UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 136-141

El rincón de los problemas

La función cuadrática. Una experiencia didáctica en la perspectiva de la creación de problemas

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Tarea

Crear un problema de contexto extra matemático en cuya solución se emplee la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15, x \in R$.

Decidí proponer esta tarea, en un taller con profesores de secundaria, preparando sesiones de trabajo – en la perspectiva de creación de problemas – para introducir el tema de la función cuadrática, luego de haber trabajado con ellos problemas y gráficos de las funciones afines (funciones cuya expresión general es $g(x) = ax + b$, para $x \in R$, con a y b parámetros también en R.)

Los participantes del taller, primero individualmente y luego en parejas, dedicaron varios minutos para crear un problema como el pedido y su dificultad mayor era la condición de ser un problema de contexto extra matemático (los que usualmente se llaman “contextualizados”, o “vinculados a situaciones reales”).

Algunos intentaron construir un problema recordando aquellos problemas de optimización que consideran precios de pasajes que aumentan determinado porcentaje en el precio por cada cierto número de pasajeros que disminuye, pero no llegaron a una propuesta concreta. Además, comentamos el carácter un tanto forzado de tales enunciados, en el intento de proponer “contextos reales”.

Mi propósito era que los esfuerzos de crear tal problema los lleve a vincular las funciones cuadráticas con las funciones afines y finalmente se logró al sugerirles que busquen ideas para crear problemas escribiendo la expresión funcional de otra manera. Un grupo factorizó la expresión dada:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3);$$

y otro grupo escribió:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15 = x(x+2) - 15$$

Con la expresión factorizada, un grupo propuso el siguiente problema:

Problema 1

Si multiplicamos la edad que tuvo Carlos hace 3 años por la edad que tendrá Carlos dentro de 5 años, obtenemos 48. ¿Qué edad tiene Carlos actualmente?

Con la otra expresión, otro grupo propuso el siguiente problema:

Problema 2

¿Cuáles pueden ser las dimensiones de una habitación rectangular si su área debe ser como máximo 15 metros cuadrados y su largo debe ser dos metros más que su ancho?

Los grupos socializaron sus problemas y sus soluciones.

Para el Problema 1, se resolvió la ecuación

$$(x + 5)(x - 3) = 48.$$

Ciertamente, se tuvo que volver a la expresión no factorizada

$$x^2 + 2x - 15 = 48.$$

Como ésta es equivalente a

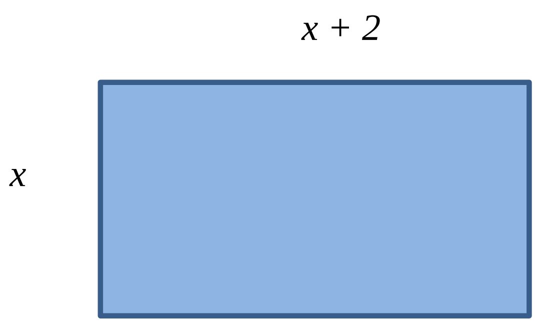
$$x^2 + 2x - 15 - 48 = 0$$

y a

$$(x + 9)(x - 7) = 0,$$

finalmente, se obtuvo $x = 7$ ó $x = -9$ y se concluyó que la edad actual de Carlos es 7 años.

Para el Problema 2, se mostró la siguiente figura:



Y se planteó la siguiente inecuación:

$$x(x+2) \leq 15,$$

que luego se afinó a

$$x(x+2) \leq 15, \quad x \in R, \quad x > 0.$$

Para resolver esta inecuación se pasó a

$$x^2 + 2x - 15 \leq 0;$$

$$(x + 5)(x - 3) \leq 0.$$

De aquí, empleando los llamados “puntos críticos para resolver una inecuación”, se llegó a

$$-5 \leq x \leq 3.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la restricción $x > 0$, se concluyó que los posibles valores de x son todos los números reales del intervalo]0 ; 3].

Comentarios y avances

En ambos problemas creados se utilizó la expresión algebraica que define la función f dada en la tarea inicial; en el primero, lo esencial fue resolver una ecuación cuadrática y en el segundo una inecuación cuadrática.

Hice el comentario anterior y pedí a los participantes en el taller que traten de hacer más explícita la vinculación de las soluciones de los problemas con la función f dada, es decir, que destaquen algo que sea propio de la función, más allá de problemas algebraicos sobre ecuaciones o inecuaciones cuadráticas.

Luego de algunos minutos de desconcierto y reflexión de los participantes, sugerí que se tuviera en cuenta otra forma de representar la función dada; es decir, no quedarse solo en el "registro de representación algebraico". Inmediatamente mencionaron el "registro gráfico", lo cual aplaudí e incentivé su uso, ya sea para hacer alguna variación en los problemas creados o para elaborar un nuevo problema.

Así, surgió una variación del Problema 2:

Problema 2'

¿Cuáles pueden ser las dimensiones de una habitación rectangular si su área debe ser como máximo 15 metros cuadrados y su largo debe ser dos metros más que su ancho? Ilustrar la solución empleando el gráfico de una función cuadrática.

Al Problema 1 podía hacerse una variación similar, pero insistí en crear un problema en el marco de los registros gráficos, usando la factorización de la expresión algebraica de la función f ; es decir, usando

$$f(x) = x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3).$$

Pedí que crearan un problema usando las gráficas de las funciones afines presentes en la factorización. Indiqué que el contexto podría ser intra matemático.

Así surgió el problema al que pretendía que llegaran los participantes:

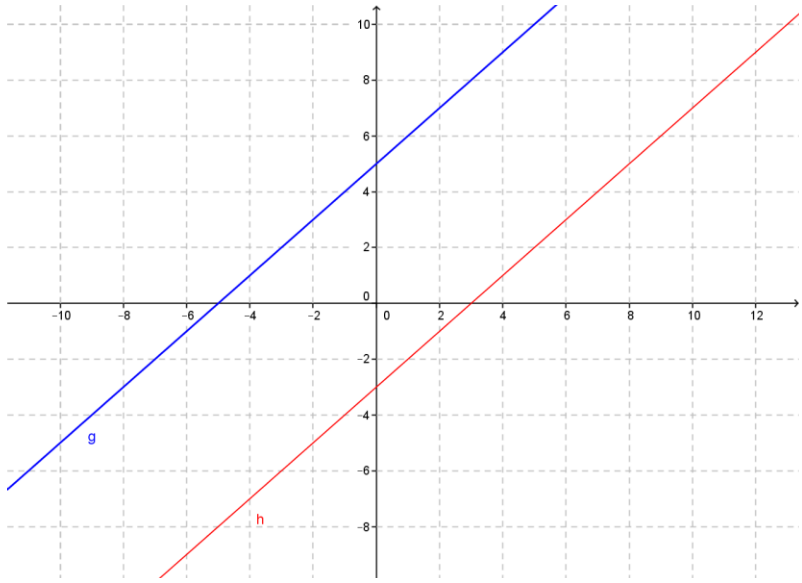
Problema 3

Esbozar el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15$, empleando los gráficos de dos funciones afines.

Ciertamente, lo primero que se hizo fue graficar las funciones afines, que llamamos g y h, definidas por

$$g(x) = x + 5 \quad \text{y} \quad h(x) = x - 3.$$

Indiqué la conveniencia de hacer ambos gráficos en un mismo sistema de coordenadas. Se obtuvo así, gráficos como los que se muestran a continuación:



Una primera reacción fue obtener puntos del gráfico de f multiplicando las ordenadas correspondientes de los puntos de los gráficos de g y de h; sin embargo, sugerí que hiciéramos un análisis más global, más cualitativo, apoyándonos en algunos "puntos clave". Pedí que encuentren puntos del gráfico de g y del gráfico de h por los cuales tendría que pasar el gráfico de f. Fue natural pensar en los puntos de intersección con los ejes coordenados y pronto se llegó a la conclusión que el gráfico de f debe pasar por los puntos (-5 ; 0), que es el punto de intersección del gráfico de g con el eje X y por el punto (3 ; 0) que es el punto de intersección del gráfico de h con el eje X. En el primero se tiene que $g(-5) = 0$ y en consecuencia el producto con el valor que tome h, sin importar cuál sea, será 0. Análogamente con el segundo punto y así tenemos, en clara coherencia con el registro algebraico, que $f(-5) = 0$ y $f(3) = 0$.

Propuse entonces la tarea de determinar, examinando los gráficos de g y h, qué signos tienen las ordenadas de los puntos del gráfico de f, para $x \neq -5$ y para $x \neq 3$.

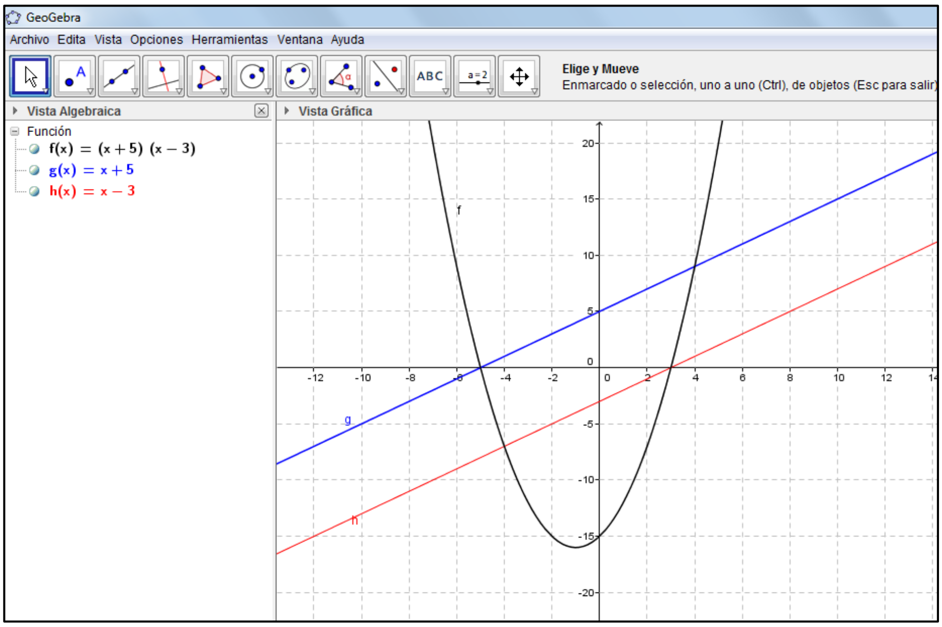
En los grupos de trabajo se encontró – y luego se expuso en la pizarra – que:

Cuando x < -5, los gráficos de g y h están debajo del eje X y en consecuencia son de ordenadas negativas. Esto lleva a que el producto sea positivo; es decir, los puntos del gráfico de f tienen ordenada positiva y el gráfico de f, para x < -5, estará por encima del eje X.

Análisis similar llevó a la conclusión que para -5 < x < 3 el gráfico de f estará por debajo del eje X y para x > 3, el gráfico de f estará por encima del eje X.

Con ideas intuitivas sobre continuidad de la función f, se llegó a la idea que su gráfico es una curva con puntos cuyas ordenadas toman valores positivos y decrecientes hasta llegar al punto (-5 ; 0). Como pasa también por el punto (3 ; 0), una posibilidad es que los valores negativos que toman las ordenadas para x en el intervalo]-5 ; 3[son decrecientes en un subintervalo de la izquierda y luego crecientes en un subintervalo de la derecha. El gráfico continuaría, para x > 3, con puntos cuyas ordenadas toman valores positivos y crecientes. En resumen, observando los gráficos de g y h, se intuye que la gráfica de f es una curva que pasa por los puntos (-5; 0) y (3 ; 0); que es decreciente hasta cierto punto del intervalo]-5 ; 3[; y luego creciente.

Luego del convencimiento de esta percepción intuitiva del gráfico de f, usamos GeoGebra para comparar con lo intuido y se celebró con entusiasmo al observar en la pantalla lo que se muestra a continuación:



Esto dio lugar, además, a una digresión sobre resolución de inecuaciones cuadráticas vinculándolas con el gráfico de la función cuadrática correspondiente, teniendo en cuenta sus puntos de intersección con el eje X y la ubicación de sus puntos en el plano cartesiano para valores de x diferentes de las abscisas de los puntos de intersección con el eje X. Con este enfoque, se resolvió en detalle la ecuación del problema y la inecuación del problema 2.

Comentarios finales

1. Lo desarrollado es solo un punto de partida para plantearse nuevas preguntas y crear nuevos problemas que contribuyan a establecer conexiones intra matemáticas y con la realidad.

Algunas de tales preguntas-problema son: Si tenemos los gráficos de dos funciones afines, sin conocer sus expresiones algebraicas

¿Cómo sería el gráfico de la función cuadrática cuyos factores son tales funciones afines?

¿Cómo sería tal gráfico si las rectas no son paralelas y ambas crecientes?

¿Qué pasaría si las rectas son no paralelas y ambas decrecientes?

¿Qué pasaría si una recta es creciente y la otra decreciente?

2. Otra pregunta relacionada con funciones cuadráticas y afines:

Dada una parábola cualquiera, con eje de simetría vertical, ¿siempre existe un par de rectas tales que el producto de las funciones afines correspondientes tenga como gráfico la parábola dada? ¿La respuesta se puede justificar con argumentos gráficos?

3. El enfoque presentado, mediante creación de problemas, contribuye a pasar de manera natural de funciones afines a funciones cuadráticas, reforzando conceptos y criterios matemáticos involucrados, como funciones crecientes, funciones decrecientes, puntos de intersección con el eje de abscisas, factorización, teorema fundamental del álgebra, producto de funciones, relación entre el signo de un producto y los signos de sus factores, etc.

   Trabajando de manera similar con estudiantes de secundaria, no resultará como "mágico" o impuesto, que el gráfico de una función cuadrática "es una parábola".

4. Notemos que en nuestro desarrollo no hemos usado la palabra parábola, pues es otro problema relacionar la función cuadrática con la definición de parábola, como lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y de una recta dada.

5. Otros problemas creados ante la tarea propuesta, fueron:

   a) Esbozar el gráfico de la función f, dada por $f(x) = x^2 + 2x - 15,\ x \in R$, empleando traslaciones del gráfico de la función $w(x) = x^2,\ x \in R$.

   b) ¿Qué longitud podría tener el lado de un terreno de forma cuadrada si al añadir 5 metros a uno de sus lados y disminuir 3 metros al otro, se obtiene un terreno rectangular cuya área es a lo más de 65 m^2?

6. Una ventaja de usar la creación de problemas es involucrar a los participantes en la búsqueda de relaciones intra matemáticas y extra matemáticas y afrontar el reto de resolver problemas creados por ellos mismos o por sus co participantes. Esto fue evidente en el taller realizado, pues las socializaciones de problemas y sus soluciones contribuyeron a crear nuevos problemas a partir de los problemas que se socializaba. Una muestra de ello es el problema enunciado en (b) del comentario 5, que recoge ideas de los problemas 1, 2 y 3.

7. Cabe destacar que en este enfoque es muy importante preparar adecuadamente las tareas y orientar cuidadosamente su desarrollo para que la creación de problemas fluya respetando las iniciativas de los participantes. Varios artículos relacionados con diseño de tareas pueden encontrarse en Watson y Ohtani (2013).

Referencia

Watson, A. & Ohtani, M. (Eds)(2013) *ICMI Study 22: Task Design.* United Kingdom: University of Oxford.