

## Errores, actitud y desempeño matemático del ingresante universitario

**Graciela M. Dodera, Gustavo Bender, Ester A. Burroni, María del Pilar Lázaro**

Fecha de recepción: 9/05/2012

Fecha de aceptación: 12/09/2013

<b>Resumen</b>	<p>Para conocer los errores matemáticos típicos más frecuentes del ingresante universitario y analizar su vinculación con la actitud afectiva hacia la matemática y su rendimiento, se administró una Prueba Diagnóstica a 405 alumnos de Ciencias de la Salud que cursan la asignatura Matemática en el primer año de la Universidad de Buenos Aires. Los alumnos tienen dificultades para: representar números racionales en la recta real (pero no para comparar fracciones); especializar una función; aplicar propiedades de la potenciación; plantear matemáticamente enunciados de problemas; y en menor medida, para resolver ecuaciones lineales. Se observó además que existe correlación entre el desempeño en el primer parcial de la asignatura y el desempeño en la Prueba Diagnóstica, la opinión del nivel matemático de la escuela, y la representación que tiene de la matemática.</p> <p><b>Palabras clave:</b> Errores matemáticos, actitud afectivo.</p>
<b>Abstract</b>	<p>In order to know typical and most frequent mathematical errors of the student entering the University and analyze its linkage with the emotional attitude toward mathematics and their performance, a diagnostic test was administered to 405 students of Health Sciences attending the mathematics course in the first year of the University of Buenos Aires. Students have difficulties to: represent rational numbers on the real line (but not to compare fractions); evaluate a function; apply properties of powers; give the equation that models a problem; and to a lesser extent, for solving linear equations. It was also noted that there is a correlation between the performance in the first part of the course, the performance in the diagnostic test, the opinion of the mathematical level of the school, and the representation that students have about mathematics.</p> <p><b>Keywords:</b> mathematical errors, emotional attitude.</p>
<b>Resumo</b>	<p>A fim de conhecer os típicos e mais freqüentes erros matemáticos do alunos que entra para a Universidade e analisar a sua ligação com a atitude emocional em relação à matemática e seu desempenho, um teste de diagnóstico foi administrado a 405 estudantes de Ciências da Saúde matriculados em o cursos de matemática da primeiro ano da Universidade de Buenos Aires. Os alunos têm dificuldades para: representar números racionais na reta real (mas não para comparar frações); avaliar uma função; aplicar as propriedades das potências; dar a equação que modela um problema; e em menor medida, para resolver as equações lineares. Verificou-se também que existe uma correlação entre o desempenho na primeira parte do curso, o desempenho no teste de diagnóstico, o parecer do nível matemático da escola, e as representações que os alunos têm sobre a matemática.</p> <p><b>Palavras-chave:</b> erros matemáticos, atitude emocional.</p>

## Introducción

Los alumnos que estudian matemáticas muestran obstáculos de naturaleza diferente que dificultan el aprendizaje: esos obstáculos tienen que ver con la complejidad de los conceptos, con los procesos de pensamiento deductivo formal de la matemática, con los procesos de enseñanza, con el desarrollo cognitivo y con la actitud afectiva y emocional de los alumnos hacia la matemática. Según Socas (1997) 'las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores'.

El aspecto conceptual y el operacional de los objetos matemáticos y el lenguaje propio de la matemática ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de la disciplina. El pensamiento lógico está presente en todas las actividades, aún si se utilizan métodos intuitivos para la demostración de la veracidad de las relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos.

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza están vinculadas con la institución educativa, el currículo de matemática y la planificación de actividades. Para favorecer el desarrollo de los conceptos matemáticos y la adquisición habilidades para el desarrollo de las capacidades matemáticas que definen la competencia del alumno se deben tener presente los saberes previos, el nivel de abstracción requerido, la naturaleza lógica de la matemática y los estadios del desarrollo intelectual.

También hay que considerar que la necesidad de aprender matemática o ciencias naturales en un contexto institucional produce en los alumnos sentimientos dispares -tensión, ansiedad y miedo al fracaso, a la equivocación- que generan bloqueos de origen afectivo y rechazo hacia la disciplina que repercuten en el desempeño académico. Estos sentimientos no pueden desligarse de una representación social de las ciencias como difíciles, 'aptas para unos pocos' y otros estigmas que juegan un papel importante para el alumno ingresante a la hora de posicionarse frente al estudio de estas materias.

Desde la perspectiva de que los errores forman parte de las producciones de los alumnos y que lo que aprenden está sujeto a cómo se involucran en las actividades matemáticas, el desempeño de los estudiantes está condicionado por las actitudes y por los posicionamientos estratégicos que eligen frente a una materia que en general desconocen.

Nuestra inquietud es reconocer los errores matemáticos más frecuentes que presentan los alumnos ingresantes a la universidad, la actitud afectiva hacia la matemática y la autovaloración de los saberes previos en esta disciplina, factores que consideramos tienen alta influencia en el éxito/fracaso de la dificultosa transición nivel medio-universidad.

Para precisar la noción de error usamos a Godino (Godino, 2003, p. 73) cuando dice que 'Hablamos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar'.

La mayoría de los autores consideran que los errores en matemática no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas

personales que los alumnos emplean en la resolución de situaciones problemáticas.

Rico (1995) considera a Wiener como el fundador en 1922 de la investigación didáctica orientada al estudio de errores. Según Engler (2004) la difusión de los trabajos sobre la determinación de errores en matemática comienza en 1917 a través de Thorndike; posteriormente los estudios se fueron orientando según las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes y por el currículo matemático. Borasi presenta 'un abordaje más amplio sobre las posibilidades de la utilización del análisis de errores en el proceso de enseñanza-aprendizaje... incorporando ideas de Kuhn, Lakatos, Piaget y Vergnaud' (Cury, 1994, p. 84).

Si bien en la didáctica tradicional se considera al error como punitivo, a partir de la década del 60, desde la óptica constructivista el error ocupa un lugar ponderado: para el alumno equivocarse es una posibilidad de aprendizaje, mientras que para el profesor los errores son una fuente de información acerca de lo que han aprendido los estudiantes y de cómo lo han aprendido (Borasi, 1994).

Brousseau, Davis y Werther (1986) señalan que los errores son frecuentemente el resultado de la aplicación de algún procedimiento no correcto y generalmente sistematizado; suelen ser la respuesta a nociones inadecuadas sobre la matemática. Charnay (1994) afirma que las producciones de los alumnos nos informan sobre su 'estado del saber. En particular, ciertas producciones erróneas (sobre todo si ellas persisten) no corresponden a una ausencia del saber, sino más bien a una manera de conocer'. También afirma que 'considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos'. Socas (1997) sostiene que 'el error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en un alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste'.

Dentro de la línea de trabajos relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican y clasificación de los mismos, se pueden citar a Astolfi (1999), Rico (1995), Movshovitz-Hadar (1987), Davis (1984), Booth (1984), Radatz (1979), entre otros.

En el presente trabajo de investigación para clasificar los errores matemáticos que cometen los alumnos ingresantes a la universidad se adopta la categorización elaborada por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). Dicha clasificación consta de seis categorías, que se describen a continuación:

1. Datos mal utilizados: diferencia entre datos que aparecen en una situación y el tratamiento que da el alumno. Casos en que añade datos extraños, olvida algún dato para la solución, contesta algo que no es necesario, asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado, utiliza valores numéricos de una variable para otra distinta y/o hace una lectura incorrecta del enunciado.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje: traducción incorrecta de un lenguaje a otro lenguaje simbólico distinto. Casos en que expresa una relación distinta a la enunciada, designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del

usual operando con él según las reglas usuales y/o interpreta incorrectamente símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

3. Inferencias no válidas lógicamente: falacias en el razonamiento. Casos en que concluye un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente y/o realiza saltos injustificados en una inferencia lógica.
4. Teoremas o definiciones deformados: deformación de un principio, regla o definición. Casos en que aplica un teorema sin las condiciones necesarias, aplica mal una propiedad, realiza una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula conocidos.
5. Falta de verificación de la solución: No verificación de los resultados parciales o totales. Casos en que no verifica la solución en la pregunta planteada.
6. Errores técnicos: errores de cálculo, errores de transcripción de datos, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y/o errores que se derivan de la ejecución de algoritmos básicos.

### Descripción de la experiencia

La investigación consiste en un estudio cuasi experimental, correlacional, de tipo transversal y, en cierto modo longitudinal dado que se identifican individualmente los estudiantes participantes.

Objetivos: (a) medir saberes previos a través de los errores matemáticos típicos y más frecuentes del ingresante a la universidad; (b) conocer la valoración que el alumno otorga al nivel matemático brindado por la escuela media; (c) conocer la valoración que tiene el estudiante sobre la utilidad de la matemática en su futura carrera; (d) conocer la representación que el alumno tiene de la palabra 'matemática'; (e) establecer si existe asociación entre la representación matemática, los saberes previos y el desempeño académico en la asignatura Matemática del Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires (CBC-UBA).

Muestra: 405 alumnos ingresantes a la Universidad de Buenos Aires (edades entre 18 y 21 años) inscriptos en carreras relacionadas con Ciencias de la Salud que cursan la asignatura Matemática en 6 comisiones de los dos turnos matutinos de la Sede José Luis Romero del CBC-UBA. De los alumnos encuestados 182 siguen Medicina, 95 Carreras Conexas (Paramédicas), 31 Odontología, 38 Farmacia y Bioquímica, y 59 Psicología.

Instrumento: se administró una encuesta conformada por una Prueba Diagnóstica, un cuestionario actitudinal y un formulario de datos personales (se adjunta al trabajo).

La Prueba Diagnóstica fue diseñada para detectar los errores típicos y más frecuentes; se compone de 6 ejercicios con contenidos de la escuela media que fueron seleccionados en base a la experiencia y observación docente.

En el cuestionario relacionado a lo actitudinal se solicitan opiniones del alumno sobre el nivel matemático brindado por la escuela media, la importancia/utilidad que le otorga a la asignatura Matemática del CBC-UBA en la carrera elegida y la representación que tiene de la palabra 'matemática'.

El formulario de datos personales posibilita realizar el seguimiento del encuestado y analizar la posible correlación entre los resultados de la Prueba

Diagnóstica, del cuestionario actitudinal y el desempeño académico en la primer instancia de evaluación de la materia y con la carrera de elección.

Administración: La encuesta se administró en la primera semana del ciclo lectivo correspondiente al primer cuatrimestre/2010. Se permitió el uso de calculadora para la resolución de los ejercicios.

Codificación de variables: Las preguntas del cuestionario actitudinal relacionadas con los saberes matemáticos al egresar de la escuela media y con la importancia/utilidad que le otorga a la materia Matemática del CBC-UBA para su carrera contienen cuatro alternativas de respuesta y requieren del alumno una valoración positiva ó negativa, en una escala de mayor o menor aceptación. Se asignó puntaje a cada respuesta en una escala de 0-4 puntos, siendo este puntaje tanto mayor cuanto más positiva es la valoración ó cuanto mayor es la aceptación; 0 corresponde a 'no contesta' (NC). En base a tales puntajes se establecieron 4 niveles: alto (puntaje 4) / medio (puntaje 3) / bajo (puntajes 1 y 2) / NC (puntaje 0). Por su parte, con relación a las respuestas recibidas en la pregunta abierta '¿con qué palabra asocia MATEMATICA?', se establecieron categorías que permiten determinar un sistema de conceptos e ideas que estructuran la diversidad de opiniones expresadas por los estudiantes.

El desempeño en la Prueba Diagnóstica se evaluó en una escala de 0-10 puntos: se asignó 1 punto a los ejercicios 1 y 4, y 2 puntos los ejercicios 2, 3, 5 y 6.

Para medir el grado de logro de desempeño o rendimiento académico se tomó como indicador la calificación obtenida en la primera de las dos instancias de evaluación de la asignatura (escala 0-10) y se decidió identificar las siguientes categorías: Ausente, si el alumno abandona la materia antes de la primer evaluación parcial / Insuficiente, si la nota del parcial es menor a cuatro / Satisfactorio, para notas entre 4 y 6.5 / Muy Satisfactorio, para notas entre 7 y 10. Cabe aclarar que los contenidos de la asignatura Matemática del CBC-UBA son, para el primer parcial: ecuaciones e inecuaciones y funciones (polinómica, homográfica, exponencial, logarítmica y trigonométrica) y, para el segundo parcial: derivadas e integrales.

### Procesamiento y análisis de datos

El tratamiento de los datos obtenidos incluye, en primera instancia, un análisis de cada uno los ítems de la encuesta: 6 ejercicios de la Prueba Diagnóstica y 3 preguntas del cuestionario actitudinal.

Para cada ejercicio propuesto en la Prueba Diagnóstica se informa sobre el contenido, la consigna, la nota promedio (en escala 0-10) y los errores detectados, que fueron clasificados de acuerdo a la categorización elaborada por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar, sin pretender examinar el origen de los mismos. Se comparan las medias de las notas obtenidas en los ejercicios de la Prueba Diagnóstica determinándose los ejercicios en el cual el alumno tuvo el mejor desempeño y el más bajo.

Para las 2 preguntas cerradas del cuestionario actitudinal se da la distribución de porcentajes de acuerdo a las categorías alto/medio/bajo/NC, mientras que para la pregunta abierta se estableció una clasificación que permite contemplar la diversidad de opiniones expresadas, y se indica la correspondiente distribución de porcentajes.

En segunda instancia se presentan los resultados del cruce de variables. Se analizan las posibles correlaciones entre las variables de la Prueba Diagnóstica y del cuestionario actitudinal con el indicador del rendimiento académico (calificación obtenida en el primer examen parcial obligatorio de la asignatura) y la carrera de elección.

### Prueba Diagnóstica:

#### Ejercicio 1: Números racionales - Relación de orden.

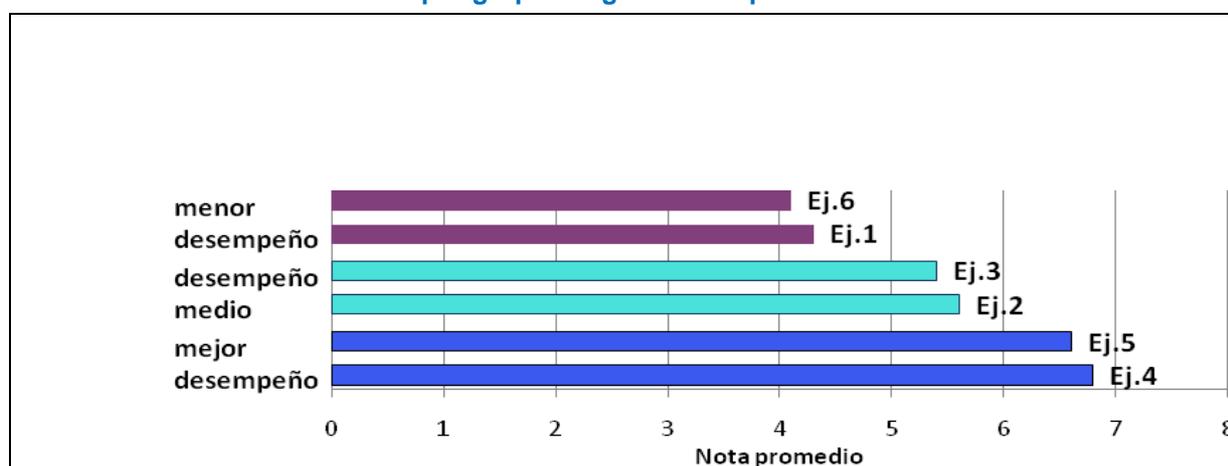
En la Tabla 1 se consigna para cada ejercicio la nota promedio (en escala 0-10) y los porcentajes de resolución correcta, resolución incorrecta y de no resuelve.

**Tabla 1: Nota promedio de los ejercicios de la Prueba Diagnóstica (escala 0-10) y porcentajes de resolución correcta, resolución incorrecta y de No resuelve.**

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
<b>Nota promedio</b>	4.3	5.6	5.4	6.8	6.6	4.1
<b>% Resuelve bien</b>	11.6	43.2	54.3	68.1	60.7	29.6
<b>% Resuelve mal</b>	25.2	30.9	24.4	17.5	28.1	22.5
<b>% No resuelve</b>	0.0	0.0	21.3	14.3	0.0	25.4

De la observación de las notas promedio obtenidas en los ejercicios (Tabla 1) y la aplicación del test de comparaciones múltiples de Tukey, se concluye que existen tres grupos en los cuales las medias de las notas no son significativamente diferentes unas de otras (Gráfico 1).

**Gráfico 1. Nota promedio de los ejercicios de la Prueba Diagnóstica por grupo de igual desempeño**



El mejor desempeño corresponde al grupo conformado por los ejercicios 4 y 5, luego le sigue el conformado por los ejercicios 2 y 3, y por último, el grupo de ejercicios de menor desempeño corresponde al conformado por el 1 y el 6.

Era esperable que el ejercicio 6 (planteo de una situación problemática) correspondiera al de menor desempeño en la Prueba Diagnóstica, pero no así el ejercicio 1. Es alarmante que alumnos ingresantes a la universidad presenten tanta dificultad en la tarea de representar números racionales en la recta real (ejercicio 1), y más aún si se considera que no se prohibió el uso de calculadora y que todos los alumnos intentaron cumplir con la consigna del ejercicio.

## Cuestionario actitudinal

### Pregunta 1: Opinión acerca de la base matemática adquirida en la escuela media (autovaloración de saberes previos).

En Tabla 2 se muestra la distribución de porcentajes que corresponde a esta pregunta cerrada. Sólo el 13.6% de los alumnos opina que la formación matemática al término de la escuela media es 'muy buena' (nivel alto). Más del 40% la considera 'mala' o 'regular' (nivel bajo).

### Pregunta 2: Opinión acerca de la importancia/utilidad que le otorga a la materia de Matemática del CBC-UBA para su carrera.

La mayoría (82.2%) considera que matemática es 'muy útil' o 'medianamente útil' para su carrera (Tabla 2: nivel alto y medio, respectivamente).

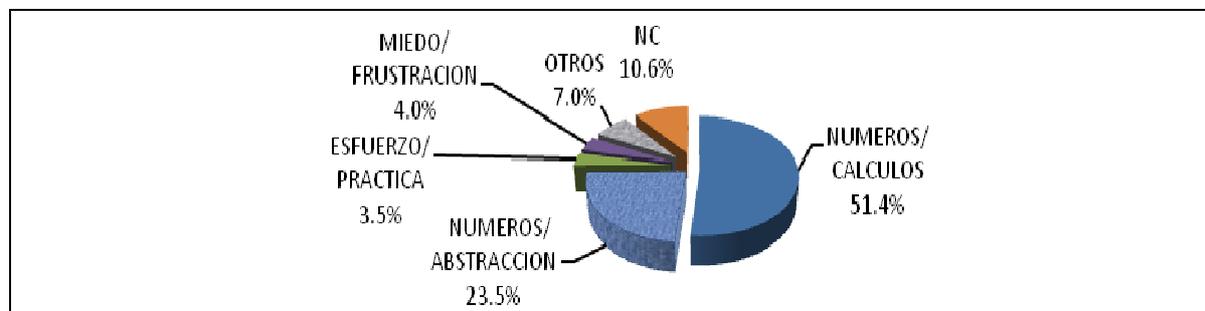
Tabla 2: Distribución de porcentajes de las preguntas cerradas 1 y 2.

	Nivel (%)			
	<i>alto</i>	<i>medio</i>	<i>bajo</i>	<i>No Contesta</i>
Base matemática	13.6	44.0	41.2	1.2
Importancia/utilidad	36.3	45.9	17.1	0.7

### Pregunta 3: Representación de la palabra 'matemática'.

Mayoritariamente (74.9%) los alumnos encuestados asocian la palabra 'matemática' con números, cálculos, ecuaciones, ejercicios y/o funciones. Sólo un 30% de ellos (23.5% de la muestra) refieren abstracción, análisis y/o razonamiento.

Gráfico 2: Distribución de porcentajes de la pregunta ¿con qué palabra asocia 'matemática'?



Muy pocos (3.5%) expresan que representa esfuerzo, constancia y/o práctica. Sólo el 4.0% la asocia con miedo, frustración y/o algo inalcanzable. No contesta el 10.0% (Gráfico 2).

## Cruce de variables:

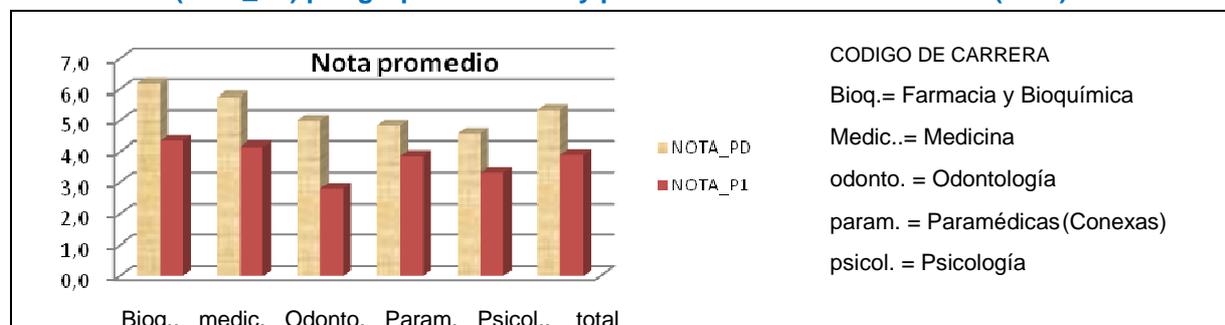
### Desempeño en la Prueba Diagnóstica y en el parcial vs. Carrera:

Del análisis realizado se destaca que el desempeño en la Prueba Diagnóstica está relacionado con la carrera de elección; los resultados arrojados por el test  $\chi^2$  permite rechazar la independencia entre esas variables ( $p=0.0405$ ; nivel de significación 0.05).

No hay evidencia en cambio, para rechazar la independencia entre el desempeño en la primera evaluación parcial de la asignatura Matemática del CBC-UBA y la carrera elegida ( $p=0.3496$ ).

En el Gráfico 3 se presentan los resultados de las notas obtenidas en la Prueba Diagnóstica y en la primera evaluación parcial de la asignatura según la Carrera en la cual está inscripto el alumno; se consignan además, los respectivos promedios para el total de la muestra.

**Gráfico 3. Desempeño en la Prueba Diagnóstica (Nota\_PD) y en la primer evaluación parcial (Nota\_P1) por grupo de carrera y para la totalidad de la muestra (total).**



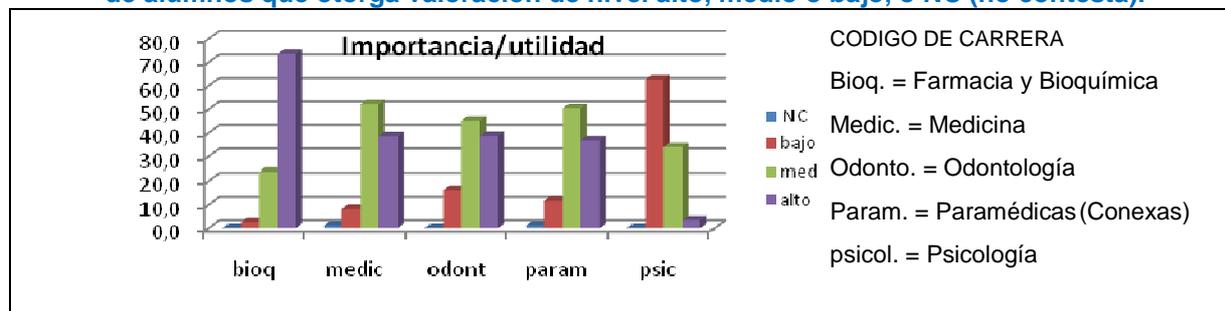
Los alumnos de Farmacia y Bioquímica son quienes presentan un mejor desempeño en la Prueba Diagnóstica (Nota\_PD = 6.2), le siguen los de Medicina (5.8), luego los de Odontología (5.0), y por último los alumnos de carreras Paramédicas (4.8) y Psicología (4.6), siendo 5.4 la media correspondiente al total de la muestra.

Los estudiantes de Odontología y de Psicología son los que obtuvieron notas más bajas también en la primer evaluación de la asignatura (Nota\_P1=2.8 y 3.3 respectivamente, siendo la media de la muestra 3.9).

### Opiniones del cuestionario actitudinal vs. Carrera:

Los resultados de la aplicación del test  $\chi^2$  permite afirmar que existe correlación entre la valoración que el alumno otorga a la importancia/utilidad de la matemática para sus estudios y la carrera de elección ( $p=0.0000$ ). En cambio, no hay evidencia para rechazar la hipótesis de independencia entre la apreciación de la base matemática adquirida en la escuela media y la carrera ( $p=0.1913$ ), ni entre lo que representa la palabra 'matemática' y la carrera.

**Gráfico 4: Importancia/utilidad de la matemática para sus estudios por carrera. Porcentajes de alumnos que otorga valoración de nivel alto, medio o bajo, o NC (no contesta).**



En el Gráfico 4 se presenta la distribución porcentual por Carrera de la variable Importancia/utilidad, consignada en Tabla 3. Hay consenso (73,7%) entre los alumnos de Farmacia y Bioquímica que matemática es una asignatura muy importante/útil para la carrera (valoración de nivel alto); en cambio el 67,7% de los inscriptos en Psicología la consideran inútil o poco útil (nivel bajo).

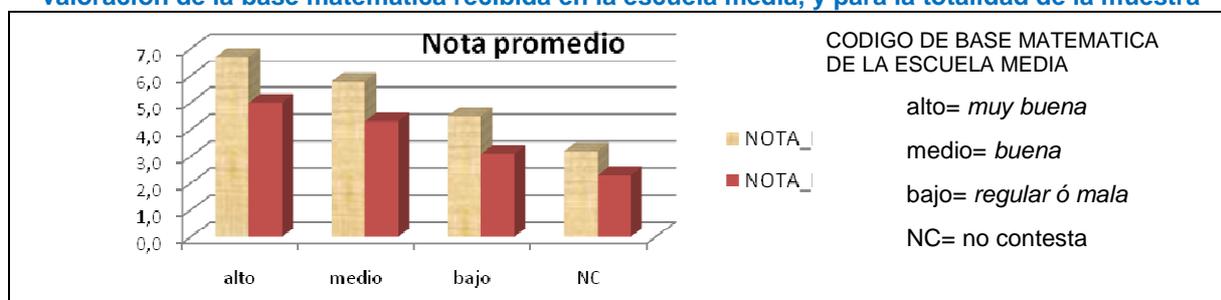
Tabla 3: Distribución de porcentajes de Carrera – Importancia/utilidad.

	Importancia / utilidad (%)			
	<i>alto</i>	<i>medio</i>	<i>Bajo</i>	<i>NC</i>
<b>Farmacia y Bioquímica</b>	73,7	23,7	2,6	0,0
<b>Medicina</b>	38,5	52,2	8,2	1,1
<b>Odontología</b>	38,7	45,2	16,1	0,0
<b>Paramédicas</b>	36,8	50,5	11,6	1,1
<b>Psicología</b>	3,4	33,9	62,7	0,0

**Opiniones del cuestionario actitudinal vs. el desempeño en la Prueba Diagnóstica y en el Parcial:**

La valoración de los saberes matemáticos de los alumnos al ingresar a la universidad resulta estar fuertemente relacionada con el desempeño en la Prueba Diagnóstica (test  $\chi^2$ :  $p=0.0000$ ) y con el del primer parcial ( $p=0.0002$ ) (Gráfico 5).

Gráfico 5. Desempeño en la Prueba Diagnóstica (Nota\_PD) y en el primer parcial (Nota\_P1) por valoración de la base matemática recibida en la escuela media, y para la totalidad de la muestra



Como la encuesta fue realizada al comienzo del ciclo lectivo, este resultado indicaría que los alumnos tienen una apreciación bastante acertada del nivel de los saberes matemáticos adquiridos en la escuela media. Sin embargo, no se han podido extraer evidencias que permitan inferir una correlación entre la importancia/utilidad asignada a la matemática y los resultados en ambas pruebas. Lo que sí se ha podido observar es que los alumnos que asocian la palabra ‘matemática’ con abstracción, análisis y/o razonamiento tuvieron mejor desempeño en el primer parcial (nota promedio: 4.9) que quienes sólo mencionan números, cálculos, ecuaciones, ejercicios y/o funciones (3.7) o bien que aquellos que la asocian a esfuerzo, constancia y/o práctica (3.3), y principalmente a aquellos para quienes ‘matemática’ representa miedo, frustración y/o algo inalcanzable (1.0). En el Gráfico 6 se consignan las notas promedio obtenidas en la Prueba Diagnóstica y en el primer parcial según la representación que el alumno tiene de la palabra ‘matemática’.

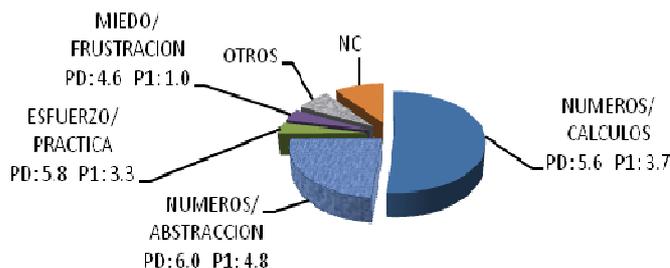


Gráfico 6. Notas promedio obtenidas en la Prueba Diagnóstica (PD) y en el primer parcial (P1) según la representación que el alumno tiene de la palabra ‘matemática’.

### Desempeño en la Prueba Diagnóstica vs. Desempeño en el primer parcial:

De acuerdo a los resultados en el primer parcial se establecieron cuatro categorías para indicar el desempeño en dicha instancia de evaluación obligatoria: 'Ausente' (abandona la materia antes del primer parcial); 'Insuficiente' (desaprueba el parcial con nota menor a 4); 'Satisfactorio' (aprueba el parcial con nota entre 4 y 6.5; 'Muy satisfactorio' (aprueba con nota entre 7 y 10).

**Tabla 4: Desempeño en el Parcial y en la Prueba Diagnóstica: Notas promedio (escala 0-10) según el desempeño en el parcial y de la muestra total. Resultados del test  $\chi^2$ .**

	Ausente al parcial	Insuficiente (nota < 4)	Satisfactorio (nota 4 – 6.5)	Muy Satisfactorio (nota 7 – 10)	Muestra Total	Test $\chi^2$ p
<b>1er Parcial</b>	-	1.5	5.1	8.3	3.9	0.0000
<b>Prueba Diagnóstica</b>	3.8	4.8	6.2	7.7	5.4	0.0000
<b>ejercicio 1</b>	3.2	4.0	5.1	5.7	4.3	0.0000
<b>ejercicio 2</b>	3.8	5.0	7.1	7.9	5.6	0.0000
<b>ejercicio 3</b>	3.6	5.0	6.0	8.0	5.4	0.0000
<b>ejercicio 4</b>	5.1	6.3	7.8	9.2	6.8	0.0001
<b>ejercicio 5</b>	4.9	6.3	7.1	9.0	6.6	0.0000
<b>ejercicio 6</b>	2.6	3.2	4.6	7.4	4.1	0.0000
<b># alumnos</b>	(91)	(179)	(50)	(85)	(405)	(405)

En la Tabla 4 se consignan para cada una de dichas categorías y para la muestra total las notas promedio del primer parcial, de la Prueba Diagnóstica y de los ejercicios (escala 0-10). Se detalla además la cantidad de alumnos de cada grupo y, en la última columna, se exponen los resultados de la aplicación del test  $\chi^2$  de asociación entre la nota obtenida en la Prueba Diagnóstica y la obtenida en cada uno de los ejercicios con el desempeño en el parcial.

Como primera observación se puede mencionar que existe una fuerte correlación positiva entre el desempeño en el primer parcial y el desempeño en la Prueba Diagnóstica en general y en cada uno de los ejercicios que la conforman. Este resultado estaría indicando que la selección de los ejercicios de la Prueba Diagnóstica parecería adecuada, tanto en contenido como en el nivel de los mismos.

El análisis de resultados del cruce de variables entre la nota obtenida en cada uno de los ejercicios de la Prueba Diagnóstica y el desempeño en el primer parcial se efectúa de acuerdo a los tres grupos que resultaron de igual desempeño al aplicar el test de comparaciones múltiples de Tukey (Gráfico 1): grupo de mejor desempeño conformado por los ejercicios 4 y 5, de desempeño medio conformado por los ejercicios 2 y 3, y de menor desempeño conformado por el ejercicio 1 y el ejercicio 6.

Con referencia al grupo de ejercicios de la Prueba Diagnóstica en los cuales los alumnos mostraron un mejor desempeño, ejercicios 4 y 5 (notas promedio 6.8 y 6.5, respectivamente), cabe destacar que aún los alumnos que reprobaron el primer parcial (calificación menor a 4) obtuvieron en ambos ejercicios una nota promedio superior a 6. Esto indicaría que a pesar de incurrir en errores al aplicar la

propiedad distributiva y la asociativa o al ejecutar algoritmos básicos en la trasposición de términos, el egresado de la escuela media demuestra cierto manejo en la resolución de una ecuaciones lineales, como así también para identificar una relación de orden entre dos fracciones.

Con respecto al grupo de ejercicios en los cuales los alumnos mostraron menor desempeño, ejercicios 1 y 6 (notas promedio 4.3 y 4.1, respectivamente), merece acotarse que aún quienes aprobaron el primer parcial con nota entre 7 y 10 obtuvieron en el ejercicio 1 de la Prueba Diagnóstica una nota promedio 5.7, que resulta ser bastante inferior a la obtenida en los restantes ejercicios (7.4 o más), a pesar de identificar correctamente la relación de orden entre las dos fracciones propuestas en el ejercicio 4 (grupo 'muy satisfactorio': nota promedio 9.2). Esto indicaría que representar números racionales en la recta real constituye una tarea nada sencilla para al alumno, aunque sepa identificar si una fracción es menor o mayor que otra.

Tal como se mencionara anteriormente, era esperable que el ejercicio 6 (planteo de una situación problemática) correspondiera al de menor desempeño en la Prueba Diagnóstica, principalmente en el grupo de alumnos que abandona la materia antes del primer parcial y en el grupo que rinde dicha instancia de evaluación obligatoria de la materia y la reprueba, o la aprueba con nota menor que 7.

Con referencia a los ejercicios 2 y 3 que conforman el grupo de ejercicios de desempeño medio en la Prueba Diagnóstica, en la Tabla 5 se consigna, para cada categoría establecida y para la totalidad de la muestra, el porcentaje de alumnos que cometen errores en sumar fracciones, interpretar el significado de un exponente negativo, identificar la base de una potencia, calcular el signo de una potencia (tareas requeridas para la resolución del ejercicio 2 de la Prueba Diagnóstica) y/o especializar una función (ejercicio 3 de la Prueba Diagnóstica).

**Tabla 5: Distribución porcentual de los errores cometidos en los ejercicios 2 y 3 de la Prueba Diagnóstica, según desempeño en el parcial y para la muestra total. Resultados del test  $\chi^2$ .**

	Ausente al parcial	Insuficiente (nota < 4)	Satisfactorio (nota 4 – 6.5)	Muy Satisfactorio (nota 7 – 10)	Muestra Total	Test $\chi^2$ p
<b>sumar fracciones</b>	38.5	26.8	14.0	10.6	24.4	0.0001
<b>exponente negativo</b>	63.7	51.4	34.0	21.2	45.7	0.0000
<b>base potencia</b>	25.3	21.2	10.0	7.0	17.8	0.0033
<b>signo potencia</b>	24.2	12.3	2.0	2.3	11.6	0.0000
<b>especialización</b>	42.9	25.7	24.0	7.1	25.4	0.0000
<b># alumnos</b>	(91)	(179)	(50)	(85)	(405)	(405)

En primera instancia se puede destacar que los resultados del test  $\chi^2$  permiten rechazar, en todos los casos, la independencia entre la incurrencia de errores en los ejercicios 2 y 3 de la Prueba Diagnóstica y el desempeño en el primer parcial (Tabla 5, última columna:  $p < 0.05$ ).

Cerca del 40% de los alumnos del grupo que abandona la materia antes del 1er parcial comete errores al sumar fracciones (38.5%); aún el 10.6% de alumnos

del grupo que aprueba el parcial de forma ‘muy satisfactoria’ evidencia dicha dificultad.

Casi la mitad de la muestra (45.7%) comete errores al operar con exponentes negativos; aún en el grupo de alumnos que aprueba el parcial de forma ‘muy satisfactoria’ el 21.2% opera incorrectamente.

El 25% de los alumnos que abandona la asignatura antes del primer parcial (ausentes al parcial) no sabe a cuánto equivale  $-2.5^2$  ni  $(-3)^2$ . El 21.2% de estudiantes que rinde el primer parcial pero no lo aprueba (nota menor a 4) comete errores en identificar la base de la potencia en la expresión  $-2.5^2$ .

El hecho de que no se respete la prioridad de los operadores aritméticos que determina el orden en que han de realizarse las operaciones y que se haga uso inadecuado de signos de agrupación como son los paréntesis (que encierran los operandos para dar preferencia a la realización de las operaciones de menor prioridad) evidencia errores asociables a la comprensión de la estructura de una expresión numérica. No es ocasional que los encuestados incurran en el error de infringir las reglas de la estructura numérica incluida en cada uno de los dos ítems citados del ejercicio 2 y en el ejercicio 3, sino que lo hacen en forma sistemática.

El 25.4% de la muestra no resuelve el ejercicio 3 o presenta alguna resolución que indica que no se entiende la consigna de especializar una función polinómica en un valor numérico dado. Tal como se expresó al analizar los resultados consignados en la Tabla 1, el 21.3% de la muestra no presenta resolución alguna del ejercicio, por lo tanto el 3.1% contesta algo completamente inadecuado. Llama la atención que el 24.0% de los alumnos que aprueban el primer parcial con nota inferior a 7 (desempeño ‘satisfactorio’) no especialice correctamente una función en un valor numérico.

Por último cabe mencionar que, en todos los casos, también se rechaza la independencia entre la incurrancia de errores en los ejercicios 2 y 3 de la Prueba Diagnóstica y la valoración de los saberes matemáticos al egresar de la escuela media (Tabla 6, última columna:  $p < 0.05$ ).

**Tabla 6. Distribución porcentual de los errores cometidos en los ejercicios 2 y 3 de la Prueba Diagnóstica, según el nivel otorgado a la base matemática de la escuela media y para la muestra total. Resultados del test  $\chi^2$ .**

	<b>Base matemática adquirida en la escuela media</b>					<b>Test <math>\chi^2</math> p</b>
	<b>alto</b>	<b>medio</b>	<b>bajo</b>	<b>NC</b>	<b>Total</b>	
<b>sumar fracciones</b>	6.1	40.4	52.5	1.0	24.4	0.0191
<b>exponente negativo</b>	9.2	40.0	48.6	2.2	45.7	0.0047
<b>base potencia</b>	8.3	29.2	62.5	0.0	17.8	0.0008
<b>signo potencia</b>	6.4	27.7	66.0	0.0	11.6	0.0032
<b>especialización</b>	1.0	32.0	64.1	2.9	25.4	0.0000

El 50%, y en algunos casos más del 60% de los alumnos que incurren en errores o no responden a la consigna dada, ya sea sumar fracciones, interpretar el significado de un exponente negativo, identificar la base de una potencia, calcular el signo de una potencia y/o especializar una función, opina que la base

matemática adquirida en la escuela media es de nivel bajo (o bien no expresa opinión).

### Conclusiones

- Los errores detectados en la Prueba Diagnóstica concuerdan con los errores observados informalmente por los docentes del área de matemática del CBC-UBA en su experiencia de aula y se corresponden con los expuestos con la mayoría de las investigaciones sobre el tema.
- Los alumnos tienen dificultades para representar números racionales en la recta real (pero no para comparar fracciones); especializar una función; aplicar propiedades de la potenciación; plantear matemáticamente el enunciado de un problema; y en menor medida, para resolver ecuaciones lineales.
- La selección de contenidos y el nivel de los ejercicios incluidos en la Prueba Diagnóstica parecerían adecuados para medir la base matemática del alumno ingresante a la universidad.
- No resultó sencilla la identificación en forma independiente de los tipos de errores localizados en esta investigación. Se tomó como criterio encuadrar el error en la categoría más pertinente. Se detectaron errores de 'interpretación incorrecta del lenguaje'; 'errores técnicos', principalmente en la ejecución de algoritmos básicos; 'empleo incorrecto de propiedades y definiciones'; 'falta de verificación de la solución hallada', y en menor medida errores debidos a 'datos mal utilizados'.
- Los errores detectados son, en su mayoría, errores sistemáticos de procedimiento, en el sentido de procedimiento inapropiado, persistente y reproducible que no se debe a distracción o inadvertencia, casualidad o fallo de memoria.
- Tampoco resultó sencillo establecer categorías que permiten determinar un sistema de conceptos e ideas que estructuran la diversidad de opiniones expresadas por los estudiantes en la pregunta abierta '¿con qué palabra asocia MATEMATICA?'. En general la asocian con números, cálculos, ecuaciones, ejercicios, funciones. Quienes además refieren razonamiento, abstracción y/o análisis, tienen mayor rendimiento. En cambio los que la asocian a miedo, frustración y/o algo inalcanzable obtienen un menor rendimiento. Son muy pocos quienes expresan que les representa esfuerzo, constancia y/o práctica.
- El alumno tiene una representación bastante acertada del nivel matemático que posee al ingresar a la universidad. La apreciación del nivel de los saberes matemáticos adquiridos en la escuela media se corresponde en gran medida al grado de desempeño alcanzado tanto en la Prueba Diagnóstica como en el primer parcial de la asignatura Matemática del CBC-UBA.
- La importancia/utilidad que el alumno asigna a la matemática está estrechamente relacionada con la carrera de elección. Los estudiantes de las carreras de Farmacia y Bioquímica, que incluyen otras materias de matemática en años posteriores, le otorgan mucha importancia; en cambio los inscriptos en Psicología la desestiman totalmente.

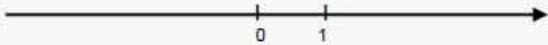
Consideramos que el diagnóstico y análisis de errores en la enseñanza de la matemática debe utilizarse en el tratamiento de múltiples temas en el aula, permitiendo al profesor incidir en aspectos didácticos y en el diseño curricular y conducir a una competencia cada vez más formal de los conceptos matemáticos.

Desde una perspectiva social, creemos que tiene fundamental importancia el análisis de la problemática del incurrimento en errores en el aprendizaje de la matemática, ya que si las fuentes de error provienen del profesor, se transmiten a los alumnos de la escuela elemental y se reproducen en toda la escolaridad.

## Bibliografía

- Astofi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Díada Editora. Sevilla.
- Booth, L.R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.
- Borasi, R., (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry" a teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*. 25 (2), 166-208.
- Brousseau, G.; Davis R.B. et Werner T. (1986). Observing students at work. In Christiansen B., Howson A.G., Otte M. (eds.) *Perspective on Mathematics Education*, 205-240. Dordrecht: Reidel Publisher.
- Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la Resolución de Problemas. En Parra C., Saiz I. (comps.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, 51-64. Paidós. Buenos Aires.
- Cury, H. N. (1994). *As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- Davis, R. (1984). *Learning Mathematics. The cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Australia: Croom Helm.
- Engler, A.; Gregorini, M.I.; Müller, D.; Vrancken, S.; Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Premisa, Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática*. 6(23), 23-32.
- Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En Godino J.D. (dir.) *Matemáticas y su Didáctica para maestros*, 7-121. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (<http://www.ugr.es/local/jgodino/>).
- Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. 18 (1), 3-14.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*. 10 (3), 163-172.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick J., Gómez P. y Rico L. (eds.) *Educación matemática*, 69-108. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Socas Robayna, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico L. (coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154. Barcelona: Horsori.

Anexo: Encuesta

ENCUESTA - Marzo 2010	Proyecto U012 - UBACyT 2008/10	
Apellido y nombre: ..... Carrera: .....		
<p>¿Cómo considera la base matemática adquirida en la Escuela Secundaria?</p> <p> <input type="checkbox"/> muy buena                      <input type="checkbox"/> buena                      <input type="checkbox"/> regular                      <input type="checkbox"/> mala             </p>		
<p>¿Opina que la asignatura Matemática del CBC es importante/útil para su carrera?</p> <p> <input type="checkbox"/> muy útil                      <input type="checkbox"/> medianamente útil                      <input type="checkbox"/> poco útil                      <input type="checkbox"/> inútil             </p>		
1) Represente los siguientes números sobre la recta numérica:		
$-\frac{3}{2}$ ; 0,66 ; 2,5 ; -2,8 ; $\frac{2}{3}$		
2) Resuelva las siguientes operaciones:		
$(-3)^2 =$	$2^3 =$	$-2 \cdot 5^2 =$
$\sqrt{\frac{36}{25}} =$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} =$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$
3) Si $f(x) = 3x^2 + x^3$ , calcule:		
$f(1) =$		
$f(-1) =$		
4) La expresión 'a = b' se lee 'a es igual a b'. Escriba cómo se debe leer la siguiente expresión:		
'a > b' .....		
Indique si $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$ es:	verdadero <input type="checkbox"/>	falso <input type="checkbox"/>
¿Qué cálculos realizó para justificar su respuesta? .....		
.....		
5) Resuelva las siguientes ecuaciones:		
$5 + 3x = 6$	$2(3x - 5) = 4x + 8$	
6) Plantee el siguiente problema : <i>'Juan pensó un número y le sumó el doble de su consecutivo y obtuvo 10 disminuido en el número que pensó'</i>		
.....		
.....		
Por último, por favor díganos ¿con qué palabra asocia <b>MATEMATICA</b> ? .....		
.....		
- Gracias por su valiosa colaboración -		

**M. Graciela Dodera.** Argentina. Licenciada en Ciencias Físicas. Maestrando en Biometría y Mejoramiento - Escuela de Graduados de la Facultad de Agronomía - Universidad de Buenos Aires. Profesor Asociado de tiempo completo de Matemática del Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires. Directora de Proyectos UBACyT. Línea de investigación: Educación - Sociología de la Educación; Especialidad Matemática. [gdodera@cbc.uba.ar](mailto:gdodera@cbc.uba.ar)

**Gustavo Bender.** Licenciado en Física y en Psicología, Especialista en Investigación Educativa y maestrando en Enseñanza de las Ciencias. Profesor de la Universidad de Buenos Aires y de la Universidad Tecnológica Nacional. Director de proyectos de Investigación en Didáctica de las Ciencias en la Universidad y en el Instituto Nacional de Formación Docente. Director tesis de grado y posgrado. Asesor de la Dirección Provincial de Educación Secundaria. [gussbender@gmail.com](mailto:gussbender@gmail.com)

**Ester Alicia Burroni.** Profesora de Matemática y Cosmografía. Licenciada en Gestión Educativa, Centro de Altos Estudios en Ciencias Exactas. Docente-Investigador de la Universidad de Buenos Aires con participación en Proyectos de Educación Matemática e Historia de la Matemática. Profesora de la Universidad Tecnológica Nacional y de la Universidad Nacional de Tres de Febrero. Capacitadora de profesores de nivel medio. [eburroni@yahoo.com.ar](mailto:eburroni@yahoo.com.ar)

**María del Pilar Lázaro.** Argentina. Profesora de Matemática y Astronomía. Licenciada en Educación con Orientación en Enseñanza de la Matemática, Universidad Virtual de Quilmes. Docente-Investigador en el Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires con participación en Proyectos UBACyT. Línea de investigación: Educación - Sociología de la Educación; Especialidad Matemática. [pilarlazar@fibertel.com.ar](mailto:pilarlazar@fibertel.com.ar)