UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Número 61. Abril 2021
Páginas 1-18

www.fisem.org/web/union

Uma abordagem dos Quaternions de Fibonacci com enfoque na Teoria das Situações Didáticas

Rannyelly Rodrigues de Oliveira

Fecha de recepción: 16/11/2019
Fecha de aceptación: 8/04/2021

Resumo	Este trabalho apresenta uma abordagem dos Quaternions de Fibonacci com enfoque na Teoria das Situações Didáticas (TSD). Para isso, foram concebidas situações-problema, cujo campo epistêmico-matemático é o modelo de Fibonacci e sua complexificação a partir da abrangência dos números hipercomplexos: os Quaternions. Nesse viés, são exploradas algumas propriedades matriciais desses números, seguida, de uma extensão para índices inteiros. Essa discussão é organizada de acordo com as fases da TSD: ação, formulação, validação e institucionalização. Além do mais, pode-se compreender que os conceitos e as representações estudadas neste artigo, oportunizam a ampliação do repertório de relações complexas do modelo de Fibonacci. **Palavras-chave**: Didática da Matemática, Teoria das Situações Didáticas, Situações-problema, Quaternions de Fibonacci.
Resumen	Este trabajo presenta un abordaje de los Cuaternions de Fibonacci con enfoque en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). Para ello, se han concebido situaciones-problema, cuyo campo epistémico-matemático es el modelo de Fibonacci y su complejidad a partir del alcance de los números hipercomplejos: los Cuaternions. En este sesgo, se exploran algunas propiedades matriciales de estos números, a continuación, de una extensión a índices enteros. Esta discusión se organiza de acuerdo con las fases de la TSD: acción, formulación, validación e institucionalización. Además, se puede comprender que los conceptos y las representaciones estudiadas en este artículo, oportunizan la ampliación del repertorio de relaciones complejas del modelo de Fibonacci. **Palabras clave:** Didáctica de las Matemáticas, Teoría de las Situaciones Didácticas, Situaciones-problema, Quaternions de Fibonacci.
Abstract	This work presents an approach of the Fibonacci Quaternions focusing on Theory of Didactic Situations (TSD). For this, problem situations were conceived, whose epistemic-mathematical field is the Fibonacci model and its complexification from the comprehension of the hypercomplex numbers: the Quaternions. In this bias, some matrix properties of these numbers are explored, followed by an extension for integer indices. This discussion is organized according to the phases of the TSD: action, formulation, validation and institutionalization. Moreover, it can be understood that the concepts and representations studied in this article allow the expansion of the repertoire of complex relations of the Fibonacci

model.
Key-words: Didactics of Mathematics, Theory of Didactic Situations, Problematic Situations, Fibonacci Quaternions.

1. Introdução

A Didática da Matemática abordada neste trabalho segue o paradigma francês, propugnada por Artigue (2009), que oportuniza a realização e concepção de situações de ensino com a finalidade de envolver o aluno, professor e conhecimento matemático, de modo que sejam articulados os elementos de ordem epistemológica, didática e cognitiva, durante a compreensão e construção de relações matemáticas. Recentemente, essa tendência vem sendo estudada pelos pesquisadores Pais (2002), Almouloud (2007), Almouloud (2016), Alves (2016a, 2016b, 2016c), Silva e Almouloud (2018).

Essa vertente didática permite a inserção de teorias de ensino que se preocupam com uma temática epistemológica em ambientes de ensino. Nesse sentido, este trabalho tem como campo epistêmico-matemático o modelo de Fibonacci. Esse modelo foi originado a partir da situação-problema, proposto por Leonardo Pisano, que abrange a reprodução de pares de coelhos. *A priori*, esse modelo é representado pela recorrência unidimensional $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, válida no conjunto dos Naturais (Alves e Catarino, 2016).

Nos trabalhos de Brother (1965), Koshy (2001) e Alves e Oliveira (2017), pode-se identificar a existência de um processo evolutivo do modelo de Fibonacci com a extensão da sequência para índices inteiros e representações polinomiais e matriciais. À vista disso, foi feito um levantamento bibliográfico dos artigos de Horadam (1993), Halici (2012, 2013), Sangwine, Ell & Biham (2011), Flaut & Shpakivskyi (2013) com a finalidade de discutir os Quaternions, definidos para o modelo de Fibonacci, com enfoque na Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008). Para isso, neste trabalho, são elaboradas e propostas situações-problema que direcionam uma dialética descrita em: ação, formulação e validação manifestadas na compreensão de propriedades matriciais e da extensão de uma determinada aplicação para índices inteiros.

Além do mais, os Quaternions são números hipercomplexos, ou seja, uma extensão do número complexo denotado por $z = a + bi$, onde a, b ϵ R tal que se definem a parte real $Re(z) = a$ e a parte imaginária $Im(z) = b$. De modo análogo, de acordo com Halici (2012, 2013), os Quaternions são determinados pela equação $q = q_0 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ onde (q_0, q_1, q_2, q_3) é a parte escalar Real e a base, no R^3, (e_1, e_2, e_3) é a parte vetorial, além disso, vale que $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = e_1.e_2.e_3 = -1$. Além disso, o Quaternion de Fibonacci é definido por meio da equação: $Q_n = F_n + F_{n+1}.i + F_{n+2}.j + F_{n+3}.k$, com $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

À vista disso, este trabalho tem o objetivo de discutir os Quaternions de Fibonacci através de uma proposição de situações-problema em aulas de História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Vale informar ao leitor que, por tradição, os Quaternions não fazem parte da ementa do curso de Licenciatura em Matemática (com base na ementa dos cursos do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE). Todavia, esse conteúdo matemático foi escolhido com o intuito de levar para aulas de História da Matemática um modelo matemático não-trivial.

Essa iniciativa tem a intenção de instigar o aluno a refletir nas definições e relações matemáticas que são dispostas nos livros clássicos de História da Matemática e oportunizar o compreendimento de que a Matemática é um corpo teórico inacabado. Pois, os livros, comumente, adotados na disciplina de História da Matemática permitem tratar a sequência de Fibonacci (apenas em sua representação original) mas não mostram sua extensão complexa e a generalização de suas relações, ou seja, não apresentam seu processo histórico-evolutivo.

Contudo, nessa abordagem histórica, é dada ênfase à evolução epistemológica, das estruturas matemáticas referentes às propriedades oriundas do modelo de Fibonacci originado em 1202, que, no caso, parte de um conjunto matricial dos Quaternions adaptado ao modelo de Fibonacci complexificado. Para isso, considera-se que a parte escalar dos Quaternions é composta pelos termos da sequência de Fibonacci. Desse modo, não será discutida, pormenorizadamente, o contexto do período histórico em que tais relações foram desenvolvidas. Doravante, tem-se o referencial teórico assumido.

2. A Teoria das Situações Didáticas e as situações-problema

A Didática da Matemática tem sua gênese na França por volta de 1970 e é marcada pela reforma da Matemática Moderna e criação dos Institutos de Pesquisa sobre Ensino da Matemática (IREMs). Nesse âmbito, as teorias de desenvolvimento ganham atenção dos pesquisadores-educadores matemáticos, tendo em vista que, segundo Pais (2002, p. 11), a Didática da Matemática é uma vertente oriunda do campo da Educação Matemática, além disso, seu campo epistêmico abrange a formulação de conceitos matemáticos articulada com teorias de ensino.

Alves (2016a, p. 133) explica que o contexto descrito, anteriormente, instigou uma avaliação da prática docente e da atuação do aluno no cenário que envolve o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, o que oportunizou a concepção de teorias de ensino que investigam a relação entre professor, aluno e conhecimento matemático. Isso permitiu a delimitação científica de uma área de pesquisa, a Didática da Matemática, que busca explorar os "processos de transmissão, modificação e veiculação de saberes matemáticos". Além do mais, a Didática da Matemática tem como objeto de estudo a transposição didática (Chevallard, 1998) dos conceitos matemáticos numa temática epistemológica que possibilita a compreensão de conceitos e a construção de relações matemáticas. Assim, vale ressaltar que:

> A transformação do conteúdo de saber em uma versão didática desse objeto de saber, mais apropriadamente, é chamado de *transposición didáctica stricto sensu*. Mas, o estudo científico do processo de transposição didática (que é uma dimensão fundamental da Didática da Matemática) implica tendo em conta a transposição didática *sensu lato*,

> representada pelo esquema: objeto de saber $\Rightarrow$ objeto para ensinar $\Rightarrow$ objeto $\Rightarrow$ de ensino. O primeiro elo que marca a passagem do implícito para o explícito, da prática à teoria, do pré-construído para construído. (Chevallard, 1998, p.45).

À vista disso, a transposição didática é realizada com aporte teórico em uma ou mais teorias de ensino que, no contexto da vertente francesa, destaca-se a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau em 1986, a fim de investigar as situações de ensino, de modo a compreender como os elementos: docente, aluno e conhecimento matemático estão inseridos no cenário educacional e como eles articulam-se na efetivação do processo de ensino e aprendizagem. Além disso, conforme Almouloud (2016, p. 113), o objetivo dessa teoria é:

> [...] caracterizar um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis e que têm potencial para provocar modificações em um conjunto de comportamentos dos alunos. Essas modificações são características da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos/saberes, de ocorrência de uma aprendizagem significativa.

Com isso, Artigue (2009, p.4) explica que a construção de conhecimento ocorre de forma significativa, quando o aluno passa por uma adaptação ao *milieu*. Desse modo, Silva e Almouloud (2018, p.117) descrevem o *milieu* "como um sistema que interage com o aluno de forma antagônica desafiando-o, por intermédio da reflexão sobre suas ações, a encontrar respostas para as situações-problema a ela propostas". Destarte, o objeto principal dessa teoria de ensino é a situação didática que abrange o aluno, saber e *milieu*. Nesse viés, Brousseau (2008, p. 53) afirma que uma "interação torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra interação de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)".

Nesse sentido, a situação didática envolve a "situação adidática" que é realizada com uma intenção, implícita, de ensino, mas que de fato, essa situação é concebida e elaborada pelo docente, com finalidade didática, a fim de oportunizar um processo de ensino e aprendizagem. Assim, as "situações adidáticas" são compostas por situações-problema, as quais são questões/problemas abertas (os), com enunciados objetivos, ou fechadas (os) concebidas (os) "em um contexto mais ou menos matematizado", cuja "função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões dos alunos no momento da resolução do problema" (Almouloud, 2016, p.116). Logo:

> Essas situações-problema devem permitir ao aluno investigar e distinguir caminhos para resolver problemas, adquirir novos conhecimentos/saberes e estratégias de resolução. Essas situações-problema devem auxiliar o aluno na construção de **conhecimentos e saberes**, e no desenvolvimento de habilidades, como, por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar representação matemática em demonstrações de propriedades e teoremas etc. (Almouloud, 2016, p.113).

Uma proposta de modelização das situações didáticas é a concepção e aplicação de situações-problema com enfoque na Teoria das Situações Didáticas, pela qual é possível oferecer ao aluno condições para que ele possa mobilizar seu pensamento, que, *a priori*, pode ser intuitivo não descartando o uso de um conhecimento prévio de natureza teórica, em direção ao desenvolvimento de um raciocínio inferencial e generalizador. Para isso, Almouloud (2007, p. 36) explica que a Teoria das Situações Didáticas é organizada em quatro fases consecutivas: ação, formulação, validação; realizadas principalmente pelos alunos; e a quarta etapa final de institucionalização proporcionada pelo docente.

É relevante compreender que a Teoria das Situações Didáticas incorpora aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos, de modo que esses elementos estão associados a fim de oportunizar a apropriação e o aprendizado de conceitos e relações matemáticas. Assim, de acordo com Alves (2016c, p. 62), a fase de ação é caracterizada pela iniciativa do estudante em resolver a questão proposta, nesse momento, o pensamento intuitivo, imediato e operacional é mobilizado. Posteriormente, na fase de formulação, o aluno passa a sugerir possíveis soluções para o problema através da elaboração de conjecturas escassas da formalidade matemática. Essa etapa é responsável pela passagem do pensamento intuitivo para o raciocínio inferencial.

Por conseguinte, na fase de validação, acontece a avaliação das hipóteses levantadas, a fim de validá-las ou refutá-las. Para isso, são usados argumentos mais elaborados com fundamentação teórica, como definições, recorrendo a relações e métodos de demonstrações matemáticas. De fato, Brousseau (1976, p. 110) acentua que "para uma abordagem de validação, o pensamento deve basear-se em formulações anteriores. A linguagem desenvolvida, na dialética da formulação, é menos específica do que a da validação".

Finalmente, tem-se a fase de institucionalização realizada pelo professor. Nesse momento, as produções dos alunos são corrigidas, tal que se pretende observar o desempenho dos alunos durante a construção de conceitos e generalização de relações matemáticas, a fim de formalizar o conhecimento aprendido (Alves, 2016c, p. 62). Esse processo de construção possibilita, no contexto didático, uma abordagem epistemológica, ou seja, um estudo da composição dos conceitos matemáticos desde sua gênese até suas representações generalizadas (Almouloud, 2007, p. 149).

Dessa forma, o campo epistêmico-matemático deste trabalho é o modelo de Fibonacci com ênfase nos Quaternions, que são definidos dentro de um processo de complexificação do modelo. A seguir, numa perspectiva evolutiva, serão apresentadas algumas definições e relações que servirão de aporte para uma discussão dos Quaternions de Fibonacci com enfoque na Teoria das Situações Didáticas.

3. Os Quaternions de Fibonacci

Nesta seção, serão apresentadas as definições e relações inerentes aos Quaternions e sua representação no modelo de Fibonacci. Desse modo, numa temática epistemológica, King (1963, p.16) explica que a gênese do modelo de Fibonacci é inspirada na situação-problema, "*Rabbit Problem*", proposta por Leonardo Pisano em 1202 na obra *Liber Abbaci*. *A priori*, a sequência gerada por esse problema satisfaz à recursividade unidimensional $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, para todo n natural, para $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ (Alves e Catarino, 2016).

Quanto à evolução do modelo de Fibonacci, compreende-se um processo de generalização da Sequência de Fibonacci, inicialmente, discutida por Brother (1965) por meio da extensão da sequência para o conjunto dos números inteiros, Koshy (2001) propõe uma abordagem dos termos de Fibonacci para índices inteiros através da identidade $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$. Halici (2013) apresenta os números complexos de Fibonacci através de $C_n = F_n + i.F_{n+1}$, com $i^2 = -1$. Além disso, o modelo de Fibonacci também é discutido através de polinômios complexos (Alves e Catarino, 2016) e na variável complexa (Alves e Oliveira, 2017).

Seguindo nesse sentido de ampliação do repertório de representações do modelo Fibonacciano, este trabalho dá ênfase a sua complexificação a partir da definição dos Quaternions para o modelo de Fibonacci. Os Quaternions são números hipercomplexos que possuem uma parte escalar Real (q_0, q_1, q_2, q_3) e uma parte vetorial com base (e_1, e_2, e_3), valendo as igualdades $(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = = e_1.e_2.e_3 = -1$. Por definição, um Quaternion é descrito pela equação $q = q_0 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$. Analogamente, um Quaternion de Fibonacci possui uma parte escalar Real composta pelos números de Fibonacci $(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3})$ e a mesma base vetorial (e_1, e_2, e_3). Assim, são descritos pela equação $Q_n = F_n + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + F_{n+3}e_3$ (Halici, 2012, 2013).

Halici (2012) define os conjuntos: $H = \{Q_n : Q_n = (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3})$, onde $F_n :=$ número de Fibonacci$\}$ e $H' = \left\{P_n : P_n = \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}, \text{ para } w, z \in C\right\}$. Halici (2012) assume a existência de isomorfismo entre H e H', de modo que através de uma aplicação $Q_n \to P_n$, obtém-se o teorema 1. Além do mais, é necessário considerar as definições e a identidade a seguir, a fim de se ter aporte teórico para explorar as situações-problema propostas posteriormente.

Definição 1: o número complexo de Fibonacci é definido por: $C_n = F_n + i.F_{n+1}$, com $i^2 = -1$ (Halici, 2013).

Definição 2: o Quaternion de Fibonacci é definido pela equação: $Q_n = F_n + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + F_{n+3}e_3$ (Halici, 2013).

Definição 3: o Quaternion de Fibonacci é definido pela equação: $Q_n = F_n + F_{n+1}.i + F_{n+2}.j + F_{n+3}.k$, onde $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (Halici, 2012).

Identidade 1: a extensão da sequência de Fibonacci para índices inteiros é dada por $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$ (Koshy, 2001).

Demonstração: partindo da recursividade $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, para todo n natural e por indução, podem-se avaliar os termos da sequência de Fibonacci para índices inteiros. Veja:

$$\begin{cases} F_{-1}=F_1-F_0=1-0=1 \\ F_{-2}=-1=-F_2 \\ F_{-3}=2=f_3 \\ F_{-4}=-3=-F_4 \\ F_{-5}=5=F_5 \\ F_{-6}=-8=-F_6 \\ F_{-7}=13=F_7 \\ \quad\vdots \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{-1}=1=(-1)^{1+1}\cdot F_1 \\ F_{-2}=-1=(-1)^{2+1}\cdot F_2 \\ F_{-3}=2=(-1)^{3+1}\cdot F_3 \\ F_{-4}=-3=(-1)^{4+1}\cdot F_4 \\ F_{-5}=5=(-1)^{5+1}\cdot F_5 \\ F_{-6}=-8=(-1)^{6+1}\cdot F_6 \\ F_{-7}=13=(-1)^{7+1}\cdot F_7 \\ \quad\vdots \quad \vdots \\ F_{-(n-1)}=(-1)^n.F_{n-1} \\ F_{-n}=(-1)^{n+1}.F_n \\ F_{-(n+1)}=(-1)^{n+2}.F_{(n+1)} \end{cases}$$

Diante desses casos descritos, pode-se observar que a identidade 1 é válida para $n=1$: $F_{-1}=(-1)^{1+1}.F_1=1$. E em, $F_{-3}=F_{-1}-F_{-2}=2$ e $F_{-4}=F_{-2}-F_{-3}=-3$, pode-se ver que os termos são gerados a partir do seguinte raciocício: $F_{-(n+1)}=F_{-(n-1)}-F_{-n}$. Logo, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} F_{-(n+1)} &= F_{-(n-1)}-F_{-n} \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^n.F_{n-1}-(-1)^{n+1}.F_n \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^n.F_{n-1}+(-1)^n.F_n \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^n.[F_{n-1}+F_n] \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^n.F_{n+1} \\ F_{-(n+1)} &= (-1)^{n+2}.F_{n+1} \end{aligned}$$

Teorema 1: $P_n=F_nE+F_{n+1}I+F_{n+2}J+F_{n+3}K=\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}$, onde $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, com $n\geq 0$.

Demonstração: da aplicação $Q_n\to P_n$, tem-se que $P_n=F_n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+F_{n+1}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}+$ $+F_{n+2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+F_{n+3}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Com isso, pode-se escrever:

$$n=0: P_0 = F_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_0 + i.F_1 & -F_2 - i.F_3\\ F_2 - i.F_3 & F_0 - i.F_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_0 & -C_2\\ \overline{C_2} & \overline{C_0}\end{pmatrix}$$

$$n=1: P_1 = F_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_1 + i.F_2 & -F_3 - i.F_4\\ F_3 - i.F_4 & F_1 - i.F_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_1 & -C_3\\ \overline{C_3} & \overline{C_1}\end{pmatrix}$$

$$n=2: P_2 = F_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_5\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_2 + i.F_3 & -F_4 - i.F_5\\ F_4 - i.F_5 & F_2 - i.F_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_2 & -C_4\\ \overline{C_4} & \overline{C_2}\end{pmatrix}$$

$$n=3: P_3 = F_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_4\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_5\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_6\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_3 + i.F_4 & -F_5 - i.F_6\\ F_5 - i.F_6 & F_3 - i.F_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_3 & -C_5\\ \overline{C_5} & \overline{C_3}\end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$n: P_n = F_n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{n+1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{n+2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{n+3}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_n + i.F_{n+1} & -F_{n+2} - i.F_{n+3}\\ F_{n+2} - i.F_{n+3} & F_n - i.F_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_n & -C_{n+2}\\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n}\end{pmatrix}$$

$$n+1: P_{n+1} = F_{n+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{n+2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{n+3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{n+4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{n+1} + i.F_{n+2} & -F_{n+3} - i.F_{n+4}\\ F_{n+3} - i.F_{n+4} & F_{n+1} - i.F_{n+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{n+1} & -C_{n+3}\\ \overline{C_{n+3}} & \overline{C_{n+1}}\end{pmatrix}.$$

Com efeito, pode-se ver que, para $n=1$ e $n=2$, tem-se respectivamente: $P_1 = F_1E + F_2I + F_3J + F_4K$ e $P_2 = F_2E + F_3I + F_4J + F_5K$. Por hipótese de indução, assume-se que $P_n = F_nE + F_{n+1}I + F_{n+2}J + F_{n+3}K$ vale para P_n e P_{n-1}, de maneira que se pode escrever $P_{n+1} = P_{n-1} + P_n$. Logo, considerando que $P_{n-1} = F_{n-1}E + F_nI + F_{n+1}J + F_{n+2}K$ e $P_n = F_nE + F_{n+1}I + F_{n+2}J + F_{n+3}K$, pode-se escrever:

$$P_{n+1} = P_{n-1} + P_n$$
$$P_{n+1} = (F_{n-1} + F_n)E + (F_n + F_{n+1})I + (F_{n+1} + F_{n+2})J + (F_{n+2} + F_{n+3})K$$
$$P_{n+1} = F_{n+1}E + F_{n+2}I + F_{n+3}J + F_{n+4}K.$$

Isto posto, pode-se ver que os conjuntos H e H' definidos por Halici (2012), através de uma aplicação $Q_n \to P_n$ que considera a parte escalar composta pelos números de Fibonacci, permitem uma representação matricial dos quaternions de Fibonacci por meio de uma matriz quadrada de ordem 2, onde os termos são números complexos de Fibonacci C_n. A partir desse campo epistêmico, a seguir, serão discutidas três situações-problema que designam a verificação de propriedades matriciais para o conjunto H' e uma extensão dessa aplicação para índices inteiros.

4. Situações-problema

Nesta seção, serão discutidas três situações-problema concebidas durante uma investigação nos trabalhos de Halici (2012, 2013) e de Callioli, Domingues e Costa (1990). O objetivo dessas questões é de oportunizar uma discussão dos Quaternions de Fibonacci com enfoque na Teoria das Situações Didáticas, ou seja, de descrever as resoluções seguindo as fases consecutivas: ação, formulação e validação. E, pretende-se, com as situações propostas, instigar o desenvolvimento de um raciocínio inferencial e a percepção dos alunos em relação à evolução do modelo de Fibonacci com as representações matriciais complexas e de sua extensão para índices inteiros. Desse modo, têm-se as seguintes situações-problema:

Situação-problema 1: após, avaliar a matriz gerada na aplicação $Q_n \to P_n$ entre os conjuntos H e H', escreva uma matriz para representar a inversa da matriz gerada. Em seguida, discuta com seus colegas se a matriz (gerada), de fato, admite inversa. Justifique sua resolução verificando se essa última matriz (proposta) satisfaz às condições matriciais para se constituir como matriz inversa.

Situação-problema 2: seja P_n^{-1} uma possível notação da inversa da matriz P_n, avalie as seguintes igualdades: $\det(P_n).\det(P_n^{-1}) = 1$, $(P_n^{-1})^{-1} = P_n$ e $(P_n.P_n^{-1})^{-1} = P_n.P_n^{-1}$. Essas igualdades são verdadeiras? Elas satisfazem às condições matriciais pertinentes à definição de matriz inversa? Apresente a discussão algébrica usada para justificar sua resolução e, se necessário, descartar a solução de um colega.

Situação-problema 3: verifique se

$$P_n = F_nE + F_{n+1}I + F_{n+2}J + F_{n+3}K = \begin{pmatrix} \frac{C_n}{C_{n+2}} & \frac{-C_{n+2}}{\overline{C_n}} \end{pmatrix},$$

onde $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, com $n \geq 0$, admite uma discussão nos índices inteiros. Caso haja uma extensão para índices inteiros, quais argumentos algébricos foram utilizados?

Na situação-problema 1, sugere-se que os estudantes escrevam matrizes com o objetivo de construir a matriz inversa da matriz gerada. Nesse caso, espera-se que os alunos discutam as matrizes propostas pela turma e verifiquem se elas são ou não matrizes inversas. Essa validação/refutação deve ser feita com argumentos matemáticos já aceitos na comunidade científica.

Na resolução da primeira situação-problema, na fase de ação e formulação, espera-se que os alunos identifiquem a matriz $P_n = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}$ e sugiram a determinação da matriz inversa P_n^{-1} por meio da definição $P_n.P_n^{-1} = I_2 = P_n^{-1}.P_n$ onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2 (Callioli, Domingues e Costa, 1990). Desse modo, desenvolvendo a equação $P_n.P_n^{-1} = I_2$ tem-se que: $\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} C_n.a_{11} - C_{n+2}.a_{21} & C_n.a_{12} - C_{n+2}.a_{22} \\ \overline{C_{n+2}}.a_{11} + \overline{C_n}.a_{21} & \overline{C_{n+2}}.a_{12} + \overline{C_n}.a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de onde se obtém os sistemas:

$$\begin{cases} C_n.a_{11} - C_{n+2}.a_{21} = 1 \Rightarrow a_{11} = \dfrac{1 + C_{n+2}.a_{21}}{C_n} \\ \overline{C_{n+2}}.a_{11} + \overline{C_n}.a_{21} = 0 \Rightarrow a_{11} = -\dfrac{\overline{C_n}.a_{21}}{\overline{C_{n+2}}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_n.a_{12} - C_{n+2}.a_{22} = 0 \Rightarrow a_{12} = \dfrac{C_{n+2}.a_{22}}{C_n} \\ \overline{C_{n+2}}.a_{12} + \overline{C_n}.a_{22} = 1 \Rightarrow a_{12} = \dfrac{1 - \overline{C_n}.a_{22}}{\overline{C_{n+2}}} \end{cases}$$

Resolvendo-os, são encotrados:

$$a_{11} = \frac{1 + C_{n+2}.a_{21}}{C_n} = -\frac{\overline{C_n}.a_{21}}{\overline{C_{n+2}}} \Rightarrow a_{21} = \frac{-\overline{C_{n+2}}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}$$

e $a_{11} = \dfrac{\overline{C_n}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}$, $a_{12} = \dfrac{C_{n+2}.a_{22}}{C_n} = \dfrac{1 - \overline{C_n}.a_{22}}{\overline{C_{n+2}}} \therefore a_{22} = \dfrac{C_n}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}$

e $a_{12} = \dfrac{C_{n+2}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}$. Logo, tem a inversa: $P_n^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} & \dfrac{C_{n+2}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} \\ \dfrac{-\overline{C_{n+2}}}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} & \dfrac{C_n}{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_{n+2}}{\det(P_n)} \\ \dfrac{-\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ -\overline{C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix}$. Na fase de validação, deve ser feita a verificação de $P_n^{-1}.P_n = I_2$. Veja que: $\det(P_n) = \overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2} = F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2$, assim, segue o seguinte produto matricial: $(P_n^{-1}).P_n = \dfrac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ -\overline{C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n}.C_n + C_{n+2}.\overline{C_{n+2}} & -\overline{C_n}.C_{n+2} + C_{n+2}.\overline{C_n} \\ -\overline{C_{n+2}}.C_n + C_n.\overline{C_{n+2}} & \overline{C_{n+2}}.C_{n+2} + C_n.\overline{C_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Na segunda situação-problema, espera-se que cada aluno busque verificar a validade das igualdades. Em seguida, as resoluções dos alunos devem ser discutidas entre os alunos, os quais devem validar ou refutar as resoluções propostas pelos colegas fundamentando-se nas condições pertinentes à matriz inversa. *A priori*, a fase de ação é caracterizada pela organização das equações da seguinte forma:

$$\text{(i) } \det(P_n).\det\left(P_n^{-1}\right) = 1$$

$$\text{(ii) } \left(P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n$$

$$\text{(iii) } \left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n.P_n^{-1}.$$

Desse modo, para resolver o item (i), na etapa de formulação, espera-se que os alunos calculem os determinantes das matrizes P_n e P_n^{-1}, encontrando $\det(P_n) = \overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}$ e $\det(P_n^{-1}) = \left(\dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)^2}\right)$. Em seguida, na validação, os valores dos determinantes devem ser substituídos na equação (i), tal que, possa verficar: $\det(P_n).\det(P_n^{-1}) = (\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}).\left(\dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)^2}\right) = 1.$

O item (ii), ainda na etapa de ação, espera-se que os estudantes observem que eles precisam calcular a inversa da matriz P_n^{-1}. Na formulação, eles devem argumentar a verificação da igualdade $(P_n^{-1}).(P_n^{-1})^{-1} = I_2 = (P_n^{-1})^{-1}.(P_n^{-1})$ no sentido de "se somente se". Assim, de modo análogo à resolução da situação-problema 1, deve-se fazer $(P_n^{-1}).(P_n^{-1})^{-1} = I_2 \Rightarrow \dfrac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ -\overline{C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n}.b_{11} + C_{n+2}.b_{21} & \overline{C_n}.b_{12} + C_{n+2}.b_{22} \\ -\overline{C_{n+2}}.b_{11} + C_n.b_{21} & -\overline{C_{n+2}}.b_{12} + C_n.b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore (P_n^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix} = P_n.$$

Em consequência, na validação, deve ocorrer a avaliação do produto $(P_n^{-1})^{-1}.(P_n^{-1})$, assim, segue que $(P_n^{-1})^{-1}.(P_n^{-1}) = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.\dfrac{1}{\det(P_n)}.\begin{pmatrix} \overline{C_n} & C_{n+2} \\ -\overline{C_{n+2}} & C_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}.C_n + \overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n.C_{n+2} - C_{n+2}.C_n}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{C_{n+2}}.\overline{C_n} - \overline{C_n}.\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{\overline{C_{n+2}}.C_{n+2} + \overline{C_n}.C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Portanto, constata-se que a igualdade (ii) $\left(P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n$ é válida.

No item (iii), ainda como ação, os alunos devem sugerir o cálculo da matriz inversa $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}$ e a avaliação da equação $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1} = P_n.P_n^{-1}$ no sentido de "se somente se". Dessa forma, na formulação, primeiramente, deve-se fazer $P_n.P_n^{-1} =$

$$=\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_{n+2}}{\det(P_n)} \\ \dfrac{-\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}.C_n+\overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n.C_{n+2}-C_{n+2}.C_n}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{C_n}\,.\overline{C_{n+2}}-\overline{C_n}\,.\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{\overline{C_n}.C_n+\overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\det(P_n)}{\det(P_n)} & \dfrac{0}{\det(P_n)} \\ \dfrac{0}{\det(P_n)} & \dfrac{\det(P_n)}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, tem que ser determinada a inversa $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}$, ou seja, a inversa da matriz identidade. Assim, a Identidade deve satisfazer $(P_n.P_n^{-1}).(P_n.P_n^{-1})^{-1}=I_2=(P_n.P_n^{-1})^{-1}.(P_n.P_n^{-1})$. De onde, pode-se obter a seguinte igualdade: $(P_n.P_n^{-1}).(P_n.P_n^{-1})^{-1}=I_2\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow(P_n.P_n^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e verificar $(P_n.P_n^{-1})^{-1}.(P_n.P_n^{-1})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Na solução do item (iii), consegue-se obter $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}=I_2$. Logo, na etapa de validação, deve se verificar

$$P_n.P_n^{-1}=\begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_{n+2}}{\det(P_n)} \\ \dfrac{-\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\overline{C_n}.C_n+\overline{C_{n+2}}.C_{n+2}}{\det(P_n)} & \dfrac{C_n.C_{n+2}-C_{n+2}.C_n}{\det(P_n)} \\ \dfrac{\overline{C_{n+2}}\,.\overline{C_n}-\overline{C_n}\,\overline{C_{n+2}}}{\det(P_n)} & \dfrac{\overline{C_{n+2}}.C_{n+2}+\overline{C_n}.C_n}{\det(P_n)} \end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Portanto, verifica-se a validade de $\left(P_n.P_n^{-1}\right)^{-1}=P_n.P_n^{-1}$.

Finalmente, na solução da situação-problema 3, na fase de ação, é necessário que se defina os conjuntos: $H^*=\{Q_{-n}:Q_{-n}=\left(F_{-n},F_{-n+1},F_{-n+2},F_{-n+3}\right),\ F_{-n}:=$ número de Fibonacci$\}$ e $H''=\left\{P_{-n}:P_{-n}=\begin{pmatrix} w & -z \\ \overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix},\text{para } w,z\in\mathbb{C}\right\}$, tendo em vista que se pretende explorar o teorema 1 para índices inteiros. Na fase de formulação, deve-se conjecturar uma aplicação $Q_{-n}\rightarrow P_{-n}$, de modo que se possa escrever $P_{-n}=F_{-n}E+F_{-n+1}I+F_{-n+2}J+F_{-n+3}K=\begin{pmatrix} C_{-n} & -C_{-n+2} \\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}} \end{pmatrix}$, com $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Na validação, pode-se avaliar P_{-n}, recorrendo à indução matemática. Veja:

$$n=0:\ P_0 = F_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_3\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_0 + i.F_1 & -F_2 - i.F_3\\ F_2 - i.F_3 & F_0 - i.F_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_0 & -C_2\\ \overline{C_2} & \overline{C_0}\end{pmatrix}$$

$$n=1:\ P_{-1} = F_{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_2\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-1} + i.F_0 & -F_1 - i.F_2\\ F_1 - i.F_2 & F_{-1} - i.F_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-1} & -C_1\\ \overline{C_1} & \overline{C_{-1}}\end{pmatrix}$$

$$n=2:\ P_{-2} = F_{-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_1\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-2} + i.F_{-1} & -F_0 - i.F_1\\ F_0 - i.F_1 & F_{-2} - i.F_{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-2} & -C_0\\ \overline{C_0} & \overline{C_{-2}}\end{pmatrix}$$

$$n=3:\ P_{-3} = F_{-3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_0\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-3} + i.F_{-2} & -F_{-1} - i.F_0\\ F_{-1} - i.F_0 & F_{-3} - i.F_{-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{-3} & -C_{-1}\\ \overline{C_{-1}} & \overline{C_{-3}}\end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$n:\ P_{-n} = F_{-n}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-n+1}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-n+2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{-n+3}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-n} + i.F_{-n+1} & -F_{-n+2} - i.F_{-n+3}\\ F_{-n+2} - i.F_{-n+3} & F_{-n} - i.F_{-n+1}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}C_{-n} & -C_{-n+2}\\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}}\end{pmatrix}$$

$$n+1:\ P_{-n+1} = F_{-n+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + F_{-n+2}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + F_{-n+3}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + F_{-n+4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_{-n+1} + i.F_{-n+2} & -F_{-n+3} - i.F_{-n+4}\\ F_{-n+3} - i.F_{-n+4} & F_{-n+1} - i.F_{-n+2}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}C_{-n+1} & -C_{-n+3}\\ \overline{C_{-n+3}} & \overline{C_{-n+1}}\end{pmatrix}.$$

A seguir, têm-se a discussão da quarta fase da Teoria das Situações Didáticas: a institucionalização que deve ser realizada pelo professor, a fim de apresentar alguns resultados derivados da proposição didática.

5. Institucionalização

A institucionalização é a etapa final da simulação de uma situação didática. Nesse momento o atuante é o docente que avalia as produções dos alunos, descartando erros e/ou selecionando estratégias de soluções, as quais serão reestruturadas e formalizadas a fim de compor o repertório de conhecimentos científicos dos alunos. Nesse contexto, as situações-problema propostas descritas nos parágrafos anteriores, oportunizam a formalização de relações matemáticas oriundas da aplicação $Q_n \to P_n$ (teorema 1).

INSTITUCIONALIZAÇÃO: RELAÇÕES FORMALIZADAS		
Propriedades matriciais para os Quaternions de Fibonacci com $n \geq 0$		
$\det(P_n).\det(P_n^{-1}) = 1$	$(P_n^{-1})^{-1} = P_n$	$(P_n.P_n^{-1})^{-1} = P_n.P_n^{-1}.$
Extensão da aplicação $Q_n \to P_n$ para índices inteiros		
$P_{-n} = F_{-n}E + F_{-n+1}I + F_{-n+2}J + F_{-n+3}K = \begin{pmatrix} C_{-n} & -C_{-n+2} \\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}} \end{pmatrix}$, com $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$		
$P_{-n} = (-1)^n.\begin{pmatrix} (-F_n + i.F_{n-1}) & (F_{n-2} - i.F_{n-3}) \\ (-F_{n-2} - i.F_{n-3}) & (-F_n - i.F_{n-1}) \end{pmatrix}$, com $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$		

Tabela 1. Institucionalização: relações formalizadas para os Quaternions de Fibonacci. Fonte: elaboração da autora.

Pode-se ver que a aplicação $Q_n \to P_n$ gera um conjunto matricial $P_n = F_n E + F_{n+1} I + F_{n+2} J + F_{n+3} K = \begin{pmatrix} C_n & -C_{n+2} \\ \overline{C_{n+2}} & \overline{C_n} \end{pmatrix}$, onde $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, com $n \geq 0$, tal que seus elementos são os números complexos de Fibonacci $C_n = F_n + i.F_{n+1}$ (definição 1) e seus respectivos conjugados, isso ocorre quando se assume a parte escalar $(F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3})$. Na situação-problema 2, as matrizes P_n e P_n^{-1} admitem inversas, logo, foram verificadas que valem as propriedades matriciais presentes na tabela 1. Além do mais, é possível avaliar o teorema 1 para uma representação com índices inteiros. E, essa representação pode ser descrita recorrendo à $F_{-n} = (-1)^{n+1}.F_n$ (identidade 1). Observe que: $P_{-n} =$

$$= \begin{pmatrix} C_{-n} & -C_{-n+2} \\ \overline{C_{-n+2}} & \overline{C_{-n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-n} + i.F_{-n+1} & -F_{-n+2} - i.F_{-n+3} \\ F_{-n+2} - i.F_{-n+3} & F_{-n} - i.F_{-n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.F_n + i.(-1)^n.F_{n-1} & -(-1)^{n-1}.F_{n-2} - i.(-1)^{n-2}.F_{n-3} \\ (-1)^{n-1}.F_{n-2} - i.(-1)^{n-2}.F_{n-3} & (-1)^{n+1}.F_n - i.(-1)^n.F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n.\begin{pmatrix} (-F_n + i.F_{n-1}) & (F_{n-2} - i.F_{n-3}) \\ (-F_{n-2} - i.F_{n-3}) & (-F_n - i.F_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Considerações finais

Neste trabalho, foi discutido o modelo de Fibonacci, numa abordagem didática articulada a uma temática epistemológica que enfatiza propriedades matriciais e uma extensão para índices inteiros de um conjunto matricial definido para os Quaternions de Fibonacci. Isso foi possível a partir da fundamentação na Teoria das Situações Didáticas, específicamente, através da proposição de situações-problema que permitiram a discussão de demonstrações matemáticas através de etapas categorizadas em ação, formulação e validação. Isso permite a compreensão e percepção de um processo evolutivo do modelo de Fibonacci.

Finalmente, pretende-se com o trabalho exposto, instigar trabalhos futuros, no âmbito da Didática da Matemática, que vislumbram a inserção de uma concepção epistemológica, na formação inicial de professores de Matemática, no que concerne à História da Matemática. De modo, a contribuir com a ampliação do repertório de definições e relações atinentes à complexificação do modelo de Fibonacci, que direciona a uma tendência de representações matriciais quadradas de orden superior a dois com a consideração dos números reais e complexos de Fibonacci na composição dos Quaternions.

Bibliografía

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: UFPR.

Almouloud, S. A. (2016). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT.* Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 109-141.

Alves, F. R. V. (2016a). Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educ.,* Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150.

Alves, F. R. V. (2016b). Descobrindo definições matemáticas no contexto de investigação histórica: o caso da sequência generalizada de Fibonacci. *Boletim GEPEM*, 68(1), 1 – 5. *[*en línea], 29. Acesso em 12 de agosto de 2016 em http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=view&path[]=198

Alves, F.R.V. (2016c). Teoria das Situações Didáticas (TSD): sobre o ensino de pontos extremantes de funções com arrimo da tecnologia. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco*, v. 5, n. 2, p. 59-68.

Alves, F. R. V.; Catarino, P. M. M. C. (2016). A classe dos polinômios bivariados de Fibonacci (PBF): elementos recentes sobre a evolução de um modelo. *Revista Thema,* v. 14, n. 2, p. 112-136.

Alves, F. R. V.; Oliveira, R. R. (2017). Sobre o modelo de Fibonacci na variável complexa: identidades generalizadas. *REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA*, v. 11, p. 116-135.

Artigue, M. (2009). DIDACTICAL DESIGN IN MATHEMATICS EDUCATION. o appear in C. Winsløw (ed.) *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08.* Sense Publ.

Brother, U. A. (1965). *Introduction fo Fibonacci Discovery*. California: Santa Clara University.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. *Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.* Louvain-la-Neuve, p. 101-117.

Brousseau, G. (2008). *Conteúdos e Métodos de Ensino.* In: SILVA, Benedito Antônio da. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*. Tradução de: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 128 p.

Callioli, C. A.; Domingos, H. H.; Costa, R. C. F. (1990). *Álgebra Linear e aplicações*. 6. ed. rev. São Paulo: Atual.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* 3. ed. Argentina: Aique.

Flaut, C.; Shpakivskyi. V. (2013). Real matrix representations for the complex quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 23(3), 657-671.

Halici, S. (2012). On Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 22(2), 321-327.

Halici, S. (2013). On Complex Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 23, 105-112.

Horadam, A. F. (1993). Quaternion Recurrence Relations. *Ulam Quaterly,* 2, 23-33.

King, C. (1963). Leonardo Fibonacci. *The Fibonacci Quarterly,* v. 1, n. 4, p. 15–19.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Appllications*. New York: Wiley and Sons publications.

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Sangwine, S. J.; Ell, T. A.; Bihan, N. L. (2011). Fundamental Represantations and Algebraic Properties of Biquaternions or Complexified Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras,* 21, 607-636.

Silva, C. V.; Almouloud, S. A. (2018). Uma articulação entre o quadro dos Paradigmas Geométricos e a Teoria das Situações Didáticas. *Acta Scientiae*, Canoas, v. 20, n. 1, p.111-129.

Autora:

Rannyelly Rodrigues de Oliveira. Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE). Mestra em Ensino de Ciências e Matemática (IFCE). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Fortaleza/Brasil. E-mail: ranny.math.06@gmail.com