

## Las Pruebas de Matemáticas en el acceso a la Universidad de algunos países europeos (Alemania, España, Francia, Italia)

Josu Gotzon Ruiz de Gauna Gorostiza y Joxemari Sarasua Fernández

Fecha de recepción: 10/10/2012

Fecha de aceptación: 08/10/2015

<p><b>Resumen</b></p>	<p>Se analizan las pruebas de acceso de Matemáticas a la universidad de cuatro países: Alemania, España, Francia e Italia. Se estudia su estructura y contenidos y se ejemplifican con ejercicios representativos de los últimos años correspondientes a cada una de las partes de las que consta la prueba. Se analizan las especificidades de cada país, se establece la singularidad de las italianas y se comparan las pruebas entre ellas. Se concluye que hay diferentes formas de utilización del lenguaje, diferentes notaciones y diferentes tipos de ejercicios. Algunos elementos comunes son: ejercicios en los que se parte de la gráfica, aplicaciones prácticas y contextualización.  <b>Palabras clave:</b> Matemáticas, Bachillerato, Pruebas de acceso a la universidad</p>
<p><b>Abstract</b></p>	<p>We analyze the mathematics entrance tests to university of four countries: Germany, Spain, France and Italy. We examine its contents and structure and we take a sample of representative exercises from last years for each of the parts of the entrance test. We analyze the specificities of each country, establishing the uniqueness of the Italian's tests and the entrance tests are compared with each other. We conclude that there are different ways of using language, different notations and different types of exercises. Some common elements are: exercises in which the work begins with and about the graph of the function, practical applications and contextualization  <b>Keywords:</b> Mathematics, Baccalaureat, Entrance Tests to University</p>
<p><b>Resumo</b></p>	<p>Analisamos os exames de admissão de matemática para a universidade de quatro países: Alemanha, Espanha, França e Itália. E examina o seu conteúdo e da estrutura e são exemplificados com exercícios representativos nos últimos anos, para cada uma das partes que compõem a prova. Analisamos as especificidades de cada país, estabelecendo a exclusividade do italiano e os testes são comparados uns com os outros. Conclui-se que há diferentes maneiras de usar a língua, notações diferentes e diferentes tipos de exercícios. Alguns elementos comuns são: exercícios de funções que trabalha a partir do gráfico, aplicações práticas e contextualização.  <b>Palavras-chave:</b> Matemática, Bacharelado, Exames de admissão à universidade</p>

### 1. Introducción

El Bachillerato (denominación que procede del Latín vulgar *bachalariatus*), designaba un rango de principiante en la caballería y pasó luego a designar el rango de *bacca laurea* (laureado) en la jerarquía eclesiástica y universitaria. Reciben esta

denominación, con variaciones entre los países, los cursos finales de la educación secundaria. Como norma general a la finalización de este nivel de enseñanza, el requisito mínimo para acceder al nivel de la educación superior en Europa consiste en poseer un título de educación secundaria superior o equivalente. En la mayoría de los países existen además otros procedimientos de admisión o selección, que consisten, por ejemplo, en exámenes de ingreso, presentación de certificados de rendimiento académico o entrevistas. Dichos procedimientos contribuyen a regular el número de estudiantes.

Se puede establecer un procedimiento selectivo a nivel nacional o regional mediante el cual el Gobierno determina el número de plazas disponibles y ejerce un control directo sobre el procedimiento de selección (ejemplos de este modelo son Grecia, España o Portugal). Las propias universidades pueden aplicar libremente un proceso de selección en función del número de plazas o según ciertas exigencias o aptitudes demandadas a los estudiantes. Se pueden también combinar ambos modelos, como es el caso de Suecia y Finlandia. El acceso libre, habiendo finalizado la educación secundaria superior, se da en Bélgica, Islandia, Malta y Países Bajos. En el caso de Alemania, Francia, Italia y Austria existen diversos procedimientos de selección en función del área de estudio, del tipo de centro o, incluso, de cada centro en particular. Para los cuatro países cuyas pruebas de acceso vamos a analizar los requisitos de acceso se concretan mediante el siguiente título, diploma o certificado:

Alemania	Título Allgemeine Hochschulreife (Abitur)
España	Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU)
Francia	Título de Baccalauréat
Italia	Diploma de Examen de Estado o Maturità

**Tabla 1.** Requisitos de acceso en cada país

En Alemania, Francia e Italia sin el examen adicional que se recoge en el cuadro no se puede obtener el título de Bachiller y, sin él, no hay acceso posible a la enseñanza superior, universitaria y no universitaria. En España tampoco se puede acceder a la enseñanza universitaria sin haber superado las pruebas de acceso a la universidad, aunque estas pruebas no conducen, como en los otros países, a la obtención del título de Bachiller, que no requiere la superación de pruebas externas pero que por sí solo no posibilita el acceso a la universidad. Hay que hacer una precisión en cuanto al concepto de enseñanza superior que en España abarca los estudios ofertados exclusivamente en la Universidad, no siendo así en la mayoría de los demás países europeos, donde hay instituciones no universitarias con ofertas de formación más corta y elevados periodos de prácticas en empresas. Esta diferente organización de los estudios superiores da lugar a una diversidad de mecanismos de acceso para acceder a ellos.

## 2. Sistemas de acceso a la universidad

### 2.1. Alemania

El *Abitur* (del Latin *abire* = seguir adelante) es el diploma que se obtiene al terminar el *Gymnasium* con éxito y permite asistir directamente a la universidad en toda Europa sin necesidad de exámenes extras o de ingreso, como es el caso de la selectividad en España. Los alumnos eligen las materias que cursarán en su último

año de secundaria distinguiendo entre materias “fuertes” y “suaves”, aunque algunas son obligatorias, como el alemán o las matemáticas. Los exámenes del *Abitur* son tanto orales como escritos y duran varias horas por materia. Los alumnos tienen por lo general dos semanas de exámenes. Una parte de la nota final corresponde al expediente académico del alumno. Aunque históricamente en Alemania el porcentaje de alumnos que se presentaban al *Abitur* era pequeño, –pues este no es necesario para todos los estudios superiores, sino solamente para aquellos que se imparten en la universidad–, el número de estudiantes que se presentan al *Abitur* ha ido creciendo gradualmente, siendo en la década de 1992 a 2003 un 40% los estudiantes de una determinada generación que lo conseguían de acuerdo con *Statistisches Bundesamt*.

## 2.2. España

En España las pruebas de acceso a la universidad tienen larga tradición y han recibido diferentes nombres a lo largo de su historia: examen de estado, prueba de madurez, selectividad. Actualmente se denominan Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) y su superación es requisito imprescindible para acceder a los estudios universitarios. Por ello tienen un carácter muy general y su superación es un objetivo relativamente fácil de lograr: en el año 2010 un 84,8% de los estudiantes que se presentaron a las pruebas de acceso las superaron (INE, 2012). Las pruebas varían en función del tipo de Bachillerato cursado, habiendo materias obligatorias y materias que el alumno elige y, después de la última reforma, la puntuación total puede ser de hasta 14 puntos, teniéndose en cuenta para el cálculo de la nota final la nota media del expediente académico del alumno. Las pruebas se realizan a nivel regional, con pequeñas diferencias tanto en contenidos como en resultados.

## 2.3. Francia

El Baccalauréat está considerado como un diploma de nivel IV que se obtiene al finalizar los tres cursos del Lycée (seconde, première y terminale) tras superar el correspondiente examen de carácter estatal. En el Bachillerato General, las opciones son tres: Económico y Social (ES), Literario (L) y Científico (S). Hay pruebas orales y escritas diferentes para cada tipo de Bachillerato, con una duración variable y con diferentes coeficientes de ponderación en la nota final. La nota final máxima son 20 puntos. Los porcentajes de aprobados en el diploma de Bachillerato General varían en cada tipo de Bachillerato pero en el año 2012 han sido del 84,5% (Ministère de l'Éducation Nationale, 2012b).

## 2.4. Italia

En Italia el examen de estado ha sufrido variaciones a lo largo de la historia, siendo la última la introducida en 1997 que ha supuesto que el alumno se examine de tres asignaturas del último curso elegidas por él mismo y que se valore la trayectoria escolar en la nota final que será dada en centésimas. La forma de puntuar es la siguiente: hasta un máximo de 45 puntos en las tres pruebas escritas (máximo 15 puntos para cada una); hasta un máximo de 35 puntos en la prueba oral y hasta un máximo de 20 puntos en calidad de créditos formativos, resultado de una valoración del trienio de estudios secundarios superiores (Gavari, 2003). En 2003 se produjo una

nueva reforma que implantó el concepto de calidad en la educación, estableciendo que los aprendizajes se evalúen periódicamente y estableciendo que al finalizar los dos ciclos de enseñanza secundaria los alumnos deban presentarse al *Esame di Stato* (examen de fin de estudios) que establece pruebas en el centro de estudio y pruebas nacionales. Este moderno *esame di stato* es superado por el 97% de los estudiantes (Abravanel, 2008).

### 3. Las Pruebas de Matemáticas

La enseñanza en los cuatro países seleccionados está organizada de muy diferentes formas; la variedad de centros donde se curse o la variedad de Bachilleratos e incluso la posibilidad de realizar diferentes itinerarios formativos da lugar a una mayor o menor diversidad de pruebas de acceso de matemáticas. Por ejemplo, en España son dos las modalidades de examen que existen en función del Bachillerato cursado; en Alemania la opción depende del tipo de establecimiento en el que se curse el Bachillerato y del nivel que se pretenda acreditar en el examen de acceso; en Francia, dentro del Bachillerato General, hay tres modalidades de acceso y, por fin, en Italia dentro del Liceo Científico hay dos pruebas (ordinamento y sperimentale) y dentro de ellas con posibilidades de elección por parte del alumno.

Si además añadimos la posibilidad de descentralización de las pruebas, caso español y alemán, pero también francés puesto que aquí se plantean diferentes pruebas para la metrópoli y para la enseñanza realizada en el exterior, nos conduce a múltiples situaciones no estrictamente comparables entre sí. Sin embargo, aunque las pruebas difieran entre sí, los currículos del Bachillerato y en concreto los programas objeto de examen en las pruebas –que no tienen por qué coincidir–, sí que corresponden a los grandes capítulos de las Matemáticas de Bachillerato: Análisis, Geometría, Álgebra, Probabilidad y Estadística.

#### 3.1. Alemania

En el caso alemán las directrices señalan que el profesor elegirá dos partes del programa, Análisis y Estadística o Análisis y Geometría. De cada una de esas partes se le plantean al alumno dos cuestiones. Hay dos niveles de certificación, el básico y el avanzado, con diferentes tiempos de duración para el examen (en general tres o cuatro horas). Los problemas de los exámenes constan de varias cuestiones que conforman un desarrollo completo de cada una de las partes del programa. Por ejemplo en la parte de Análisis en el examen de (Abiturprüfung, 2011). Hemos elegido como muestra de las cuestiones que se preguntan el siguiente problema que no constituye un problema completo sino solo la mitad de uno de ellos:

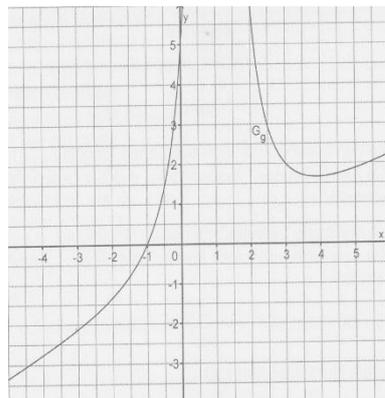


Figura 1: Gráfica de la función  $G_g$

“En la figura se muestra la gráfica  $G_g$  de una función racional definida

en  $\mathbb{R} - \{1\}$  que posee las propiedades siguientes:

- En  $x=1$  tiene un polo sin cambio de signo
- La gráfica  $G_g$  se extiende por encima de la asíntota oblicua

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

- El único cero de  $g$  es  $x = -1$

a) Determinar, a partir de la figura, el valor aproximado de  $g'$  en  $x = -1$ ; dibujar la función derivada en ese punto. La asíntota oblicua sugiere un determinado comportamiento de  $g'$ . Realiza un bosquejo de la gráfica de  $g'$ .

b) La función  $g$  tiene una expresión, con  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ , de una de las formas siguientes:

$$I \quad y = x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2} \qquad II \quad y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{(x-1)}$$

$$III \quad y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$$

Demostrar que las formas I y II no son posibles y calcular en el caso III el valor del parámetro  $a$ .

c) Se define la función  $h(x) = \ln(g(x))$ . Determinar a partir del gráfico de  $G_g$  el dominio de definición de  $h$ ,  $D_h$ . Estudiar el comportamiento de  $h$  en los extremos de su dominio y calcular los ceros de  $h$ .

En el enunciado se efectúa una lectura de los aspectos más relevantes que aporta la gráfica de la función, para pasar a demandar el valor de la derivada en un punto y un esbozo de su gráfica. Se parte del gráfico, para a través de una pregunta dirigida, llegar a determinar la expresión de la función. En la última cuestión, dominio de  $h(x)$ , se pide su determinación partiendo de la gráfica, lo que resulta mucho más sencillo que mediante el cálculo directo. Se aprecia que el problema exige no tanto la realización de cálculos laboriosos como la comprensión de conceptos fundamentales de funciones y que constituye un ejercicio muy completo de interrelación de significados.

En Análisis, a veces, se plantean cuestiones relacionadas con la Geometría, que requieren del cálculo de distancias o áreas, y es usual demandar el cálculo de parámetros. Se pregunta específicamente sobre modelos de poblaciones en los que intervienen funciones exponenciales y sobre el comportamiento asintótico de las funciones.

La parte de Probabilidad y Estadística consta de problemas clásicos de probabilidad, dados, ruletas, de probabilidades condicionadas y teorema de Bayes y de contraste de Hipótesis. No se suelen presentar, ni demandar, diagramas de árbol, aunque si tablas de contingencia.

El problema de Geometría analítica tridimensional exige también responder a varias cuestiones que conforman una situación abordada desde muchos puntos de vista. Por ejemplo, en la misma prueba de 2011, en uno de los problemas de Geometría se planteaban cuestiones referidas a la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados, a la forma y área de la región formada por el origen de coordenadas y los puntos dados, para a continuación pasar a plantear una cuestión de aplicación que recogemos a continuación:

*“Sean los puntos  $A(0|60|0)$ ,  $B(-80|60|60)$  y  $C(-80|0|60)$  y  $O$  el origen de coordenadas. El rectángulo  $OABC$  es el modelo de una parcela de tierra de fuerte pendiente, el eje  $x_1$  positivo describe el sur, el eje  $x_2$  positivo describe el este (En el sistema de coordenadas una unidad equivale a 1m, es decir, la longitud de la tierra en dirección este-oeste es de 60m.). Aunque el área del rectángulo  $OABC$  es de  $6000 m^2$ , por la acusada pendiente está marcado en el mapa del catastro con un tamaño de  $4800 m^2$  que se establece sobre la base del dibujo. Esto presupone una regulación sensata implementada en el Registro de la Propiedad. Confirme esta conjetura del Registro de la Propiedad.”*

Esto es una parte de un problema con más cuestiones que completan las aquí presentadas, pero que representa un ejercicio completo de geometría analítica en el que hay que movilizar las fórmulas fundamentales además de tener cierta orientación espacial. A destacar la modelización de una parcela de terreno mediante la ecuación de un plano inclinado, que proyectado sobre el plano  $Ox_1x_2$  se convierte en la base regulada en el catastro. Es decir, matemáticas prácticas al servicio de la realidad. Comentemos, de paso, que algunas de las soluciones que requieren de cálculos y que luego son utilizadas en otras partes del problema aparecen en el propio enunciado, posibilitando así la comprobación de lo realizado y, en caso erróneo, la continuación con los demás apartados del problema. Algunas de las notaciones utilizadas son específicas y diferentes de las que se emplean en otros países. Por ejemplo las coordenadas de un punto se separan con rayas verticales  $A(0|60|0)$  o para los dominios se utiliza  $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ .

En general no hay un excesivo formalismo en la redacción de los enunciados y se procura plantear situaciones prácticas que muestren la aplicabilidad de las matemáticas, o en ocasiones, se presentan cuestiones puramente matemáticas sobre funciones (dominios, asíntotas,...) que luego son utilizadas en alguna aplicación por ejemplo relacionada con trayectorias, velocidades, etc.

### 3.2. España

No hay un número igual de problemas planteados en las diferentes regiones, pero la duración del examen sí que es igual en todas ellas, hora y media, y esto da una idea del tipo de examen, más corto, con cuestiones más concretas y específicas que las de los otros países. La estructura de los dos modelos de examen de los dos tipos de Bachillerato es diferente y las partes de que consta también. Mientras que en el Bachillerato Científico los problemas giran en torno a los bloques de Álgebra, Geometría y Análisis, en el Bachillerato de Ciencias Sociales los problemas giran en torno al Álgebra, Análisis y Estadística. Además los problemas de este último tipo de Bachillerato conllevan menos cálculos, son más intuitivos y se procura que reflejen situaciones reales.

Por ejemplo en el Bachillerato de Ciencias en las pruebas de 2012 se planteaba el siguiente problema de Álgebra (UPV/EHU, 2012):

*“Dado el sistema*

$$\begin{cases} x + (A+1)y + Az = A+1 \\ Ay + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

- a) *Discutirlo según los valores del parámetro A.*  
b) *Resolverlo, si es posible, para el caso A=4.”*

Como se ve es un problema sencillo de discusión y resolución de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas.

En el Bachillerato de Ciencias Sociales en la parte de Estadística uno de los problemas propuestos en 2011 fue el siguiente (Busto, 2011, p. 40):

*“Se supone que la renta familiar de las familias de un determinado barrio sigue una distribución normal de desviación típica 150 euros. Se extrae una muestra de la renta de 10 familias, obteniéndose los siguientes resultados en miles de euros:  
19 987, 20 096, 19 951, 20 263, 20 014, 20 027, 20 023, 19 942,  
20 078, 20 069  
Encontrar el intervalo de confianza del 95% para la renta familiar media e Interpretar su significado”*

También un ejercicio sencillo que supone el cálculo de una media y el conocimiento y aplicación de una fórmula para el cálculo del intervalo de confianza. En este tipo de Bachillerato se plantean además problemas de Programación Lineal de dos variables y se van introduciendo, cada vez más, problemas de Análisis contextualizados, que suponen una modelización de ciertas situaciones o que incluyen aplicaciones de tipo económico.

### 3.3. Francia

El Bachillerato General en Francia tiene tres opciones, el denominado Bachillerato ES (Económico-Social), el Bachillerato Literario (L) y el Bachillerato

Científico (S). Las pruebas francesas son diferentes según la opción de Bachillerato General cursada y en general constan de 4 ejercicios para los que se dispone de un tiempo de tres o cuatro horas de duración.

En el denominado Bachillerato ES (económico-social) el ejercicio 1 consta de varias cuestiones de respuesta múltiple. Por ejemplo en junio de 2010 en las pruebas correspondientes a Francia-Metrópolis en el ejercicio 1 se plantearon las siguientes cuestiones (Sujet de Bac, 2012):

“1. El número -3 es solución de la ecuación:

a)  $\ln x = -\ln 3$                       b)  $\ln(e^x) = -3$     c)  $e^{\ln x} = -3$     d)  $e^x = -3$

2. El límite en  $+\infty$  de la función  $f$  definida en el intervalo  $]\frac{1}{2}; +\infty[$  por

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3} \text{ es:}$$

a)  $-\infty$                       b)  $+\infty$                       c) -1                      d)  $-\frac{1}{4}$

3. Sea  $f$  la función definida y derivable en el intervalo  $]0; +\infty[$  por  $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$ . En el plano provisto de una referencia, la tangente a la curva que representa la función  $f$  en su punto de abscisa 1 admite por ecuación:

a)  $y=x+2$     b)  $y=-x+4$     c)  $y=3x+1$     d)  $y=x+3$

4. Un juego consiste en lanzar una vez un dado cúbico no cargado cuyas caras están numeradas de 1 a 6. La puesta de cada jugador son 3 euros. Se lanza el dado y se lee el número obtenido en su cara superior: si el número es 1, el jugador recibe 10 euros; si el número es 2 o 4, recibe un euro; sino, no recibe nada. En este juego la esperanza matemática de la ganancia expresada en euros es:

a) 1                      b) 0                      c) -1                      d) -2”

En este ejercicio de análisis y probabilidad, se plantean el conocimiento de funciones, el cálculo de límites y la determinación de la recta tangente a una función en un punto y un cálculo elemental de probabilidades. Es por lo tanto un ejercicio en el que se realiza un recorrido superficial del programa de la asignatura, pero que sirve de calentamiento y motivación para los ejercicios posteriores.

El segundo ejercicio es de probabilidad, de redacción larga y con varios apartados, que incluyen problemas de recuento, cálculo de probabilidades, probabilidades condicionadas y teorema de Bayes. Casi siempre se suele pedir que dibujen un diagrama de árbol asociado a alguna de las cuestiones. El otro ejercicio de Estadística (suele ser el cuarto) es un ejercicio de cálculo de rectas de regresión, no solo lineal, sino también exponencial o logarítmica.

Un tercer ejercicio suele contener una introducción en la que se les presenta a los estudiantes alguna función de la que se piden realizar determinados cálculos, pero para luego ser utilizados en una aplicación de tipo económico. Bien se pide determinar curvas de oferta y demanda, o cálculo de puntos de equilibrio o funciones de beneficio.

Por ejemplo en junio de 2010 en las pruebas de América del Norte (Baccalauréat, 2010) se planteaban diversas cuestiones referidas a la función  $f(x) = \frac{2\ln(x)+1}{x}$  para proponer posteriormente la siguiente aplicación económica:

*“Una empresa subcontratada fabrica piezas para la industria automovilística. Su producción para determinado tipo de piezas varía, según la demanda, entre 1000 y 5000 piezas semanales. Se supone que todas las piezas producidas se venden. El beneficio unitario, en función del número de piezas producidas por semana, viene dado por la función  $f$ , con  $x$  expresado en miles de piezas y  $f(x)$  expresado en euros. Determinar, con aproximación en céntimos, el valor medio del beneficio unitario para una producción semanal comprendida entre 1000 y 5000 piezas. ¿Para qué producción se obtiene un beneficio unitario igual a 1,05 €?”*

En el Bachillerato Literario (L) el primer ejercicio es un problema de geometría en el que se les plantean cuestiones relacionadas con las perspectivas central y paralela; el segundo ejercicio, de probabilidad, es similar al planteado en el Bachillerato ES; un tercer ejercicio suele contener nociones de teoría de números planteándose cuestiones sobre congruencia, divisibilidad y sucesiones numéricas. Por ejemplo en las pruebas de 2011 se plantearon (Baccalauréat, 2011):

1. El número 96 es congruente módulo 7 con: a) 19  
b) 20 c) 21
2. ¿Cuál de los siguientes tres números es divisible por 3?  
a)  $9^{99} + 1$  b)  $10^{100} + 1$  c)  $11^{111} + 1$

Cuando existe el cuarto ejercicio suele ser sobre funciones, práctico y en el que se suelen plantear cuestiones sobre el funcionamiento de un determinado algoritmo que se les proporciona. En las mismas pruebas anteriores se planteaba el siguiente algoritmo:

*“Siendo  $f(x) = 4e^{0,5x} - 5$ , se considera el siguiente algoritmo:*

*Entrada:  $P$ , un número real estrictamente positivo*

*Inicio:  $X = 0$  e  $Y = 1$*

*Tratamiento: Mientras que  $Y < 0$ :*

*Dar a  $X$  el valor  $X+P$*

*Dar a  $Y$  el valor  $f(X)$*

*Salida: Muestra  $X-P$  y  $X$*

*a) ¿Si  $P=0,1$  cuáles son los valores que se obtienen como salida?*

*b) Se hace funcionar el algoritmo con un cierto valor de  $P$ . Se han obtenido como salida los números 0,44 y 0,45. ¿Cuál es el valor de entrada de  $P$ ?*

*c) Siendo el valor de entrada de  $P=0,001$ , ¿Cuáles son los valores de salida?*

En este ejercicio prima el aspecto calculatorio y el ir entendiendo la forma de aplicar el algoritmo y las salidas que proporciona. Es un ejercicio específico de este

tipo de Bachillerato, pero que lo hemos recogido aquí porque sería inusual en las pruebas de los otros países.

En el Bachillerato Científico (S) la duración de la prueba es de cuatro horas y también consta de cuatro ejercicios. Hay un ejercicio de números complejos en el que suelen aparecer cuestiones relacionadas con transformaciones y con geometría del plano. El ejercicio de Geometría tridimensional puede incluir cuestiones teóricas o plantear demostraciones de propiedades conocidas y es muy frecuente proponer cuestiones relacionadas con cubos o paralelepípedos de los que se aporta el dibujo y en los que están presentes tanto la geometría sintética como la analítica. En los otros dos ejercicios se recogen en uno de ellos cuestiones de Análisis de forma bastante completa pues en el mismo ejercicio se plantea el estudio de funciones, cálculo de integrales y áreas y estudio de raíces de ecuaciones. En el otro ejercicio se tratan cuestiones de probabilidad (variables aleatorias, distribuciones). Por ejemplo una de las partes del problema de Geometría planteado en las pruebas de 2011 es la siguiente (Baccalauréat, 2011b):

“Se considera un cubo  $ABCDEFGH$ , de aristas de longitud 1. Se denota por  $I$  el punto de intersección de la recta  $(EC)$  y del plano  $(AFH)$ .

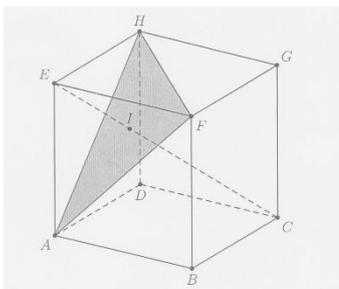


Figura 2: Cubo  $ABCDEFGH$

1. Se toma el sistema de referencia  $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$ . En este sistema de referencia los vértices del cubo tienen por coordenadas:  
 $A(1; 0; 0)$   $B(1; 1; 0)$   $C(0; 1; 0)$   $D(0; 0; 0)$   $E(1; 0; 1)$   $F(1; 1; 1)$   $G(0; 1; 1)$   $H(0; 0; 1)$ 
  - a. Determinar una representación paramétrica de la recta  $(EC)$ .
  - b. Determinar una ecuación cartesiana del plano  $(AFH)$ .
  - c. Deducir las coordenadas del punto  $I$ ; demostrar que el punto  $I$  es la proyección ortogonal del punto  $E$  sobre el plano  $(AFH)$ .
  - d. Comprobar que la distancia del punto  $E$  al plano  $(AFH)$  es igual a  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .
  - e. Demostrar que la recta  $(HI)$  es perpendicular a la recta  $(AF)$ . ¿Qué representa el punto  $I$  para el triángulo  $AFH$ ?

Estamos ante un ejercicio de geometría analítica tridimensional, ayudado por la representación gráfica que se facilita, en el que se solicitan el cálculo de la ecuación de una recta, un plano y la distancia de un punto a un plano, que son aplicación directa de las fórmulas, además hay que calcular un producto escalar de vectores y se requiere conocer la geometría del triángulo para saber qué representa el punto  $I$ .

Una cuestión del tipo respuesta múltiple de números complejos en la que aparece la geometría planteada desde la representación gráfica de los números complejos, incluida en el ejercicio de 2011 es la siguiente:

“El conjunto de los puntos de afijo  $z$  tal que  $|z+i|=|z-1|$  es: la mediatriz del segmento  $[BC]$ , el punto medio del segmento  $[BC]$ , el círculo de centro  $O$  y radio  $1$ , la mediatriz del segmento  $[AD]$ ”

También aparecen en este Bachillerato ejercicios de estudio de sucesiones y recursividad, por ejemplo, el aparecido en las pruebas del Bachillerato (S) de 2011:

“Se considera una recta  $D$  provista de un sistema de referencia  $(O, \vec{i})$ . Sea  $(A_n)$  la sucesión de puntos de la recta  $D$  definida del siguiente modo:  $A_0$  es el punto  $O$ ;  $A_1$  es el punto de abscisa  $1$ ; para todo entero natural  $n$ , el punto  $A_{n+2}$  es la mitad del segmento  $[A_n A_{n+1}]$ .

1. a. Tomando como unidad gráfica  $10$  cm, dibujar sobre la recta  $D$  los puntos  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  y  $A_6$ .

b. Para todo entero natural  $n$ , se denota  $a_n$  la abscisa del punto  $A_n$ . Calcular  $a_2, a_3, a_4, a_5$  y  $a_6$ .

c. Para todo entero natural  $n$ , justificar la igualdad:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$$

2. Demostrar por recurrencia, que para todo entero  $n$ ,

$$a_{n+1} = \frac{-1}{2} a_n + 1$$

3. Sea  $(v_n)$  la sucesión definida, para todo entero natural  $n$ , por

$$v_n = a_n - \frac{2}{3}. \text{ Demostrar que } (v_n) \text{ es una progresión geométrica de razón } \frac{-1}{2}.$$

4. Calcular el límite de la sucesión  $(v_n)$  y después el de  $(a_n)$ .

Queremos hacer notar el aspecto formal de la redacción del enunciado, la generalidad con la que está planteado, pero también los aspectos concretos que se demandan en los apartados a y b, para a partir de ellos justificar, que no demostrar, una igualdad de tipo general (c), y aquí ya sí para demostrar en el apartado 2 una fórmula recurrente y su aplicación práctica a las progresiones geométricas y al cálculo de límites. Este tipo de ejercicio, aparecía en los textos de Matemáticas de Bachillerato de hace algunos años, pero no en los actuales (salvo en Francia).

Como características generales de las pruebas del Bachillerato General francés en sus tres modalidades podemos establecer las siguientes:

1. Pruebas de larga duración (3 o 4 horas) y con ponderación alta en la calificación global del aspirante.

2. Se plantean algunas cuestiones teóricas y se pide demostrar propiedades y efectuar conjeturas, pero no bajo la simple mención del nombre del teorema sino como parte de algún ejercicio en el que se utilizará el resultado. En ese sentido es usual dirigir el trabajo del alumno a través de apartados encadenados, consiguiendo en conjunto resultados globales de alguna de las partes del programa.

3. Se parte de la gráfica de la función para plantear cuestiones, y se aborda el estudio de funciones trascendentes.

4. Hay rigor y formalismo en el planteamiento de los ejercicios y en las nomenclaturas utilizadas.

5. Se incluyen partes de las matemáticas tales como sucesiones, divisibilidad, números complejos, empleo de algoritmos e iteraciones de sucesiones y funciones inusuales en las pruebas de los otros países.

6. Entre las instrucciones que se aportan al estudiante está la de poder usar una calculadora autorizada y la de disponer de papel milimetrado. También se recuerda que la calidad de la redacción, la claridad y la precisión de los razonamientos serán tenidos en cuenta en la corrección.

### 3.4. Italia

En Italia, en Matemáticas, el alumno debe resolver uno de los dos problemas que se le proponen en la prueba y cinco de entre diez cuestiones. Disponen de seis horas para la realización del examen. De los problemas el primero suele corresponder al Análisis y el segundo a la Geometría. En las pruebas de junio de 2012 en el problema 1 se demanda el empleo de fórmulas a través de un ejercicio de cálculo diferencial e integral (Tomasi, 2012):

$$g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

“1. Calcula el periodo de la función

2. Sea la función  $g(x)$  definida anteriormente y  $f(x) = |27x^3|$ . Sean  $r$

y  $s$  las rectas tangentes a  $f(x)$  y  $g(x)$  respectivamente en  $x = \frac{1}{3}$ .  
Calcular el ángulo que forman.

3. Calcular el área de la región  $R$  comprendida entre las dos funciones en el primer cuadrante.

4. Rotando la región  $R$  entorno al eje  $OX$  se genera el sólido  $S$  y rotando entorno al eje  $OY$  se genera el sólido  $T$ . Calcula sus volúmenes.”

En este ejercicio se solicita el cálculo del periodo de una función trigonométrica, cosa muy frecuente en las pruebas italianas, pero totalmente inusual en las de los otros países, mediante un cálculo de derivadas se obtienen las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones en el punto dado y a continuación utilización de la fórmula para el cálculo del ángulo que forman. Para calcular el área de la región solicitada es conveniente el esbozo de la gráfica de las funciones y el cálculo de sus puntos de corte y conocimiento de la fórmula integral para el cálculo del volumen de revolución. Como se ve es un ejercicio que requiere largos cálculos, en el que muchos de los aspectos a desarrollar no se solicitan explícitamente y es de redacción escueta.

Un ejemplo de Geometría es el problema propuesto en 2004 (Esame di Stato di Liceo Scientifico, 2004, corso di ordinamento) en el que las preguntas que se plantean son muy específicas del Bchillerato italiano:

“ $ABC$  es un triángulo rectángulo con hipotenusa  $BC$ .

1. Demostrar que la mediana relativa a  $BC$  es congruente con la mitad de  $BC$ .

2. Dar las medidas de los catetos de ABC en función de la medida, supuesta conocida, de la hipotenusa y de la altura relativa a ella.
3. Si  $BC = \sqrt{3}$  metros, determinar el cono  $K$  de volumen máximo que se puede obtener a partir de la rotación del triángulo alrededor de uno de sus catetos y la capacidad en litros de  $K$ .
4. Determinar la medida aproximada, en radianes y en grados sexagesimales, del ángulo del sector circular que resulta del desarrollo plano de la superficie lateral del cono  $K$ .

En este ejercicio, también de redacción escueta, se vuelven a demandar cuestiones para las que se requiere el uso de aspectos no explícitos en la formulación del problema: dibujo de los elementos que se describen, utilización de fórmulas, desarrollo de superficies. El aspecto calculatorio tiene también una gran presencia en el ejercicio.

En cuanto a las cuestiones hay que observar que son ejercicios en los que se demandan diferentes conocimientos que hay que aplicar en la resolución del problema planteado. Puede ser una cuestión teórica de la que se pide la demostración, o la utilización de alguna fórmula, o algún cálculo requerido o problemas usuales en los libros de texto de todos los países (cálculo de máximos y mínimos). Abarcan las diferentes partes del programa, y nunca faltan los problemas clásicos tipo problema del Ajedrez, u otros conocidos que se presentan con el nombre del matemático al que se le atribuyen. Recogemos algunas de las cuestiones planteadas el año 2012 (Tomasi, 2012):

- “1. ¿Qué representa el límite siguiente y cuál es su valor?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5\left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

2. ¿Cómo definirías las asíntotas de una función? Dar un ejemplo de función que tenga una asíntota horizontal y dos asíntotas verticales.
3. La posición de una partícula viene dada por:

$$s(t) = 20\left(2 \cdot e^{\frac{-t}{2}} + t - 2\right). \text{ ¿Cuál es su aceleración para } t = 4?$$

4. ¿Cuál es la capacidad en litros de un cono de apotema 1m?

5. Siendo

$$f(x) = 5 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17$$

calcular  $f'(x)$

7. El problema de Erone (matemático Alejandrino que probablemente vivió en la segunda mitad del siglo I d.C.). Cada mañana, un campesino que vive en una granja (punto A) debe ir al río (ver figura), llenar dos baldes de agua y llevarlos a su establo (ubicado en B). Dado que los cubos son pesados, el agricultor intenta tomar la ruta más corta posible. Así que le pregunto, ¿en qué parte del río (punto C) tengo que ir a recoger el agua de modo que el recorrido total (de A a C más de C a B) sea el más corto?”



Figura 3: Problema de Erone

Obsérvese como aquí también el aspecto procedimental juega un papel importante en algunas de las cuestiones.

Características de las Pruebas:

Los problemas están divididos en cuatro apartados cada uno de los cuales constituye un problema en sí mismo. Además suelen estar encadenados de forma tal que el resultado de alguno de los apartados puede ser necesario para resolver los siguientes. Suelen ser problemas de Análisis que incluyen funciones, derivadas e integrales, pero no el estudio directo de la representación gráfica de funciones. Suelen aparecer funciones logarítmicas, trigonométricas y alguna función con valores absolutos. Se incluyen preguntas relativas a cálculo de volúmenes de sólidos de rotación.

Para las cuestiones la estructura es similar pero cada cuestión es independiente de las demás y no tienen apartados divididos como tales. Hay cuestiones teóricas (definiciones, alguna pequeña demostración). Hay cuestiones de trigonometría (en particular cálculo de parámetros y periodos de funciones), de geometría plana y espacial, de análisis (cálculo de máximos y mínimos, estudio de raíces) y problemas clásicos (ajedrez, Erone). En Análisis suele ser frecuente solicitar ejemplos de funciones que cumplan determinadas condiciones y el cálculo de dominios. No se renuncia a plantear problemas no directamente relacionados con alguna parte del currículo sino relacionados con estrategias de resolución de problemas (de combinatoria, divisibilidad, factorización,...). No aparecen cuestiones ni problemas de estadística ni de probabilidad.

#### 4. Análisis Comparado

Del análisis efectuado de las pruebas de los cuatro países y de las características presentadas de cada una de ellas se pueden deducir algunos hechos relevantes que permiten hacerse una mejor idea de lo que se pregunta en cada país y por ende deducir qué y cómo se enseñan las Matemáticas de Bachillerato en cada uno de los cuatro países.

El primer hecho a constatar es que las pruebas españolas son de una duración mucho menor que las del resto y por lo tanto los problemas que se plantean sólo constituirían un apartado de lo que en los demás lugares se entiende como problema o ejercicio propuesto para las pruebas.

En segundo lugar hacer mención a la denominación utilizada en cada país para designar los problemas de las pruebas: en Alemania son “tareas” (*teil*), en España se utilizan las denominaciones de “problemas” y “cuestiones”, en Francia son “ejercicios” (*exercice*) y en Italia son también “problemas” y “cuestiones” (*problema, questionario*).

Se ha señalado también que las notaciones utilizadas difieren de un país a otro, aunque todas ellas son conocidas y utilizadas en Matemáticas. Aquí también impera la cultura del país. Por ejemplo los grafos de las funciones se designan en Francia y Alemania de igual forma y siempre de la misma manera:  $C_f, G_h, \dots$ . En Italia se habla del grafo  $G$  de la función  $f$ . Las funciones en España suelen aparecer como  $f: R \rightarrow R$ , o simplemente  $f(x)$ , mientras que en Alemania se escriben  $f: x \mapsto e^x$ , utilizándose también esta notación para las funciones definidas mediante integrales

$$I: x \mapsto \int_{\ln 2}^x f(t) dt$$

, en Francia suele expresarse como “sea  $f$  la función definida por  $f(x) = x^2$ ”, de una manera similar a como se hace en España y en Italia. Los intervalos son utilizados muy frecuentemente en las pruebas francesas y no tanto en las demás; en Francia y Alemania se escriben igual: intervalo cerrado  $[0;3]$ , intervalo abierto  $]2;5[$ , reservando para las coordenadas los paréntesis. Además en Francia se suelen denotar los intervalos con letra propia tal como  $I = [3;7]$ . En España se escribe intervalo cerrado  $[0,1]$  (igual que en Italia) e intervalo abierto  $(3,6)$ ; no hemos visto ningún intervalo abierto en las pruebas italianas. Los puntos ya se ha dicho que en Alemania aparecen como  $A(0|60|0)$ , en Francia  $B = (2;4)$ , pero también aparece punto  $A$  de coordenadas  $(0,4)$ ; en España e Italia  $P(1,3,1)$ . Las probabilidades condicionales en España se denotan por  $p(A/B)$ , mientras que en Francia son  $p_B(A)$ .

La teoría, en el sentido de demostración de una determinada propiedad, prueba de un determinado teorema e incluso redacción de una definición, es prácticamente inexistente en las pruebas de acceso de estos países. No quiere esto decir que los alumnos no tengan que conocer fórmulas y conceptos teóricos que resultan imprescindibles para resolver los problemas. Pero no se preguntan cuestiones de teoría en todos los países. No hay teoría en las pruebas de Alemania, ni en las de España, pero sí en las de Francia e Italia. En Italia en la parte del cuestionario en la que se proponen diez cuestiones de las que tienen que elegir cinco, dos de las cuestiones suelen ser teóricas e implican la demostración de una determinada propiedad o dar alguna definición. Basten como ejemplo las siguientes:

*“Los poliedros regulares –también conocidos como los sólidos platónicos– son salvo semejanzas, sólo cinco: el tetraedro, cubo, octaedro dodecaedro e icosaedro. ¿Puedes probarlo?”. “Demostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  la suma de los coeficientes de  $(a + b)^n$  es igual a  $2^n$ ” (2006)*

Las cuestiones teóricas planteadas en las pruebas francesas no abundan, no siempre aparecen, pero sí lo hacen en el Bachillerato Científico (S), en el que sí que se pide frecuentemente plantear y demostrar conjeturas sobre situaciones planteadas

en los problemas. Por ejemplo la parte A del ejercicio 4 planteado en las pruebas de 2011 es la siguiente (Partie A – Restitution organisée de connaissances):

“Se dispone en el espacio de un sistema de referencia ortonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Se designa por  $P$  el plano de ecuación  $ax + by + cz + d = 0$  y por  $M_0$  el punto de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ . Se denomina  $H$  a la proyección ortogonal del punto  $M_0$  sobre el plano  $P$ . Se supone conocida la propiedad siguiente: “el vector  $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  es un vector normal al plano  $P$ ”. La finalidad de esta parte es demostrar que la distancia  $d(M_0, P)$  del punto  $M_0$  al plano  $P$ , es decir la distancia  $M_0H$ , es tal que:

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$1. \text{ Justificar que } \left| \vec{n} \cdot \vec{M_0H} \right| = M_0H \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$2. \text{ Demostrar que } \vec{n} \cdot \vec{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$$

3. Concluir la demostración”

Es una demostración de aspecto muy formal, pero dirigida y ayudada, tanto porque se acompaña de propiedades que se suponen conocidas, como porque se aporta la fórmula final y se indican los cálculos a realizar y sus resultados parciales. Luego, no es una cuestión teórica al uso de la que el alumno tiene que aportar tanto su formulación como su completa demostración.

El lenguaje utilizado difiere entre los países. El de las pruebas alemanas es un lenguaje directo, en el que no se renuncia a utilizar la simbología matemática necesaria, pero descriptivo de las situaciones que se plantean y contextualizado (ver ejemplo anterior sobre área de terreno registrado en catastro); el de las pruebas españolas está reducido a un mínimo imprescindible para expresar lo que se requiere del alumno y acompaña a la simbología matemática que es la esencia del problema que se plantea; en las pruebas francesas predomina la descripción formal y matemáticamente correcta de la situación planteada; las condiciones iniciales del problema se detallan con rigor, bien sean sistemas de referencia (*plano complejo provisto de una referencia ortonormal directa*), dominios de definición, términos matemáticos que no aparecen en el resto de las pruebas (*estrictamente creciente, sucesión definida para todo entero natural  $n$ , números reales estrictamente positivos, formular una conjetura*). En Italia los problemas se dividen en varios apartados, cada uno de los cuales es equivalente en tamaño a las cuestiones que contiene el examen; el lenguaje es escueto, la terminología matemática utilizada es solo la necesaria, las preguntas son muy directas y no se aportan explicaciones de lo requerido en el ejercicio. Hay que señalar que en ninguno de los países se utilizan cuantificadores lógicos en la redacción de los exámenes, del tipo  $\forall, \exists$ , sino que se sustituyen por su expresión en el lenguaje ordinario.

En Francia y Alemania según la especialidad o el itinerario de Bachillerato cursado, la parte de Estadística y Probabilidad comprende cuestiones muy específicas sobre por ejemplo cadenas de Markov.

El examen italiano tiene muchas especificidades: aparecen muchos ejercicios de cálculo de derivadas o cálculo de periodos de funciones o cálculo de parámetros, en los que prima el mero aspecto procedimental. Se utilizan ampliamente las funciones trigonométricas, no entra prácticamente la probabilidad y la estadística, como no sea para calcular probabilidades mediante fórmulas combinatorias o mediante la definición de Laplace y se siguen planteando ejercicios de cálculo combinatorio, como aplicaciones de un conjunto en otro:

*“Dados los conjuntos  $A = \{1,2,3,4\}$  y  $B = \{a,b,c\}$ , ¿cuántas son las aplicaciones de (funciones) de  $A$  en  $B$ ?”, (Examen de 2006)*

Ya se ha dicho también que se mencionan y plantean cuestiones atribuidas a matemáticos de los que se aporta el nombre y algún dato biográfico.

Tanto en Francia, como en Alemania y, a veces, en alguna prueba española, pero no en las pruebas italianas, se plantean ejercicios con cuestiones relativas a una determinada función cuya gráfica se proporciona. Se parte de la gráfica, para de una manera intuitiva profundizar en el conocimiento de la función y de los significados relativos a ella y a su función derivada.

En las pruebas alemanas y españolas muchos de los problemas se suelen presentar contextualizados, en terminología alemana sacados de la realidad. Son funciones que modelizan situaciones, o aplicaciones de las Matemáticas a la resolución de situaciones problemáticas de otras áreas del conocimiento.

Las pruebas francesas tienen especificidades que no aparecen en el resto. Ya se ha comentado el uso de un lenguaje matemático muy formal para describir las situaciones que se plantean; hay muchas opciones según el itinerario cursado y la especialidad y por lo tanto hay pequeñas variaciones de unas pruebas a otras, consistentes tanto en el programa, como en el estilo de ejercicios que se demandan. Hay dos características no comentadas anteriormente, como son el que en muchos de los ejercicios, antes de plantear una determinada cuestión, se explicita el objetivo que se pretende conseguir con esa cuestión en particular o con el ejercicio en general. Por ejemplo, en las pruebas del Bachillerato (S) de 2011 aparecen los siguientes objetivos explicitados en los diferentes ejercicios:

*“El objetivo de esta cuestión es delimitar la posición del punto  $M$  sobre el segmento  $[CE]$  para el cuál la medida del ángulo  $\widehat{IMJ}$  es máxima (ejercicio 3, geometría)”*

*“El objetivo de esta cuestión es probar que existe un solo valor de  $\alpha$  para el cual las áreas  $A$  y  $S(\alpha)$  son iguales (ejercicio 4, análisis)”*

Además, se explica a veces, qué se valorará en la resolución de una determinada cuestión: *“En esta cuestión la respuesta será cuidadosamente justificada. Toda iniciativa de investigación, incluso incompleta o no fructífera, será tomada en cuenta en la evaluación”*

También es frecuente demandar soluciones con un determinado nivel de exactitud: “Redondeando a las unidades, aproximar el resultado a  $10^{-3}$ , redondeando a las decenas”

Salvo en España, donde no existen o son muy inusuales, se suelen plantear cuestiones relacionadas con la existencia y cálculo de ceros de funciones. Por ejemplo en el Bachillerato (L) francés en 2010 se planteó:

“Sea  $f$  la función definida sobre el intervalo  $I = [1;7]$  por

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 4 + 8\ln(x). \text{ Determinar el número de soluciones de}$$

la ecuación  $f(x) = 0$  en el intervalo  $I$ .”

En las pruebas francesas y en las españolas la presencia de porcentajes y tasas suele ser frecuente, sobre todo, en los Bachilleratos de Sociales (ES).

## 5. Conclusiones

Se pueden formular algunas conjeturas sobre el tipo de enseñanza de las Matemáticas del Bachillerato en los países analizados: enseñanza muy diversificada en Francia con múltiples opciones adaptadas al itinerario formativo elegido por el estudiante, con relevancia de aspectos formales y deductivos, pero no olvidando las aplicaciones; en Alemania sólidos fundamentos que se utilizan para solucionar cuestiones prácticas y pocos aspectos formales; en Italia, se aprecia una enseñanza más tradicional de las Matemáticas, con incidencia todavía importante del aspecto calculatorio y procedimental y con cuestiones definitivamente superadas en la enseñanza de los otros tres países; y en España enseñanza práctica dirigida a superar los aspectos procedimentales y con presencia cada vez mayor de situaciones de enseñanza contextualizadas.

## Bibliografía

- Abravanel, R. (2008). *Meritocrazia*. Garzanti Libri, Milano. Italia.
- Abiturprüfung (2011). *Mathematik*. Recuperado el 12 de setiembre de 2012, de [http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/abi/BY/mathgk11\\_A.pdf](http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/abi/BY/mathgk11_A.pdf)
- Baccalauréat (2010). *Baccalauréat ES, Amérique du Nord 3 juin 2010*. Recuperado el 11 de noviembre de 2015, de <http://es.bab.la/diccionario/espanol-frances/examen>
- Baccalauréat (2011). *Baccalauréat General, Mathematiques série L, session 2011*. Recuperado el 16 de setiembre de 2012, de: <http://www.bankexam.fr/telecharger/annale/42744>
- Baccalauréat (2011b). *Baccalauréat General, Mathematiques série S, session 2011, Enseignement Obligatoire*. Recuperado el 11 de noviembre de 2015, de [http://www.mathsfrance.fr/Terminale/TerminaleS/ProblemesBac/2011/BacS\\_Juin2011\\_Obligatoire\\_Asie\\_Enonce.pdf](http://www.mathsfrance.fr/Terminale/TerminaleS/ProblemesBac/2011/BacS_Juin2011_Obligatoire_Asie_Enonce.pdf)
- Busto, A.I. y Martínez, E. (2012). *Matemáticas aplicada a las ciencias Sociales II. Pruebas de acceso a la universidad. Selectividad 2011*. Anaya, Madrid. España.
- Busto, A.I. y Martínez, E. (2012). *Matemáticas II. Pruebas de acceso a la universidad. Selectividad 2011*. Anaya, Madrid. España

- Eurydice (2001). *Il sistema educativo italiano*. INDIRE, Firenze. Italia.
- Eurydice-Eurostat (2007). Cifras clave de la Educación Superior en Europa. Recuperado el 3 de setiembre de 2012, de [http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/key\\_data\\_series/088ES.pdf](http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/key_data_series/088ES.pdf)
- Gavari, E. (2003). *Los principios rectores de la política educativa italiana contemporánea*. Educación XXI, Madrid. España.
- Gobierno de Francia (2012). Resultados provisionales del Bachillerato. Recuperado el 11 de setiembre de 2010, de <http://www.education.gouv.fr/cid56455/resultats-provisoires-du-baccalaureat.html>
- INE (2012). Anuario Estadístico de España (3. Educación). Recuperado el 11 de noviembre de 2015, de: [www.ine.es/prodyser/pubweb/anuario12/anu12\\_03educa.pdf](http://www.ine.es/prodyser/pubweb/anuario12/anu12_03educa.pdf)
- Ministère de l'Éducation Nationale (2012). Éduscol. Portail national des professionnels de l'éducation. Présentation du baccalauréat general. Recuperado el 7 de setiembre de 2012, de <http://eduscol.education.fr/pid23233-cid46205/presentation-du-baccalaureat-general.html>
- Ministère de l'Éducation Nationale (2012b). Note d' Information. 13-02 Mars. Recuperado el 11 de noviembre de 2015, de [http://cache.media.education.gouv.fr/file/2013/82/6/DEPP-NI-2013-02-resultats-definitifs-baccalaureat-session-2012\\_245826.pdf](http://cache.media.education.gouv.fr/file/2013/82/6/DEPP-NI-2013-02-resultats-definitifs-baccalaureat-session-2012_245826.pdf)
- Studentville (2012). Maturità 2012. Recuperado el 4 de setiembre de 2012, de: <http://maturita.studentville.it/>
- Sujet de Bac (2012). Annales du Bac. Recuperado el 6 de setiembre de 2012, de <http://www.sujetdebac.fr/serie-s.php>
- Tomasi, L. (2012). Risoluzione dei temi di Matematica assegnati all'esame di Stato di Liceo scientifico nella 2ª prova scritta. Recuperado el 17 de setiembre de 2012, de <http://www.matematica.it/tomasi/matls/>
- UPV/EHU (2012). Examen de selectividad 2012. Recuperado el 16 de setiembre de 2012, de [http://www.sarrera.ehu.es/p259-content/es/contenidos/plan\\_programa\\_proyecto/examen\\_selectividad\\_ord\\_aca/es\\_2012/adjuntos/MatematicasII\\_junio2012.pdf](http://www.sarrera.ehu.es/p259-content/es/contenidos/plan_programa_proyecto/examen_selectividad_ord_aca/es_2012/adjuntos/MatematicasII_junio2012.pdf)

**Josu Gotzon Ruiz de Gauna Gorostiza.** Licenciado en Matemáticas y Doctor en Didáctica de las Matemáticas. Profesor de la Escuela Universitaria de Magisterio de Bilbao. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU.  
[josu.ruizdegauna@ehu.eus](mailto:josu.ruizdegauna@ehu.eus)

**Joxemari Sarasua Fernández.** Licenciado en Matemáticas y Doctor en Didáctica de las Matemáticas. Profesor de la Escuela Universitaria de Magisterio de San Sebastián. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU.  
[joxemari.sarasua@ehu.eus](mailto:joxemari.sarasua@ehu.eus)