REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 150-165

Reflexiones sobre la implementación de problemas de modelado para la construcción y resignificación de objetos matemáticos vinculados a las ecuaciones diferenciales

Claudia Mariela Zang, Gretel Alejandrina Fernández von Metzen, María Natalia León

Fecha de receptión: 13/03/2013
Fecha de aceptación:02/11/2015

Resumen	Las investigaciones en educación señalan que tradicionalmente se enfatiza el estudio de las ecuaciones diferenciales desde el enfoque algebraico, lo que demerita su abordaje cualitativo y potencialidad para modelar fenómenos. Este trabajo ofrece algunas reflexiones sobre el proceso de modelación como herramienta para la construcción de conceptos matemáticos. Éstas se derivan del análisis e implementación de secuencias didácticas, concebidas en el marco de la Ingeniería Didáctica, destinadas a estudiar la disponibilidad en los alumnos de algunos contenidos matemáticos ya estudiados. También se exponen los resultados de la experiencia. **Palabras clave**: modelado, Ingeniería Didáctica, ecuaciones diferenciales
Abstract	Research in education indicate that traditionally emphasizes the study of differential equations from the algebraic approach, which detract their qualitative approach and their potential to modeling phenomena. This paper offers some reflections on the process of modeling as a tool for the construction of mathematical concepts. These are derived from the analysis and implementation of teaching sequences, conceived as part of the Didactic Engineering, designed to study the availability in students some mathematical content already studied. It also presents the results of the experience. **Keywords**: Modelling. Didactic Engineering, differential equations
Resumo	Pesquisas em educação indicam que, tradicionalmente, se enfatiza o estudo de equações diferenciais em uma abordagem algébrica o que prejudica a sua abordagem qualitativa e potencialidade para modelar fenômenos. Este artigo oferece algumas reflexões sobre o processo de modelagem como uma ferramenta para a construção de conceitos matemáticos. Estes são derivados da análise e implementação de sequências de ensino, concebidas como parte da Engenharia Didática, destinadas para estudar a disponibilidade dos alunos de alguns conteúdos matemáticos já estudados. Também apresenta os resultados da experiência. **Palavras Chave:** Modelagem, Engenharia Didática, equações diferenciais

1. Introducción

Las ED son una poderosa herramienta para la construcción de modelos matemáticos, en los que se vinculan conceptos básicos estudiados en los primeros cursos de muchas de las carreras universitarias. Por esta razón, se ha decidido estudiar en qué medida los alumnos recurren a esos conocimientos básicos para la resolución de situaciones problemáticas en el contexto de las ED, examinar las estrategias que utilizan en la resolución de problemas, los obstáculos más comunes a los que se enfrentan, y elaborar propuestas de enseñanza que les permitan resignificar sus saberes previos, haciéndolos evolucionar hacia conocimientos nuevos.

Para lograr tales fines, se decidió diseñar un proyecto de investigación titulado "Contenidos matemáticos básicos: ¿en qué medida son el recurso en los primeros aprendizajes de ecuaciones diferenciales?". El presente escrito se deriva como parte del trabajo de indagación realizado en el marco de dicho proyecto.

Por otro lado, las investigaciones en educación referentes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas reportan las ventajas que ofrece la modelización matemática como un recurso para la enseñanza y el aprendizaje de dicha disciplina. Además, en virtud de que la modelización está estrechamente vinculada a la solución de problemas del mundo real, se entiende que la misma puede funcionar como elemento motivador y generador de situaciones de aprendizajes significativas para el alumno.

Las autoras del presente trabajo -docentes vinculadas a la enseñanza de ED en las Facultades de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales (FCEQyN) y de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM), Argentina- han notado, en base a la observación y reflexión sobre las prácticas de enseñanza habituales en los cursos de ED, al análisis de actividades complementarias propuestas para ser realizadas con software matemático y en base al análisis de los programas de tales asignaturas, el poco espacio que se otorga normalmente a los problemas de modelización. Por tal motivo, surge la idea de incluir actividades que favorezcan la modelización de situaciones matemáticas y extra matemáticas en el desarrollo de las clases, entendida ésta como una práctica que implica la reelaboración e interpretación de modelos ya construidos por la comunidad científica, pero nuevos para el grupo de alumnos.

En este sentido, las actividades propuestas a los alumnos básicamente consistieron en suministrarles información que incluía una descripción general de la variación de algún fenómeno (físico, químico, biológico, económico, etc.) como así también una serie de hipótesis que lo explican. Se les encomendó la tarea de formular una expresión matemática que describa la situación, en ningún momento se explicitó que la expresión solicitada debía ser una ED que se ajustara a los datos dados. Para lograr la expresión solicitada debieron enfrentarse a la identificación y manipulación de variables y parámetros, probar para valores particulares de los parámetros incluidos en la expresión y luego realizar las eventuales generalizaciones y finalmente validar el modelo propuesto verificando si predice la información con la que se cuenta.

La prueba se realizó en el comienzo del estudio de las ED en la asignatura Análisis IV de los profesorados en Matemática y en Física de la FCEQyN-UNaM. Se seleccionó un problema de modelado que implica el uso de una ED de primer orden y que, para su resolución, los alumnos deben recurrir a temas conocidos por ellos (proporcionalidad, derivada, función, función exponencial, etc.) De manera análoga, se procedió al momento de iniciar el estudio de los sistemas de ED de primer orden.

El presente escrito se centrará en la discusión en torno a los procedimientos puestos en juego por los estudiantes a la hora de resolver tales problemas de aplicación. La intención es exponer los aspectos más sobresalientes que se desprenden del análisis y la reflexión de la propuesta didáctica llevada adelante.

Las siguientes secciones explicitan los lineamientos teóricos que orientaron la investigación, presentan una breve reseña de los antecedentes y de los aspectos metodológicos seguidos, así como una discusión sobre los resultados obtenidos, finalmente se infieren algunas reflexiones que se derivan del análisis realizado.

2. Fundamentos teóricos

En función de los objetivos perseguidos y de las lecturas realizadas, se encontró en la escuela francesa de la Didáctica de la Matemática el marco teórico adecuado para generar las propuestas de enseñanza a ser llevadas al salón de clases. Según estos lineamientos, la Didáctica de la Matemática tiene como objeto de estudio la situación didáctica, caracterizada como aquella que permite la construcción del conocimiento a través de un problema relativo a éste y a una cierta organización del trabajo, adaptados a los objetivos planteados. La caracterización del proceso que tiene lugar en el aula se basa en la tipología de las situaciones didácticas establecidas por Guy Brousseau (2007). Dicho autor hace una distinción de cuatro momentos sucesivos en los procesos didácticos que produce para su estudio experimental: acción, formulación, validación e institucionalización.

La postura de Brousseau tiene sus orígenes en una concepción piagetana del aprendizaje, puesto que el estudiante aprende por adaptación a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios (Piaget *et al*, 1960). Siguiendo con los aportes de la Psicología Cognitiva, y como ya se ha mencionado antes, no se puede dejar de reconocer el papel protagónico que adquieren las ideas previas de los alumnos a la hora de interpretar la información suministrada para su posterior utilización en la formulación de una ED que describa el fenómeno involucrado en el problema. Tal como lo manifiesta Ausubel: “Si tuviese que reducir toda la psicología cognitiva a un solo principio, enunciaría este: de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente” (Ausubel *et al*, 1983, p. 151).

2.1. Reflexiones sobre la modelización y los modelos matemáticos

La literatura referente al tema es muy amplia y diversa. La modelización o modelación, es entendida como la actividad de construir modelos a partir de un evento o fenómeno de la realidad. Al mismo tiempo, se observa que la noción de modelo matemático presente en las diferentes publicaciones ha estado asociada generalmente con una construcción matemática cuyo objetivo es estudiar un sistema o fenómeno particular del mundo real. Este modelo puede incluir graficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. (Giordano *et al.,* 1997).

En lo referente a este punto, se considera necesario realizar algunas aclaraciones. La modelización puede ser pensada como una actividad científica; en ese caso se estaría hablando de un proceso que envuelve una serie de acciones, entre ellas, la observación de cierto evento o fenómeno, la experimentación, la abstracción y simplificación. La abstracción es un proceso que conduce a la formulación de modelos matemáticos y que incluye la enunciación de las hipótesis que intentan explicar las relaciones existentes entre las diferentes variables seleccionadas como constitutivas del fenómeno, la formulación del problema en un lenguaje especializado y las simplificaciones que deben realizarse en virtud de que la complejidad de muchas situaciones hace que sea imposible emprender un estudio detallado de los mismos (Bassanezi, 2002). El proceso de modelización culmina con la institucionalización del modelo luego de que ha superado las instancias de validación (se efectúan interpretaciones y análisis a la luz del fenómeno en estudio con objeto de evaluar si explica o permite predecir la información con que se cuenta).

Se considera que el proceso de modelización pensado en éstos términos es sumamente difícil de llevar adelante en el salón de clases, en primer lugar, por no disponer del tiempo que demanda una investigación de esta naturaleza, y a la vez porque se carece del equipamiento y las instalaciones para realizar las eventuales tareas de indagación, y en segundo lugar, debido a las características de las carreras mencionadas, la investigación con fines científicos no es una meta en sí misma. Cabe aclarar que en los profesorados sí se llevan adelante tareas vinculadas a la investigación, pero las mismas están orientadas a la investigación educativa.

También, la modelización puede ser entendida como una herramienta que posibilita dotar de significado a los diferentes modelos que forman parte de los programas de las asignaturas de las carreras señaladas. En ese caso se estaría frente a la tarea de resignificar o reinterpretar modelos ya construidos. Esto presupone adherir a una visión amplia de lo que significa la actividad matemática: hacer matemáticas implica utilizar matemáticas conocidas, aprender y enseñar matemáticas, crear matemáticas nuevas; sin olvidar, a su vez, que modelizar situaciones problemáticas comprende la enseñanza y aprendizaje de modelos que permitan resolver esos problemas (Chevallard *et al*., 1997).

La bibliografía específica referida al tema también se ocupa de resaltar la importancia que adquieren las ED como modelos matemáticos. Al respecto se explica que un modelo matemático tiene por objetivo representar algunas características del objeto "real" y que básicamente el proceso de modelado se da en tres etapas: 1) establecer claramente las hipótesis en que se basará el modelo, las mismas describen las relaciones entre las magnitudes por estudiarse, 2) definir las variables y parámetros a ser utilizados en el modelo y 3) usar las hipótesis previamente formuladas para obtener ecuaciones que relacionen las variables y parámetros identificados (Blanchard *et al,* 1998)

2.2. Enfoques y dificultades en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales

En los últimos años, se han presentado reportes de investigaciones que dan cuenta de las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de los conceptos del análisis matemático y en particular de las ED. Siguiendo los lineamientos teóricos brindados por los IREM (Institutos de Investigación en Enseñanza de la Matemática de Francia), se destacan los trabajos llevados adelante por Artigue. Dicha investigadora plantea que los alumnos tienen dificultades para la comprensión de los conceptos del cálculo e identifica que las mismas están ligadas a una serie de obstáculos; las agrupa en tres categorías: aquellas relacionadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (las nociones de número real y función, que se encuentran en proceso de construcción, y es el cálculo precisamente el que ayudará a la conceptualización de las mismas), aquellas vinculadas a la conceptualización y formalización de la noción de límite y finalmente las correspondientes a las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo (Artigue, 1995a). Dentro de esta categorización, se considera que el obstáculo que en efecto más influencia tiene en el aprendizaje de las ED es el que está vinculado a las deficiencias en la conceptualización de función, pues esto repercute en el abordaje de la solución de una ED debido a que el proceso demanda encontrar una función, conocido el comportamiento de su variación.

Por otra parte, en lo que respecta específicamente al estudio de las ED, esta autora revela, en coincidencia con Moreno Moreno *et al* (2003) y con Habre (Habre 2000 y 2003 citado por Dullius 2009), que la enseñanza tradicional de las ED privilegia el enfoque algebraico (de resolución exacta), en detrimento de los enfoques geométrico (de resolución cualitativa) y del enfoque numérico (de resolución aproximada). Asimismo, distingue que las restricciones que obstaculizan el tratamiento cualitativo y numérico de las ED pueden ser identificadas desde tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. En cuanto a la primera, tales restricciones tienen que ver con la omnipresencia histórica del cuadro algebraico, la dificultad de los problemas que dan origen a la resolución cualitativa. En lo referente a la dimensión cognitiva, la movilidad entre el registro de las ecuaciones y el de las gráficas, en el nivel de las funciones y las derivadas restringen la extensión del estudio de las ED hacia lo cualitativo y lo numérico. Finalmente, en lo didáctico, advierte que la enseñanza tradicional no plantea problemas, lo cual repercute en un nivel de exigencia mínima, ya que entiende que introducir un enfoque cualitativo aumenta el interés de la enseñanza y también su dificultad al no ser algoritmizable (aún cuando se cuenta con métodos de resolución, éstos no llegan a convertirse en algoritmos) y, a su vez, identifica como restricciones el estatus infra-matemático que los docentes otorgan a los gráficos (Artigue, 1995b).

Las investigaciones de Moreno Moreno *et al (op. cit.*) si bien no se ocupan específicamente sobre el aprendizaje de las ED, la temática que abordan tiene que ver con las concepciones y creencias de los profesores universitarios de facultades de ciencias experimentales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ED. La importancia de incluir aquí las conclusiones a las que llegaron, reside en el hecho de que se asume que el pensamiento del profesor determina las características de sus prácticas de enseñanza (Litwin, 1996). En cuanto a los resultados que obtuvieron, subrayan que algunas de las creencias de los docentes participantes del estudio tienen que ver con que los estudiantes aprenden las ED por reproducción y memorización de situaciones y por esquemas de resolución vistos en clase y que tienen un nivel de competencias matemáticas muy pobre; estas creencias simultáneamente con la concepción formalista de las matemáticas (donde, en coincidencia con lo señalado por Artigue, se confiere un status infra-matemático a los métodos numéricos y gráficos) y el miedo a perder contenidos propios de las matemáticas puras a favor de conceptos y técnicas proporcionados por la matemática aplicada, son identificadas como causas probables de que persista la enseñanza tradicional de las ED. Al mismo tiempo, los docentes participantes del estudio, en lo referente a los aspectos vinculados a la modelización, reconocieron que tienen dificultades para reconciliar las técnicas con los modelos, consecuentemente terminan enseñando las técnicas antes que los modelos porque les resulta más fácil, en virtud de que éstos últimos generalmente implican el uso de ED bastante complejas, para las que los que no existen métodos analíticos determinados.

Los cursos tradicionales de ED se centran en procedimientos y ardides especializados para resolver ED. Blanchard *et al (op. cit*.), manifiestan, en el prefacio de su libro, que se vieron en la necesidad de reformular el curso usual de ED, puesto que, en primer lugar, consideran que gracias a las nuevas tecnologías dejó de ser esencial focalizar la atención en el enfoque algebraico, y en segundo lugar, porque las ED que aparecen en las aplicaciones generalmente no son lineales y por tanto se carece de técnicas de resolución analítica. En cambio, sí creen que es prioritario que los estudiantes tengan las herramientas para la formulación de ED y la interpretación de sus soluciones, consecuentemente, en su texto, se trabaja en forma sistemática con procedimientos cualitativos y numéricos. La misma apreciación realiza Habre (*op. cit*.) al expresar que los nuevos programas informáticos actualmente disponibles lograron que el estudio cualitativo y numérico no tenga impedimentos.

En consideración a la importancia que tienen las ED como objetos constitutivos de numerosos modelos matemáticos en las diferentes ciencias, se retoman los resultados a los que ha llegado Camarena Gallardo (2008). Si bien en este caso el contexto es la ingeniería, la problemática alcanza a las demás ciencias donde los modelos diferenciales permiten el estudio de situaciones específicas.

La autora mencionada propone problematizar sobre la importancia del uso de modelos en la enseñanza de las matemáticas durante la formación de los ingenieros, investigar sobre los efectos que se producen a partir de trabajar con situaciones de aprendizaje que los involucre, y finalmente observar la relación que existe con el futuro desempeño de los ingenieros como profesionales. Resalta, como punto clave ante la falta de interés por las matemáticas en la universidad, la desvinculación existente entre los contenidos aprendidos en los cursos de matemáticas y aquellos presentados en las materias propias de la formación de la carrera.

Ante esta problemática, la propuesta de solución que presenta, es la de trabajar con la "Matemática en Contexto", una teoría que nace a partir de las investigaciones que llevó a cabo en el Instituto Politécnico Nacional de México en la década del 80 y que básicamente postula trabajar con eventos contextualizados en la futura vida profesional. También puntualiza:

"La Matemática en Contexto contempla nueve etapas:

1. Analizar los textos de las demás asignaturas que cursa el estudiante.

2. Plantear el evento de las disciplinas del contexto.

3. Determinar las variables y las constantes del evento.

4. Incluir los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y su solución.

5. Determinar el modelo matemático.

6. Dar la solución matemática del evento.

7. Determinar la solución requerida por el evento en el ámbito de las disciplinas del contexto.

8. Interpretar la solución en términos del evento y áreas de las disciplinas del contexto.

9. Presentar en el salón de clases una matemática descontextualizada para que el estudiante sepa que es aplicable a otros campos del conocimiento y desarrolle las habilidades que proporciona la matemática formal." (Camarena Gallardo, *op cit)*

Según la investigadora, la actividad profesional de los ingenieros gira sobre la base de resolución de problemas de diversa índole de acuerdo a su especialidad, en la mayoría de los casos la Modelización matemática es necesaria para resolver adecuadamente tales situaciones. En consecuencia, es necesario que los estudiantes trabajen con la construcción de modelos matemáticos desde los inicios de su formación.

Finalmente, hace referencia a las experiencias realizadas con alumnos de ingeniería, luego de haber implementado esta metodología de trabajo y de haberlas contrastado con experiencias llevadas a cabo en forma tradicional. Los resultados indican que aquellos alumnos que habían estudiado con la Matemática en Contexto tuvieron mejores rendimientos en las materias de años siguientes de la carrera, es decir, en materias propias de la ingeniería, que aquellos que habían recibido la enseñanza tradicional. En virtud de que el trabajo con modelos matemáticos no es una actividad exclusiva de la ingeniería, se cree pertinente para los alumnos de profesorado incluir problemas contextualizados.

3. Aspectos metodológicos

Se puede describir de forma global la metodología como cualitativa. Se utilizó la Ingeniería Didáctica conjuntamente con el estudio de caso. En cuanto a la primera, ésta se caracteriza por plantear un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase diseñadas a partir de un trabajo de "concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza". El proceso se lleva a cabo en cuatro fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, experimentación y finalmente análisis a posteriori y evaluación. La validación es interna, y se da a través de la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori (Artigue, *op. cit*.).

Con respecto al estudio de caso, este es entendido como un método usado para estudiar un individuo o una institución en un contexto o situación única y de una manera lo más intensa y detallada posible (Salkind, 1998); además, por la naturaleza misma del método, hay que ser conscientes que las generalizaciones que se puedan realizar a partir de los resultados obtenidos son limitadas.

3.1. Contexto educativo y objetivos pretendidos

Se han observado y analizado dos clases correspondientes a la Asignatura Análisis IV del ciclo lectivo 2012. Dicha asignatura se cursa en el primer cuatrimestre del tercer año de las carreras de Profesorado en Matemática y Profesorado en Física de la FCEQyN-UNaM. Las edades de los alumnos que cursan esta asignatura oscilan entre los 20 y 24 años.

La primera de las clases observadas corresponde a la clase inaugural de la materia. En ella se presentó un problema vinculado al modelado mediante ED ordinarias de primer orden. El objetivo de la misma fue introducirlas haciendo énfasis en el análisis cualitativo rescatando la información que proporciona el modelo. Con respecto a la segunda clase observada, la misma tuvo lugar luego de que los alumnos ya habían cursado la mitad del programa de la materia. El tema desarrollado fue sistemas de ED ordinarias de primer orden. Nuevamente, se introdujo el tema presentando a los alumnos un problema de aplicación que describe el comportamiento de una especie depredadora en interacción con otra especie que es la presa (conocido como modelo de Lotka-Volterra).

Con respecto a las actividades desarrolladas en la primera de las clases en cuestión, se mencionará que el problema trabajado fue tomado de la bibliografía que se maneja en el ámbito académico y fue reformulado por las docentes de la asignatura de modo que en el enunciado no aparezca explícitamente la ecuación diferencial que describe el fenómeno considerado. Sí, se brindaba información sobre el comportamiento de la situación de modo que los alumnos, debían recurrir a conocimientos que fueron abordados en el transcurso de la carrera y formular (con ellos) un modelo para la resolución de dicho problema. La actividad fue seleccionada de Zill *et al* (2002) y fue reformulada tal como se muestra a continuación:

Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de una paciente a razón constante de r gramos por segundo. Al mismo tiempo, esa medicina desaparece con una rapidez proporcional a la cantidad x(t) presente al tiempo t. Formule una expresión matemática que describa la cantidad x(t).

Fig. 1: Problema propuesto a los alumnos en la clase introductoria de ecuaciones diferenciales

Siguiendo los lineamientos metodológicos que ofrece la Ingeniería Didáctica, se mencionará, que en el marco del análisis a priori, se esperaba que los alumnos interpreten la información que brinda el problema, que puedan reconocer que la misma puede, en términos de Ausubel (*op. cit*), subsumirse bajo el concepto matemático de tasa de cambio, previamente estudiado por los alumnos en otras asignaturas; además se identificó como un posible obstáculo para los estudiantes el reconocer que la variación de *x*(*t*) con respecto a *t* [1], debe ser igual a la diferencia entre la rapidez con que ingresa la medicina al cuerpo (que es constante) y la rapidez con que se absorbe (que varía de manera proporcional a la cantidad de medicina x(t) presente en el cuerpo en el tiempo t).

Asimismo, se esperaba que los estudiantes, una vez obtenido el modelo que describe el problema, puedan establecer el dominio donde el modelo es coherente con la situación y además logren reconocer qué aspectos se pueden anticipar sobre *x*(*t*) a partir de la expresión hallada, dado que el modelo encontrado provee información explícita sobre la variación de la cantidad de medicina en el cuerpo[2].

Una vez establecido el modelo se pretendía introducir el concepto de condiciones iniciales formulándose preguntas como las siguientes: *¿Qué pasa si se sabe que para t=0, se tiene que x(t) < r/k? ¿Y para el caso contrario? ¿Es posible esbozar un gráfico de x en función de t?* A partir de instaurar la discusión acerca de las condiciones iniciales, se esperaba involucrar los conceptos de solución de equilibrio, puntos críticos y diagramas de fase; y proponer a los estudiantes que, teniendo en cuenta las características de la ED, piensen en qué función podría ser propuesta como una solución y que encuentren una expresión analítica para la misma.

Con respecto a la otra clase considerada, se propuso a los alumnos trabajar con una secuencia seleccionada y analizada previamente por las docentes; la que fue adaptada de las propuestas que hacen Blanchard *et al* (1998) y Zill *et al (op. cit):*

[1] Es decir, la derivada de *x*(*t*) con respecto al tiempo.
[2] El comportamiento de la cantidad de medicina propiamente dicho debe ser inferido a partir de esa variación. Esto es, interpretar el comportamiento de x(t) a partir de conocer el de su derivada.

***Consigna N 1**:*
En la dinámica de la vida ninguna especie está sola. Suponga que dos especies de animales distintas interactúan en el mismo ambiente o ecosistema; además la primera come plantas y la segunda se alimenta de la primera. En otras palabras una especie es depredadora y la otra es la presa. Por ejemplo, x(t) e y(t) denotan los tamaños de las poblaciones de conejos y zorros, respectivamente.
Proponga un modelo matemático que describa el comportamiento de cada una de las especies en ausencia de interacción con la otra especie, sabiendo que la velocidad de crecimiento de una población es proporcional a su tamaño.

***Consigna N 2**:*
Suponga ahora que las dos especies interactúan, y que los zorros se comen a los conejos y que la razón a la que los conejos son devorados es proporcional a la taza de encuentros entre ambas especies y que, además la tasa de nacimientos de los zorros va en proporción al número de conejos comidos por zorro, que es proporcional a la razón a la que los conejos y zorros interactúan.
Proponga un modelo matemático que describa el comportamiento de cada una de las especies sabiendo que, si x(t) o y(t) aumentan el número de interacciones aumenta y que si alguna de ellas es cero, el número de interacciones también es cero.

***Consigna N 3**:*
En los siguientes modelos de población depredador-presa, x representa la presa e y representa los depredadores.

$$i) \quad \frac{dx}{dt} = 5x - 3xy \qquad \frac{dy}{dt} = -2y + \frac{1}{2}xy$$

$$ii) \quad \frac{dx}{dt} = x - 8xy \qquad \frac{dy}{dt} = -2y + 6xy$$

a) *¿En qué sistema se reproduce más rápidamente la presa cuando no hay depredadores e igual número de presas?*
b) *¿En qué sistema tienen los depredadores más éxito de cazar presas? En otras palabras, si el número de depredadores y presas son iguales para los dos sistemas, ¿en qué sistema los depredadores tienen un mayor efecto sobre la razón de cambio de las presas?*
c) *¿Qué sistema requiere más presas para que los depredadores logren una tasa de crecimiento dada (suponiendo números idénticos de depredadores en ambos casos?)*

Fig. 2: Secuencia propuesta a los alumnos para el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales

La secuencia se pensó en base a los diferentes modelos propuestos por la bibliografía usada desde la cátedra, y se eligió el modelo de depredador – presa porque brinda la posibilidad de enfrentar la resolución del problema desde los saberes que poseen los alumnos más allá del contexto matemático, es decir, los alumnos pueden comenzar a pensar en la situación, hacer conjeturas sobre el comportamiento de las especies y encarar la resolución del problema desde sus conocimientos acerca del fenómeno biológico que se describe dado que les puede resultar familiar.

El interés de la primera consigna dada reside en que brinda la posibilidad al alumno de comenzar a trabajar matemáticamente el problema porque involucra conceptos como velocidad de crecimiento, derivada y proporcionalidad, que ya fueron estudiados en otras ocasiones. Se propuso una actividad que justamente pueda hacer funcionar el principio de reconciliación integradora de Ausubel (*op. cit*.), ya que se pretendía que los estudiantes relacionen la información nueva con la ya existente en la estructura cognitiva y que ésta a su vez se modifique con la adquisición de nuevos significados.

La siguiente consigna que se presenta posee un nivel de dificultad mayor porque ya no requiere pensar a cada especie en forma independiente, sino que es preciso analizar las interacciones entre las mismas, es decir, se debe tener en cuenta cómo la presencia de cada una modifica el comportamiento de la otra.

Esta consigna supone que en la actividad anterior los alumnos ya han podido formular un modelo para el comportamiento de cada población y que ahora resulta necesario modificar los modelos propuestos antes, a fin de incorporar en ellos la interacción entre ambas especies. Como parte del análisis preliminar, se reflexionó sobre las dificultades que podrían presentárseles a los alumnos y se pensó que podría ser un obstáculo, el modelar la interacción entre ambas especies como el producto de las dos poblaciones. Por esta razón, se pensó en la consigna 3 a fin de que se concrete el estudio del modelo de Lotka Volterra más allá de lo que hayan podido efectuar los alumnos, es decir, dicha consigna resulta valiosa tanto para el caso en que no haya surgido ningún modelo entre las producciones de los alumnos como para validar los eventuales modelos propuestos. Al mismo tiempo, ofrece la posibilidad de obtener información del modelo sin resolver el sistema de ED, interpretando los valores de los coeficientes de las incógnitas.

4. Análisis y discusión

4.1. Discusión del problema introductorio al concepto de ecuación diferencial

El panorama que se observó inicialmente en la primera clase no fue nada alentador, los alumnos plantearon varias cuestiones pero no encontraron la manera de conectarlas entre sí para elaborar el modelo matemático solicitado. Entre las dificultades observadas se puede mencionar que algunos alumnos otorgaron un comportamiento variable al parámetro r que denota la razón con que ingresa la medicina al cuerpo de la persona, también señalaron que la rapidez con que la medicina se elimina o desaparece del organismo es proporcional a la cantidad de medicina presente en el cuerpo y que aquí, como se habla de rapidez, debía estar involucrada una derivada.

Es notorio que las afirmaciones que realizan los alumnos estuvieron encaminadas hacia la solución del problema pero no lograron plasmarse en un modelo concreto. Es de fundamental importancia resaltar el papel que juega la interacción con los pares y con los docentes para la consecución de los objetivos propuestos. En este sentido, se pone en evidencia la génesis social del conocimiento y la actuación de la docente en la zona de desarrollo próximo del alumno (Vygotski, 1978), puesto que, en virtud de las intervenciones de la profesora para redireccionar la discusión -por ejemplo cuando propone en el pizarrón el esquema mostrado en la figura 1- los alumnos comienzan a realizar una serie de conjeturas que finalmente los conducen al planteo de un modelo para la situación.

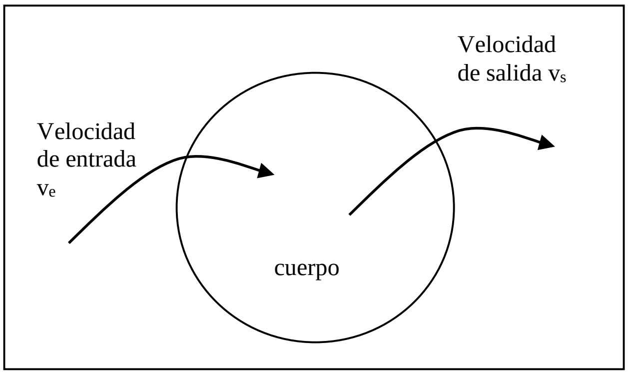

Fig.3: Esquema realizado por la docente para orientar la discusión

Después de realizar este esquema los alumnos identificaron correctamente que la velocidad de entrada es constante e igual a r y que la velocidad de salida es variable y que es proporcional a la cantidad de medicina en el cuerpo denotada como x(t), y que esto se representa simbólicamente como $v_S=kx(t)$, paralelamente reconocieron que la diferencia entre las velocidades de entrada y salida proporciona el cambio de la cantidad de medicina en el cuerpo. Finalmente plantearon el siguiente modelo

$$x'(t) = r - k\,x(t)$$

Luego de discutir sobre él, acordaron que efectivamente es un modelo adecuado para describir la situación.

Las demás cuestiones pensadas en la fase preliminar de diseño y planificación de las actividades como de la clase no pudieron concretarse por falta de tiempo. En líneas generales, de acuerdo a lo manifiesto por los alumnos, destacan que se sintieron cómodos realizando este tipo de actividades aunque reconocieron que la misma no les resultó sencilla. Esto tiene puntos de encuentro con lo que plantea Artigue (op. cit), ya que se reconoce la dificultad que conllevan los métodos cualitativos en virtud de no poder constituirse en algoritmos de resolución.

4.2. Discusión del problema introductorio a sistemas de ecuaciones diferenciales

A continuación se presentan los aspectos más sobresalientes para la clase cuyo objeto de estudio fueron los sistemas de ED. En primer lugar, antes de poder utilizar alguna estrategia en particular, a los alumnos les costó interpretar la situación que describía el problema, luego de la orientación brindada por la profesora, plantearon el siguiente modelo para la población de conejos:

$$x'(t) = kx(t) \qquad x(t) = e^{t}$$

Como justificación de su procedimiento, argumentaron que propusieron la función exponencial como la solución del problema porque la misma verifica ser proporcional a su derivada. En este caso, el procedimiento usado por los alumnos es de carácter intuitivo y en el que se resalta las propiedades de la función exponencial, sobresale el hecho de que llegan a encontrar una función para describir el comportamiento de la población sin resolver la ED haciendo solamente consideraciones cualitativas.

Otro grupo de alumnos planteó la misma ED pero para hallar la función que describe el comportamiento de la población, la resolvieron usando el método de variables separables. El modelo y la solución hallada se muestran a continuación:

$$x'(t) = kx(t) \qquad x(t) = e^{kt}$$

De manera similar plantearon la siguiente ecuación y su solución para la población de zorros:

$$y'(t) = -ky(t) \qquad y(t) = e^{-kt}$$

Como consecuencia de la discusión en torno a los modelos sugeridos, concluyeron que no era correcto usar el mismo parámetro para describir las dos poblaciones y en función a ello, modificaron los modelos propuestos asignando k_1 y k_2 para los parámetros en las ecuaciones que describen las poblaciones de conejos y zorros, respectivamente.

Es de destacar que para el planteo de los modelos involucrados en esta consigna, los alumnos tuvieron menos dificultades que para la situación dada en la primera clase de la asignatura. Es de esperarse que así sea puesto que cuentan con la experiencia en el manejo de este tipo de situaciones adquirida en el transcurso de la clase inaugural, sumado a que ya han estudiado todos los tópico referentes a ED ordinarias del curso.

Con respecto a los aspectos más destacados del trabajo de los alumnos con la consigna 2, se mencionará que identificaron correctamente cómo son afectadas cada población por la interacción entre ambas pero no pudieron modelizar dicha interacción. Es decir, dedujeron acertadamente que la constante de proporcionalidad k_1 debe ser positiva porque la población de conejos aumenta en ausencia de los zorros, es decir, k_1 tiene un efecto positivo sobre la población de conejos y a la constante de proporcionalidad k_2 se le antepone un signo menos porque la población de zorros decrece si no hay conejos, es decir, k_2 posee un efecto negativo sobre la población de zorros. Al mismo tiempo señalaron correctamente que la interacción entre ambas especies perjudica a la población de conejos y beneficia a la de zorros (esto se ve en los signos más y menos que agregaron en las ecuaciones para cada población).

El modelo al que arribaron es el siguiente:

$$\begin{cases} x'(t) = k_1 x(t) - \\ y'(t) = -k_2 y(t) + \end{cases}$$

Si bien es cierto que los modelos propuestos están incompletos, hay que reconocer que los estudiantes comprendieron globalmente el comportamiento de las poblaciones involucradas. Esta situación, en efecto, se revirtió cuando trabajaron con la consigna 3: los alumnos pudieron identificar inmediatamente el término que modeliza la interacción entre ambas especies. De igual modo, manifestaron que plantear la interacción como proporcional al producto de las poblaciones refleja efectivamente las hipótesis del modelo, es decir, que si alguna de las poblaciones aumenta el número de interacciones también aumenta y que si alguna de las poblaciones es cero, el número de interacciones también es cero. Finalmente, los demás ítems de la consigna 3 no ofrecieron dificultades adicionales y fueron resueltos en forma correcta.

5. Reflexiones finales

A partir de las observaciones y análisis efectuados como de las lecturas realizadas acerca de la postura de la didáctica de la matemática frente a la situación de gestión y participación en una clase de matemática y considerando las dificultades advertidas por Artigue, podemos marcar algunos puntos sobresalientes:

- Se observa que, en los textos, los modelos matemáticos para representar ciertos fenómenos vienen dados o, a lo sumo, explicado el proceso de construcción de cada uno. Es comprensible que así sea, dado que construir un modelo matemático para las ciencias experimentales (o incluso para las sociales), demandaría tanto un amplio conocimiento científico como una etapa de intensa observación de la situación que se está estudiando, condiciones imposibles de lograr al nivel de la carrera donde se plantea la enseñanza del tema.

- A pesar de tratarse de estudiantes del Profesorado de Matemática y Física, no resulta inmediato apelar a objetos propios de la matemática como función exponencial y derivada, menos aún que logrado el modelo matemático solicitado se anticipe al modelo exponencial como candidato a solución.

- Con respecto a lo referente a la modelización, es poco probable que los diferentes aspectos que hacen a los procesos de modelado surjan de modo espontáneo en los alumnos, se hace necesario destinar tiempo de las clases para el estudio y análisis de los mismos, pues se considera que este tipo de prácticas de aprendizaje generan espacios de elaboración de conocimientos matemáticos.

- Situaciones de este tipo permiten al estudiante compartir con sus compañeros apreciaciones, formular conjeturas, escuchar y validar otras explicitadas por sus compañeros, recurrir a diferentes estrategias de abordaje del problema de acuerdo a las relaciones percibidas de la interpretación del mismo. Facilita la construcción grupal de la propuesta que formularán generando espacios de debates, ajustes de propuestas, acuerdos, precisión de lenguaje oral y simbólico, control y validación.

- A pesar la ausencia de algunos de los procedimientos previstos en el análisis a priori, la experiencia realizada dejó resultados positivos. Se considera que este tipo de actividades aumentan el interés de los alumnos por la materia, es decir, pueden funcionar como una forma de motivación extrínseca, al mismo tiempo resignificar contenidos abordados en asignaturas anteriores.

- La gestión áulica de la consigna demanda del docente intervenciones específicas con un alto nivel de incidencia en la producción propia del alumno, es decir un comentario o pregunta puede modificar (para bien o para mal) la dirección del trabajo que sus estudiantes estén realizando, si lo hace anticipadamente será factible que interrumpa el proceso de elaboración que los estudiantes inician ante la situación problemática. Se podrían citar algunos aspectos más acerca de la importancia de la mediación del docente, pero sólo se indicará que tal responsabilidad hace que resulte más sencillo, para el profesor, el planteo de una clase tradicional con todos los aspectos controlados, por qué no agregar que en la misma medida resultará menos provechoso para el aprendizaje de los alumnos.

Bibliografia

Artigue M. (1995a). "La enseñanza de los principios del cálculo". En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Artigue M. (1995b). "Ingeniería Didáctica". En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P.. Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Ausubel D., Novak J., Hanesian H. (1983). "Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo". Segunda edición. Editorial Trillas. México

Bassanezi R. (2002). "Ensino-aprendizagem com modelagem matemática". Editorial Contexto. São Paulo

Blanchard P., Devaney R., Hall G. (1998). "Ecuaciones diferenciales". Editorial Thomson. México

Brousseau G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Editorial Libros del Zorzal. Buenos Aires

Camarena Gallardo P. (2008). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, Conferencia Magistral, Perú, 2008

Chevalard Y., Bosch M., Gascón J. (1997). Enseñar matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Editorial Orsori. Barcelona

Dullius M. (2009). "Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico". Tesis doctoral. Burgos.

Giordano F., Weir M. y Fox W. (1997) "A first Course in Mathematical Modelling". Brooks/Cole. Publishing Company.

Moreno Moreno M. y Azcárate Giménez C. (2003). "Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales" Enseñanza de las Ciencias, 21 (2). 265-280

Litwin, E. (1996). “El campo de la Didáctica: la búsqueda de una nueva agenda”. En Camilloni A., Davini M. C., Edelstein G., Litwin E., Souto M., y Barco S.. Corrientes Didácticas Contemporáneas. Editorial Paidós. Buenos Aires.

Piaget J., Inhelder B. (1960). Psicología del niño. Octava edición. Ediciones Morata. Madrid.

Salkind N. (1998). “Métodos de Investigación”. Editorial Prentice Hall. México.

Vygotski L. (1978). “El desarrollo de los procesos psicológicos superiores”. Crítica. Grupo editorial Grijalbo. Barcelona.

Zill D., Cullen M. (2002). “Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera”. México: Thomson.

Autores:

Claudia Mariela Zang. Profesora en Matemática y en Física, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones Argentina (FCEQyN-UNaM). Actualmente cursa la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Actualmente trabaja como auxiliar de docencia en el área de Ecuaciones Diferenciales y de Física Atómica y Nuclear en FCEQyN-UNaM, Participa como auxiliar de investigación en el área de enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales y en enseñanza de Física. claudiamzang@gmail.com

Gretel Alejandrina Fernández von Metzen. Profesora en Matemática, egresada de la Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Misiones, Argentina (FCEQyN-UNaM). Actualmente cursa la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional del Comahue, Argentina. Actualmente trabaja como docente en el área de Análisis Matemático. Participa como auxiliar de investigación en el área de enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales. gretelalefernandez@gmail.com

María Natalia León. Profesora en Matemática, Física y Cosmografía, egresada de la Facultad de Humanidades y Ciencias Sociales (UNaM). Magister en Matemática Aplicada egresada de FCEQyN-UNaM, Argentina. Actualmente trabaja como docente en el área de Análisis Matemático y Estadística en la Facultad de Ciencias Económicas y de Ecuaciones Diferenciales en FCEQyN. Se desempeña como directora del Proyecto PACENI (Misiones) que se ocupa de la problemática del ingreso y de la deserción en los primeros años de carreras Universitarias de Ciencias Exactas, Naturales, Económicas y de Informática, el cual tiene como parte constitutiva un sistema de tutorías; también es directora de un proyecto de investigación en el área de enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales. nleon@campus.unam.edu.ar