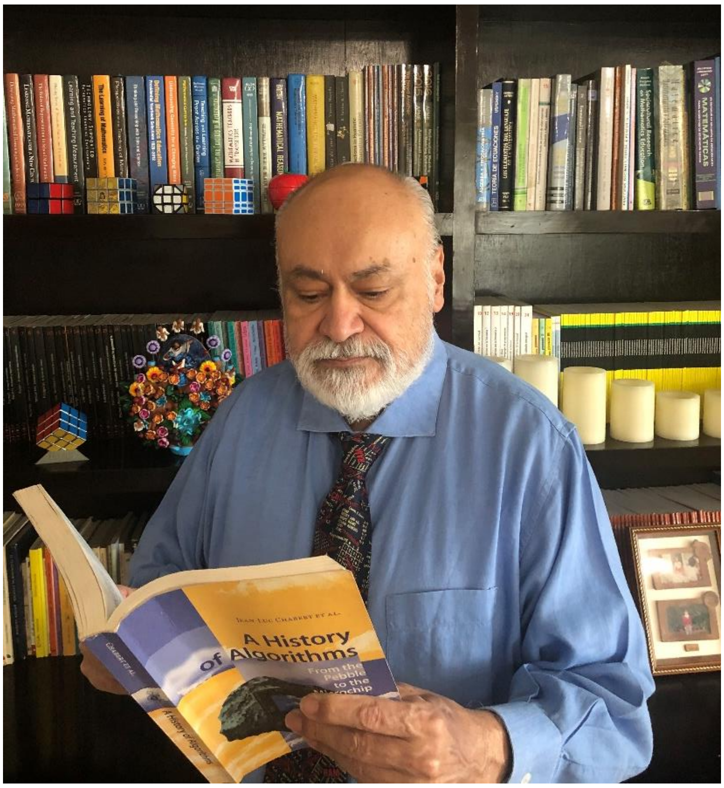
UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada
Abril de 2022, Número 64
ISSN: 1815-0640

Eduardo Mancera Martínez

Breve Reseña



Licenciatura en Física y Matemáticas por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. Maestría y Doctorado en Ciencias por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Se ha desempeñado como docente o investigador, funcionario público del sector educativo en diferentes niveles o modalidades como Educación Básica (primaria y secundaria), Educación Tecnológica, Educación Superior, Educación para los Adultos, Educación en Comunidades Rurales, Educación Especial, Formación inicial servicio de Maestros, Formación de Maestros en Servicio, Comunicación e Innovación Educativa. También ha sido profesor e investigador invitado en varias instituciones.

Fue consultor de empresas como CASIO, Texas Instruments y Hewlett Packard Inc y autor o coautor de varios libros de texto para primaria, secundaria (aprobados por las autoridades educativas), bachillerato, educación superior y formación de maestros.

Ha participado en múltiples reuniones académicas como ponente invitado en América y Europa y fue parte del grupo fundador de la Revista Educación Matemática.

Participó en organizaciones de docentes o investigadores, fue Presidente de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas y de Maestros Enseñando con Tecnología Avanzada. Actualmente. Es miembro y Gestor Internacional de la Asociación Mexicana de Matemática Educativa (AMME), miembro del Consejo Asesor de la Red de Educación Matemática para América Central y El Caribe (REDUMATE) y Vicepresidente del Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM), Grupo Regional de la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

ISSN: 1815-0640
Número 64. Abril 2022
Páginas 1-23

REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
firma invitada

La recta, sin fórmulas

Eduardo Mancera Martínez

Resumen

Se presentan algunas ideas del proyecto “Matemáticas sin fórmulas” en el tema de la ecuación de recta y su enseñanza, sin partir de fórmulas, solamente siguiendo ideas geométricas y mostrando que se pueden resolver el mismo tipo de actividades que las que se piden cuando se usan fórmulas. Adicionalmente, se muestra que se puede obtener mayor comprensión sobre los conjuntos de puntos en el plano cartesiano al considerarlos como “lugares geométricos” a partir de las relaciones entre las ordenadas y abscisas de los puntos que los conforman, además de mostrar la función que tienen las literales en este contexto. Finalmente se presentan algunos comentarios sobre la ampliación de las ideas para el manejo de funciones algebraicas.
Palabras clave: recta, funciones lineales, pendiente, transformaciones del plano.

Abstract

Some ideas of the project "Mathematics without formulas" are presented on the subject of the equation of a straight line and its teaching, without starting from formulas, only following geometric ideas and showing that the same type of activities can be solved as those that are requested when They use formulas. Additionally, it is shown that greater understanding can be obtained about the sets of points in the Cartesian plane by considering them as "geometric locations" from the relationships between the ordinates and abscissas of the points that make them up, in addition to showing the function they have. literals in this context. Finally, some comments are presented on the extension of the ideas for the handling of algebraic functions.
Keywords: straight line, linear functions, slope, plane transformations.

Resumo

São apresentadas algumas ideias do projeto "Matemática sem fórmulas" sobre o tema da equação de uma reta e seu ensino, sem partir de fórmulas, apenas seguindo ideias geométricas e mostrando que o mesmo tipo de atividades podem ser resolvidas como aquelas que são solicitados quando eles usam fórmulas. Além disso, mostra-se que se pode obter maior compreensão sobre os conjuntos de pontos do plano cartesiano ao considerá-los como "localizações geométricas" a partir das relações entre as ordenadas e abcissas dos pontos que os compõem, além de mostrar a função eles têm literais neste contexto. Por fim, são apresentados alguns comentários sobre a extensão das ideias para o tratamento de funções algébricas.
Palabras chave: linha reta, funções lineares, inclinação, transformações no plano.

1. Introducción

Cuando los estudiantes se enfrentan a relaciones en el plano cartesiano, se topan con tres tipos de representaciones por integrar: algebraicas, numéricas y gráficas. En particular, en el caso de la "linealidad" o las rectas, se omite el tratamiento de significados en torno a los conjuntos de punto en el plano, lo cual es relevante para vincular las representaciones aludidas. De acuerdo con Abric (1987), la representación puede considerarse como un sistema coherente con una jerarquía, que se organiza de acuerdo con la perspectiva del mundo. En este sentido las representaciones deben conformarse en un sistema coherente, pero las representaciones por lo general se manejan de manera independiente, este es un problema frecuente en la enseñanza y esto conduce a una perspectiva de la matemática que no corresponde.

Basta un vistazo a los textos para observar que las representaciones algebraicas predominan, dejando subordinadas a las otras. Por ejemplo, a partir de una "ecuación" o "expresión algebraica" se elaboran tablas de valores y a partir de éstas se dibujan gráficas. La manipulación algebraica es preferida en el contexto escolar, en realidad es la concepción más frecuente en las concepciones sobre el pensamiento matemático y la propia disciplina. Una consecuencia de esto, es la confusión sobre el manejo conceptual, pues se piensa que muestra de alta comprensión de la matemática es la operatividad con símbolos, saber matemáticas se traduce a "saber hacer operaciones aritméticas o algebraicas". Pero, esta posición es poco consistente con la historia de la matemática.

Las relaciones espaciales ayudaron a la formulación de conocimientos matemáticos y aún siguen orientando ideas fundamentales. A partir de las relaciones geométricas se han configurado conocimientos relevantes y se da sentido a ideas importantes de la matemática.

En el presente documento, a partir de revisar algunas ideas sobre la recta, se trata de mostrar un tratamiento de las relaciones entre expresiones algebraicas, gráficas y tabulaciones (tablas de valores), orientado a evitar el uso de fórmulas y dar significado geométrico principalmente a las ideas.

Cambiar el énfasis en el tratamiento de un contenido no basta para impulsar cambios, se requiere reemplazar la secuencia de enseñanza denominada didáctica tradicional, la cual tuvo una función preponderante y se ha mantenido con varios matices, a pesar de los discursos educativos y los intentos de las reformas educativas recientes.

La secuencia didáctica tradicional se identifica con presentar primero la "teoría" (en realidad es un conjunto de definiciones y exposiciones de procedimientos estereotipados que a veces se disfrazan con un problema o el análisis de una situación, pero que al fin de cuentas solamente es circulación de información), desarrollo de "ejemplos" (que son casos con datos sencillos que permiten ilustrar paso a paso lo que debe hacerse en casos ideales, lo que frecuentemente conduce a la idea de que una buena enseñanza dependerá de la explicación detallada de la ejecución de los pasos requeridos para aplicar un método o una fórmula) y finalmente listados de ejercicios (que generalmente incluyen casos con datos como los vistos en clase y otros que requieren manejo de otros procedimientos más complicados que se trabajan en clase ocasionalmente y suelen incorporarse a los exámenes).

En lo que se desarrollará en estas notas, se promoverá la inducción de prácticas educativas fundamentadas en exploraciones y búsqueda de regularidades al principio, sin pretender usar símbolos o representaciones "tradicionales", sino aquellas que tienen sentido para los estudiantes y concluir con acuerdos sobre denominaciones convencionales y detección de etapas para realizar un procedimiento. Es decir, llegar a los procedimientos sobre la base de la reflexión y la construcción de significados.

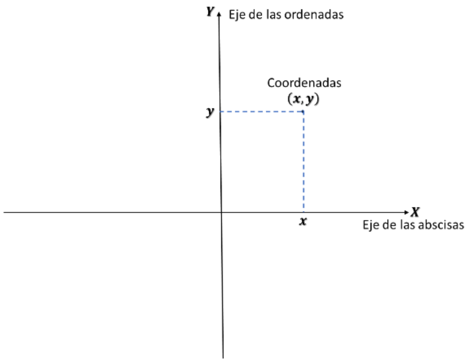
Esta perspectiva surgió el proyecto "Matemática sin fórmulas" y uno de sus productos: "La danza de las rectas" (Mancera, 2005), tema publicado en algunas revistas o difundido en algunos videos como "El baile de las rectas" (https://www.youtube.com/watch?v=XLsjGWZuD-c), esta forma de enseñanza a logrado tres asignaciones de la Cátedra Diego Bricio Hernández, del Colegio de Sinaloa, importante institución mexicana. Esta forma de trabajar las relaciones n el plano se ha trabajado con estudiantes de bachillerato (15 a 18 años de edad), además de aplicaciones reiteradas con estudiantes con bajo rendimiento escolar en cálculo diferencial e integral con funciones reales de una variable real, de la carrera de economía, en una prestigiosa universidad privada (Mancera, 2004).

Dado el espacio limitado para un escrito como el presente, es difícil abordar exhaustivamente todos los contenidos matemáticos o discutir suficientemente todas las componentes teóricas y metodológicas implicadas, por ello la atención se centrará la recta, a partir de lo cual se podrán conocer los principios básicos del enfoque, atendiendo principalmente la integración de una representación a otra, los significados asociados y la estructura algebraica subyacente.

No se presenta como un reporte de investigación, sino como una perspectiva de intervención educativa, lo cual corresponde con las directrices principales de la Revista Unión. Los contenidos que se presentarán pueden ampliarse al tratamiento de cónicas (para un curso de geometría analítica) o para funciones algebraicas.

2. Acotaciones

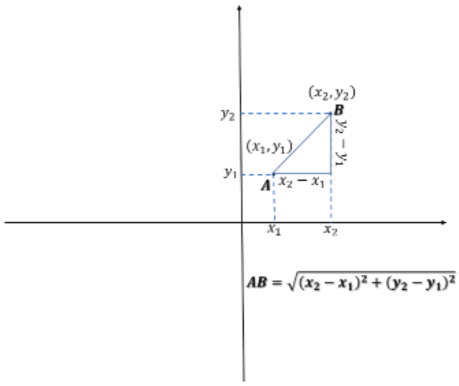
Para tener un punto de partida común, se considera al plano cartesiano, conformado por ejes numéricos perpendiculares con orientación "canónica de los ejes" (partes positivas a la derecha y superior), al eje "horizontal" se le llamará "eje de las abscisas" y al "vertical "eje de las "ordenadas", cada uno se representarán por X y Y,respectivamente. Cada valor numérico asociado a un punto del eje de las abscisas se representará por x, similarmente los valores asociados a puntos del eje de las ordenadas se representarán por y. Así, cada punto en el plano se representa genéricamente, por una pareja ordenada (x, y).

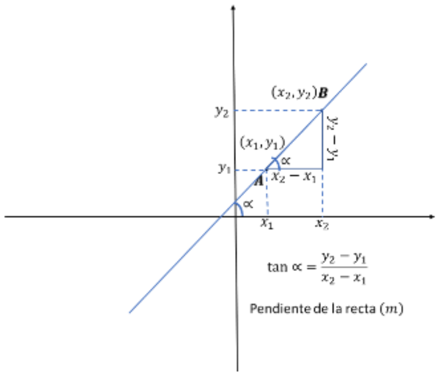


Son convenciones que seguramente conocen los lectores o no será complicado consultarlas.

Preguntas de alumnos que dieron origen a la reflexión.

Las fórmulas de la distancia entre puntos y de la pendiente de una recta (definida como el valor de la tangente del ángulo α, que forma la recta con el eje de las abscisas) se “encuentran”, o se dice que se “deducen” o “demuestran”, a partir del trazo de un triángulo rectángulo, Constituido con puntos en el primer cuadrante, colocados en una disposición similar en todos los textos y con diferentes apoyos visuales. A partir de esas imágenes se utilizan propiedades entre los lados del triángulo rectángulo para expresar la obtención de la distancia entre dos puntos y a partir de un triángulo igual o similar, se usan las magnitudes de los catetos para hacer referencia a la tangente de uno de los ángulos agudos del dicho triángulo.

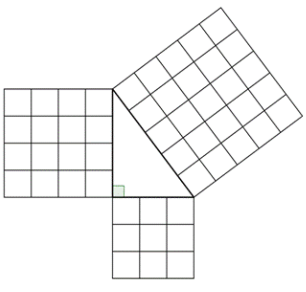




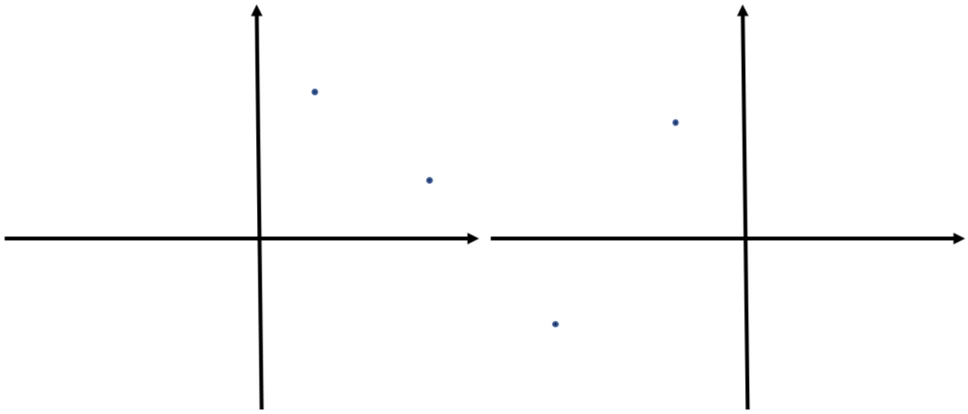
Después, con figuras similares, se genera una fórmula para determinar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos o conociendo la pendiente y un punto:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad\qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$

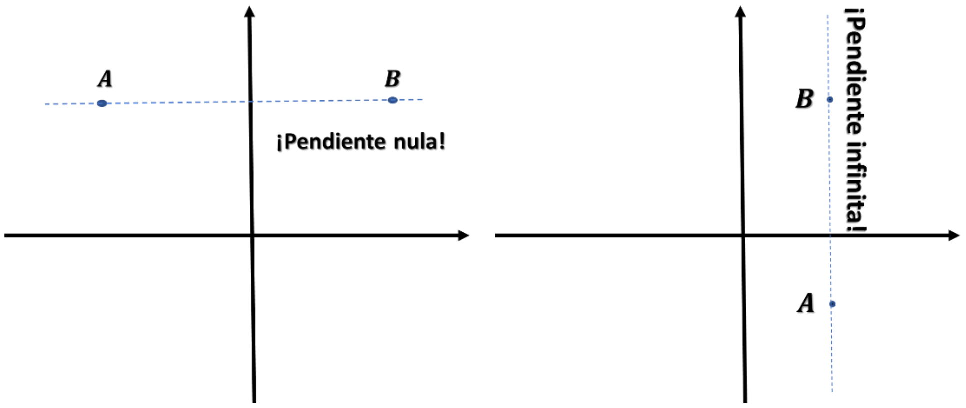
Se piensa que los estudiantes pasan por alto muchos aspectos del tratamiento descrito, como partir de un solo caso (dos puntos en el primer cuadrante uno de ellos arriba del otro y en cierta posición) para obtener fórmulas de aplicación generalizada, para cualesquiera puntos del plano. Puede no ser significativa para los “expertos” o “especialistas”, pero confunde a los estudiantes. Esta manera de proceder se le llama “inducción inmediata”, de hecho, se trata de una falacia conocida: generalización apresurada, conocida como *secundum quid*. Es algo frecuente en la enseñanza de la matemática, se demuestran proposiciones sobre cuadriláteros usando solamente uno, o sobre triángulos, a partir de un caso, incluso provoca errores, pues varios alumnos piensan que el teorema de Pitágoras es solamente la relación que se da entre un triángulo rectángulo de lados, 3, 4 y 5.



Si se permite plantear dudas libremente, algunos alumnos preguntan ¿cuál debe ser el punto con subíndices 1 o 2? ¿el que está más cerca de los ejes? pues está por debajo del otro ¿los dos puntos deben estar en el primer cuadrante? ¿qué sucede si los puntos no tienen ese tipo de posición? ¿cómo se debe proceder en casos diferentes? ¿Qué hacer cuando unos tengan coordenadas con signos negativos? ¿se tendrán que considerar distancias negativas? ¿Cómo influirán los signos en esos casos?, entre otras preguntas.



El colmo es cuando no se forma un triángulo, pero hay que aplicar una fórmula que depende de ello, al menos así se determinó. Aunque, en el caso de la distancia entre puntos se pase por alto pues se facilitan los cálculos, cuando se trata de las pendientes, sin escrúpulos se dice: la pendiente es negativa, cero o infinita. En estos casos, los alumnos, por lo general, guardan prudente silencio, pero piensan ¿de dónde se infiere esto?



Con la intención de tranquilizarlos a veces se les dice: No se preocupen, apliquen la fórmula tal y cómo está, considerando los signos de las componentes. Pero varios estudiantes piensan ¿dónde está eso de que en la matemática todo tiene explicación? ¿por qué dicen que no se debe hacer un enfoque memorístico? ¿qué pasa?

3. Recursos para atender los problemas

Cuando se enfrentan este tipo de cuestionamientos debe buscarse alguna forma de convencer, incluso a uno mismo, porque son temas que seguramente no se han explorado ni se han cuestionado. Pero, se reiteran cada ciclo escolar, sembrando continuamente confusiones e imágenes de la matemática no adecuadas.

Los primero que se requiere es revisar nuestra concepción de la matemática y modificar los recursos y secuencias que se utilizan en la enseñanza tradicional, en este contexto se puede avanzar si se presta atención a “los trucos” (sumar, restar, multiplicar o dividir, la misma cantidad, en ambos lados de una igualdad, cambiar una variable, etc.) o se siguen “las reglas” (paso uno, paso dos, …), aunque no se tiene claro por qué funcionan o de dónde provienen, aunque ayudan a minimizar el trabajo operativo. Sin embargo, la matemática no se genera así, depende más de las ideas y los significados en torno a los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos, como se puede constatar en la historia de las matemáticas y los resultados de la investigación en educación matemática.

Lo primero fue revisar libros de textos de geometría analítica, casi todos, son muy similares, siguen secuencias temáticas parecidas. Llama la atención que varios concluyen con translaciones y rotaciones, es raro que traten simetrías o reflexiones, a partir de lo cual se encuentran relaciones entre diversos tipos de representaciones algebraicas. Pero, el tratamiento es fundamentalmente algebraico, la geometría casi no se trata, o se incluye apara comprobar, a modo de ejercicio, algunas relaciones geométricas por métodos “analíticos”.

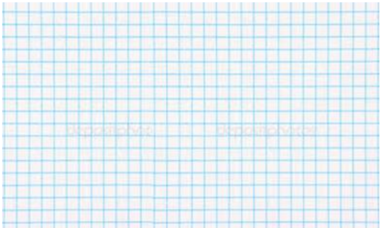
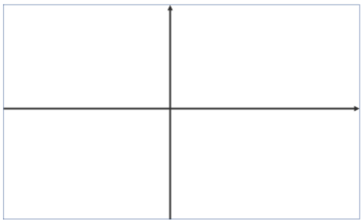
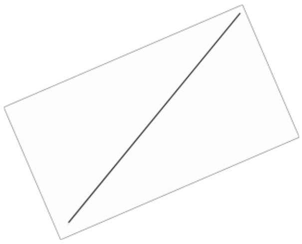
De acuerdo con una frase adjudicada a Einstein: si quieres resultados diferentes, hay que hacer proceder diferente. No obstante, son muy persistentes los procedimientos tradicionales, las nuevas ideas no vienen por sí solas, es necesario, además de entender el problema, buscar lo que se ha podido plantear al respecto. Las fuentes de ideas principales se fueron generando a partir de algunas ideas del programa Erlangen propuesto por Felix Kline (Rodríguez, 2017), el efecto de la percepción en el marco de la Teoría de la Gestalt y las ideas de Bruner y Dienes (Resnik, y Ford, W., 1991) quienes promovieron el uso de materiales manipulativos para invertir el proceso tradicional de enseñanza.

Sobre el tratamiento de las gráficas, los procedimientos se fueron definiendo a partir de varias fuentes como un curso de geometría analítica con un enfoque particular (Rees, 1970), el desarrollo del tema en un curso de aeronáutica (Sánchez – Serrano, 1962) y un libro con ideas muy importantes sobre el trazado de gráficas (Shilov, 1976).

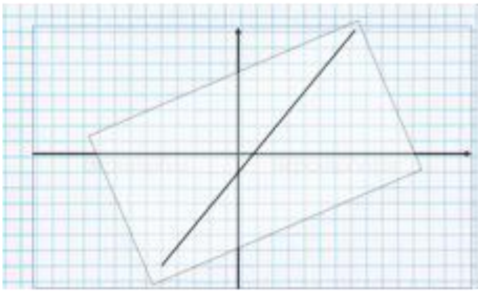
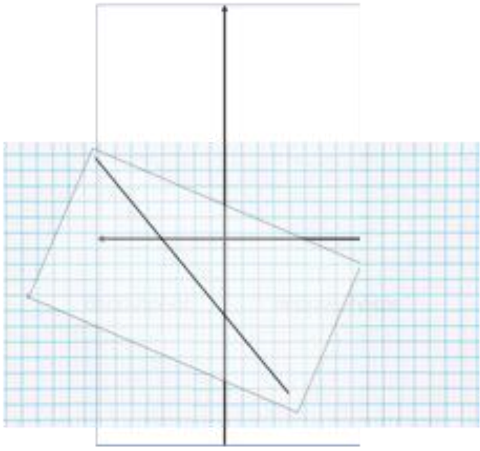
Se consideró importante iniciar con ideas básicas sobre transformaciones geométricas, sin llegar a excesos, para asegurar preponderancia de ideas geométricas. Por lo que se iniciaría de manera “informal” o “intuitiva”, con rotaciones de 90° solamente, simetrías o reflexiones, translaciones con movimientos paralelos a los ejes originales, aunque también se usaron cambios de escala en los ejes para el tratamiento de la elipse desde la circunferencia.

Con materiales manipulativos se plantearon actividades para que los estudiantes pudieran experimentar movimientos del plano y buscaran regularidades o patrones. Pero no se plantearon símbolos o igualdades para explicar los movimientos, solamente se pidió comunicar oralmente o con recursos simbólicos propios.

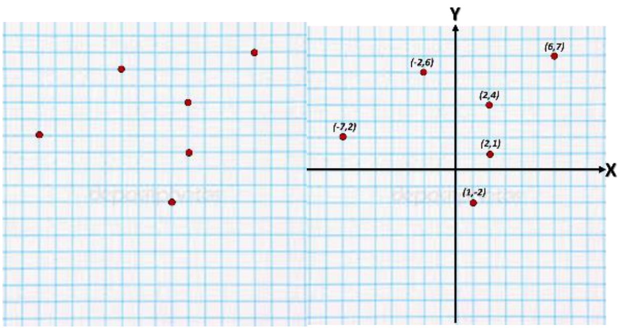
Para este propósito se utilizaron materiales al alcance: hojas de papel transparente y hojas cuadriculadas, pero también se usaron acetatos (material transparente que se emplea en la industria gráfica y se destina a la fabricación de películas fotográficas) transparentes con una base de cartón o madera cuadriculada, adicionalmente se usaron plumones de distintos colores para el trazo de ejes, puntos y líneas.

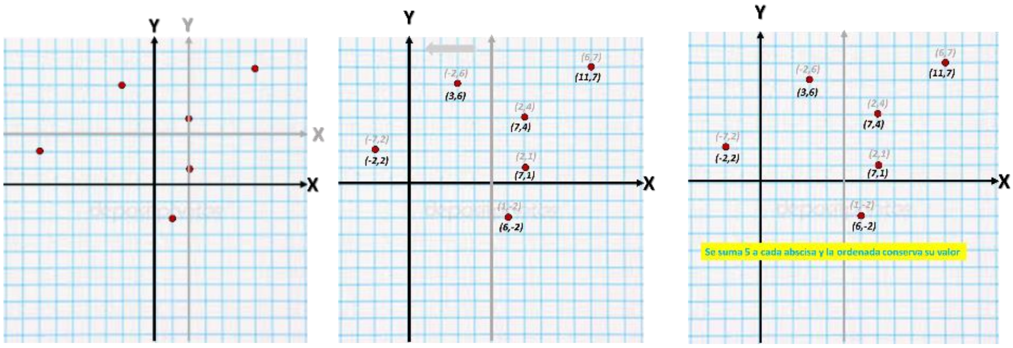
La base cuadriculada sirvió para sobreponer ejes en distintas posiciones y analizar el efecto en la asignación a puntos del plano, además de resaltar que se conservan las distancias y hay algunas regularidades sobre las inclinaciones de rectas con respecto a los ejes.

En un primer momento se colocan al azar puntos en la cuadrícula y después se colocan ejes cartesianos para determinar las coordenadas de los puntos



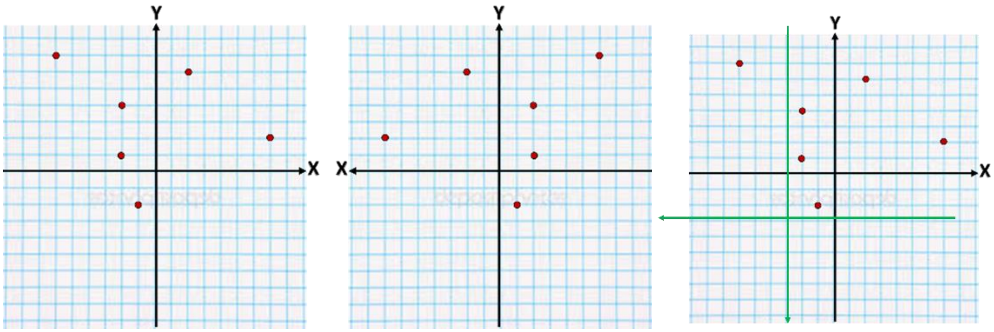
Después, se cambian de posición los ejes y se determinan las nuevas coordenadas de los puntos.



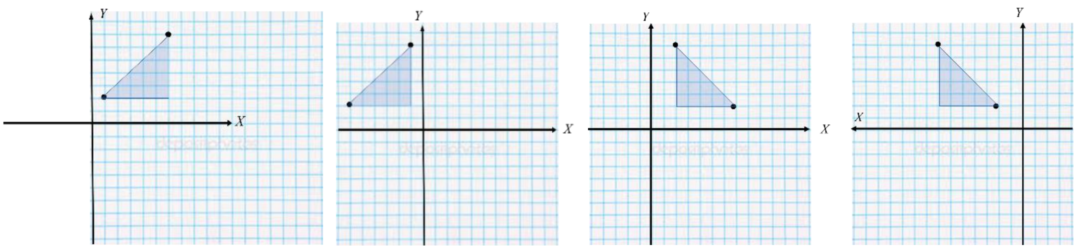
Esto se aplica a distintos tipos de movimientos de los ejes, buscando relaciones o regularidades entre movimientos de los ejes conservando un sistema de ejes y moviendo otro.

La atención se concentra en la afectación de coordenadas realizando ciertos movimientos, sumando o restando las mismas cantidades o se cambian signos o intercambian los papeles de los ejes de coordenadas, etcétera. Es importante reiterar que al principio se expresaron los resultados de manera oral, posteriormente, se induce a que simbolicen lo expresado verbalmente. Se puede influir paulatinamente a expresar dichos movimientos con alguna notación que hasta el final se puedan estandarizar los símbolos empleados.

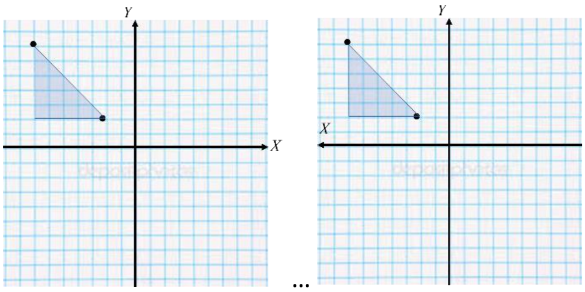
Así se entiende que un cambio de orientación de un eje puede representarse como reflexión o simetría y puede indicar un cambio de signo en las coordenadas, de tal modo que si expresan las coordenadas de un punto en un sistema y luego se indique que se realizó un movimiento de ejes, se puedan indicar las nuevas coordenadas, sin hacer dibujos o emplear símbolos, como un juego.



A partir de esto se puede argumentar que la distancia entre puntos, independientemente de su posición, se conserva y se pueden colocar los puntos en posiciones deseadas solamente moviendo los ejes, mostrando que los puntos en otras posiciones se pueden tener en la misma posición empleada en la obtención de fórmulas.



Algo similar pasa con la fórmula de la pendiente, considerada como la inclinación respecto al eje X. Cuando se hace referencia a la pendiente se requiere un triángulo similar y obtener la misma posición relativa de la que se usa para obtener la fórmula. Pero en el caso de inclinaciones entre 90° y 180° respecto al eje de las abscisas, se requiere una reflexión del eje X respecto al eje Y, por lo que habrá un cambio de signo, así que en ese caso las pendientes serán negativas.



Tratar movimientos de los ejes de manera intuitiva desde el inicio ayuda a dar certeza a las fórmulas que se trabajan, pero también prepara a los estudiantes para entender que esos movimientos se pueden expresar simbólicamente por medio de expresiones algebraicas.

4. Los significados de conjuntos de puntos en el plano: lugares geométricos

Una forma de abordar los conjuntos de puntos en el plano es atender a las relaciones entre las coordenadas dichos puntos. Es decir, tratar a dichos conjuntos de puntos del plano como “lugares geométricos”, en sentido amplio.

Cuando se hace referencia a este sentido de lugar geométrico, la atención se concentra en las propiedades que deben satisfacer las coordenadas de los puntos, lo que se puede constatar gráficamente y expresar con ayuda de números y literales.

Por ejemplo, que la ordenada de los puntos es el triple de la abscisa o que la ordenada sea igual al doble de la abscisa menos ocho, etcétera.

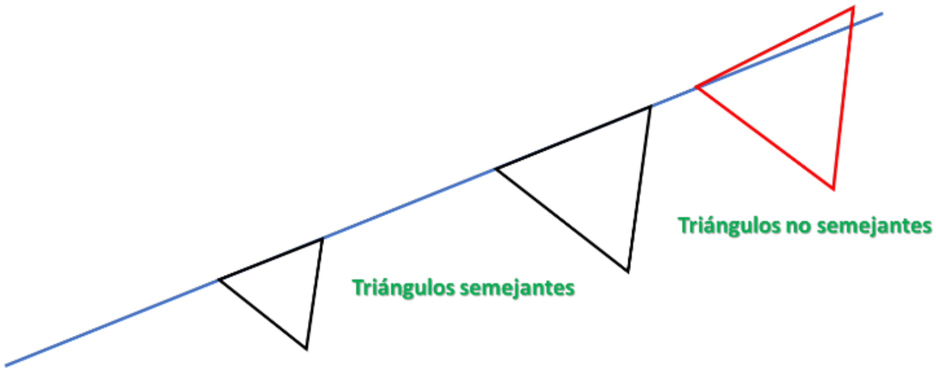
5. La recta sin fórmulas

En la “ecuación canónica de la recta” la pendiente tiene un lugar especial, pero depende de convenciones y ampliaciones de conceptos. En efecto, la tangente de un ángulo se calcula por un cociente de las magnitudes de dos lados. Las razones trigonométricas se trabajan en triángulos rectángulos, se definen en ese contexto, para ángulos agudos, pues son cocientes de lados del triángulo rectángulo, pero para abarcar ángulos mayores que 90°, se amplía esa noción y se puede entender la extensión del concepto con ayuda del círculo trigonométrico, aunque parece que se están considerando “distancias negativas”, lo cual, por lo menos parece incongruente, esa imagen tienen muchos alumnos, pero es una convención adecuada para hablar de los valores de funciones trigonométricas para ángulos de todo tipo y poder definir una función trigonométrica. Así con esas extensiones “convencionales” o “inventadas” (que funcionan muy bien) se habla de pendientes negativas, lo que genera confusiones, al menos dudas. A los alumnos solamente se les informa lo que se hace y se pide seguir reglas que afectan su intuición.

Esta extensión ayuda definir funciones elípticas o hiperbólicas que son muy importantes en la matemática y lo mejor de todo es que funcionan. Pero, eso no lo pueden valorar los estudiantes, está fuera de su alcance.

Otro tema son las imágenes que se tiene de un objeto matemático como el de la recta, que se puede prolongar infinitamente y donde entre dos puntos hay una infinidad de puntos, convenciones necesarias, al interior de la disciplina, que se pasan por alto y no necesariamente tendrían que abordarse con los alumnos, por eso se pasa con disimulo ese tipo de temas.

También cuando se habla de "linealidad", aunque se provoca una imagen un tanto "borrosa" de lo que se quiere indicar con ello, sobre todo a nivel geométrico. Así que hay que hacer plausible esa noción de linealidad geométrica, para ello se puede considerar que, al trazar triángulos con dos vértices en una recta, al tomar otros dos puntos de la recta se podrían trazar triángulos semejantes trazando paralelas a los lados del primer triángulo, pero si solamente se traza un triángulo con un punto sobre la recta esto no se podría lograr.



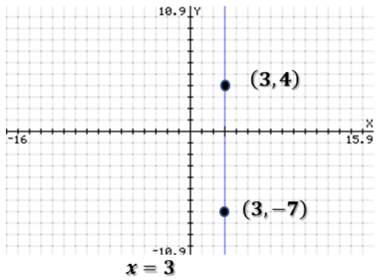
Se puede usar ese sentido de linealidad para trabajar las gráficas de rectas.

6. Los casos más sencillos sin fórmulas ni convenciones.

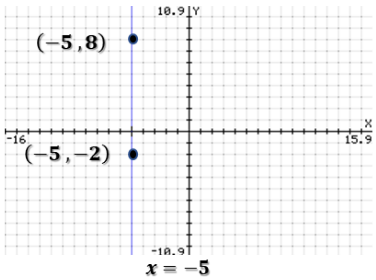
Para iniciar, podemos abordar casos "degenerados", aquellos que los conjuntos de puntos tienen la misma abscisa, o la misma ordenada. Donde no se puede trazar un triángulo rectángulo con dos vértices sobre la recta y lados paralelos a los ejes.

Se puede considerar un conjunto de puntos con abscisa x igual a 3 (la ordenada puede tener cualquier valor) es decir, en cada punto la abscisa (x) tiene valor 3, así que no será extraño representar simbólicamente esta situación por: $x = 3$, una expresión así indica la condición establecida para el conjunto de puntos.

Así mismo, si la abscisa de todos los puntos es -5, se podrá representar por $x = -5$



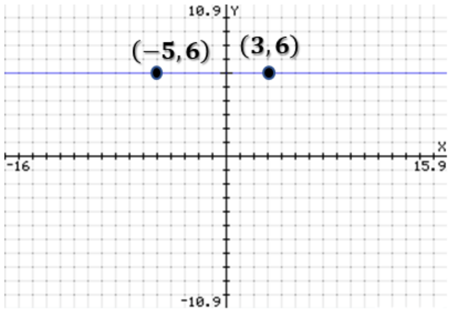
Conjunto de puntos en el plano que tienen abscisa igual a 3 y la ordenada cualquier valor.



Conjunto de puntos en el plano que tienen abscisa igual a -5 y la ordenada cualquier valor.

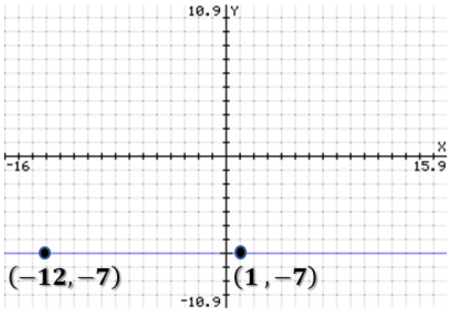
No será necesario mencionar que la pendiente de la recta es infinita ni utilizar algún triángulo rectángulo **¡Se tenía que decir y se dijo!**

Similarmente, si la ordenada tiene el mismo valor no será complicado asociarle una representación simbólica.



$y = 6$

Conjunto de puntos en el plano que tienen ordenada igual a 6 y la abscisa cualquier valor.



$y = -7$

Conjunto de puntos en el plano que tienen ordenada igual a -7 y la abscisa cualquier valor.

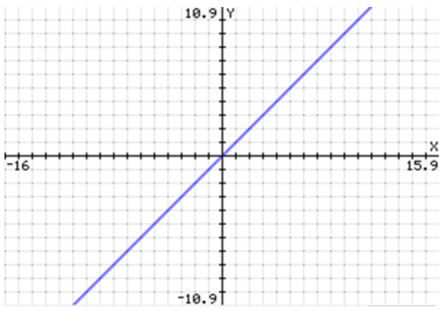
También se hace innecesario de hablar de una pendiente nula, en un caso donde en realidad “no hay pendiente”.

Estos casos se tratan en los libros de texto casi siempre con varios artilugios y se ubican al final de las secciones dedicadas a las rectas. Es muestra del prurito a seguir un “orden disciplinario” en vez de considerar al estudiante y su condición de lego en el tema.

7. Recta sólo hay una: la madre de todas las rectas

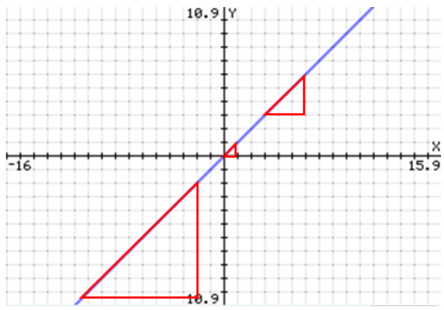
Otro conjunto sencillo de puntos en el plano puede obtenerse considerando los puntos que tienen sus coordenadas iguales. Podemos escribir una expresión del tipo $y = x$ o $x = y$ para representar esta relación, tiene sentido en los dos casos.

En una situación así no es necesario referirse a la tangente de un ángulo de 45°, pero si se podrá constatar que pueden formar triángulos especiales con dos vértices en puntos de la recta. En efecto, es posible trazar triángulos rectángulos isósceles, con dos lados paralelos a los ejes, la hipotenusa de estos triángulos es el segmento con extremos los puntos elegidos de la recta, todos los triángulos conformados así, serán semejantes, lo cual será de gran ayuda para determinar si un punto está o no sobre la recta, desde una perspectiva exclusivamente geométrica.



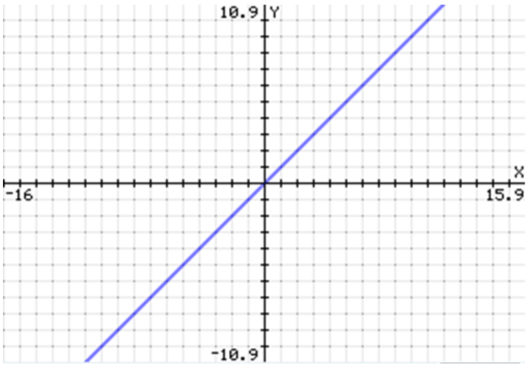
$y = x$ o $x = y$

Conjunto de puntos en el plano que tienen sus coordenadas iguales.



Con dos puntos sobre la recta se forma un triángulo rectángulo isósceles

Estos triángulos sirven de base para poder dar sentido a la “pendiente”. Las representaciones gráfica, algebraica y numérica. Ofrecen, a primera vista, la misma información: un conjunto de puntos del plano que tienen su ordenada igual a su abscisa.

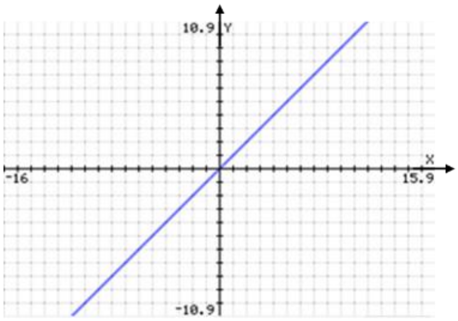


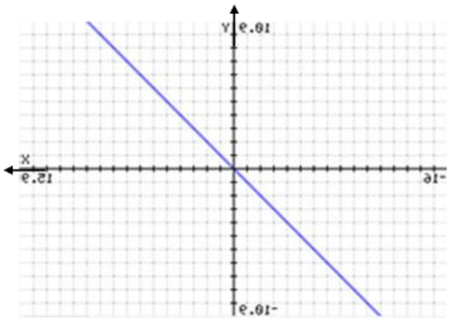
$$y = x$$

x	y
-9	-9
-8	-8
-7	-7
-6	-6
-5	-5
-4	-4
-3	-3
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

A esta recta le llamaremos la *recta madre o madre recta*, esto se entenderá después.

También se puede pensar en que las coordenadas tengan signos contrarios, lo cual se puede representar por $y = -x$. Pero, también se puede considerar como un caso relacionado con el anterior, con la recta madre, pues implica que la gráfica será un "reflejo" de $y = x$ respecto al eje de las ordenadas. Se resalta que dicho efecto se lograría si se cambiara la orientación del eje de las abscisas (lo cual se logra cambiando el signo de las referencias numéricas del eje).





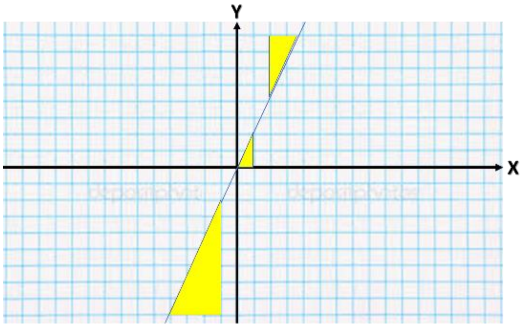
Se cambia la orientación del eje X, es decir, la parte positiva se cambia a la parte negativa, y la negativa a la positiva (hubo un cambio de signo en las abscisas).

Se hace innecesario el uso de valores negativos de la tangente "extendida".

8. La descendencia de la recta madre

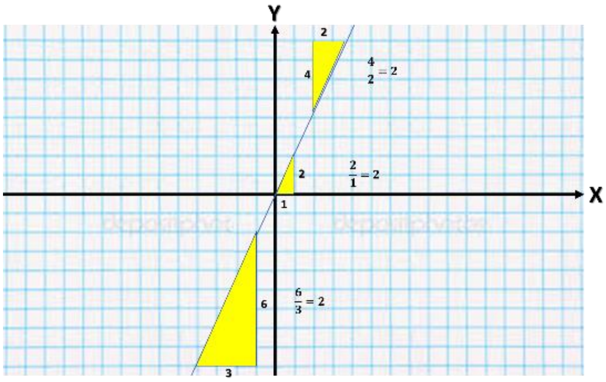
Todas las rectas se explican por movimientos de la madre recta ($y = x$). A partir de ella se explican las posiciones de todas las rectas del plano (excepto cuando las rectas son paralelas a alguno de los ejes de coordenadas). En efecto, si se inclina la recta madre para que se acerque al eje de las ordenadas (se hace más vertical) el triángulo de referencia alarga uno de sus lados. Es como una rotación de la recta respecto al origen de coordenadas. Por ejemplo, girar la recta madre para que el punto (1,1) se coloque ahora en el punto (1,2)

$y = 2x$



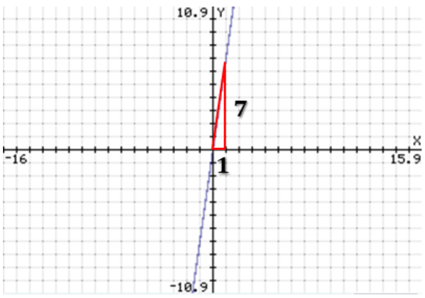
Lo cual conduce a otro tipo de relación entre las coordenadas de los puntos, que indica la expresión algebraica que corresponde:

$y = 2x$



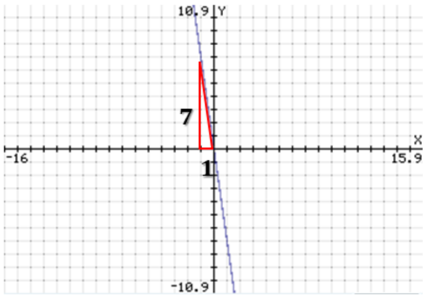
Es esta recta sus puntos cumplen la condición: la ordenada es el doble de la abscisa.

Esto puede hacerse con otras inclinaciones, cada vez más verticales y con las rectas de este tipo con pendiente negativa, que resultan de un reflejo respecto al eje de las ordenadas.



$y = 7x$

Conjunto de puntos en el plano que tienen sus ordenadas igual a siete veces la abscisa.

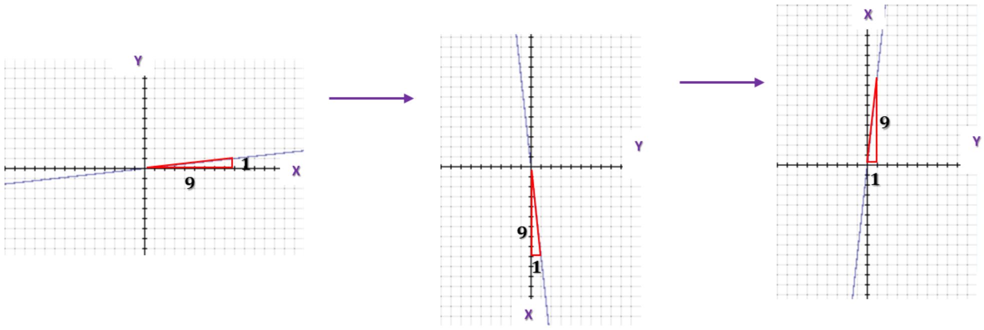


$y = -7x$

Conjunto de puntos en el plano que tienen sus ordenadas igual a menos siete veces la abscisa.

También se aplican movimientos de ejes para rectas que se “acuestan” (se acercan más al eje X). Se pueden transformar en rectas más verticales con movimientos de los ejes (una rotación y una reflexión).

Aprovechando esto se pueden obtener las expresiones algebraicas correspondientes. Después de una rotación y una reflexión, se llega a que los papeles de los ejes se intercambian y puede expresarse esta relación por: $x = 9y$ de lo cual se determina que la expresión correspondiente a los ejes originales es: $y = \frac{1}{9}x$.



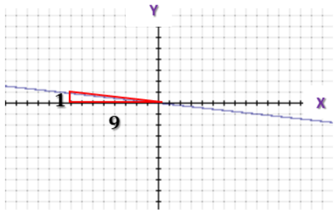
Una rotación de 90° en sentido dextrógiro, las Y toman el lugar de las X y las X tienen signos contrarios

Una reflexión del eje Vertical respecto al horizontal implica un cambio de signo en este (se intercambian los papeles de x y y.

$y = \frac{1}{9}x$ ← $x = 9y$

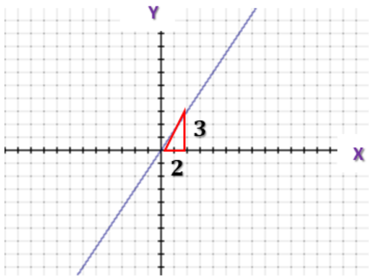
Conjunto de puntos en el plano que tienen sus ordenadas igual a 1/9 veces la abscisa.

También será posible encontrar las expresiones algebraicas cuando la inclinación se obtiene por una reflexión y solamente implicará un cambio de signo.

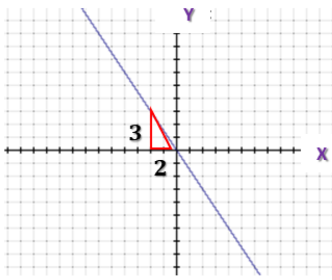


$$y = -\frac{1}{9}x$$

Las mismas ideas se aplican a otras pendientes que se expresan como fracciones:



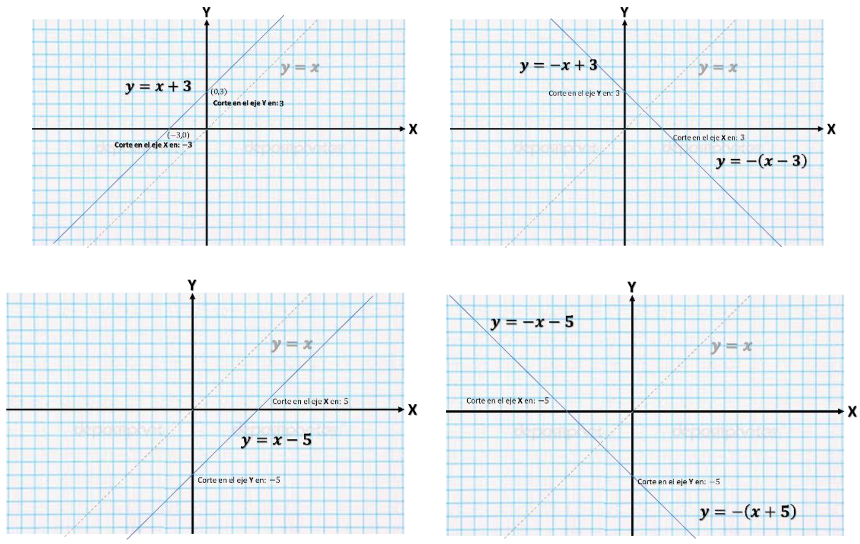
$$y = \frac{3}{2}x$$



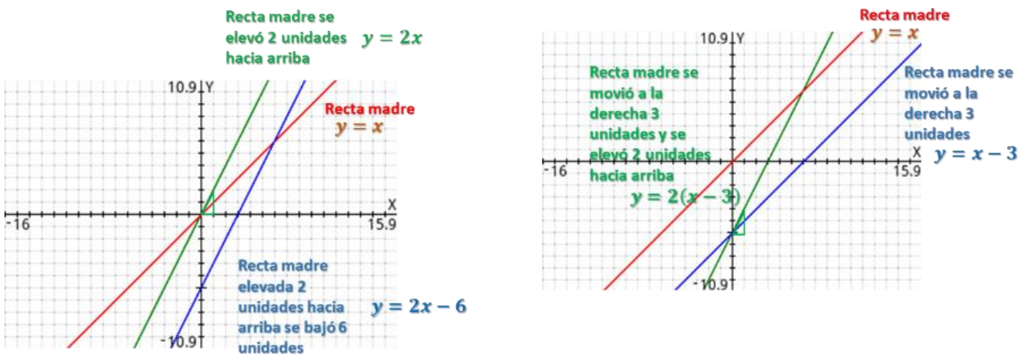
$$y = -\frac{3}{2}x$$

No se han hecho de lado el uso de representaciones numéricas, se trabajan directamente en la gráfica al contar valores de las escalas de los ejes para ubicar puntos o trazar los triángulos.

Ahora esas rectas se pueden “bajar” o “subir” respecto a los ejes, lo cual se explica por translaciones de los ejes o simplemente por sumar o restar una cantidad:

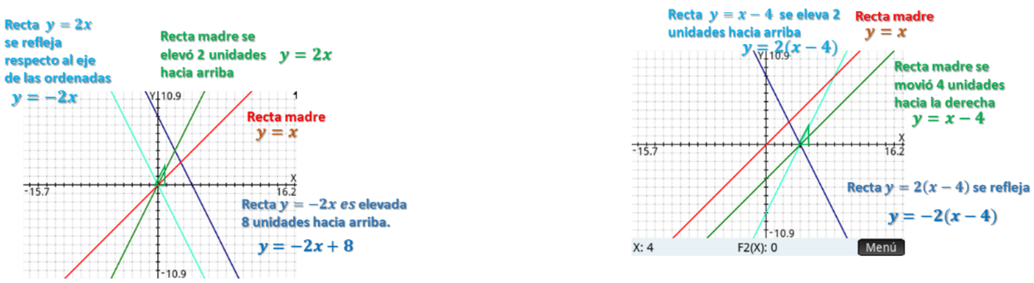


De esta forma se entiende el sentido de los números en las expresiones algebraicas:



Con la misma gráfica de una recta se pueden obtener dos expresiones algebraicas que implican diferentes transformaciones: $y = 2x - 6$ y $y = 2(x - 3)$

Análogamente, se procede cuando la inclinación es mayor que 90°:



Así se encuentran las expresiones algebraicas: $y = -2x + 8$ y, $y = -2(x - 4)$.

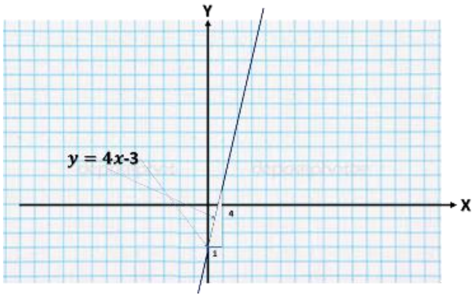
Después de analizar varios casos se constata que: $y = mx + b$ y $y = m(x - a)$, representan rectas donde m indica la inclinación o pendiente, b el valor del eje Y donde la recta "corta" al eje de las ordenadas (que se conoce como ordenada al origen) y a el valor del eje de las abscisas donde la recta lo "interseca".

Es así como, usando solamente transformaciones geométricas sencillas se da sentido a los elementos de expresiones algebraicas como: $y = mx + b$ o $y = m(x - a)$. Es decir, es posible abordar las representaciones algebraicas de la recta, sin trigonometría, ni convenciones sobre las razones trigonométricas de ángulos mayores que 90° (lo cual implica incorporar el círculo trigonométrico y dar valores sensatos, pero “extraños” en ciertos casos).

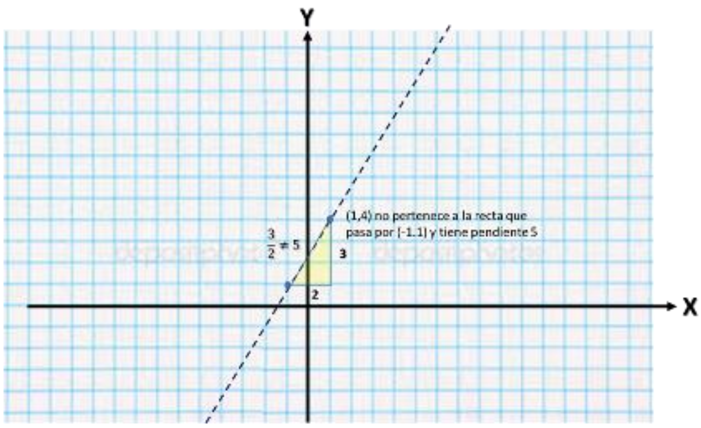
Tal vez aún no quede claro que hay otra ventaja. Se puede partir de las gráficas o relaciones numéricas para determinar ecuaciones de rectas, razonando y utilizando más elementos de geometría, modificando el uso exclusivo del álgebra y substituciones en fórmulas.

9. Encontrando expresiones algebraicas a partir de razonamientos geométricos

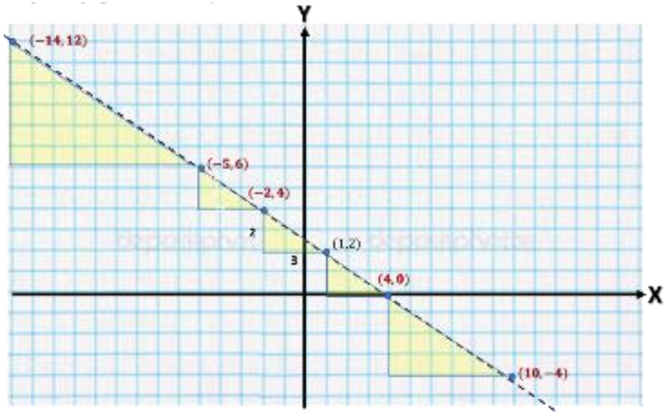
Graficar una recta se realiza normalmente tabulando valores a partir de la representación algebraica, y con los valores calculados se ubican puntos en el plano cartesiano para traza la gráfica (en realidad solamente se requieren dos puntos, aunque varios tabulan más de dos valores, es decir no se tiene clara la idea de lo que es una recta). Si se conocen valores de los cortes a los ejes, es muy sencillo determinar la expresión algebraica correspondiente. También se puede determinar si un punto está o no en la recta o determinar puntos sobre la recta solamente considerando triángulos semejantes. Por ejemplo, si se requiere graficar la recta: $y = 4x - 3$, con lo visto se realiza sin tabular, aunque el conteo de valores en la escala y las coordenadas de puntos se refieren a las relaciones numéricas.



O si se desea determinar si el punto (1,4) pertenece o no a la recta que pasa por (-1.1) y tiene pendiente 5, basta revisar la gráfica de la recta que pasa por (1,4) y (-1,1) y determinar si tiene pendiente 5.



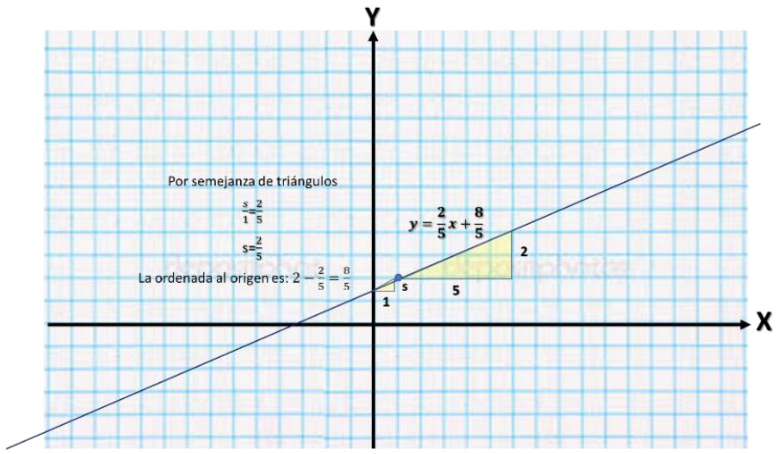
Si se desean puntos de una recta que pase por (1,2) y tenga pendiente $-\frac{2}{3}$



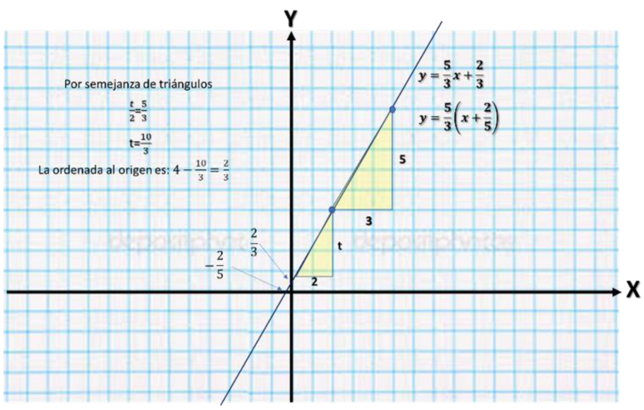
En los casos anteriores solamente se requiere una buena idea de lo que es una recta y no será necesario encontrar la expresión algebraica y después tabular.

Pero si se trata de determinar expresiones algebraicas de las ecuaciones de rectas que satisfacen ciertas condiciones será posible hacerlo solamente con elementos geométricos, principalmente utilizando la semejanza de triángulos.

Por ejemplo, encontrar la ecuación de la recta que pasa por (1,2) y tiene pendiente 2/5, se puede resolver partiendo de la gráfica y usando semejanza de triángulos para determinar la “ordenada al origen”.



O cuando se desea determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,4) y (5,10), puede determinar la ordenada al origen por semejanza de triángulos, razonando sobre la figura y no simplemente realizando substituciones y manipulaciones algebraicas.



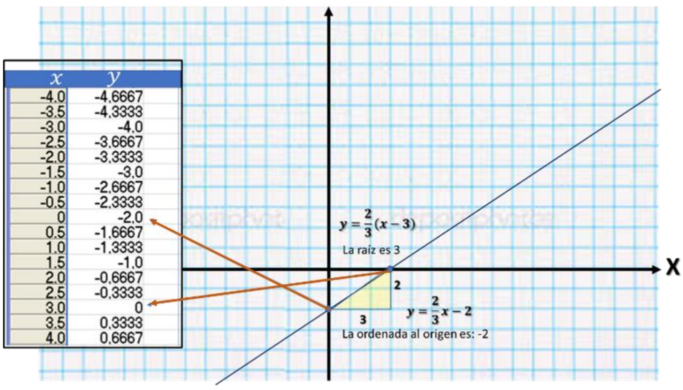
También dada una tabla de valores, si se sabe que la gráfica debe corresponder con una recta, se contarán con los elementos necesarios para encontrar una expresión, usando adecuadamente los valores que se proporcionan en la tabla.

Por ejemplo, dada la table:

x	y
-4.0	-4.6667
-3.5	-4.3333
-3.0	-4.0
-2.5	-3.6667
-2.0	-3.3333
-1.5	-3.0
-1.0	-2.6667
-0.5	-2.3333
0	-2.0
0.5	-1.6667
1.0	-1.3333
1.5	-1.0
2.0	-0.6667
2.5	-0.3333
3.0	0
3.5	0.3333
4.0	0.6667

Se puede encontrar la "ecuación de la recta" solamente usando recursos geométricos.

Si la tabla incluye los valores donde la recta "corta" a los ejes será muy sencillo hacerlo:



Si la tabla no incluye dichos valores solamente se requiere decidir tomar los más "cómodos", digamos el (-3.-4) y el (1.5,-1) u otros. No importa la elección, sino que se puedan utilizar las relaciones geométricas para dar sentido a las expresiones algebraicas.

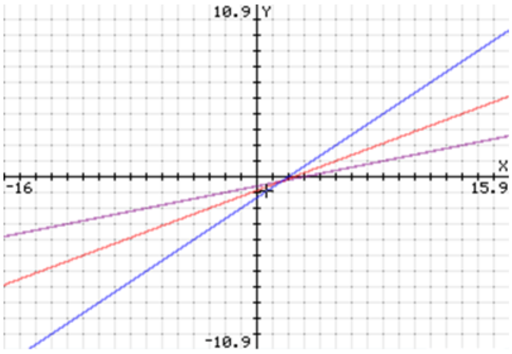
9. Manipulaciones algebraicas centradas en los "lugares geométricos"

Un problema, dado el carácter numérico, hay que tener claro que x y y se asocian con valores numéricos de las coordenadas de puntos en el plano de las literales, por ello cuando se desea utilizar el álgebra para manipular el tipo de expresiones algebraicas de las rectas, las literales se comportan con las mismas propiedades de los números., tal y como se realizan las manipulaciones algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

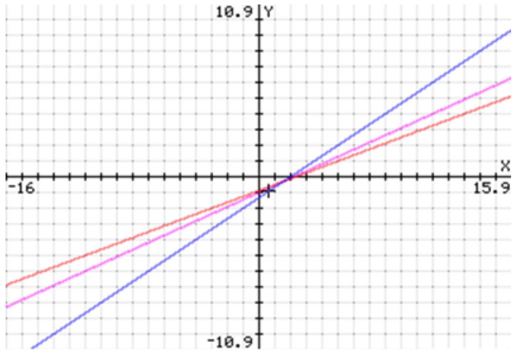
$$+\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ -3x + 8y = -7 \\ \hline -x \ + 5y = -3 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ -3x + 8y = -7 \\ \hline 5x \ - 11y = 11 \end{array}$$

Lo cual también conduce a gráficas que no se pueden interpretar como "suma" de expresiones algebraicas "completas", sino como operaciones entre números.

Quedando gráficas para la suma o substracción ajenas a lo que debería darse con otro significado de las relaciones en el plano que corresponden con el concepto de funciones reales de una variable real.



$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ + \quad -3x + 8y = -7 \\ \hline -x \ + 5y = -3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 4 \\ - \quad -3x + 8y = -7 \\ \hline 5x \ - 11y = 11 \end{array}$$

En este caso, las gráficas de las tres rectas concurren en un punto, lo cual es de esperarse, pues las expresiones algebraicas representan relaciones entre números, de tal modo que la solución de ecuaciones que se suman o se restan deberá ser también solución de la suma de las dos ecuaciones o su diferencia.

Comprobemos esto con una calculadora con CAS

solve({2*x−3*y=4, -3*x+8*y=−7},{x, y})

$$\left\{\left[\frac{11}{7} \quad \frac{-2}{7}\right]\right\}$$

solve({2*x−3*y=4, −1*x+5*y=−3},{x, y})

$$\left\{\left[\frac{11}{7} \quad \frac{-2}{7}\right]\right\}$$

solve({−3*x+8*y=−7, −1*x+5*y=−3},{x, y})

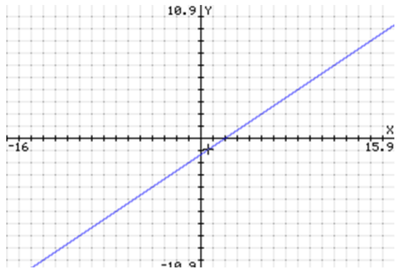
$$\left\{\left[\frac{11}{7} \quad \frac{-2}{7}\right]\right\}$$

La multiplicación o división de este tipo de expresiones resulta difícil de incorporar.

Sin embargo, una expresión como: $(\mathbf{2x-3y-4})(\mathbf{-3x+8y+7})=\mathbf{0}$, donde se usan las mismas ecuaciones, se interpreta simplemente como un producto de dos números.

Sabemos que, si el producto de dos números es cero, uno es cero, el otro es cero o ambos son cero.

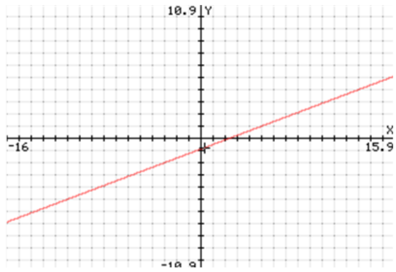
El efecto es interesante al graficar. Pues se puede igualar a cero cada factor y nos darían las mismas gráficas que presentamos antes:



$$2x - 3y = 4$$

Conjunto de puntos del plano cartesiano donde el doble de su abscisa menos el triple de su ordenada es igual a cuatro

A

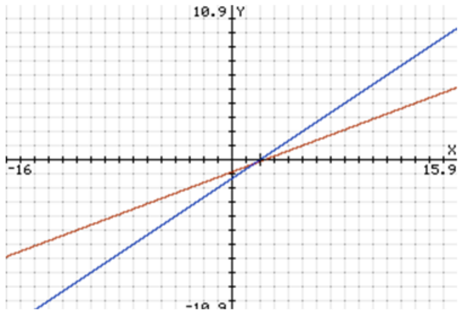


$$-3x + 8y = -7$$

Conjunto de puntos del plano cartesiano donde el negativo del triple de su abscisa más 8 veces el valor de su ordenada es igual a menos siete

B

Pero al graficar la expresión del producto, se obtienen las gráficas de las dos rectas al mismo tiempo.



$$(2x - 3y - 4)(-3x + 8y + 7) = 0$$

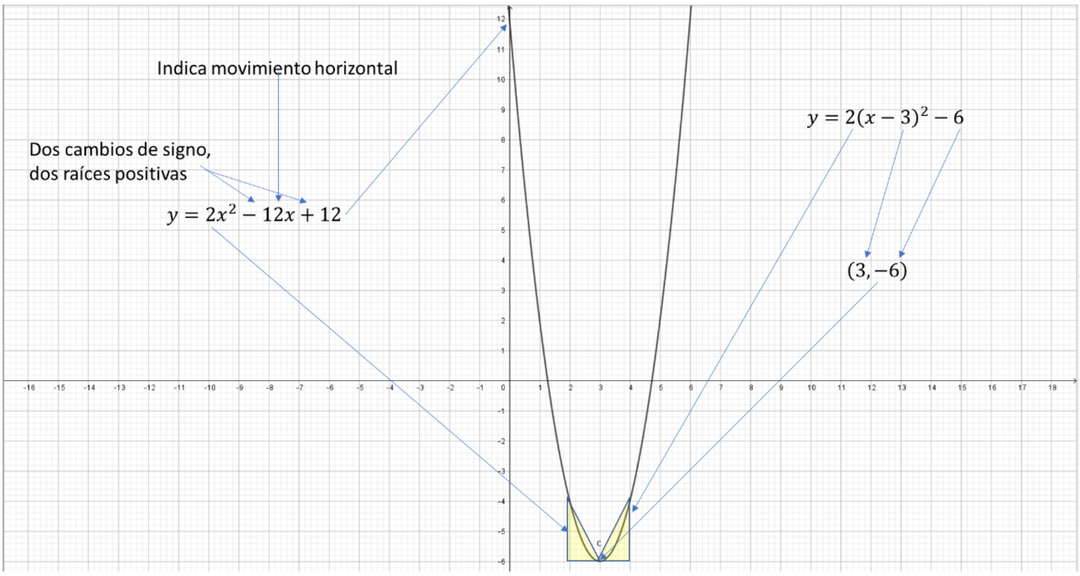
Conjunto de puntos del plano cartesiano donde el producto del número obtenido por doble de su abscisa menos el triple de su ordenada menos cuatro por el negativo del triple de su abscisa más 8 veces el valor de su ordenada más siete es igual a cero

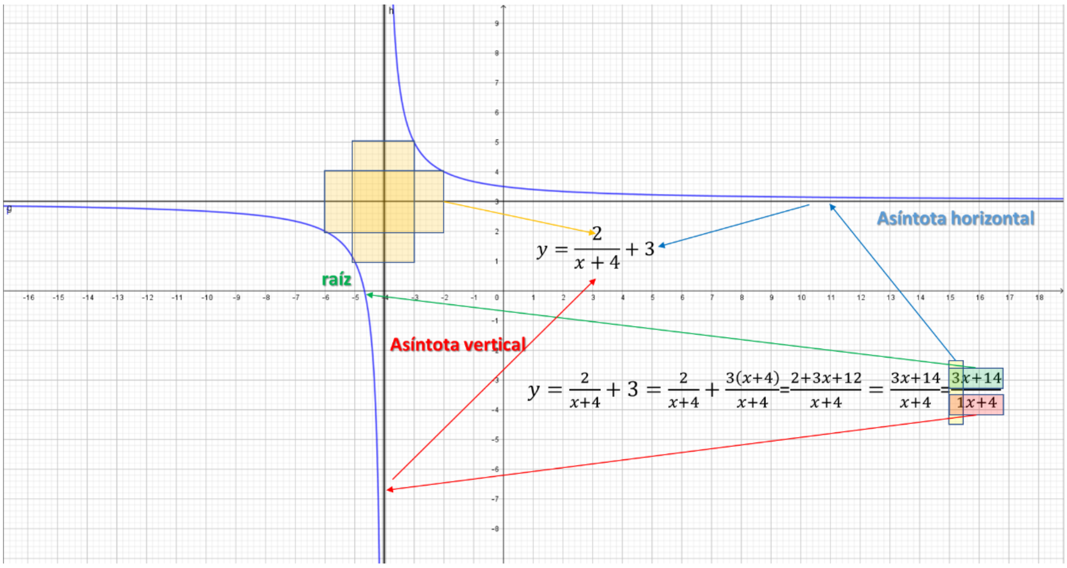
$$A \times B = 0$$
$$A = 0 \ o \ B = 0$$

Hay muchos aspectos interesantes de trabajar con las rectas como se ha enfocado en estas notas, por espacio no se pueden abordar, pero se deja como reto para el lector.

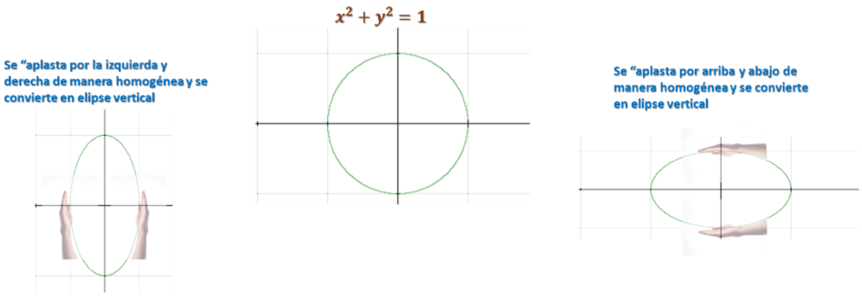
10. Las otras madres

De manera similar se pueden trabajar "lugares geométricos" la ordenada es igual al cuadrado de la abscisa ($y = x^2$) o la ordenada es igual al recíproco de la abscisa ($y = \frac{1}{x}$).





El caso de la circunferencia y la elipse se pueden abordar juntos pues una elipse se puede obtener al “aplastar una circunferencia” y se puede partir de la circunferencia unitaria.



Después de dar sentido a las relaciones numéricas, algebraicas y gráficas, se tienen mejores elementos para abordar con mayor profundidad y en menos tiempo, los contenidos de geometría analítica, quedando la posibilidad de dar a conocer otro tratamiento de las cónicas definidas como los lugares geométricos conocidos y justificarlos como cortes de un plano a un cono utilizando las esferas de Dandelin.

Comentarios finales

Generalmente, un curso de geometría euclidiana plana antecede al curso de geometría analítica, lo cual sucede con la tendencia a usar el álgebra, así las relaciones geométricas pasan a un segundo plano, ya no se usan de manera importante.

Así las ideas fundamentales de "lugares geométricos" que se asocian con sencillez a expresiones algebraicas, pueden llevarse a otro significado, como el de función real de una variable real. que se trabajarán después (como en los cursos de cálculo). Además, se puede resaltar la importancia de la notación pues la estructura algebraica de las funciones se parece más a la de los números:

Operaciones de funciones definidas a través de los valores de ellas

$\boldsymbol{f \pm g}$	$\boldsymbol{(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)}$	
$\boldsymbol{f \times g}$	$\boldsymbol{(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)}$	
$\boldsymbol{f \div g}$	$\boldsymbol{(f \div g)(x) = f(x) \div g(x)}$	$\boldsymbol{g(x) \neq 0}$

Para graficar las funciones lineales se hace de la misma forma que en lo anterior.

Eso ayuda a analizar polinomios y funciones racionales por medio de productos o divisiones de funciones lineales, dando sentido a muchos teoremas importantes y a límites infinitos analizando comportamientos asintóticos.

Se desarrolla el pensamiento gráfico, lo cual puede ser de mucha utilidad en la vida profesional pues muchas aplicaciones dependen de interpretar adecuadamente las gráficas que se obtienen por distintos medios, sobre todo cuando no se cuenta con un modelo algebraico.

Un enfoque como el propuesto permite desarrollar diversas habilidades matemáticas que tienen relación con la flexibilidad o la reversibilidad del pensamiento, además de favorecer el desarrollo de una memoria matemática, que implica reconocer estructuras y no casos específicos.

También, se favorece el uso de la inducción y la analogía que son dos elementos fundamentales para el desarrollo del pensamiento matemático.

Es importante indicar que resulta adecuado ir abandonando los acetatos y la base de papel cuadriculado, es una idea fundamental en el uso de manipulativos, pues se deben desarrollar habilidades para pensar en las gráficas y sus representaciones mentalmente sin manipular objetos, con dibujos propios. Para un mejor trazo de líneas o ejes se pueden utilizar otros recursos como graficadores (ya sea software como Graphmatica, GeoGebra, etc. o del que poseen algunas calculadoras gráficas), con estos recursos se pueden abordar de ecuaciones diferencial, entre otros.

Referencias

Abric, JC (1987). Coopération, compétition et représentations sociales. Cousset, Suiza.

Mancera, E. (2004). Notas del curso Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía. UIA. México.

Mancera, E. (2005). La danza de las rectas. Innovaciones Educativas, 7ª edición, Education TI, USA.

Resnik, L. y Ford, W. (1991). A enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Temas de Educación, Paidós. España.

Rees, P. (1970), Geometría Analítica. Reverté. España.

Rodríguez, R. (2017). Una nueva visión de la Geometría Fleix Kline. Serie Genios Matemáticos, RBA, España.

Sánchez – Serrano, A. (1962). Representación de curvas problemas y aplicaciones. Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos, España.

Shilov G. E. (1976); Cómo construir gráficas. Temas Matemáticos, Limusa, México

Eduardo Mancera. Se ha dedicado a la enseñanza de varios niveles educativos, como docente e investigador, sus áreas de investigación son la resolución de problemas, el uso de recursos tecnológicos en la enseñanza, la enseñanza de la matemática con manipulativos, tanto a nivel de propuestas en el aula, como elaboración de textos de matemáticas y formación de docentes. mancera.eduardo@gmail.com