UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 42. Noviembre 2015
Páginas 55-76

Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações em um Curso Superior Tecnológico

Sonia Barbosa Camargo Igliori, Maria Eli Puga Beltrão

Fecha de recepción: 25/02/2012
Fecha de aceptación: 14/12/2013

Resumen

El presente artículo se centra fundamentalmente en el abordaje de la enseñanza con la utilización del modelado y de las aplicaciones de la matemática. La experimentación fue realizada en la clase de Cálculo Diferencial en un curso de nivel superior tecnológico en San Pablo, Brazil. En el, es presentado un breve relato del desarrollo histórico del Modelado y de las Aplicaciones, así como informaciones sobre las investigaciones brasileñas en el tema. Incluye además la descripción de uno de los trabajos. Los datos de la investigación indicaron que el modelo puede ayudar a facilitar el aprendizaje y a atribuir significado a los conceptos matemáticos en el proceso de la enseñanza.
Palabras clave: Modelado. Aplicaciones. Nivel Superior Tecnológico. Cálculo Diferencial

Abstract

This article aims the research of the use of Modelling and Aplications at Mathematics teaching approach. In this is presented brief about development historical date and Brazilians' investigation. Is presentation also a empirical case at the implementation of Modelling and Aplications as approach at teaching Calculus classe at an undergraduate degree in Food Technology at College in the São Paulo city. The investigation's date aims the potencial of Modelling and Aplications at Mathematics Education.
Keywords: Modelling. Aplications. Undergraduate degree in Technology. Differential Calculus

Resumo

O presente artigo se centra fundamentalmente na abordagem de ensino por meio da utilização da modelagem e das aplicações da matemática. A pesquisa empírica foi realizada em aula de Cálculo Diferencial num curso de nível superior tecnológico em São Paulo, Brasil. Nele são apresentados um breve relato do desenvolvimento histórico da Modelagem e das Aplicações, assim como alguns dados sobre investigações brasileiras sobre o tema. Compreende ainda a descrição de um dos trabalhos. Os dados da investigação indicam que a modelagem pode ser um facilitador da aprendizagem e uma das formas de auxílio à atribuição de significado aos conceitos matemáticos no processo de ensino.
Palavras Chave: Modelagem. Aplicações. Nivel Superior Tecnológico. Cálculo Diferencial

1. Introdução

As disciplinas da Matemática, como o Cálculo Diferencial, nos cursos em que elas são consideradas de serviço (de aplicação para outras disciplinas), não têm em geral bom acolhimento por parte dos estudantes, assim como são aquelas que apresentam maiores índices de reprovação. É o que ocorre no Curso Superior de Tecnologia de Alimentos no qual a investigação descrita neste artigo se desenvolveu. Ao baixo interesse pela disciplina por parte dos alunos, à existência de dificuldades com conteúdos prévios, acrescenta-se como agravante regras colocadas pela instituição escolar. Entre essas regras há um programa pré-fixado, carga horária a ser cumprida e a cobrança de resultados que possibilitem a formação de egressos competentes para prática da profissão. É nesse contexto que esta pesquisa se insere e é a razão mesmo da busca de uma abordagem de ensino que envolvesse os alunos e possibilitasse melhores condições de aprendizagem. Estudos sobre a metodología de ensino por meio da Modelagem ou Aplicações estimularam a utilização da mesma como forma de superação dos entraves. De fato, muito esforço foi despendido para se conseguir resultados favoráveis, e é o que se procura descrever neste artigo. Os procedimentos metodológicos da pesquisa nortearam-se por pressupostos da pesquisa qualitativa, na medida em que se tomou o investigador como instrumento principal e se utilizou da estratégia de observações participantes dos dados. Os referenciais teóricos foram aqueles relacionados à utilização de modelagem ou aplicação no ensino, a experimentação empírica se deu no decorrer do primeiro curso de Cálculo para uma turma de um Curso Superior de Tecnologia de Alimentos. As aulas seguiram etapas programadas seguindo principios da abordagem escolhida. Este artigo apresenta de forma resumida as componentes da pesquisa. A saber: aspectos históricos do desenvolvimento do uso da Modelagem e das Aplicações no ensino de Matemática; informações sobre pesquisas brasilieras sobre o tema e aplicações e modelagem no ensino do Cálculo.

2. Aspectos Históricos

Esboçar um panorama histórico a respeito da Modelagem Matemática não é tarefa simples, e talvez apresente resultados difusos. Isso porque há diferentes interpretações desse termo ou até mesmo a ausência dele. Assim sendo o que se segue é fruto de escolhas pessoais.

Caraça (1963) concebe que, o homem, na sua necessidade de lutar contra a natureza e no desejo de dominá-la, foi levado, naturalmente, à observação e ao estudo dos fenômenos, procurando descobrir as suas causas e o seu encadeamento. Os resultados desses estudos lentamente adquiridos e acumulados, vão constituindo, o que no decurso dos séculos da vida consciente da humanidade se pode designar pelo nome de Ciência. O objetivo final da Ciência é a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais, fenômenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social. Ele considera que a ciência pode ser encarada sob dois aspectos distintos: como vem exposta nos livros de ensino como “coisa criada”, um todo harmonioso, em que os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições, ou pelo seu desenvolvimento progressivo, da maneira como foi sendo elaborada, e nesse segundo caso seu aspecto é totalmente diferente pois descobrem-se hesitações, dúvidas e contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.

Desta forma, observa que no primeiro aspecto, a Ciência parece bastar-se a si própria, a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só às necessidades interiores; no segundo, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência.

E nesse aspecto a Ciência, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinada às grandes necessidades do homem na luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social.

Klein, por sua vez, considera que a Matemática está intimamente ligada a esse organismo vivo, buscando respostas e modelos que o homem procura para entender seu Universo. E que essa tentativa de entender o Universo e aplicar a Matemática para tal, é antiga.

A Matemática como disciplina científica há muito está ligada à Física, Astronomia, Engenharia. No início do séc.XIX foi reconhecida como uma ciência natural que envolve muitas aplicações e atividades de modelagem. Contudo, a noção de Aplicação e Modelagem como consideramos hoje, dificilmente encontraríamos expressa, até mesmo pela dificuldade de separar os vários campos em que a Matemática estaria envolvida.

Com o advento da Geometria-não-euclidiana e o desenvolvimento da Análise, da Álgebra ocorreram grandes mudanças, tornando o final do séc. XIX e início do séc. XX momentos extraordinários para o desenvolvimento da Matemática Pura. Ao lado disso, e com igual intensidade, desenvolveram-se sofisticados mecanismos de aplicação e atividades de modelagem que corroboraram para a criação de novos tópicos da Matemática, como por exemplo a Programação Linear e a Criptografia.

O ensino da Matemática, em meados do séc.XIX, encontrava-se em grande dificuldade por conta da abordagem utilizada ser a da Matemática Pura. A Matemática Aplicada passa a ser considerada para ser ensinada somente mais no final desse mesmo século. Cabe aqui destacar o grande desempenho de Klein para que a Matemática Aplicada fizesse parte do ensino em seu tempo, provocando reflexos em tempos futuros.

No final do séc.XIX, uma nova tendência começava a delinear-se, consistindo em valorizar as aplicações da matemática em todos os ramos das ciências naturais e técnicas, assim como seu significado na vida real. Basicamente são essas ideias consideradas por Klein como essenciais e tomadas como diretrizes para a proposta de modernização do ensino da matemática no início do séc. XX.

Na visão de Klein, o ensino que tinha até então uma posição particularista, e poderia ser mais bem direcionado, se acompanhasse outro processo, cuja importância maior seria dada às inter-relações das diferentes áreas da Ciência, possibilitando a compreensão simultânea de várias delas. Dessa forma o processo de ensino-aprendizagem, teria uma concepção em que veria a Matemática no seu todo. Klein trabalhou arduamente na Alemanha para que essas ideias tivessem eco.

Com os mesmos argumentos, e com o propósito de estudar assuntos relacionados ao ensino da Matemática foi apresentada uma proposta para a formação de uma comissão, durante o IV Congresso Internacional de Matemática realizado em abril de 1908, em Roma. Após a aprovação da proposta, foi estabelecida a *Comission Internacionale de L' enseignement* dês *Mathematiques*, conhecida pela sigla CIEM, e entre os alemães pela sigla IMUK *(Internationalen mathematische Unterrichts Kommission)*, passando, a partir de 1954, ser conhecida como *International Commission on Mathematical Instruction* - ICMI.

Mesmo não estando presente nesse congresso de Roma, Felix Klein foi nomeado presidente da comissão, posto que ocupou até 1920. Essa comissão, presidida por Klein, tinha como objetivo principal fazer um levantamento das principais tendências no ensino da Matemática em diversos países. Após minucioso trabalho, concluiu-se que havia dificuldades com esse ensino, levando a comissão a apresentar proposta de modificações, oportunizando Klein a expandir suas ideias.

Tem-se então, durante o séc. XX, uma alternância entre o ensino da Matemática Pura e Matemática Aplicada, dependendo de como as discussões relativas à Educação Matemática eram encaminhadas. Duas posições se estabeleciam: uma com os que defendiam as Aplicações e Modelagem para o aprendizado da Matemática e do outra que defendia o Aprender Matemática para desenvolver competências em Aplicações Matemáticas e construção de Modelos Matemáticos. É certo pensar que muita discussão foi promovida em razão dessas posições com essências tão diferentes. Em 1928, no congresso realizado em Bolonha, após abandonada a discriminação contra os países derrotados, ficou reconstituída a Comissão Internacional para o Ensino da Matemática.

Contudo, também por volta de 1950, um grupo de matemáticos, na maioria franceses, de pseudônimo Nicolas Bourbaki, aparece retomando o trabalho de Galois com as estruturas algébricas; os de Dedekind e Cantor com a teoria dos conjuntos; e os de Hilbert, focando a axiomática. O grupo Bourbaki teve como principal objetivo reconstruir o todo da Matemática clássica e moderna, numa ampla base geral de forma a encerrá-lo em um estudo unificado. Tentando obter a inteligibilidade da Matemática, apresentou uma nova organização dessa Ciência na qual a ideia de estrutura, método axiomático e unidade eram essenciais. (Pires, 2006)

Embora o primeiro livro de Bourbaki esteja datado de 1939, a divulgação mundial do estruturalismo matemático proposto pelo grupo, inicia-se por volta de 1950, sendo mais marcante nas décadas de 60 e 70, quando surgem em vários países grupos de estudo, com o objetivo de modernizar o ensino da Matemática, principalmente na Escola Básica, e que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna.

Em 1968 Hans Freudenthal organizou uma conferência em que defendia a inclusão das Aplicações e Modelagem no ensino da Matemática, com publicação do trabalho no *Educational Studies in Mathematics* no mesmo ano. Também em 68 foi nomeado presidente do ICMI, em sua nova fase. A atuação de Freudenthal irá influenciar significativamente a consolidação das Aplicações e Modelagem no ensino da Matemática.

Reconhecido internacionalmente como fundador da Educação Matemática Realística que é calcada na resolução de problemas reais, com significado, a partir de experiências cotidianas em lugar de regras abstratas que estão longe da realidade dos estudantes. Freudenthal foi determinante para que a educação holandesa não aderisse ao Movimento da Matemática Moderna, ocorrido em inúmeros países.. Ao contrário, Freudenthal optou por proporcionar aos estudantes um estudo da matemática a partir da descoberta.

De acordo com Niss (2007) o desenvolvimento das Aplicações e Modelagem Matemática na Educação Matemática, passa por três fases:

A primeira fase é aquela em que ocorre a defesa, compreendida entre 1965 e 1975, que é representada por Hans Freudenthal. A segunda fase, compreendida entre 1975 e 1990 é considerada a fase do desenvolvimento, caracterizada pela elaboração de currículo e de materiais de vários níveis. Também ocorre a implementação de material instrucional, o cultivo de casos específicos de Aplicações e Modelagem para serem usados em sala de aula. Nessa fase são feitas tentativas, analisando e sistematizando, em nível teórico, argumentos para as Aplicações e Modelagem na Educação Matemática e investigando teoricamente e historicamente as relações com outros componentes. Estava, desta forma, emergindo a perspectiva de pesquisa.

Educadores matemáticos passam a desenvolver uma série de pesquisas em diferentes níveis, desencadeando, a série de conferências no *International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Aplication* (ICTMAs), a primeira delas ocorrida em 1983.

A terceira fase, desde 1990, é considerada a fase da maturação. O número de pesquisas e de pesquisadores cresceu consideravelmente. A comunidade pertencente ao ICMTAs organizou-se, estabelecendo a *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA), filiado como grupo de estudos do *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) em 2004.

Henry Pollak é considerado como um dos pioneiros na área de Aplicações e Modelagem na Educação Matemática. Nos anos de 1970 ele defendeu uma integração de Aplicações e Modelação Matemática no ensino. Era capaz de fazer isso com competência e credibilidade, em especial porque não fazia parte do sistema educacional em si, mas era um membro líder de Bell Laboratórios.

O cenário educacional dos anos sessenta foi moldado pelo Movimento da Matemática Moderna, que contrastava com as suas próprias intenções. Conduziu, em muitos países para uma ênfase aos aspectos intra- matemática. O empenho de Henry Pollak para Aplicações e Modelagem foi particularmente visível no ICME-3, em 1976, onde proferiu uma palestra de título "A interação entre Matemática e outras disciplinas escolares". Ainda no primeiro ICTMAs, Pollak teve uma posição ativa e proeminente, como palestrante na sessão ICTMA-3, em 1987.

Contudo podemos questionar: Qual é a situação das aplicações e modelagem matemática no ensino de hoje, trinta anos após a ICME-3 e vinte anos após ICTMA-3? Considera-se que Henry Pollak com sua enorme influência, contribuiu para que as aplicações e modelagem tenham agora, em muitos países, uma maior importância nos currículos. Para os autores deste artigo Felix Klein e Hans Freudental são dois elos importantes na constituição da corrente formadora, do desenvolvimento de ideias e ações, que culminaram na consolidação da Modelagem Matemática e Aplicações, como a vemos hoje, com suas diferentes nuances, dependendo do estudioso que a aborda.

3. Informações sobre pesquisas brasileiras

A pesquisa brasileira sobre o tema conta com mais de uma centena de trabalhos entre teses de doutorado e dissertações de mestrado. Em Dorow e Biembengut (2005), e em Silveira (2007) pode-se conferir a catalogação desses trabalhos. Destacam-se aqueles elaborados por D'Ambrosio e Bassanezi.

D'Ambrósio (1986) define *Modelagem Matemática* como a dinâmica que reflete sobre a realidade e da qual resulta uma ação planejada, consciente. Isso se processa pela construção de modelos com os quais o indivíduo opera, aplicando a sua experiência, conhecimento acumulado e recursos da natureza. O modelo seria o ponto de ligação entre as informações captadas pelo indivíduo e sua ação sobre a realidade. Criado como um instrumento de auxilio à compreensão da realidade mediante a reflexão, favorece sobretudo em criar condições para que o homem analise a realidade.

Para Bassanezi (2004), a Modelagem Matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Para ele, a modelagem pressupõe multidisciplinaridade, indo ao encontro das novas tendências que apontam para a remoção de fronteiras entre as diversas áreas de pesquisa.

Bassanezi chama de *modelo matemático* o conjunto de símbolos e relações matemáticas que de alguma forma representam o objeto estudado. Acrescenta que a importância do modelo consiste na concisão da linguagem, apta a expressar nossas ideias com clareza, sem ambiguidades, proporcionando um enorme arsenal de resultados que permitam usar métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas. Os relatos de Dorow e Biembengut (2005) indicam que a maioria das pesquisas utiliza práticas de salas de aula como campo de investigação, defendendo, indicando para esses casos vantagens dessa metodología de ensino para a aprendizagem da matemática. É ressaltado, principalmente, que o uso da modelagem e/ou aplicações no ensino é um auxílio para despertar o interesse do aluno já que ele percebe a aplicabilidade da matemática.

Em muitas das pesquisas brasileiras, a Modelagem Matemática é eleita, então, como uma estratégia, metodologia ou ainda, uma alternativa viável para o ensino frutífero da Matemática.

Em Silveira (2007) pode-se perceber a existencia de nítida dicotomía nos posicionamentos dos pesquisadores. Há, por um lado, aqueles que a defendem fortemente como meio de proporcionar melhorias no ensino; e por outro, os que enumeram um sem fim de dificuldades para a sua execução.

Biembengut e Hein apontam que o processo de modelagem precisa sofrer modificações nos cursos regulares, com programa a cumprir e estrutura organizacional nos moldes tradicionais. A pesquisa de Barbosa (2007a) revela dificuldades relacionadas ao aluno, à escola e ao professor na implementação da Modelagem Matemática, como metodología de ensino.

Beltrão (2010) leva em conta defesas, argumentações, espaços criados e dificuldades apontadas dessas pesquisas e apresenta seus meios para enfrentar obstáculos previstos, e para construir uma alternativa de uso dessa abordagem para o ensino de Cálculo. É o que se relata de forma resumida no ítem 4 deste artigo.

4. Procedimentos adotados na investigação empírica

Neste ítem apresentam-se, em síntese, os procedimentos adotados na investigação empírica de utilização de Modelagem Matemática e Aplicações no ensino de Cálculo.

As justificativas para esta investigação estão nas reflexões tratadas no *14º ICMI Study* relativamente ao tema – Modelagem em diferentes níveis de ensino – às quais envolveram estudiosos de nove países. Ou sejam, trata-se de se considerar a Modelagem Matemática como uma forma de minimizar a grande lacuna que separa a realidade e a Matemática; que permite aos alunos utilizar experiências da vida cotidiana para compreender Matemática, equivalendo a um atalho para compreender o mundo real; que é importante em todos os níveis de ensino, uma vez que desenvolve o pensamento crítico e enseja que os cidadãos tomem posição sobre a realidade que os circunda. Nessa perspectiva, entende-se por "Modelagem", a situação que parte da realidade para chegar à Matemática. É como se estivéssemos perguntando: "Onde posso encontrar alguma matemática para que me ajude com este problema?" Ou seja, a Modelagem visa a compreender ou resolver problemas em algum segmento do mundo real.

O termo "Aplicação" refere-se à situação contrária, isto é, parte da Matemática para se chegar à realidade. Agora a pergunta é: “conhecendo tópico(s) da matemática, onde poderei usá-la?”. Ganham relevo as partes do mundo real acessíveis a um tratamento matemático para as quais já existem modelos matemáticos.

O termo “problema” é usado em sentido amplo, compreendendo não apenas os de ordem prática, mas ainda os de natureza intelectual, inclusive os que se relacionam às disciplinas científicas.

O termo “aplicações na resolução de problemas” admite uma variedade de interpretações. Às vezes, é utilizado para designar os processos envolvidos ao ser necessário resolver um problema do mundo. Nesse sentido, é apenas outro termo para a Modelagem. No entanto, é frequênte vê-lo usado na resolução de problemas com qualquer tipo de atividades extramatemáticas em um contexto artificial.

O “mundo real”, mundo em que vivemos, é sinônimo de tudo o que concerne à natureza, sociedade e cultura, incluindo a vida cotidiana. O domínio extramatemático, que será relevante para as nossas considerações, envolverá um subconjunto desse mundo real.

Para o desenvolvimento da pesquisa inicialmente refletiu-se a respeito do papel desempenhado pelas Aplicações e Modelagem no ensino. Niss, Blum e Galbraith (2007), destacam duas categorias de respostas e duas orientações diferentes as quais dependem dos objetivos e dos meios. A primeira aborda "Aplicações e modelos para a aprendizagem da Matemática", e o argumento a que recorre consiste em fazer com que os alunos compreendam que a Matemática está realmente sendo usada por pessoas fora da Matemática, fazendo-os perceber uma imagem rica da natureza e do papel dessa Ciência, proporcionando significado e interpretação às atividades e às entidades matemáticas. Dessa forma, também é promovida a motivação para se engajarem no estudo da Matemática.

A segunda categoria discute que importa aprender Matemática a fim de desenvolver competências na Aplicação Matemática e na construção de modelos para as áreas e os fins que são basicamente extramatemáticos. O argumento desta vez é equipar os alunos com a capacidade de usar a Matemática para lidar com situações fora da própria Matemática, considerando o fato de seu uso ocorrer por meio de modelos matemáticos e da Modelagem.

Entende-se que essas duas posições não precisam necessariamente estar disjuntas, mesmo conhecendo a existência de provas da prática e da investigação de que não há transferência automática, ao ter aprendido Matemática puramente teórica, para usá-la em situações que já não tenham sido totalmente matematizadas.

E que há momentos propícios para que o ensino da Matemática contemple ambas as posições, sendo necessário para isso fazer ajustes ou elaborar estratégias.

Entre os vários temas em que foram subdivididas as pesquisas abordando Modelagem e Aplicações, se insere esta pesquisa parcialmente no tema "Aplicações e Modelagem para a Matemática". Justificamos essa inserção em concordância com Eric Muller e Hugh Burkhardt (2007) quando observam que ensinamos e aprendemos Matemática para desenvolver uma ferramenta poderosa de estratégias, conceitos e competências para utilizá-la na resolução de problemas do mundo real e apontam pesquisas desenvolvidas nesse segmento que oferecem boa visão a respeito do assunto. Contudo, é necessário ampliar essa visão, pois as múltiplas conexões essenciais para uma sólida compreensão da Matemática não surgem naturalmente, requerem atividades específicas que as desenvolvam.

Com esses pressupostos passa-se a indicar o posicionamento frente a questões levantadas, e definições para o equacionamento das mesmas.

5. Os elementos da experimentação

A utilização da modelagem como estratégia de ensino transcorreu em uma turma com 25 alunos de um Curso Superior de Tecnologia de Alimentos no decorrer do desenvolvimento regular da disciplina Cálculo Diferencial, com 4 aulas de 50 minutos cada uma, por semana.

No início do proceso a pesquisadora tratou de levar em conta a existência de obstáculos consagrados (falta de conhecimentos prévios, contrato didático tradicional, exigências de cumprimento de programas, falta de apoio institucional, etc); assim como fomentou ideias que a ajudaram a elaborar estratégias que facilitasse o alcance de seu alvo. Ela evitou, por exemplo, a prática de deixar completamente a cargo dos alunos a função de apresentar os fenômenos a serem modelados e/ou os conteúdos matemáticos a serem aplicados.

A pesquisadora teve a preocupação de realizar a mudança de contrato didático tradicional − a professora tem toda a responsabilidade pela aprendizagem− para o contrato em que o aluno participa ativamente de sua aprendizagem, de forma paulatina e discutida. Com isso ela buscaba contemplar exigências institucionais de modo a não deixar explicítos possíveis conflitos com as práticas tradicionais (para não assustar alunos, autoridades e país). Ou seja ela planejou essa mudança, de modo a convencer os sujeitos envolvidos de que ela traria inovação com melhoria das condições da aprendizagem. Para a instituição e pais o importante era que os alunos apresentassem bons resultados nas avaliações e que a estratégia utilizada favorecesse a formação de egressos capacitados para o trabalho.

Para a pesquisadora o desafio estava em envolver os alunos no processo, já que a disciplina era considerada difícil, apresentava frequentemente altos índices de reprovação, e por isso os alunos iniciavam seu estudo com essa imagem da disciplina, e com receio.

A primeira ação da professora/pesquisadora foi a de realizar uma atividade diagnóstica envolvendo conteúdos da Matemática básica. Os resultados dessa atividade indicaram, como era de se esperar, erros de compreensão e desconhecimento de conteúdos, e portanto a necessidade de retomada de alguns desses conceitos (operações, equações, construção de gráficos no plano cartesiano, entre outros). Essa retomada foi feita tendo como metodología o atendimento individual enfocando em cada caso o erro cometido e/ou falta de conhecimento, e também com a classe toda, com a participação ativa dos alunos. Ainda, durante o processo de modelagem e/ou aplicações, sempre que a professora percebia que alguma dificuldade do ensino básico vinha a se constituir em entrave para a continuidade do trabalho, ela retomava o assunto. Para a pesquisadora era necessário que a escolha, de fenômenos do real a serem modelados ou de conteúdos matemáticos a serem aplicados, não fosse definida por dificuldade dos estudantes com conteúdos básicos, mas sim pela relação com os objetos de estudo do curso. A ação de retomada de conteúdos foi constante e muito produtiva pois, de certa forma, ela tornou os participantes em condições de enfrentar a proposta inovadora.

Na sequência a professora passou a tratar dos conteúdos arrolados na ementa do curso de Cálculo Diferencial (funções; limites, continuidade, derivada). Cada um desses conteúdos foi introduzido por meio de um breve histórico, e da apresentação de alguns exemplos de aplicação. Foram ainda exploradas situações com o auxílio do computador. Essa forma de introdução teve o objetivo de despertar a atenção dos estudantes para o modo como os conceitos matemáticos foram sendo contruídos ao longo do tempo e suas relações com os problemas reais, destacando fenômenos relacionados ao curso e o como eles podem ser expressos pela Matemática (os exemplos eram buscados nas outras disciplinas específicas ao curso). A justificativa dessa ação encontra-se em Barbosa (2001) para o qual as atividades de modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a Matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Ele comenta que, nem Matemática nem modelagem são "fins", mas sim "meios" para questionar a realidade vivida e que isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a Matemática no mundo social, mas que modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. Salienta que é pertinente sublinhar, que necessariamente os alunos não transitam para a dimensão do conhecimento reflexivo, de modo que o professor possui grande responsabilidade para tal.

Após a introdução histórica e a exploração de exemplos a professora faz a abordagem formal com definições, propriedades e exemplos, conforme orientação de livros didáticos selecionados de conformidade com os objetivos do curso. Essa abordagem respondia às exigencias programáticas.

Só então foi proposto ao aluno a busca de fenômenos que podem ser modelados ou situações em que o conteúdo estudado tenha sido aplicado, preferencialmente em sua área de atuação. É quando se dá um retorno à questão: "com essa Matemática aprendida, onde poderei usá-la?".

Essa proposta pode ser efetivada individualmente ou em grupo. Em geral o aluno encontra resposta em artigos científicos, ou em trabalhos desenvolvidos em outras disciplinas. O material assim coletado é discutido, tanto sobre o assunto geral abordado, como principalmente quanto à Matemática nele envolvida.

Ou seja a elaboração de modelos ou as aplicações ocorrem num último momento quando o estudante tomou conhecimento das noções formais, mesmo que de forma introdutória, e vivenciou experiências de modelagem ou de aplicações elaborados por outros. A formação de conhecimentos prévios da matemática básica foi sendo perseguida em separado, ou no bojo do desenvolvimento do curso, tendo-se por pressuposto que a mesma é fundamental para a exploração de modelos adequados ao curso e exploração de aplicações significativas.

A discussão gera interpretações que apontam o papel da Matemática na constituição daquela situação apresentada e o potencial dessa Ciência para expressá-la.

Foi essencial para o sucesso da utilização das abordagens da Modelagem e Aplicações no ensino esse posicionamento de colocar o aluno em contato com trabalhos já executados antes dele próprio se engajar num processo assemelhado, pois possibilitou a explicitação do fato de que a Matemática efetivamente oferece recursos para resolver problemas reais, e que é possível por meio deles tratar de situações dentro e fora da sua área de trabalho.

Esse primeiro contato com os trabalhos na área específica do curso geralmente surpreende o aluno, na maioria das vezes alheio ao vínculo entre a Matemática e o seu setor de atuação. Dessa forma, considerou-se iniciada a convivência do aluno com situações do real, que podem ser solucionadas com uso de recursos matemáticos. Essa é a fase que se considera das aplicações (o aluno verifica onde a Matemática aprendida foi aplicada). Caminha-se no sentido Matemática-Realidade.

Esses momentos desenvueltos durante o ensino de um determnado conceito nominou-se de fases: Fase I, II e III. Destaca-se que as Fases II e III se fundem e as atividades dos estudantes em ambas indicam a necessidade de trabalhar com as abordagens Aplicação e Modelagem de forma conjunta. Em suas ações os alunos tomam contato ora com modelos prontos (Fase II) e buscam a Matemática que os descrevem; e ora eles têm um conteúdo matemático e buscam algo para utilizá-lo, ou um fenômeno relacionado ao curso e necessitam matematizá- lo para compreendê-lo (Fase III). Para eles essas ações resultam na importante descoberta da inserção da Matemática que aprendem nos assuntos relacionados ao curso.

No que segue descreve-se a estratégia utilizada na experirmentação dividindo o desenvolvimento do trabalho nas três fases, destacando-se que, de fato, na prática pode haver fusão entre elas.

Fase I: Nessa fase a professora apresenta o conteúdo aos alunos, em três etapas: Na primeira o conteúdo é abordado históricamente; na segunda a professora explora exemplos de aplicação do conteúdo e na terceira etapa o coneúdo recebe um tratamento formal, ou seja com definição, propriedades importantes e outros exemplos significativos.

Fase II: Trata-se da realização de atividades que possibilite ao aluno vivenciar uma experiencia de modelagem ou de aplicação. A professora solicita que o aluno busque em material bibliográfico (que ela pode sugerir) ou com professores de outras diciplinas, situações que envolvam o conteúdo matemático em estudo.

Fase III: É nessa que o aluno vai elaborar situações expressas por modelos ou por aplicações.

6. Ilustração do desenvolimento das fases

Descreve-se a seguir, como ilustração, como se deu o desenvolvimento das fases. Nas etapas da Fase I, das abordagens históricas ou formais, foi utilizada a abordagem tradicional de apresentação de um determinado conteúdo. Ou seja, foi utilizada a forma de aula expositiva, em que a professora/pesquisadora discorre sobre o assunto buscando a comunicação com seus alunos por meio de perguntas, e discussão das respostas apresentadas. São efetivados exercício de aplicação, leitura de textos etc. E além disso, em atendimento individual, são retomados o estudo de conhecimentos considerados prévios e necessários para o trabalho de modelagem ou de aplicação.

Para o caso do estudo do conceito de função, por exemplo, nessa fase definiu-se ese conceito, formalmente, como uma relação entre dois conjuntos, de tal modo que, a cada elemento do primeiro conjunto associa-se um único elemento do segundo.

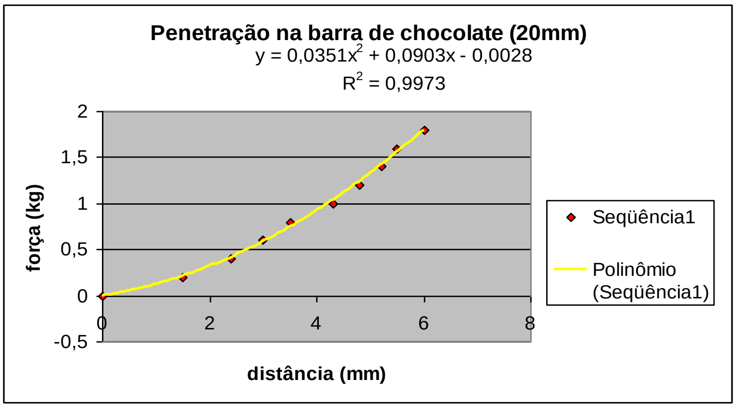
Houve exploração das representações gráfica e algébrica, e estudadas as funções elementares: polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítimicas.

Na segunda etapa da Fase 1, aquela em que a professora motiva os alunos, e explora aplicações do conteúdo em estudo, no o conceito de função, a professora trouxe o Penetrômetro (Figura 1).

O Penetrômetro é um instrumento que apresenta o resultado da medição da força de penetração de um cilindro ou agulha num determinado produto, em função da distância dessa penetração. Esse instrumento é utilizado para medir essa relação em alimentos como margarina, manteiga, queijos, barras de chocolate, gelatinas, geléias, maionese, enfim, alimentos de alta viscosidade e também para algumas frutas como maçã, pêra, pêssego, mamão etc. A função que aparecer é a que associa a cada medida de força empregada pelo penetrômetro (em kg) a distância de penetração (em mm). A professora ilustrou sua apresentação mostrando o que consta da Figura 1 e do Quadro 1.

A função que consta do Quadro 1 é a polinomial do 2º grau, conhecida dos alunos. A expressão algébrica dessa função : $y = 0{,}0351x^2 + 0{,}093\ x + 0{,}0028$ foi explorada para indicar a relação força de penetração e distancia.

Figura 1



Quadro 1

Fase II: Nessa fase a apresentação de aplicações ou modelo de fenômenos estava a cargo dos alunos. Como ilsutração apresenta-se um dos trabalhos que um grupo de alunos trouxe para a sala de aula. Trata-se de dados coletados em uma pesquisa sobre a fermentação láctea produzida por microorganismos inoculados no leite. Esses dados constavam de um artigo científico escrito por uma professora de outra materia do curso, cuja identidade não foi apresentada.

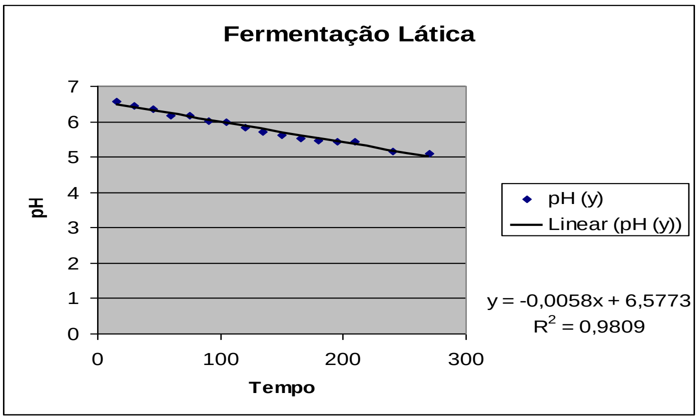
Os alunos informaram à classe que o procedimento de fermentação láctea é essencial na fabricação de iogurtes, e portanto a situação apresentada despertou o interesse da sala, pois estava bem relacionado ao curso. E que os dados foram obtidos após a inoculação dos microrganismos Streptococcus thermophilus e Lactobacillus Bulgaricus no leite. E ainda que durante a produção de ácido lático foram medidos os pHs em duplicata, em intervalo de tempo de 15 minutos.

Os dados por eles apresentados constam da Tabela 1:

DADOS DA PRODUÇÃO DE ÁCIDO LÁTICO EM DUPLICATA		
Tempo(min.)	pH 1	pH 2
15	6,56	6,52
30	6,45	6,34
45	6,36	6,23
60	6,18	6,14
75	6,17	6,00
90	6,01	5,81
105	6,00	5,62
120	5,82	5,60
135	5,72	5,52
150	5,63	5,48
165	5,54	5,46
180	5,45	5,42
195	5,44	5,35
210	5,43	5,30
225	5,17	5,19

Tabela 1

A partir desses dados os alunos obtiveram o gráfico (Quadro 2), por meio do qual foi possível a eles perceber a relação funcional entre as duas variáveis: fermentação lática, considerando o tempo em minutos, e média dos pHs obtidos em cada leitura.



Quadro 2

Eles destacaram a expressão algébrica da função afim: $Y = -0{,}0058x + 6{,}5773$ (1), e indicaram, para a classe, que essa expressão tornava possível realizar previsões. Como exemplo desse fato eles apresentaram um problema, assim enunciado: Se se deseja que um iogurte tenha pH 4,6, qual o tempo ideal de fermentação lática? Resolveram com a classe o problema, substituindo Y = 4, 6 em (1) e resolvendo a equação do 1º grau: $4{,}6 = -0{,}0058t + 6{,}5773$4. A solução foi em t ≅ 341 minutos tem-se o tempo ideal procurado.

A Fase II foi desenvolvida na forma de seminário e as informações eran socializadas entre todos os alunos da classe. A participação dos estudantes foi significativa, e eles apresentavam sugestões e dúvidas. Houve alunos que perceberam que a expressão algébrica da função era a expressão de uma reta, mas que o gráfico do Quadro 2 não era "exatamente" uma reta. A professora discutiu com eles a ideia do modelo frente ao real.

Fase III: No curso de tecnologia de alimentos é dada grande ênfase às questões ligadas às embalagens, de maneira geral. Elas são responsáveis tanto pela proteção quanto pela divulgação comercial do produto. Portanto, torna-se especialmente recomendável que uma embalagem seja analisada tanto do ponto de vista de proteção ao produto, garantindo-lhe uma boa vida de prateleira quanto a comercialização do produto, não esquecendo, contudo na economia do material gasto nessas embalagens, para que haja menor custo e menor impacto ambiental.

Por ese motivo varios alunos trabalharam com essa problemática nessa Fase III.

Uma aluna, por exemplo, trouxe uma situação (procurada sem a participação da professora) que trata do redimensionamento de embalagens de produtos encontrados no mercado. O objetivo era o de redimensionar algumas embalagens, de forma a encontrar uma forma mais econômica, sem modificar as dimensões originais do produto embalado. Ao reduzir as dimensões da embalagem diminui-se os custos e resíduos sólidos, que é ponto fundamental para o meio ambiente. O exemplo refere-se ao caso dos hamburgueres da marca “Sadia”

Conservando as dimensões e pesos dos hambúrgueres, foram feitas duas tentativas de novos formatos das embalagens: a primeira empilhando-os e acondicionando-os em uma embalagem cilíndrica, e a segunda empilhando-os e acondicionando em uma embalagem de base quadrada. Analisou-se o porcentual de redução de cada opção e sugerimos a mais econômica.

As funções trabalhadas nesse exemplo foram aquelas que permitiam calcular:

- A área total da embalagem original;
- A área total de cada nova embalagem;
- A porcentagem de redução, proporcionado pela nova embalagem;
- A área total que ficariam as embalagens secundárias após a redução da área primária;
- O alvo era apresentar sugestão para a embalagem com menor custo e menor resíduo sólido.

O trabalho da aluna é descrito de forma a indicar como foi apresentado à classe.

Situação do real: dimensionamento de embalagens de hamburges com vistas a diminuir custos.

1. Embalagem original: caixa retangular de dimensões:

$a = 20{,}8\ cm \qquad b = 10{,}5\ cm \qquad h = 5{,}9\ cm$

2. Área Total da embalagem:

$$At = (a \times b) + (a \times b) + [(2 \times a \times h) + (2 \times b \times h)]$$

$$At = (20{,}8 \times 10{,}5) + (20{,}8 \times 10{,}5) + [(2 \times 20{,}8 \times 5{,}9) + (2 \times 10{,}5 \times 5{,}9)$$

$$At = 218{,}4 + 218{,}4 + 245{,}4 + 123{,}9$$

$$At = 806{,}1\ cm^2$$

3. Dimensão dos hamburgers:

$R_{hamburguer} = 4{,}8cm$
$h_{hamburguer} = 0{,}8\ cm$

Quantidade de hamburges por caixa = 12

Estudo do redimensinamento da embalagem

Dimensões do espaço ocupado por um hamburger

$h_{empilhdos} = 0{,}8x12 = 9{,}6cm$

$a_{ocupado} = 9{,}6cm$ $b_{ocupado} = 2x4{,}8 = 9{,}6cm$ $h_{ocupado} = 9{,}6cm$

Estudo de uma embalagem cilíndrica tomando-se para raio e altura as dimensões do hamburger:

Área total

$$At = 2 \times \pi \times R^2 + 2 \times \pi \times R \times h$$

$$At = 2 \times \pi \times 4{,}8^2 + 2 \times \pi \times 4{,}8 \times 9{,}6$$

$At = 144{,}8 + 289{,}5$

$$At = 434{,}3\ cm^2$$

Redução do material da embalagem em Porcentagem

Embalagem original $At = 806{,}1\ cm^2$

Embalagem cilíndrica $At = 434{,}3\ cm^2$

Representa uma economia de 46,1%

Para uma embalagem de base quadrada

Área total do cubo $At = 6 \times a^2$

$At = 6 \times 9{,}6^2$

$$At = 553{,}0\ cm^2$$

Redução em Porcentagem

Embalagem original $At = 806{,}1\ cm^2$

Embalagem cúbica $At = 553{,}0\ cm^2$

Representando uma economia de 31,4%

Estudo da economía no caso da embalagem secundária (aquela que vao para o supermercado resultante do empilhamento das caixas. A Figura 2 representa uma embalagem secundária para o caso das caixas retangulares. São feitos 6 blocos de caixas.

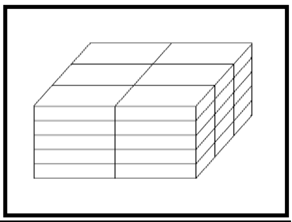


Figura 2. Embalagem Secundária- **disposição da embalagem primária do hambúrguer de carne bovina sadia – 30 embalagens**

Dimensões da Embalagem Secundária original

As arestas da embalagem secundária são obtidas a partir das arestas da caixa retangular, ou seja a primeira aresta é multiplicada por 2, a segunda por 3 e a terceira por 5 resultando: a = 2. (20,8) = 41,6; b=3. (10,5)= 31,5; c= 5. (5,9) = 29,5. E então a área total da elbalagem secundária é:

$$At = 2 \times a \times b + 2 \times a \times h + 2 \times b \times h$$

$$At = (2 \times 41{,}6 \times 31{,}5) + (2 \times 41{,}6 \times 29{,}5) + (2 \times 31{,}5 \times 29{,}5)$$

$$At = 2620{,}8 + 2454{,}4 + 1858{,}5$$

$$At = 6933{,}7\ cm^2$$

Embalagem Secundária para a Embalagem Cilíndrica

Conservam-se as dimensões originais dos hambúrgueres. Assim o formato da embalagem secundária é representado pela Figura 2, com as dimensões

$$a = 19{,}2\ cm$$

$$b = 28{,}8\ cm$$

$$h = 48{,}0\ cm$$

$$At = 2 \times a \times b + 2 \times a \times h + 2 \times b \times h$$

$$At = (2 \times 19{,}2 \times 28{,}8) + (2 \times 19{,}2 \times 48{,}0) + (2 \times 28{,}8 \times 48{,}0)$$

$$At = 1105{,}9 + 1843{,}2 + 2764{,}8$$

$$At = 5713{,}9\ cm^2$$

Economia na embalagem primária: 46,1%

Economia na embalagem secundária: 17,5%

Figura 3. Visualização das embalagens antes e depois. Hambúrguer de Carne Bovina Sadia

Observação: A embalagem utilizada pela Sadia é a da caixa retangular. A outra embalagem, a cilíndrica, foi construída pela aluna. A Figura 3 é uma fotografía tirada pela aluna.

O estudo desenvolvido por meio de substituição de valores em expressões funcionais levou a aluna demonstrar que é possível reduzir significativamente os custos e os resíduos sólidos de uma embalagem, fatores altamente relevantes para o fabricante, para o consumidor e principalmente para o meio ambiente.

7. Considerações finais

O ensino da Matemática utlizando Modelagem e Aplicações tem seu início desde finais do século XIX com as posições de Felix Klein.

Embora muito já tenha sido pesquisado até hoje sobre essa abordagem para o ensino, inúmeros entraves têm impedido os reflexos positivos esperados na prática. As pesquisas apontam benefícios, contudo alertam a respeito dos obstáculos arrolados pelos professores que impedem a prática efetiva dessa abordagem.

Esta investigação, não diferentemente das outras, também teve seus momentos difíceis, inherentes à prática docente em geral. Mas apesar disso possibilitou a constatação de que a Modelagem Matemática juntamente com as Aplicações é uma forma profícua de abordagem para o ensino de Cálculo, e que os entraves apontados podem ser enfrentados. Pode-se responder as questões:

O uso das Aplicações e Modelagem Matemática são abordagens que possibilitam explorar os conteúdos de Cálculo de modo significativo num curso de Tecnologia em Alimentos, de modo a contemplar as necessidades formativas dos egressos desse curso? Ou,

Seria viável utilizar as abordagens da Modelagem Matemática e Aplicações com uma ementa a ser cumprida em um espaço de tempo tão curto?

É possível utilizar essa abordagem, com os conteúdos mencionados, tendo em vista os resultados das atividades de sondagem inicial que apontam grande defasagem dos estudantes relativamente aos conhecimentos prévios de conteúdos básicos? Ou,

Como podem ser introduzidas com êxito as abordagens a respeito da Modelagem em um programa escolar conservador?

Após um longo percurso de leituras, trabalhos, observações, tentativas, adaptações, concluiu-se que havia necessidade de se levar em conta:

- o diagnóstico representando o perfil do aluno em relação aos conhecimentos prévios;
- os trabalhos que os alunos apresentam *a posteriori*;
- o baixo índice de reprovação compilado desde a implantação do curso;

Foi essencial para o sucesso da utilização das abordagens da Modelagem e Aplicações no ensino de Cálculo o posicionamento de colocar o aluno em contato com trabalhos já executados, antes dele próprio se engajar num processo assemelhado, pois possibilitou a explicitação do fato de que a Matemática efetivamente oferece recursos para resolver problemas reais, e que é possível por meio deles tratar de situações dentro e fora da sua área de trabalho.

A necessidade de oferecer ao aluno condições tecnológicas, como o uso da informática, foi fundamental para a evolução do aluno em relação aos conhecimentos matemáticos, como também promover sua desenvoltura em relação aos problemas pertinentes à sua área de trabalho.

Ao final pode-se responder que:

- O uso das Aplicações e Modelagem Matemática possibilita explorar os conteúdos de Cálculo, de modo significativo, num curso de Tecnologia em

Alimentos, de modo a contemplar as necessidades formativas dos egressos desse curso;

- É possível utilizar as abordagens da Modelagem Matemática e Aplicações num contexto em que há um programa a ser cumprido em um espaço de tempo definido;

- É possível utilizar essa abordagem, com os conteúdos mencionados, tendo em vista os resultados das atividades de sondagem inicial que apontam grande defasagem dos estudantes relativamente aos conhecimentos prévios de conteúdos básicos.

A estratégia de trabalho em fases favoreceu o enfrentamento de entraves (ementa pré-fixada, programa a cumprir num espaço de tempo curto, exigências de bom aproveitamento) e possibilitou explorar a contento os conteúdos previstos. O contato antecipado com trabalhos de modelagem e aplicações favoreceu o envolvimento dos estudantes na realização de suas próprias investigações quando ele se tornava o centro das atividades pedagógicas. Os estudos em literatura de modelos ou aplicações, ou as experiências vivenciadas pelos estudantes foram propícios para estabelecer entrosamento desejável com as disciplinas específicas do curso.

Bibliografia

Barbosa, J.C. (2004). Modelagem Matemática em cursos para não-matemáticos. In CURY, H. N. (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos e propostas*, 63-83. Porto Alegre, EDIPUCRS.

Barbosa, J. C. (2007). A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática. In Barbosa, J.C. *et al*, (org.) *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.* Recife-SBEM.

Bassanezi, R.C. (2004). Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática – uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S.; Favere, J.; Vieira, E. M. (2005). Considerações Históricas sobre a Modelagem Matemática no Ensino Brasileiro. In *Anais ULBRA.* Canoas.

Brandrão, M.E.P. (2009). Ensino de Cálculo pela Modelagem Matemática e Aplicações. Teoria e Prática. Tese de doutorado. PUC-SP.

Caraça, B.J. (1963). Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Livraria Sá da Costa. 4ª Edição.

D'Ambrosio, U. (2000). Educação Matemática da teoria a prática. Campinas. SP. Ed. Papirus.

D'Ambrosio, U. (2001). Transdisciplinaridade. 1997. 2.ed. São Paulo: Ed. Palas Athena.

Dorow, K. C.; Biembengut, M. S. (2005). Mapeamento das Pesquisas sobre Modelagem Matemática no Ensino Brasileiro: análise das dissertações e teses desenvolvidas no Brasil. – Projeto – CNPq.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Klein, F. Elementar Mathematik von höheren Standpunkt aus.1924-28, Berlim. Trad. castelhana Roberto Araújo: *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (s.d).

Niss, M., Blum, W., Galbraith, P. (2007) Introduction. In: Blum, W. *et al.* (ed.) *Modelling and Applications in Mathematics Education - the* 14^{th} *ICMI Study.* 3-29 New York: Springer.

Pires, R.C. (2006). A presença de Nicolás Bourbaki na Universidade de São Paulo. Tese de doutorado. PUC-SP.

Pollak, H. (2007). A conversation with Henry Pollak. In: Blum, W. *et al.* (ed.) *Modelling and Applications in Mathematics Education - the* 14^{th} *ICMI Study.* 109-122. New York: Springer.

Silveira, E. (2007). Modelagem Matemática em Educação Matemática no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná.

Autores: 1.Sonia Barbosa Camargo Igliori é professora do Programa de Pós graduação em Educação Matemática da PUC-SP. É doutora em Matemática pela PUC-SP e realizou pós-doutorado em Didática da Matemática, durante 1 ano, na Université Paris VII com a supervisão de Michèle Artigue. Orientou até 2011 3 teses de doutorado e mais de 30 dissertações de mestrado.
2. Maria Eli Puga Beltrão. É doutora em Educação Matemática pela PUC-SP e coordenadora do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Atibaia, atuando também como professora de Cálculo e Geometria Analítica nos cursos de Engenharia e Licenciatura em Matemática. O artigo é resultante de sua tese de doutorado.