblez en la hoja cuadrada para mostrar dos figuras con la misma área. Es una ocasión para evidenciar que hay problemas con infinitas soluciones.

Es muy interesante notar que usando para un rectángulo el criterio para hacer el doblez en la hoja cuadrada y obtener infinitos pares de figuras con la misma área, resulta que el problema propuesto por la alumna también tiene infinitas soluciones[2].

[2] Basta ver que en el rectángulo cuya área es la mitad del área del cuadrado, mediante un doblez se puede formar dos trapecios rectángulos de la misma área y hay infinitos de estos pares de trapecios, según la ubicación del lado común de éstos (determinado por el doblez, que no es segmento paralelo a los lados del rectángulo)



Problema de la alumna 21 (PA 21)

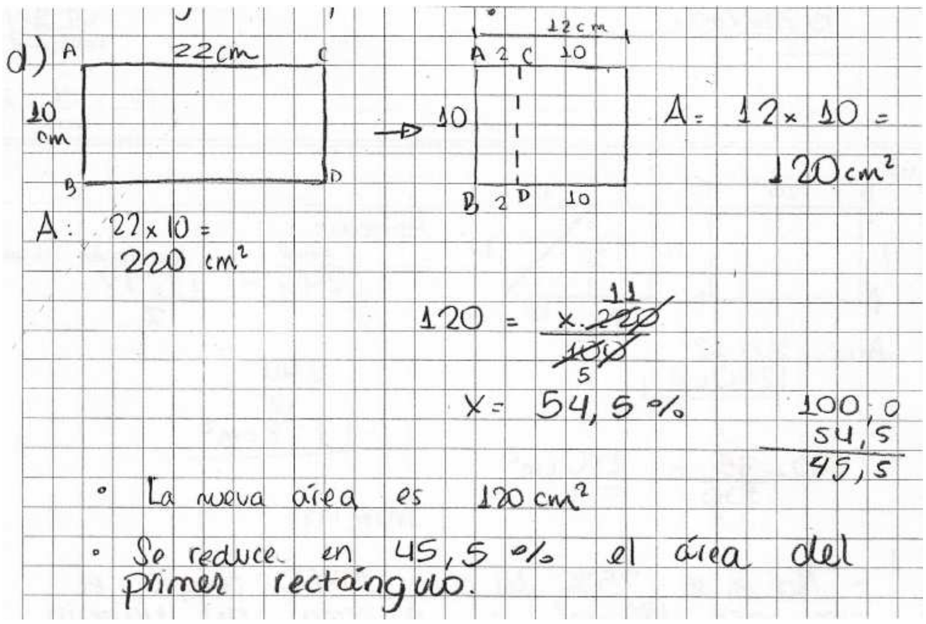

c) Si se aumenta 2 cm a cada lado del rectángulo ABCD del problema. Pero se dobla la hoja de manera que el lado CD queda a 2 cm del lado AB formando un rectángulo. ¿Cuál es el área del nuevo rectángulo? En cuánto porciento se reduce el área del rectángulo primero?

(*Si se aumenta 2cm a cada lado del rectángulo ABCD del problema. Pero se dobla la hoja de manera que el lado CD queda a 2cm del lado AB formando un rectángulo. ¿Cuál es el área del nuevo rectángulo?*

En cuánto por ciento se reduce el área del rectángulo primero?)

El problema se inicia con una modificación cuantitativa al problema dado (incrementar la longitud de cada lado del rectángulo en 2 cm) y continúa con modificaciones cualitativas al considerar un nuevo doblez, con especificaciones diferentes a las del problema original. Si bien el incremento en las longitudes de los lados no se podrá hacer físicamente al tener solo la hoja rectangular dada, el problema presenta un ejercicio de abstracción, pues lleva implícito un supuesto nuevo sobre las dimensiones de la hoja recibida según el problema original. En el problema también está implícito un concepto intuitivo de distancia entre dos segmentos paralelos ("el lado CD queda a 2cm del lado AB, formando un rectángulo")

En su solución, la alumna optó por simplificar más el problema, aunque no hizo la modificación correspondiente en el enunciado que escribió. Así, el incremento de 2 cm no lo hizo a todos los lados del rectángulo dado sino solo a los dos lados más largos, como lo ilustra en su solución.



Siendo un problema bastante sencillo, el tipo de doblez que considera, puede usarse para proponer problemas de dificultad mayor, como preguntar a qué distancia deben ubicarse, mediante un doblez, los vértices C y D de los vértices A y B respectivamente para que el rectángulo ABCD que se visualiza con los vértices C y D en la nueva posición, sea un rectángulo semejante al rectángulo original. Este problema permite poner énfasis en que no todos los rectángulos son semejantes. Con el propósito de simplificar los cálculos y priorizar el enfoque geométrico, sería preferible considerar un rectángulo inicial de 10 cm por 25 cm.

Problema de la alumna 22 (PA 22)

c) Yo compró ingredientes para hacer una pizza en forma de un circulo de radio 19 cm, pero cuando llegó a mi casa el radio del molde circular que voy a usar para hacer la pizza es 10 cm. ¿Cuanto porcentaje de los ingredientes que he comprado utilizaré?

(*Yo compré ingredientes para hacer una pizza en forma de un círculo de radio 19 cm, pero cuando llegué a mi casa el radio del molde circular que voy a usar para hacer la pizza es 10 cm. ¿Cuánto porcentaje de los ingredientes que he comprado utilizaré?*)

Como es evidente, en este problema no solo hay modificaciones cualitativas en la información, pues los objetos geométricos son círculos, sino que – manteniendo el carácter extra matemático del contexto del problema – también hay modificación de la situación en tal contexto, pues ya no se trata de dobleces en una hoja de papel, sino de la cantidad de ingredientes que se use en la preparación de una pizza, según el tamaño de ésta. Es una situación doméstica sencilla que permite relacionar áreas de círculos y porcentajes. Hay un supuesto implícito que la cantidad de ingredientes que se usa en la preparación de una pizza es proporcional al tamaño de ésta, identificada con el área de la superficie plana del molde que se use, independientemente de la forma que tenga. La solución de la alumna está bien encaminada, dentro de los supuestos comentados en el párrafo anterior. Se destaca el uso de π sin usar una aproximación decimal y el uso de un planteamiento algebraico para encontrar el porcentaje buscado.

a)

$\pi r^2 = Ao$ $\qquad$ $\pi r^2 = Ao$

$\pi (19)^2 = Ao$ $\qquad$ $\pi (10)^2 = Ao$

$361\pi = Ao$ $\qquad$ $100\pi = Ao$

⇓ cantidad de ingredientes que compré $\qquad$ ⇓ cantidad de ingredientes que usaré

$$\frac{x}{100}(361\cancel{\pi}) = 100\cancel{\pi}$$

$$x = 7,34\ \%$$

→ porcentaje que utilizaré

Lamentablemente su resultado es incorrecto por confundir un paréntesis de apertura con el número 1 (confunde (361 con 1361 al hacer la división final, usando calculadora). Esto muestra una vez más la importancia de reflexionar sobre el resultado que se obtenga al resolver un problema. En este caso, es posible usar un criterio de aproximación, aun sin pretender mayor exactitud. No es difícil advertir que 100 π es un poco menos que la tercera parte de 361 π; o sea un poco menos del 33% de 361 π. Obtener el resultado 7,34%, bastante alejado de esta aproximación "gruesa", como consecuencia de los cálculos hechos, debería llevar a sospecha de error y a una revisión de los mismos.

Con la situación descrita en el problema creado podrían hacerse otros requerimientos como examinar el número de pizzas enteras que se podrían preparar con los ingredientes comprados, usando el molde de 10 cm de radio.

Comentarios generales

1. La experiencia realizada en el curso muestra una vez más que las alumnas –como muchos otros profesores en formación o en ejercicio –tienen un gran potencial de la capacidad de crear problemas de matemáticas y que es tarea de los formadores de formadores estimular el desarrollo de tal capacidad. Una forma de hacerlo es introduciendo explícitamente la creación de problemas en los cursos de matemáticas de los planes de estudio, haciendo críticas constructivas a los problemas creados por los participantes y mostrando las potencialidades didácticas y matemáticas que tienen tales problemas. Usar material manipulable contribuye a crear un ambiente lúdico mientras se crea problemas.
2. No podemos dejar de mencionar la importancia de formular claramente el problema, con una redacción adecuada, que además de la corrección gramatical tenga un conveniente equilibrio entre la expresión matemática apropiada y la sencillez de las expresiones verbales para facilitar la comprensión. Esta es una capacidad complementaria a la de crear problemas, que lamentablemente no siempre la tienen suficientemente desarrollada los profesores o futuros profesores y es un gran reto para los formadores de formadores. Hemos desarrollado experiencias positivas de hacer reformulaciones de los problemas creados al hacer la socialización de los problemas creados.

   Por ejemplo, es muy importante hacer distinguir claramente la diferencia entre mostrar y demostrar. Lo pertinente en el caso del PA7 es mostrar.
3. Sería muy interesante establecer indicadores de la capacidad de crear problemas de matemáticas; sin embargo las dificultades para obtenerlos recuerdan las dificultades y la diversidad de puntos de vista en torno a la medición de la creatividad y en particular de la creatividad matemática. Numerosos autores han hecho aportes en este campo, con diversos puntos de vista y constituyen puntos de referencia para indagar sobre la construcción de indicadores de la capacidad de crear problemas. Algunos de ellos consideran en sus tests sobre creatividad matemática, ítems que tienen gran relación con la creación de problemas. Gontijo, C. H. y Fleith, D. S. hacen referencias interesantes en el capítulo "Avaliação da creatividade em matemática", que escriben en el libro *Medidas de creatividade* (Alencar, E. M. L. S. y colaboradores, 2010)
4. Considerando solamente una de las formas de crear problemas, que es mediante variaciones de un problema dado, podríamos decir que las modificaciones cualitativas a la información de tal problema, consistentes con los

correspondientes requerimientos, revelan una mayor capacidad de creación de problemas que el hacer modificaciones meramente cuantitativas. Sin embargo esto es relativo, pues, por ejemplo, si ante el pedido de crear un problema a partir del ejercicio de calcular 2^3, un alumno propone el problema de hallar un valor aproximado de $2^{3,2} - 2^3$, estamos ante una modificación cuantitativa pero ante un problema de una gran complejidad, en relación al ejercicio original. Mayor aún, si se pide un valor aproximado de $2^\pi - 2^3$. ¿Cómo considerar la capacidad de crear problemas de alguien que hace esos cambios cuantitativos al problema original? Ciertamente, también depende de la formación previa de quien crea el problema.

El tema es desafiante para educadores matemáticos y una invitación a los psicólogos educacionales a involucrarse en esta investigación.