REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 41. Marzo 2015
Páginas 107 - 133

Modelos de crescimento populacional: um olhar à luz de uma socioepistemologia

Lourdes Maria Werle de Almeida, Camila Fogaça de Oliveira

Fecha de recepción: 17/04/2012
Fecha de aceptación:22/02/2014

Resumen	En este artículo, alineó con la relevancia que los contextos sociales, culturales e históricos tienen para la construcción del conocimiento, nosotros tratamos del desarrollo de algunos modelos de crecimiento de la población en la luz de Socioepistemología. Se presenta el desarrollo de modelos de Thomas Robert Malthus, Pierre-François Verhulst y Benjamín Gompertz y hacemos un análisis de las prácticas sociales y de las prácticas matemáticas relacionadas con el desarrollo de estos modelos. **Palabras clave**: Modelos; Practicas; Socioepistemologia.
Abstract	In this article, aligned with the relevance that social, cultural and historical contexts have for the construction of the knowledge, we treated of the development of some models of population growth in the light of Socioepistemology. We present the development of models of Thomas Robert Malthus, Pierre-Francois Verhulst and Benjamin Gompertz and do an analysis of social practices and mathematical practices related to the development of these models. **Keywords**: Models; Practices; Socioepistemology.
Resumo	Neste trabalho, alinhados com a relevância que contextos sociais, culturais e históricos têm para a construção do conhecimento, tratamos do desenvolvimento de alguns modelos de crescimento populacional à luz da Socioepistemologia. Mais especificamente, apresentamos o desenvolvimento dos modelos de Thomas Robert Malthus, Pierre-François Verhulst e Benjamin Gompertz e fazemos uma análise de práticas sociais e práticas matemáticas relacionadas ao desenvolvimento destes modelos. **Palavras-chave:** Modelos; Práticas**;** Socioepistemologia.

1. Introducción

A natureza contextual do conhecimento tem sido discutida em diferentes pesquisas da área de Educação Matemática e tem sido orientada por diferentes perspectivas teóricas. Ainda que as discussões tomem encaminhamentos diversos, não há contrapontos no que se refere à importância de aspectos sociais para a estruturação do conhecimento.

Neste trabalho, também alinhados com a relevância que contextos sociais, culturais e históricos têm para esta estruturação, nos referimos a socioepistemologia como perspectiva teórica sob a qual traçamos nossos argumentos. E é a luz dessa perspectiva que falamos da natureza sistêmica do conhecimento e nos referimos a práticas associadas à sua construção, em sintonia com o questionamento já apresentado por filósofos como Gaston Bachelard, da objetividade do fenômeno e da neutralidade do sujeito no ato de conhecer.

Trazendo essas discussões para o âmbito da matemática, tratamos de práticas sociais e matemáticas associadas ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional de tal forma a considerar o contexto de distintas épocas e culturas em que se deu este desenvolvimento.

Assim na estrutura do texto, inicialmente apresentamos uma caracterização da Socioepistemologia e, tratamos de práticas sociais e práticas matemáticas. A seguir, identificamos práticas sociais e matemáticas associadas ao desenvolvimento dos modelos de Thomas Robert Malthus, Pierre-François Verhulst e Benjamin Gompertz considerando o espaço histórico, cultural e as estruturas matemáticas do final do século XVIII e início do século XIX usadas por estes autores.

2. Socioepistemologia

A socioepistemologia pode ser considerada uma perspectiva teórica que trata do conhecimento social, histórico e culturalmente situado, envolvendo os fenômenos de construção e difusão do conhecimento (Cantoral 2003). As discussões sobre esta perspectiva têm sua origem associada a dois eventos científico-acadêmicos realizados no mês de setembro de 1997 (Seminario de Investigación en Matemática Educativa – México e Conference on Research in Mathematics Education - EUA) e ao educador matemático mexicano Ricardo Cantoral Uriza. A sua disseminação, entretanto, tem se intensificado na última década entre educadores matemáticos de diferentes países, especialmente da América Central e da América do Sul.

Segundo Cantoral (2004),

> a *socioepistemologia*, ou epistemologia das práticas sociais relativas ao conhecimento, é uma aproximação teórica de natureza sistêmica que permite tratar dos fenômenos de produção e difusão do conhecimento considerando uma perspectiva múltipla, pois articula em uma mesma unidade de análise as interações entre a epistemologia do conhecimento, sua dimensão sociocultural, os processos cognitivos que lhe são associados e os mecanismos de sua institucionalização via ensino (Cantoral, 2004, p.1, tradução nossa).

A esta natureza sistêmica do conhecimento estão associadas, portanto, diferentes componentes: a componente epistemológica, a componente cognitiva, a componente didática e a componente social exercendo influências sobre as demais.

Martínez (2005) apresenta uma explicação a respeito das componentes, escrevendo:

> A didática é aquela própria da configuração dos diferentes sistemas didáticos, a cognitiva é própria do funcionamento mental, a epistemológica é próprias da natureza e significados do conhecimento matemático (Martínez, 2005, p.198, tradução nossa).

A ênfase nas práticas sociais, na busca por compreender a construção do conhecimento, faz com que, ao intervir no sistema, a componente social, ao mesmo tempo em que influencia as demais, podendo mesmo modificá-las, também sofre influências destas.

Neste sentido Espinosa (2006) argumenta que:

> La incorporación de la práctica social modifica el centro de atención de la componente epistemológica, lo desvía de los conceptos u objetos matemáticos preestablecidos a la identificación de prácticas de referencia y actividades, ubicando a estas en contextos particulares. La componente cognitiva asume entonces al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se han desarrollado socialmente y la componente didáctica, finalmente se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina sus efectos e implicaciones didáctica (ESPINOSA , 2006, p.818).

Assim, a componente social atua como um “pano de fundo” em que as demais estão apoiadas e, em situações de ensino e aprendizagem, o conhecimento é produzido na interação entre a epistemologia, os aspectos didáticos, os processos cognitivos e os fatores sociais associados.

De acordo com Arrieta et al (2004), ainda que a caracterização do que vem a ser uma ‘perspectiva socioepistemológica’ esteja sendo estruturada, é possível identificar características fundamentais desta perspectiva: i) a superioridade das práticas sobre os objetos; ii) o caráter situado destas práticas, isto é, o contexto é inseparável das práticas e iii)o caráter discursivo da construção social do conhecimento associado a interações. No encaminhamento dos autores, no âmbito da Educação Matemática, a perspectiva permite conceber a matemática como um conhecimento com significados próprios, que se constroem e se reconstroem no contexto da atividade que se realiza e considera as práticas sociais como geradoras do conhecimento (matemático).

2.1 Práticas sociais e práticas matemáticas

De acordo com Covián (2005), a prática social não é o que faz em si o indivíduo ou o grupo, mas aquilo que o faz fazer o que faz. Arrieta (2003, p.24) defende que o “conceito de prática conota fazer algo, mas não simplesmente fazer algo em si mesmo e por si mesmo; é algo que em um contexto histórico e social outorga uma estrutura e um significado ao que fazemos. Nesse sentido a prática sempre é uma prática social”.

De modo geral, podem-se entender as práticas sociais como

> toda ação ou conjunto intencional e organizado de ações físico-afetivo-intelectuais realizadas, em um tempo e espaço determinados, por um conjunto de indivíduos, sobre o mundo material e/ou humano e/ou institucional e/ou cultural, ações essas que, por serem sempre, em certa medida e por um certo período de tempo, valorizadas por determinados segmentos sociais, adquirem uma certa estabilidade e realizam-se com certa regularidade. [...] (Miguel, 2003, p.27).

As práticas sociais constituem o elemento central nesta perspectiva socioepistemológica para a construção do conhecimento e, segundo Cantoral e Farfán (2008), a relação entre práticas sociais e a construção de conhecimento desloca o foco do próprio objeto de conhecimento para as práticas sociais associadas a esta construção. O que interessa não é somente como é construído o conhecimento associado a uma estrutura formal, mas, sobretudo, como ele se constrói com relação às intencionalidades humanas, determinadas pelas interações com os sujeitos e com o contexto.

Considerando o âmbito da Educação Matemática, interessam-nos práticas que requerem ou utilizam conhecimentos matemáticos e que se realizam em comunidades não necessariamente científicas, mas que, em certa medida, são influenciadas também por estas comunidades. Assim, podemos nos remeter a práticas matemáticas.

Segundo Vilela (2009), as práticas matemáticas constituem um conjunto de práticas sociais identificadas com alguma intencionalidade, em situações e contextos específicos, determinados pela força normativa das formulações de determinados grupos. Para a autora as práticas matemáticas constituem

> realizações humanas, mas não simplesmente como práticas intencionais, e sim condicionadas pela própria estrutura da linguagem, que limita e regula as possibilidades de desenvolvimento da matemática nas práticas específicas (Vilela, 2009, p.209).

Exemplos de práticas matemáticas são as denominadas práticas matemáticas científicas e práticas matemáticas escolares. A prática matemática científica pode ser vista como o conjunto de práticas sociais associadas ao desenvolvimento da matemática e suas aplicações nas academias, como os centros de pesquisas, as universidades ou as faculdades. Ela está "voltada à produção matemática em estado nascente" (Oliveira, 2008, p.54), tendo como intenção fazer, reproduzir e comunicar o conhecimento matemático científico (Arrieta, 2003). A prática matemática escolar, por sua vez, pode ser entendida como o conjunto de práticas sociais realizado sob os condicionamentos da situação escolar (Vilela, 2007), que de alguma maneira, se relaciona com a prática matemática científica. Contudo, tal prática matemática possui regras próprias e diferentes interesses quando em relação à prática matemática escolar.

Não se trata de pensar a prática matemática científica como uma construção autônoma e/ou autossuficiente na construção do conhecimento científico, nem tampouco se trata de pensar a matemática escolar como uma versão didatizada da matemática científica. Mas trata-se de reconhecer "uma tensão, e não identidade, entre educação (escolar) e ensino (da matemática científica)", onde os métodos, técnicas, valores e resultados da matemática científica serão filtrados, adaptados, retraduzidos e revalorizados, tendo como referência — implícita ou explícita — o ambiente educativo em que essas operações se realizam. (Moreira; David, 2003, p.76).

Numa perspectiva socioepistemológica as práticas matemáticas estão sintonizadas com aspectos ainda mais gerais tais como a atividade humana, a ressignificação e as práticas sociais. A atividade humana neste contexto tem a intenção de contrastar com a noção da atividade matemática por si só, em convergência com o questionamento, já apresentado por filósofos como Gaston Bachelard, da objetividade do fenômeno e da neutralidade do sujeito no ato de conhecer. A ressignificação diz respeito à possibilidade de que significados próprios podem emergir para o conhecimento em função do contexto histórico e/ou cultural. As práticas sociais, vistas como o cerne da socioepsitemologia, são constituídas, como já caracterizamos em linhas anteriores deste texto, por ações intencionais de indivíduos ou grupos humanos para agir sobre a realidade que os cerca.

Considerando estas diferentes práticas matemáticas e suas relações com práticas sociais, diversos autores argumentam que estas práticas podem ser observadas considerando 'unidades de análise' ou 'marcos de referência' (Buendia, 2006; Martinez, 2005; Farfán, 2008). Assim, o conceito de derivada, o conceito de integral, a ideia de indução, a construção das funções trigonométricas, são exemplos de unidades de análise. Nesta perspectiva, neste trabalho concentramos nossos esforços na identificação da produção de conhecimento em relação ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional e, neste sentido, estamos interessados nas práticas sociais e matemáticas associadas a este desenvolvimento. Não nos referimos, entretanto, à integração destes modelos nos currículos escolares e na análise da construção de conhecimento em ambientes escolares.

Neste encaminhamento, apresentamos a construção de modelos de crescimento populacional e de práticas sociais e matemáticas associadas a esta construção, considerando circunstâncias histórico-sociais e epistemológicas associadas a este desenvolvimento.

3. Modelos de crescimento populacional

O rápido crescimento das principais cidades da Europa e o aumento da população pobre nas regiões urbanas a partir dos anos de 1950 contribuiu para o interesse em desenvolver métodos ou modelos capazes de estimar a população mundial. Neste contexto, estudiosos de diferentes áreas iniciaram seus estudos com a intenção de realizar estas estimativas. Embora houvesse ensaios de diferentes especialistas, alguns deles tiveram importância fundamental e os modelos por eles desenvolvidos sustentariam a análise do crescimento populacional por muitos e muitos anos: os ingleses Thomas Robert Malthus e Benjamin Gompertz; e o francês Pierre-François Verhulst.

3.1 O modelo de Thomas Robert Malthus

Thomas Robert Malthus nasceu no ano de 1766, no condado de Surrey, na Inglaterra. Em 1784, com dezoito anos de idade, começou a estudar na Universidade de Cambridge, formando-se em Matemática quatro anos mais tarde. Ele teve a oportunidade de estudar a física newtoniana e recebeu uma boa formação humanística, tornando-se versado em História e em Letras clássicas (grego, latim) e modernas (inglês, francês). Em 1793, com vinte e sete anos de idade, foi admitido como pesquisador na Universidade de Cambridge. Em 1798 publicou sua obra *An Essay on the principle of population* (O Ensaio sobre o Princípio da População) e em 1805, foi nomeado professor de História Moderna e Economia Política no East India College. Segundo Szmrecsányi (1982), as atribuições deste posto, que foi conservado até a morte em 1834, deram origem a todos seus demais trabalhos[1].

Segundo Silva (2005), as ideias de Malthus tiveram influência tanto das leituras dos trabalhos de Adam Smith, Condorcet ou Godwin, quanto do meio e das circunstâncias de sua época.

> O rápido crescimento das cidades européias depois de 1500, devido à concentração urbana de populações pobres, conduziu a uma força de trabalho com dimensões elevadas depois de 1750. As pequenas manufaturas que existiam nas cidades desde a Idade Média tinham agora mão-de-obra barata em abundância, do que se aproveitaram os proprietários

[1] Nosso foco está na obra *Ensaio*, em particular nos postulados a que se refere sua teoria da população e não nas demais obras publicadas por Malthus.

> de muitas delas para expandir seus negócios. Embora a jornada de trabalho dos operários atingisse oitenta horas semanais, os salários eram muito baixos. Empregavam-se mulheres e crianças porque elas podiam fazer o mesmo trabalho que os homens, mas recebiam salário muito inferior. As condições de trabalho eram horríveis e acidentes sérios eram comuns. Os trabalhadores viviam em guetos imundos, insalubres, muitas vezes em famílias grandes que se comprimiam em habitações minúsculas e sem aquecimento (Silva, 2005, p.277).

O texto de Silva (2005) revela que a industrialização requeria, além de uma força de trabalho disponível, uma classe empreendedora com acesso a capitais e investida de autoridade. Foi nesse contexto que se iniciou a Revolução Industrial, por volta de 1750 na Inglaterra, se difundindo por outras partes da Europa e pela América, fazendo emergir a burguesia no final do século XVIII.

A obra "O Ensaio sobre o Princípio da População", como expressa o próprio prefácio, foi sugerida por uma conversa com Godwin[2]. "A discussão iniciou com a questão geral sobre o futuro progresso da sociedade" (Malthus, 1798, p.vii, tradução nossa).

> O tema central do *Ensaio* era o crescimento da população e da pobreza, problemas reais e concretos que não podiam ser ignorados por quem quer que acompanhasse mais de perto as circunstâncias em que estava se processando a Revolução Industrial, então em pleno curso na Grã-Bretanha (Meek *apud* Szmrecsányi, 1982 p.13).

Em 1798, as aglomerações industriais começavam a crescer, o proletariado da fábrica surgia, e ao mesmo tempo, o país atravessava uma crise das mais graves. O agravamento da miséria se deu pelo aumento dos impostos para os pobres. Malthus escreveu seu Ensaio em meio ao aumento rápido da população e a essa penúria, relativa mais à má distribuição de riqueza do que ao grande número de seus habitantes (Mantoux, sd).

Sua teoria sobre o crescimento populacional humano está baseada em dois postulados: 1. "O alimento é necessário para a subsistência do homem". 2. "A paixão entre os sexos é necessária e deve permanecer praticamente em seu estado permanente". (Malthus, 1798, p.4, tradução nossa).

Segundo Malthus (1798), tais postulados parecem ter sido fixados pelas leis da natureza, desde que teve qualquer conhecimento sobre a humanidade. Assumindo como garantidos, com vistas a fazer previsões sobre a situação em estudo e tentar intervir nos acontecimentos e na política de seu tempo, Malthus estabelece que "a capacidade de reprodução da população é superior à capacidade da terra para produzir meios de subsistência para o homem". E, por isso, quando não controlada, a população aumenta em proporção geométrica, enquanto os meios de subsistência aumentam em progressão aritmética (Malthus, 1798, p.4, tradução nossa).

Em seu Ensaio, Malthus tomou como regra que a população, quando não controlada, cresce dobrando a si mesma, a cada vinte e cinco anos, ou aumentando em uma progressão geométrica. Considerando um estado onde prevalecem costumes puros e simples e onde os meios de subsistência são suficientes para constituir uma família, deixando-se capacidade de crescimento da população se

[2] William Godwin (1756-1836), partidário da Revolução Francesa; seu trabalho mais famoso, *Enquiry concerning political justice*, foi publicado pela primeira vez em 1793.

exercer sem obstáculos, o aumento da espécie humana seria evidentemente muito maior do que qualquer aumento conhecido até o momento (Szmrecsányi, 1982).

Os postulados de Malthus conduziram a argumentações sobre as relações entre o crescimento da população. O que se pode observar em seus trabalhos é que seu modelo não foi escrito em termos de uma linguagem matemática.

Esta opção de Malthus de não apresentar em seus textos formulações matemáticas não está justificada nestes textos. Considerando o momento histórico da evolução do Cálculo Diferencial e Integral, entretanto, é possivel observar que já eram conhecidos trabalhos com resultados que poderiam subsidiar, do ponto de vista matemático, as hipóteses apresentadas por Malthus.

De fato, em 1691, Leibniz já havia estruturado a técnica de separação de variáveis e a comunicou em uma carta a Huygens, resolvendo uma equação diferencial do tipo

$$y\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{f(x)}{g(y)}$$

embora não tenha, naquele momento, formulado um método geral para a resolução de equações deste tipo.

Em 1690, John Bernoulli havia apresentado o processo conhecido como separatio indeterminatarum (separação de variáveis) e em 1692, o método da “multiplicação por um fator integrante”, para resolver equações nas quais a separação de variáveis não se podia aplicar. Resolveu então

$$\alpha x dy - y dx = 0$$

em que, mesmo sendo possível separar as variáveis, ainda não era conhecido o logaritmo $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ necessário para a resolução. (Nápoles e Negrón, 2002). Já em 1697, a equação com a, b constantes,

$$ady = yp(x)dx + by^n q(x)dx$$

foi transformada em uma equação diferencial linear de primeira ordem, mediante a substituição $y^{1-n} = v$ por John Bernoulli, passando a equação a chamar-se equação de Bernoulli.

Contudo, com os métodos apresentados até então, a teoria geral das equações diferenciais não podia ser proposta. Resultados de caráter mais geral começaram a se apresentar a partir de meados dos anos 20 do século XVIII. Em 1724, o matemático italiano Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) teve sucesso na integração de alguns casos especiais da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha ,$$

com α, a, b constantes. John Bernoulli muito tempo antes tinha tentado resolvê-la, mas sem sucesso. Tal equação também foi ocupação de outros matemáticos como Leibniz e Daniel Bernoulli (Nápoles e Negrón, 2002).

Uma teoria mais geral para a resolução de equações diferenciais aparece exposta pela primeira vez nas *Institutiones Calculi Integralis* de Leonhard Euler (1707-1783), obra que consta de três volumes que vieram à luz sucessivamente nos anos 1768, 1769 e 1770 com um suplemento em 1794. Contudo, o século XVIII consistiu na solução de equações particulares específicas. Foi a partir dos casos específicos que uma teoria mais geral foi sendo estruturada.

Diante da necessidade de repensar e estruturar o Cálculo Diferencial e Integral, Cauchy (1789-1857) começou a escritura sistemática de suas notas de classe. Com o objetivo da investigação científica, sua obra ressalta o pensamento conceitual e a eliminação do pensamento algorítmico presente até o momento. Segundo Nápoles e Negrón (2002), o discurso sustentado pelo Cours Inédit de Cauchy, agrega a derivada à concepção Euleriana de equação diferencial.

Considerando este momento histórico do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e de algumas equações diferenciais, a opção de Malthus de não escrever um modelo matemático para as suas conjecturas, talvez possa ser pelo modo como elaborou seus trabalhos, dirigindo-os, essencialmente, às autoridades e aos idealizadores da Revolução Industrial.

Atualmente, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus, assume que a variação do crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, o que significa dizer que a população aumenta em progressão geométrica ou em crescimento exponencial.

Em termos de linguagem matemática, considerando P_t o número de pessoas de uma população (em milhões) no ano t, uma constante α que pode ser descrita como $\alpha = n - m$, onde n representa a taxa de natalidade e m representa a taxa de mortalidade, e P_0 uma população inicial, a equação $P_{t+1} - P_t = (n-m)P_t = \alpha P_t$, para $t = 0, 1, 2, \ldots$, e usando a recursividade pode ser escrita como

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0 , \tag{1}$$

foi a primeira expressão associada às ideias de Malthus sobre o crescimento da população. Usando a relação entre função exponencial e logaritmo e fazendo $k = \ln(\alpha + 1)$ temos:

$$P_t = P_0 e^{kt} , \tag{2}$$

Para encontrar a taxa da progressão geométrica α, consideramos um trabalho independente de Malthus, publicado em 1824, cujo título é *População,* no suplemento à quinta edição da Enciclopedia Britannica. Essa obra tem o mérito de mostrar, em forma condensada, o pensamento de Malthus sobre a temática populacional (Szmrecsányi, 1982). Malthus, nesta publicação, usou dados dos censos de 1790 a 1820 da população branca dos Estados Unidos.

> De acordo com um censo regular, realizado por ordem do Congresso em 1790, o qual por todas as razões deve ser considerado essencialmente correto, a população branca dos Estados Unidos era de 3 164 148 habitantes. Um censo similar, feito em 1800, mostrou que ela tinha aumentado para 4 312 841. Portanto, ela crescera durante os dez anos a uma taxa de 36,3%, a qual, se mantida, dobraria a população em cerca de 22 anos e 4 meses e meio. De acordo com um terceiro censo, de 1810, a população branca era de 5 862 092, a qual, comparada com aquela de 1800, mostra, na segunda década, um aumento de cerca de 36%, que, se mantido, dobraria a população em cerca de 22 anos e meio. (Estes números são tomados dos *Statistical Annals*, de Seybert, p.230.) De acordo com o censo de 1820, a população branca era de 7 861 710, que, comparada com a de 1810, mostra um aumento, na terceira década, de 34,1%, que, se mantido,

> dobraria a população em 23 anos e 7 meses. (O número é tirado do *National Calendar* americano de 1822 e desde então tem sido comparado com o censo original, tal como foi publicado para uso dos membros do Congresso.) Se compararmos com vinte e cinco anos o período que a população leva para dobrar estando submetida à taxa de aumento da década mais desfavorável, encontraremos uma diferença que cobre completamente todo o aumento da população atribuível à imigração ou afluxo de estrangeiros. (Malthus *apud* Szmrecsányi, 1982, p.153)

Deste modo, considerando P_0=3 164 148, P_{10}= 4 312 841 e substituindo em (2), segue que $4\,312\,841 = 3\,164\,148 \cdot e^{10k}$. Como $k = \ln(\alpha + 1)$ segue que $\alpha = 0{,}03$.

Isto significa que Malthus tinha em mente em suas publicações uma taxa de crescimento demográfico de 3% ao ano, capaz de dobrar a população a períodos de 25 anos, como pode ser observado pelo cálculo acima. As diferenças de cálculo, Malthus atribuía à imigração ou afluxo de estrangeiros.

Portanto, seu modelo matemático pode ser descrito da seguinte forma:

$$P_t = P_0 \cdot 1{,}03^t \text{ ou } P_t = P_0 e^{0{,}03t} \quad . \qquad ($$

Segundo Szmrecsányi (1982), Malthus publicou seus trabalhos de uma maneira favorável aos interesses das classes dominantes, uma vez que associou a expansão da miséria com um fenômeno tão natural como o crescimento da população, e não a causas econômicas e sociais. O caráter ideológico de suas publicações, incluindo ideias sustentadas por um grupo social, o qual reflete, racionaliza e defende seus interesses, gerou polêmica entre aqueles que estavam a favor e aqueles que eram contrários às suas publicações.

Neste sentido, as práticas sociais que podem ter influenciado Malthus na elaboração de suas publicações estão relacionadas às relações de poder da classe dominante, as ideias utópicas oriundas da Revolução Francesa e/ou a própria necessidade de chamar a atenção para o crescimento da população e ao aumento da pobreza, consequências da Revolução Industrial.

Condicionadas pelo próprio contexto e estrutura da época, as práticas matemáticas relacionadas à Malthus limitam e regulam as possibilidades de desenvolvimento das matemáticas nas práticas específicas.

Comparando a população observada com a população calculada para os anos de 1790, 1800, 1810 e 1820, segue que o modelo matemático associado às ideias de Malthus, em um pequeno intervalo de tempo, pode ser considerado adequado para descrever e estimar o crescimento população(Tabela 1).

t	anos	População Observada	População Calculada
0	1790	3 164 148	3 164 148
10	1800	4 312 841	4 252 350
20	1810	5 862 092	5 714 803
30	1820	7 861 710	7 680 218

Tabela 1: Comparação entre a população observada e a população calculada para o Modelo de Malthus

Para o crescimento da população, em períodos curtos de tempo, os modelos (1) e (2) podem ser razoavelmente precisos. Contudo, tais modelos podem descrever, de maneira equivocada, o comportamento da situação-problema, visto que segundo Malthus, a variação da população seria orientada essencialmente pela variação entre nascimentos e mortes. Para o controle de nascimentos e mortes é que suas publicações eram direcionadas. Além disso, a realização de estimativas visando uma perspectiva preditiva para os modelos de crescimento populacional viria a ser uma limitação de sua formulação apresentada.

Atualmente, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus, assume que a variação do crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, o que significa dizer que a população aumenta em progressão geométrica ou em crescimento exponencial. Associa-se às hipóteses de Malthus uma linguagem matemática em termos da solução de uma equação diferencial de primeira ordem separável juntamente com uma condição inicial, e costuma se escrever:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

onde *t* é o tempo, P(t) é população no tempo *t* e P_0 é a população inicial e k é a constante de proporcionalidade.

Considerando necessário ponderar a existência de algum fator que deve reduzir a taxa de crescimento e inibir o crescimento exponencial, o modelo matemático associado às ideias de Malthus pode ser considerado como não válido para fazer previsões sobre o crescimento populacional para períodos mais prolongados de tempo. Devido a esta limitação, Benjamin Gompertz e Pierre-François Verhulst propuseram hipóteses complementares às enunciações apresentadas por Malthus.

3.3 O modelo de Benjamin Gompertz

Benjamin Gompertz nasceu em Londres em 1779 e mostrou, desde cedo uma habilidade prodigiosa em matemática. Todavia, sua família era judia, e deste modo foi-lhe negado o acesso à universidade. Gompertz começou aprendeu matemática por meio do estudo de trabalhos de Newton e Maclaurin. (Norton, 2005, p.379)

Embora ainda tivesse estruturado suas ideias em um contexto de pouco desenvolvimento matemático, Gompertz já era influenciado pela notação de Newton. Iniciou suas publicações ainda jovem e não muito tempo depois de Malthus. O seu avanço principal em relação ao modelo proposto por Malthus reside justamente no fato de considerar que a população humana é limitada e não cresce exponencialmente.

Para estruturar sua primeira publicação no que se refere à mortalidade humana em 1825, Gompertz foi influenciado por Newton. Segundo Urban (1865, p.262, tradução nossa), "sua recusa em mudar sua linguagem foi ditada por respeito à memória de Newton". A sua publicação de 1825 foi denominada *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies* (Sobre a natureza da função expressiva da lei de mortalidade humana, e sobre um novo modo de determinação do valor das contingências da vida).

Segundo Gompertz, a intensidade da mortalidade é descrita pela expressão

$$aq^x$$

onde a e q são quantidades constantes e x a idade em anos. Deste modo, a intensidade da mortalidade aumenta exponencialmente com a idade do indivíduo.

Considerando L_x a população no instante x e a, b e q quantidades constantes, usando a notação newtoniana, Gompertz (1825, p.518) escreveu a equação

$$abq^x = -\frac{\dot{L}_x}{L_x} \tag{3}$$

cuja solução é dada por

$$L_x = dg^{q^x} \tag{4}$$

com d, g parâmetros a ser determinados.

Com o intuito de considerar algumas propriedades matemáticas, em relação à modelagem de Gompertz, vamos nos apropriar da releitura de Winsor (1932) para a equação (3).

Considerando a solução $L_x = dg^{q^x}$ indicada por Gompertz, segue que

$$\log L_x = \log dg^{q^x}$$

$$\log L_x = \log d + \log g^{q^x}$$

o que conduz a

$$\log L_x - \log d = q^x \cdot c,$$

onde $c = \log g$.

Escrevendo de outra maneira, temos que

$$q^x = \frac{\log L_x - \log d}{c}. \tag{5}$$

Considerando a equação de Gompertz (3), usando linguagem de Leibniz, podemos escrever

$$\frac{dL_x}{dx} = -L_x abq^x \tag{6}$$

Substituindo (5) em (6) segue que

$$\frac{dL_x}{dx} = kL_x(\log d - \log L_x)$$

onde $k = \frac{ab}{c}$.

Como a equação diferencial encontrada é separável é possível escrever

$$\frac{dL_x}{L_x(\log d - \log L_x)} = kdx \tag{7}$$

Resolvendo a integral de (7) por substituição de variáveis sendo $u = \log d - \log L_x$ e usando logaritmo neperiano temos que

$$-\ln 10 \int \frac{du}{u} = \int k dx$$
$$\ln 10 \cdot \ln u = w - kx \ ,$$

sendo w uma constante a ser determinada. Tal equação nos faz concluir, mudando novamente para a variável x, que

$$\ln 10 \cdot \ln[\log d - \log L_x] = w - kx,$$
$$\ln 10 \cdot \ln\left[\log\left(\frac{d}{L_x}\right)\right] = w - kx$$

Transformando o logaritmo decimal em logaritmo natural (ou neperiano), segue que

$$\ln\left[\ln\left(\frac{d}{L_x}\right)\right] = w - kx,$$

e considerando as propriedades inversas para a função logarítmica temos

$$\ln\left(\frac{L_x}{d}\right) = -e^{w-kx}$$
$$\exp\left(\ln\left(\frac{L_x}{d}\right)\right) = \exp(-\exp(w-kx)),$$

e, portanto,

$$L_x = d\exp(-\exp(w-kx)) \qquad (8)$$

onde d e k são quantidades positivas.

Com o intuito de analisar o comportamento de um crescimento descrito pela expressão (8), é adequado encontrar o ponto de inflexão, ou seja, encontrar o ponto em que ocorre a mudança de concavidade da curva (8). Com essa finalidade, Winsor (1932) analisou a primeira e a segunda derivada da função (8).

> De (8), na medida em que x se aproxima do infinito negativo, L_x se aproxima de zero; quando x se aproxima do infinito positivo, L_x se aproxima de d. Derivando (8) temos
>
> $$\frac{dL_x}{dx} = dk \cdot \exp(w-kx) \cdot \exp(-\exp(w-kx)) = kL_x e^{w-kx}$$
>
> e é evidente que a inclinação é sempre positiva para os valores finitos de x, e se aproxima de zero para valores infinitos de x. Derivando novamente temos
>
> $$\frac{d^2 L_x}{dx^2} = k^2 L_x e^{w-kx}\left(e^{w-kx} - 1\right), \qquad (9)$$
>
> De (9) vemos que haverá um ponto de inflexão quando $x = \frac{w}{k}$. A ordenada do ponto de inflexão é $L_x = \frac{d}{e}$, ou aproximadamente, quando 37% da população final foi alcançada. (Winsor, 1932, p.2)

O modelo de Gompertz estruturado em termos da linguagem de Leibniz, é ainda hoje um modelo matemático usado em diferentes áreas do conhecimento, embora publicado em 1825. Deste modo, quando o conjunto de dados apresentar um ponto de inflexão em aproximadamente 35% a 40% do crescimento total estimado, pode-se utilizar o modelo matemático de Gompertz com uma boa expectativa de ajuste dos dados e com boas expectativas para a realização de estimativas para tempos futuros.

As práticas matemáticas relacionadas à Gompertz são condicionadas pelo próprio contexto e estrutura da época. Isso se justifica pelo Cálculo Diferencial e Integral que, nesta época, ainda não estava estabelecido por Cauchy e pelas influências dos trabalhos de Newton. Tais práticas limitam e regulam as possibilidades de desenvolvimento das matemáticas em situações específicas.

3.3 O modelo de Pierre-François Verhulst

Pierre-François Verhulst nasceu em Bruxelas no ano de 1804, obtendo o grau de doutor em Matemática pela Universidade de Ghent no ano de 1825. Depois da Revolução de 1830 e da independência da Bélgica, ele se tornou professor de Matemática na Universidade Livre de Bruxelas. Verhulst se tornou presidente da Academia Real da Bélgica em 1848, mas morreu no ano seguinte, em Bruxelas, provavelmente de tuberculose (Bacaër, 2011).

Os resultados das investigações de Verhulst sobre o crescimento populacional vieram à luz por meio de várias publicações no período de 1838 até 1847 e as quais orientaram nossas afirmações neste trabalho sobre suas formulações em relação ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional.

- 1838 - *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement* (Nota sobre a lei que a população segue em seu crescimento), um texto de 9 páginas;
- 1845 - *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population* (Investigações matemáticas sobre a lei de crescimento da população), uma primeira memória de 41 páginas;
- 1846 - *Note sur la loi d'accroissement de la population* (Nota sobre a lei do crescimento da população), um texto de 2 páginas;
- 1847 - *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population* (Segunda memória sobre a lei do crescimento populacional), uma segunda memória de 32 páginas.

O interesse de Verhulst em estudar o crescimento demográfico, teve influência, provavelmente, de suas relações com Quetelet[3], e/ou o interesse em responder à problemática do crescimento exponencial de Malthus. Estas se apresentaram como práticas sociais, que em um contexto histórico e social outorgaram uma estrutura e um significado às próprias práticas de Verhulst.

O trabalho de Verhulst '*Nota sobre a lei que a população segue em seu crescimento* foi publicado em 1838 no Correspondance Mathématique et Physique', editado por Alfhonse Quetelet. Nesta publicação, Verhulst expôs a essência de sua teoria e comparou os dados obtidos pelo seu modelo com alguns valores

[3] Em 1835, Alfhonse Quetelet publicou A Treatise on Man and the Development of his Faculties (Um tratado sobre o homem e o Desenvolvimento de suas faculdades). Quetelet foi um dos primeiros a considerar que o modelo exponencial de crescimento de Malthus não era adequado para explicar a expansão demográfica de um país. Ele estava convencido de que uma população não poderia crescer indefinidamente, mas que existiam forças, tanto externas como internas, que limitavam esse crescimento.

populacionais. Verhulst (1838) defende que o crescimento populacional tem necessariamente um limite e não cresce indefinidamente como Malthus propôs em seu modelo. Adotando as hipóteses de Quetelet, ele assumiu que a resistência ao crescimento humano é proporcional ao quadrado da velocidade com que a população tende a crescer.

> Seja p a população. Representamos por dp o crescimento infinitamente pequeno durante um tempo infinitamente pequeno dt. Se a população crescesse em progressão geométrica, teríamos a equação $\frac{dp}{dt} = mp$. Mas como a velocidade de crescimento da população é retardada pelo aumento do número de pessoas, devemos subtrair de mp uma função desconhecida de p, $\varphi(p)$, de modo que o modelo é dado por:
>
> $$\frac{dp}{dt} = mp - \varphi(p). \qquad (10)$$
>
> A hipótese mais simples que pode ser feita sobre a forma da função φ, é assumir $\varphi(p) = np^2$. Considerando esta função, e integrando a expressão (10) temos que
>
> $$t = \frac{1}{m}\left[\log p - \log(m - np)\right] + \text{const.}$$
>
> e bastam três pares de dados observados para determinar os coeficientes m e n constantes e a constante arbitrária.
> Isolando p na expressão anterior segue que
>
> $$p = \frac{mp' e^{mt}}{np' e^{mt} + m - np'}, \qquad (11)$$
>
> onde p' é a população que corresponde a $t = 0$, e e a base dos logaritmos naturais. Se $t = \infty$, vemos que o valor de p corresponde a $p = \frac{m}{n}$. Este é, portanto, o limite superior da população. (Verhulst, 1838, p.115, tradução nossa).

Contudo, Verhulst (1838) não apresenta detalhes sobre a formulação do modelo (11) nem tampouco se referiu a ele como curva logística.

Em 1845, Verhulst publicou '*Investigações matemáticas sobre a lei de crescimento da população* em Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences'. Nesta segunda publicação, mais completa do que a primeira, Verhulst introduziu o termo 'logístico' para referir-se a equação de crescimento populacional, forneceu mais detalhes sobre suas propriedades, estimou os parâmetros da equação, o que permitiu realizar uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica e da França. No início de sua publicação, Verhulst colocou que são muitas as causas que impedem e promovem o crescimento humano, e que em toda a sua generalidade, o problema é claramente insolúvel.

> De todos os problemas que a economia oferece para meditações dos filósofos, um dos mais interessantes é, sem dúvida, o conhecimento da lei que regula o crescimento da população. Para resolvê-lo com precisão, deve-se ser capaz de avaliar a influência de muitas causas que impedem ou promovem a multiplicação da espécie humana. E uma vez que muitas dessas causas são variáveis, por sua natureza e modo de ação, o problema

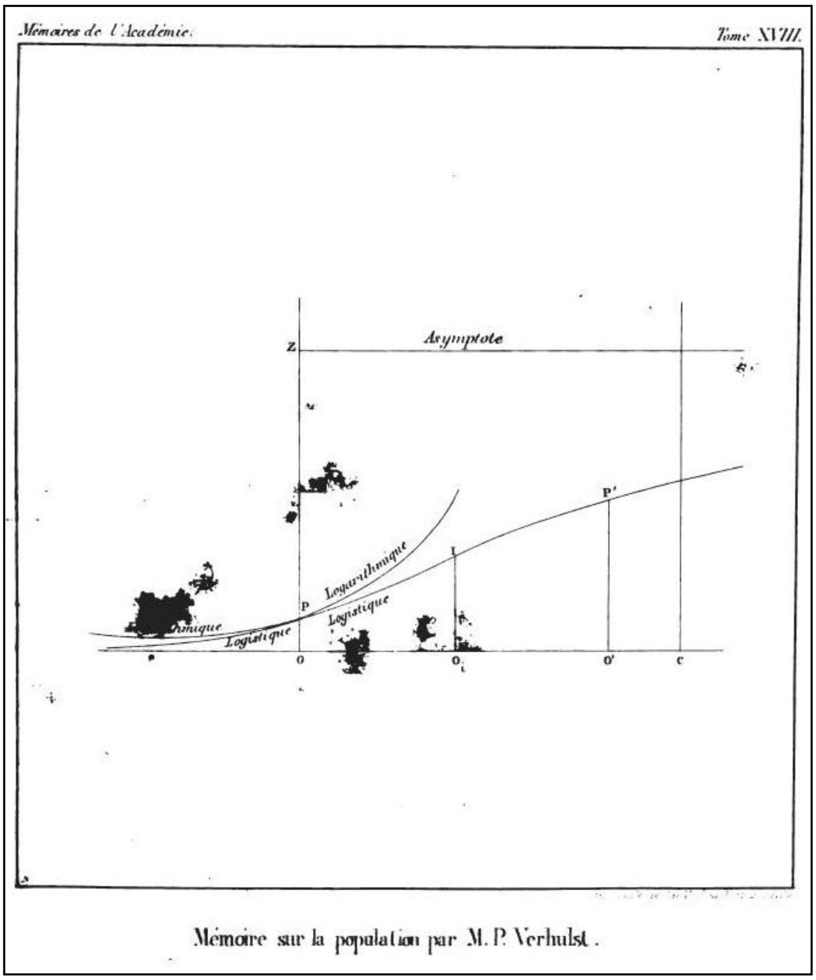
> considerado em toda a sua generalidade, é claramente insolúvel. (Verhulst, 1845, p.3, tradução nossa)

Para a formulação de seu modelo, Verhulst (1845) explicitou que a lei de crescimento geométrico proposta por Malthus é viável apenas em circunstâncias muito excepcionais, como por exemplo, quando um território fértil e ilimitado, é habitado por um povo de uma civilização muito avançada como a dos primeiros colonos dos Estados Unidos. Assim, seus investimentos seriam para buscar elementos da matemática para determinar um limite para uma população que não atende a estas circuntâncias.

Assim, designando por *p* a população, *t* o tempo, *s* e *n* constantes indeterminadas, *b* a população normal e tendo denotado *M* como o módulo pelo qual é necessário multiplicar o logaritmo natural para convertê-lo em logaritmo decimal,

> Substituímos a equação diferencial $\frac{Mdp}{pdt} = s$, relativa a progressão geométrica por
>
> $$\frac{Mdp}{pdt} = s - n(p - b), \qquad (12)$$
>
> Portanto, denominando, para encurtar, $m = s + nb$, temos
>
> $$dt = \frac{Mdp}{mp - np^2}.$$
>
> Resolvendo esta equação e considerando que $t = 0$ corresponde a $p = b$, resulta
>
> $$t = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p(m - nb)}{b(m - np)}\right]. \qquad (13)$$
>
> (Verhulst, 1845, p.8, tradução nossa)

Verhulst (1845) deu o nome de curva logística à curva associada à equação (13) (Figura 4.3).



Fonte: Verhulst (1845, p.41).

Figura 2 Curva logística representada por Verhulst em 1845

Dentre as características da curva logística, Verhulst (1845) explicitou que ela tem uma assíntota paralela ao eixo das abscissas, a uma distância $\frac{m}{n}$ da origem, porque $p = \frac{m}{n}$ corresponde ao limite da população quando $t \rightarrow \infty$.

Por meio da diferenciação da equação (12), colocou que a curva tem um ponto de inflexão I, correspondente à $p = \frac{1}{2}\frac{m}{n}$ e, que neste ponto, ocorre a mudança de concavidade da curva, indicando que o crescimento da população é mais rápido até o instante em que metade do limite da população é atingida. A partir desse instante, o crescimento da população é mais lento. Deste modo, quando o conjunto de dados apresentar um ponto de inflexão em aproximadamente 50% do crescimento total estimado, pode-se utilizar o modelo matemático de Verhulst com uma boa expectativa de ajuste dos dados.

Com o intuito de obter uma lei de crescimento da população, Verhulst modificou o eixo das ordenadas, e como a fórmula (13) estava em função de três parâmetros desconhecidos, concluiu que bastaria conhecer o número da população em três épocas diferentes.

> Mantendo o mesmo eixo das abscissas, transportando agora a origem das coordenadas em um ponto C, cuja distância do ponto O_i será denotada por i. Mudando, t para $t+i$, para a equação geral da logística relatada em relação a uma ordenada qualquer, temos
>
> $$t+i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p}{\frac{m}{n}-p}\right] \tag{14}$$
>
> em que a abscissa do ponto de inflexão é $-i$. Se quiser obter o valor de p em relação a t, pode-se representar, para simplificar a notação,
>
> $$10^{(t+i)m}=z\,,$$
>
> e se obtém
>
> $$p=\frac{m}{n}\cdot\frac{z}{1+z}\,.$$
>
> Esta expressão contém três parâmetros desconhecidos; assim, é suficiente conhecer o número da população em três épocas diferentes, para se obter a lei de seu crescimento. São, portanto, p_0, p_1, p_2 as ordenadas correspondentes às abscissas 0, t_1, t_2, respectivamente e, assumindo que $t_2=2t_1$, resulta
>
> $$i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p_0}{\frac{m}{n}-p_0}\right],$$
>
> $$t_1+i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p_1}{\frac{m}{n}-p_1}\right],$$
>
> $$t_2+i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p_2}{\frac{m}{n}-p_2}\right];$$
>
> a partir do qual se conclui, subtraindo a primeira equação da segunda e a segunda da terceira, que
>
> $$\frac{p_1\left(\frac{m}{n}-p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n}-p_1\right)}=\frac{p_2\left(\frac{m}{n}-p_1\right)}{p_1\left(\frac{m}{n}-p_2\right)}\,,$$
>
> $$\left(p_1{}^2-p_0p_2\right)\frac{m^2}{n^2}-\left(p_0p_1{}^2+p_2p_1{}^2-2p_0p_1p_2\right)\frac{m}{n}=0\,,$$
>
> e finalmente,
>
> $$\frac{m}{n}=\frac{p_1\left(p_0p_1+p_1p_2-2p_0p_2\right)}{p_1{}^2-p_0p_2}\,.$$
>
> Este valor de $\frac{m}{n}$ será finito e positivo, se
>
> $$p(t)=\frac{m}{n}\cdot\frac{e^{\ln 10(t+i)m}}{1+e^{\ln 10(t+i)m}}\,,\quad p_0p_1+p_1p_2>2p_0p_2\,.$$
>
> [...] Conhecendo $\frac{m}{n}$, se determina o coeficiente m pela equação
>
> $$m=\frac{1}{t_1}\log\left\{\frac{p_1\left(\frac{m}{n}-p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n}-p_1\right)}\right\},$$
>
> e i pela equação

$$i = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0}\right].$$

Podemos dar o valor de $\frac{m}{n}$ de uma forma mais favorável ao cálculo logarítmico, denominando

$$p_1 - p_0 = u\,,\ p_2 - p_1 = v\,,\ \frac{uv}{p_1} = w\,,\ \frac{u+w-v}{w} = q\,,$$

que torna-se

$$\frac{m}{n} = p_1 + \frac{p_1}{q}\,.$$

Se agora,

$$\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0} = r\,,$$

teremos para m e i as expressões mais simples

$$m = \frac{1}{t_1}(\log q - \log r)\,,$$

$$i = \frac{1}{m}\log r\,.$$

(Verhulst, 1845, p.11-13, tradução nossa).

Usando esta formulação, Verhulst (1845) realizou uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica. Explicou que as tabelas que forneceram os dados necessários, para que ele pudesse encontrar a lei da população, foram retiradas das seguintes obras: 1) *Recherches sur la reproduction et la mortalité de l'homme aux différents ages, et sur la population de la Belgique* por MM. A. Quetelet e Ed. Smits, 1832. 2) *Bulletin de la commission centrale de statistique*, v.1, 1843. 3) *Annuaire de l'observatoire de Bruxelles* para 1844. Segundo Verhulst, essas tabelas podem ser consideradas como oficiais, mas para que possam ser encaixadas ao seu objetivo, teriam que ser submetidas às diversas preparações e correções.

De acordo com as observações, e após correções, Verhulst denominou as datas que correspondem às populações denotadas por $p_0 = 3.627253$, $p_1 = 4.247113$, $p_2 = 4.800861$, como respectivamente 1 de janeiro de 1815, 1 de janeiro de 1830 e 1 de janeiro de 1845.

Para aplicar as fórmulas à população da Bélgica, escrevemos
[…]

$$u = p_1 - p_0 = 0.619860\,,$$
$$v = p_2 - p_1 = 0.553748\,,$$
$$w = \frac{uv}{p_1} = 0.080876\,\cdot$$

que nos dá

$$\frac{m}{n} = 6.5837\,,$$

e, observando que $t_1 = 1.5$,

$$m = 0.113785$$
,
$$i = 0.78060\,.$$

> Assim, para a população da Bélgica tem-se $\log z = 0.113785(t + 0.78060)$,
>
> $$p = 6.5837\frac{z}{1+z}.$$
>
> (Verhulst, 1845, p.31)

Segundo Verhulst, estes resultados numéricos dizem que, se as leis e costumes da Bélgica não tiverem mudanças significativas, esta população, embora crescente, não atingiria a 6,6 milhões de pessoas.

Considerando as fórmulas para a população indicadas por Verhulst, podemos transformar o logaritmo decimal em logaritmo natural como segue

$$p(t) = \frac{m}{n} \cdot \frac{e^{\ln 10(t+i)m}}{1 + e^{\ln 10(t+i)m}},$$

onde $\frac{m}{n}$ representa a população máxima. Particularmente, no caso da Bélgica, a população em cada ano *t* pode ser escrita como:

$$p(t) = 6.5837\frac{e^{0.262t+0.2045}}{1 + e^{0.262t+0.2045}}.$$

Comparando a população observada com a população calculada para os anos de 1815, 1830 e 1845, segue que os valores calculados se aproximam daqueles apresentados nos documentos oficiais (Tabela 2).

t	Anos	População Observada	População Calculada
0	1815	3.027253	3.627274
1,5	1830	4.247113	4.247040
3	1845	4.800861	4.800746

Tabela 2 Comparação entre a população observada e a população calculada para o modelo de Verhulst

Verhulst (1845) também fez um estudo da lei da população da França e conclui seu artigo com as seguintes palavras:

> A lei da população é desconhecida, porque é desconhecida a natureza da função utilizada para medir obstáculos, tanto preventivos quanto destrutivos, que se opõe ao crescimento indefinido da espécie humana.No entanto, se assumirmos que estes obstáculos crescem exatamente na mesma proporção que a população superabundante, obtemos uma solução completa do problema sob o ponto de vista matemático. Descobrimos então, fazendo uso de documentos estatísticos emitidos pelos governos belga e francês, que o limite extremo da população é de quarenta milhões na França, e de seis milhões e seiscentos mil na Bélgica.
>
> (Verhulst, 1845, p.38, tradução nossa).

A publicação de 1838, embora menos extensa, apresenta a equação diferencial ordinária para o crescimento populacional e sua solução, enquanto que a publicação de 1845 fornece mais detalhes às ideias de Verhulst, no que se referem os parâmetros da equação, permitindo realizar uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica e da França. Os próprios resultados destas publicações serviram de prática social para que nas publicações de 1846 e 1847 apresentasse conclusões sensivelmente diferentes, no que se refere às análises e previsões do crescimento populacional.

Em 1846, Verhulst publicou o texto *Nota sobre a lei do crescimento da população* em Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Nesta terceira publicação, ele anunciou, depois de retomar a sua pesquisa sobre a lei de crescimento da população, por meio de um exame mais detalhado, que a condição que serve de obstáculo ao crescimento da população, não é proporcional à população supérflua.

Em 1847, Verhulst publicou o que chamou de '*Segunda memória sobre a lei do crescimento populacional* em Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique'. Nesta quarta publicação, Verhulst forneceu com mais detalhes as conclusões da nota de 1846, cujas conclusões são sensivelmente diferentes dos textos anteriores, o que o levou a uma revisão do modelo original e permitiu uma nova estimativa do nível máximo da população da Bélgica.

Verhulst, nesta publicação, modificou suas hipóteses, sendo este o motivo de publicar esta segunda memória, assumindo que

> os obstáculos ao crescimento da população aumentam em proporção à razão entre a população superabundante e a população total,
>
> $$\frac{Mdp}{pdt} = s - \frac{n(p-b)}{p}.$$
>
> Colocando
>
> $$n - s = m,$$
>
> $$\frac{nb}{m} = P,$$
>
> se deduz da equação anterior que
>
> $$dt = -\frac{1}{m}\frac{Mdp}{(p-P)},$$
>
> e integrando,
>
> $$t + const. = -\frac{1}{m}\log(p-P),$$
>
> com log designando um logaritmo decimal.
>
> Supondo que $t = 0$, quando $p = p_0$, vem
>
> $$const. = -\frac{1}{m}\log(p_0 - P),$$
>
> e, por consequência,
>
> $$t = \frac{1}{m}\log\left(\frac{P-p_0}{P-p}\right),$$
>
> que escrito de outra forma,
>
> $$\log(P-p) = \log(P-p_0) - mt. \qquad (15)$$
>
> (Verhulst, 1847, p.6, tradução nossa)

Para determinar as três constantes m, P e p_0, Verhulst assumiu que a curva representada pela equação (15) passa por três pontos, que têm, respectivamente, as abscissas 0, t_1, t_2 e as ordenadas p_0, p_1, p_2; daí deduziu, pelo método seguido na primeira memória e na hipótese de $t_2 = 2t_1$, que

$$P = \frac{p_1^{\,2} - p_0 p_2}{2p_1 - (p_0 + p_2)}, \tag{16}$$

$$m = \frac{1}{t_1}\log\left(\frac{P - p_0}{P - p_1}\right). \tag{17}$$

As três fórmulas (15), (16) e (17) dão a solução do problema que se propõe determinar. Para fazer a aplicação à Bélgica, Verhulst utilizou em seus cálculos os mesmos elementos que na sua primeira memória, isto é, assumiu que

$$p_0 = 3.627253,$$

$$p_1 = 4.247113,$$

$$p_2 = 4.800861,$$

$$t_1 = 1.5;$$

onde obteve

$$P = 9.4390, \quad m = 0.0326563,$$

$$\log(P - p) = 0.7643107 - 0.0326563t.$$

Assim, o valor máximo da população belga seria cerca de nove milhões e quatrocentas mil pessoas.

Considerando a fórmula para a população indicada por Verhulst $t = \frac{1}{m}\log\left(\frac{P - p_0}{P - p}\right)$, podemos transformar o logaritmo decimal em logaritmo natural como segue

$$p(t) = P - \frac{P - p_0}{e^{\ln 10 \cdot tm}},$$

e, particularmente no caso belga o número de habitantes no ano *t* seria dado por:

$$p(t) = 9.4390 - \frac{5.81174}{e^{0.0751939t}}.$$

Verhulst (1847) fez a validação de seu modelo encontrado, por meio da comparação dos dados de observação com os dados obtidos por seu modelo (Figura 4.5).

TABLEAU

Des progrès de la population en Belgique, depuis le 1er janvier 1815 jusqu'au 1er janvier 1845.

ANNÉES.	POPULATION observée.	POPULATION calculée.	ANNÉES.	POPULATION observée.	POPULATION calculée.
1815..........	3,627,253	3,627,300	1835..........	4,404,220	4,438,600
à	397,602	420,900		44,549	37,400
1825..........	4,024,855	4,048,200	1836..........	4,448,769	4,476,000
	48,896	40,400		45,919	37,100
1826..........	4,073,751	4,088,600	1837..........	4,494.688	4,513,100
	45,089	40,000		30,999	36,800
1827..........	4,118,840	4,128,600	1838..........	4,525,687	4,549,900
	41.439	39,900		45,021	36,500
1828..........	4,160,279	4,168,500	1839..........	4,570,708	4,586,400
	49,849	39,400		38,068	36,200
1829..........	4,210,128	4,207,900	1840..........	4,608,776	4,622,600
	36,985	39,200		41,624	35,900
1830..........	4,247,113	4,247,100	1841..........	4,650,400	4,658,500
	*38.856	38,900		42,790	35,600
1831..........	4,285,969	4,286,000	1842..........	4.693,190	4,694,100
	40,728	38,600		34,201	35,300
1832..........	4,326,697	4,324,600	1843..........	4.727,391	4,729,400
	19,243	38,300		35,855	35,000
1833..........	4,345,940	4,362,900	1844..........	4,763,246	4,764,400
	30,274	38,000		*37,615	34,700
1834..........	4,376,214	4,400,900	1845..........	4,800,861	4,799,100
	28,006	37,700			

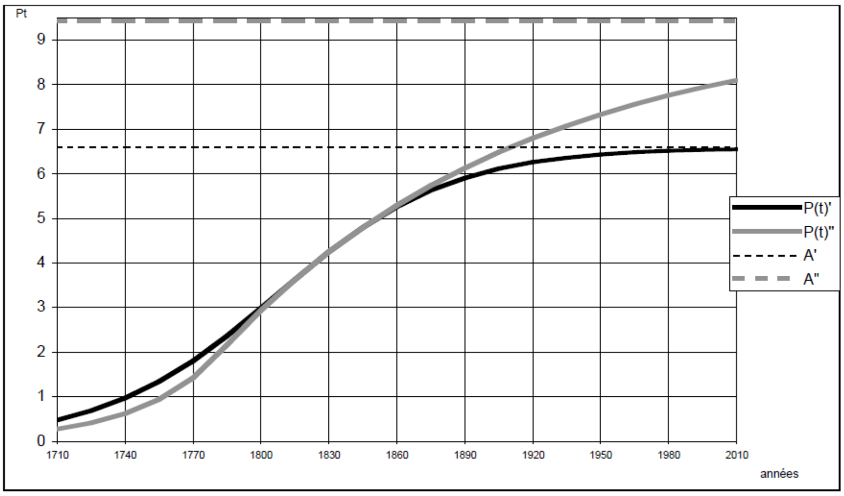
NB. Les nombres marqués d'un astérisque sont hypothétiques.

Fonte: Verhulst (1847, p.8)

Figura 3 O crescimento da população, na Bélgica, de 1 de janeiro de 1815 até 1 de janeiro de 1845

Pode-se perceber nas publicações de Verhulst uma mudança nas hipóteses e consequentemente em seu modelo matemático. Como podemos observar, embora o confronto com os dados observados tenha mostrado uma boa aproximação com o modelo matemático apresentado na publicação de 1845, Verhulst optou por não aceitar seu modelo, como descrito em sua publicação de 1846. Segundo Verhulst (1846, p.226), "estes resultados não devem ser considerados como definitivos". Ainda, segundo o autor, "a comparação dos resultados da observação com os calculados, durante um longo período de tempo, só pode dissipar as dúvidas" (Verhulst, 1846, p.227). Isso demonstra que o problema de aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, como o contexto histórico, seus objetivos e recursos disponíveis.

A Figura 4.7 foi construída, a partir das hipóteses de Verhulst (1845) e Verhulst (1847), para comparar os dois padrões de evolução.



Fonte: Delmas (2004, p.75)

Figura 4 Comparação da evolução da população belga na primeira memória (p(t)', assíntota A'=6.6) e na segunda memória (p(t)", assíntota A"=9.44).

Podemos inferir que os modelos de Verhulst se mostram adequados na medida em que o crescimento da população é controlado quando t se torna grande. O que se pode notar é que, embora o máximo das populações seja diferente, devido às diferentes hipóteses assumidas nas duas memórias, a tendência geral é a mesma.

A literatura do último século, convencionou chamar o modelo de Vehulst de modelo logístico e com a linguagem matemática usual é a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP(L-P) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$ onde t é o tempo, P(t) é população no tempo t e P_0 é a população inicial, k é constante de proporcionalide e L é o limite da população a que se referia Verhulst.

4. Para finalizar

A análise da produção de conhecimento tem sido encaminhada, também na área de Educação Matemática, sob diferentes perspectivas. Uma destas diz respeito à consideração do papel que cenários históricos, culturais, institucionais e sociais desempenham na construção de conhecimento.

Neste sentido, o presente trabalho sinaliza que a configuração de modelos de crescimento populacional, considerados fundamentais até hoje, são associados a processos de construção e de criação humana os quais, por sua vez, são processos de síntese também de objetos e ferramentas sociais, culturais e matemáticas de um grupo específico e de um tempo determinado. Ou seja, práticas sociais e práticas matemáticas, conjuntamente, conferiram a esses modelos uma estrutura e uma importância.

No que se refere ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional, uma das primeiras ideias se deve a Thomas Robert Malthus, sugerindo o crescimento exponencial, em 1798. Benjamin Gompertz surge em 1825 contrapondo, em termos gerais, essa ideia de Malthus e sugerindo que a população não cresce infinitamente como sugeriam os postulados de Malthus. Posteriormente, Pierre-François Verhulst sugeriu a curva logística em 1838 com modificações de seu modelo matemático em trabalhos posteriores. Isso indica o caráter evolutivo dos modelos de crescimento populacional.

Os trabalhos de Malthus e Gompertz foram influenciados pelo contexto em que se inseriam. A época em que tais trabalhos foram publicados consistia na solução de situações específicas, ligadas à explicação ou às relações causadas por fenômenos sociais.

O modelo de crescimento populacional de Malthus, em 1798, foi influenciado pelas circunstâncias de sua época, tentando explicar, por meio de uma linguagem matemática, o agravamento da miséria e o crescimento da população. Por sua vez, o modelo de crescimento populacional de Gompertz, apresentado em 1825, já sinaliza que as práticas matemáticas, especialmente no que se refere às equações diferenciais ordinárias, eram difundidas na comunidade, embora as notações usadas por Gompertz ainda se limitassem àquelas apresentadas por Newton em seus trabalhos.

O trabalho de Verhulst, apresentado pela primeira vez em 1838, reflete uma maior preocupação em apresentar um modelo de crescimento populacional robusto e capaz de realizar estimativas confiáveis para o crescimento da população. Percebe-se em seus escritos uma linguagem matemática muito próxima daquela que atualmente é usada e já incorporando práticas matemáticas associadas às ideias de Cauchy. Sua preocupação em mostrar a consistência de seu modelo matemático por meio de sua validação e refutação, para além de encontrar um modelo matemático que possa descrever a situação, também é revelada em seus textos publicados.

Em termos gerais, podemos inferir que as formulações para os modelos de crescimento populacional que apresentamos foram influenciadas pelos momentos históricos, tanto do ponto de vista social como do ponto de vista matemático: 1) Final do século XVIII e início do século XIX (com Malthus e Gompertz); 2) após década de 30 do século XIX (com Verhulst). Esta divisão pode ser justificada pelos trabalhos de Cauchy, que por delimitar o Cálculo Diferencial e Integral, acabou influenciando no desenvolvimento dos modelos de crescimento populacional.

È neste sentido que a superioridade das práticas sobre os objetos, o caráter situado destas práticas e o caráter discursivo da construção social do conhecimento, aspectos a que se referem Arieta at al (2004), caracterizam a perspectiva socioepistemológica da construção de modelos de crescimento populacional.

Mesmo que o foco deste trabalho esteja em modelos apresentados no final do século XVIII e início do século XIX, vale indicar que a dinâmica do crescimento populacional tem sido investigada também mais recentemente. Podemos citar, por exemplo, o modelo de Montroll em 1971 e o modelo de Smith em 1963 (Bassanezi, 2002). Atualmente, as projeções demográficas não se fazem como um mero exercício técnico para tentar compreender um fenômeno, mas passaram a ser de fundamental importância para o planejamento social e econômico de um país.

Neste sentido, este olhar socioepistemológico a que nos referimos sobre a configuração da construção de conhecimento no que se refere ao desenvolvimento de modelos de crescimento populacional, também não se contrapõe às ideias de Gaston Bachelard de que

> A história da humanidade bem pode, em suas paixões, em seus preconceitos, em tudo o que revela dos impulsos imediatos, ser ter um eterno recomeço; mas há pensamentos que não recomeçam; são os pensamentos que foram retificados, alargados, completados (BACHELARD, 1995, p 147).

É justamente sob este olhar que podemos considerar que a evolução dos modelos de crescimento populacional envolve práticas sociais na medida em que os modelos como o de Malthus, Verhulst, Gompertz influenciaram (e influenciam) modelos mais atuais de projeção demográfica. E também envolvem práticas matemáticas na medida em que condicionaram a estrutura matemática destes modelos.

Assim, a ideia de que as práticas sociais não são constituídas exatamente pelo que as pessoas fazem em si, mas por aquilo que as faz fazerem o que fazem parece também se configurar em relação à modelagem do crescimento populacional ao longo do tempo.

Bibliografia

Arrieta, J. L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. México, Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigação e Estudos Avançados, México.

Bacaër, N. (2011). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. New York: Springer.

Bachelard, G. O novo espírito científico. 2 ed. Rio de janeiro,Tempo Brasileiro, 1995.

Bassalo, J. M. F. (1996a). A Crônica do Cálculo: II. Na época de Newton e Leibniz. *Revista Brasileira de Física*, 18, 181-190.

Bassalo, J. M. F. (1996b). A Crônica do Cálculo: III. Contemporâneos de Newton e Leibniz. *Revista Brasileira de Física*, 18, 328-336.

Bassanezi, R. C. (2010). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.*

Cantoral, R. (2003) La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente. [CD-ROM] XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau, Brazil: Universidade Regional de Blumenau, 2003. Disponível em http://cimate.uagro.mx/cantoral.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9.

Cantoral, R.; Farfán, R. M. (2008). Socioepistemología y Matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 740-753.

Covián, O. N. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. Dissertação (Mestrado de Ciências na especialidade da Educação Matemática) - CICATA-IPN, México.

Delmas, B. (2004). Pierre-François Verhulst et la loi logistique de la population. *Math. & Sci. hum. / Mathematics and Social Sciences*, 42, 51-81.

Espinosa, G.M. (2006) Construcción social de la función trigonométrica. In: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v.19 , pp-818-823, México.

Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513-583.

Urban, S. (1865). Obituary. *The Gentleman's Magazine*, 219, 238-400.

Hernández, M. Á.; Arrieta, J. L. (2005). Las Prácticas Sociales de Modelación y la Emergencia de lo Exponencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 537-542.

Malthus, T. R. (1798). *An Essay on the principle of population*. London: J. Johnson. Acesso em 17 de dezembro de 2010, de <http://www.esp.org/books/malthus/population/malthus.pdf>.

Mantoux, P. (sd). *A Revolução Industrial no Século XVIII*. São Paulo: Editora Hucitec, tradução da edição de 1927.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, 195-218.

Miguel, A. (2003) Formas de ver e conceber o campo de interações entre filosofia e educação matemática. In: BICUDO, M. A. V (org). Filosofia da Educação Matemática:concepções e movimentos. Brasília: Plano.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. México, Tese (Doutorado Educação Matemática) – Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigação em Ciência Aplicada e Tecnologia Avançada, México.

Moreira, P.; David, M. M. (2003). Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké,* 11, 57-80.

Nápoles V. J. E.; Negrón S. C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. *Xixím: Revista electrónica de didáctica de las matemáticas*, 3, 33-57.

Norton, L. (2005). Conceptual and Practical Implications of Breast Tissue Geometry: Toward a More Effective, Less Toxic Therapy. *The Oncologist*, 10, 370-381.

Oliveira, F. D. (2008). *Análise de textos didáticos: três estudos*. Rio Claro, Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos) – UNESP, São Paulo.

Oliveira, C. F. (2011). *Modelagem Matemática do Crescimento Populacional: Um olhar à luz da Socioepistemologia*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Silva, C. A. (2005). Malthus volta à aula de matemática. *Famat em Revista*, n.5, 277-282.

Szmrecsányi, T. (1982). *Thomas Robert Malthus: economia*. São Paulo: Editora Ática.

Verhulst, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique et Physique*, 10, 113-121.

Verhulst, P. F. (1845). Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18, 1-41.

Verhulst, P. F. (1846). Note sur la loi d'accroissement de la population. *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 13, 226-227.

Verhulst, P. F. (1847). Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 20, 1-32.

Vilela, D. S. (2007). *Matemáticas nos usos e jogo de linguagem: ampliando concepções na Educação Matemática*. Campinas, Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Unicamp, São Paulo.

Vilela, D. S. (2009). Práticas matemáticas: contribuições sóciofilosóficas para a Educação Matemática. *Zetetiké*, 17, 191-212.

Winsor, C. P. (1932). The Gompertz Curve as a Growth Curve. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 18, 1-8.

LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA
Universidade Estadual de Londrina – UEL – Londrina – Paraná - Brasil
lourdes@uel.br;
endereço eletrônico:
http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.jsp?id=K4707324P8

Licenciada em Matemática, Mestre em Matemática e Doutora em Engenharia de Produção. Professora da Universidade Estadual de Londrina desde 1985, atua no curso de graduação em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática, formação de professores de matemática sendo coordenadora do GRUPEMAT Grupo de Pesquisas sobre Modelagem e Educação Matemática.

CAMILA FOGAÇA DE OLIVEIRA
ca_fogaca@yahoo.com.br
http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4233662H0

Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (2008), e Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática também pela Universidade Estadual de Londrina (2011). É professora do SENAI- Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial em Londrina – PR.