REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN: 1815-0640
Año XVI - Número 59. Agosto 2020
Páginas 227-251

http://www.fisem.org/www/index.php
https://union.fespm.es/index.php/UNION

Engenharia Didática e a sequência de Padovan e Tridovan: uma análise preliminar e *a priori*

Renata Passos Machado Vieira, Francisco Regis Vieira Alves

Fecha de recepción: 20/05/2019
Fecha de aceptación: 28/08/2020

Resumen	En este trabajo se presenta un enfoque didáctico matemático, a través de la Ingeniería Didáctica, en un contexto del objeto de estudio de la Secuencia de Padovan y su extensión Tridovan. Además, se utilizan sus dos primeras fases, presentando un análisis didáctico y epistemológico durante la primera fase. Durante la segunda fase, se presentan posibles comportamientos de los estudiantes, guiados por la Teoría de las situaciones didácticas, al elaborar y analizar tres situaciones problemáticas propuestas, que se pueden aplicar en los cursos iniciales de capacitación docente. **Palabras clave**: Didáctica matemática, Ingeniería Didáctica, Enseñanza, Secuencia de Padovan, Teoría de las Situaciones Didácticas, Tridovan.
Abstract	This work presents a mathematical didactic approach, through Didactic Engineering, in a context of the object of study of the Padovan Sequence and its extension Tridovan. In addition, its first two phases are used, presenting a didactic and epistemological analysis during the first phase. During the second phase, possible student behaviors are presented, guided by the Theory of Didactic Situations, when elaborating and analyzing three proposed problem situations, which can be applied in initial teacher training courses. **Keywords**: Mathematical didactics, Teaching Engineering, Teaching, Sequence of Padovan, Theory of Teaching Situations, Tridovan.
Resumo	Neste trabalho é apresentada uma abordagem didática matemática, por meio da Engenharia Didática, num contexto do objeto de estudo da Sequência de Padovan e da sua extensão Tridovan. Ademais, utiliza-se as suas duas primeiras fases, apresentando uma análise didática e epistemológica durante a primeira fase. Durante a segunda fase, são apresentados possíveis comportamentos dos alunos, orientados pela Teoria das Situações Didáticas, ao elaborar e analisar três situações-problema propostas, podendo serem aplicadas em cursos de formação inicial de professores. **Palavras-chave:** Didática matemática, Engenharia Didática, Ensino, Sequência de Padovan, Teoria das Situações Didáticas, Tridovan.

1. Introdução

Nas últimas décadas, constatou-se a contribuição de um recurso investigativo, de origem francesa em Didática de Matemática, em que, introduzido por uma demarcação epistemológica e de um estudo das relações vivenciadas em ambientes de sala de aula, pode-se atingir uma metodologia de pesquisa, com o viés de ocasionar um progresso evolutivo para o ensino de matemática dos alunos envolvidos.

Embora o foco esteja no professor, mas é bom enfatizar a importância do aluno, visto que este também é colocado no centro do processo de aprendizagem, cabendo ao docente guiá-lo de forma correta para determinadas situações-problemas a serem resolvidas. Segundo Brousseau (1986a), os comportamentos dos docentes esperados pelos discentes e os comportamentos dos discentes esperados pelos docentes são semelhantes a um contrato, tornando-se um sistema de responsabilidades entre as partes, objetivando resgatar o entendimento.

Com isso, constata-se a existência, atualmente, de obstáculos oriundos de professores, relativos à transmissão de conhecimentos matemáticos, em que verifica-se uma vasta quantidade de pesquisas inacabadas, ocasionando uma dificuldade no decorrer do procedimento de ensino e aprendizagem abordados em classe.

Desse modo, visando obter a identificação da escassez de trabalhos em torno do ensino da Sequência de Padovan, principalmente em cursos de formação inicial de professores, propõe-se a utilização da Engenharia Didática, sendo um tema relacionado ao processo matemático dessa sequência e a sua extensão, denominada neste trabalho de Tridovan, onde a sua investigação e o seu estudo são realizados a partir de propriedades matemáticas da Sequência de Fibonacci (Alves, 2016a) sobre os números inteiros (Santos & Alves, 2017).

Visando justificar a relevância dessa discussão, sugere-se pesquisas acadêmicas utilizando esta sequência, para que determinados conteúdos, muitas vezes negligenciados em livros de História da Matemática, sejam integrados em cursos de Licenciatura em Matemática, para vislumbrar um melhor funcionamento da sala de aula. Tal assunto anteposto foi descoberto por matemáticos do passado e, vislumbrando uma pesquisa atual confirmada pelo o seu caráter de estar presente no dia-a-dia, é então equiparável somente aos números de Fibonacci.

Doravante, serão abordados um pouco da origem da Engenharia Didática, o processo histórico da Sequência de Padovan, fundamentada em suas duas primeiras fases da Engenharia Didática, onde durante a análise preliminar é realizada uma análise didática e epistemológica do conteúdo. Na análise a priori, realiza-se uma investigação do contexto, objetivo e hipóteses dos alunos, orientados pela Teoria das Situações Didáticas, possibilitando os alunos apresentarem resultados de três situações didáticas dos números de Padovan, baseadas em trabalhos de Vieira e Alves (2018; 2019), Alves (2015), Ferreira (2015), Jesus (2011) e Sokhuma (2013).

No trabalho de Vieira e Alves (2018), é apresentado o objeto de estudo referente à Sequência de Padovan, não utilizando assim metodologias de pesquisa e ensino, abordando somente o conteúdo na área de matemática pura, generalizando os seus termos iniciais da sequência. Porém, neste presente estudo, trataremos um caso da extensão dessa mesma sequência, aumentando a sua ordem e, não generalizando os valores iniciais. É ainda selecionada uma metodologia de pesquisa e outra de ensino, visando explorar o processo de aprendizagem dos números de Padovan, para uma possível aplicação.

Partindo dos estudos realizados sobre a extensão da Sequência de Fibonacci, constituiu-se a problemática que norteou esta pesquisa: *De modo similar como acontece com a Sequência de Fibonacci, é possível realizar a extensão da Sequência de Padovan? Existe algum meio de obter os números desta sequência estendida sem necessitar conhecer os termos anteriores?*

Contudo, levando em consideração uma discussão das fases iniciais de uma Engenharia Didática, conhecida na literatura como análise preliminar e análise a priori, serão abordadas três situações-problema que trabalham a Sequência de Padovan, partindo do pressuposto que haja conhecimento da Sequência de Fibonacci, e assim conhecer a extensão de Padovan. Com tudo, discute-se a epistemologia, permitindo uma melhor compreensão de conceitos de sequências, descrevendo os elementos teóricos que constituem o fio condutor para nossa Engenharia Didática.

2. A metodologia de pesquisa, Engenharia Didática e a metodologia de ensino, Teoria das Situações Didáticas

Durante o século XIX, houve uma certa preocupação com a composição dos docentes em matemática, dando origem, na década de 80, a criação de centros universitários na França, com o viés de aprimorar a esquematização de ensino, resultando no surgimento da Engenharia Didática. Objetivando pesquisar situações didáticas voltadas ao ensino, o termo Engenharia Didática foi definido por Laborde (1995), como sendo um agrupamento de sequências com o viés de desenvolver um plano de aprendizagem voltado aos alunos.

A Engenharia Didática, na visão de Artigue (1988), possui a sua forma de trabalho comparada ao de um engenheiro, em que, para desenvolver um projeto, apoiando-se nos conhecimentos científicos de seu controle, mas, ao mesmo tempo, obriga-se a trabalhar com objetos em que apresentam uma maior inquietude do que os existentes na ciência. Diante desta metodologia aplicada no ambiente da sala de aula, Joshua & Dupin relatam:

> “Isto conduz a uma abordagem didática que deverá se opor àquela que se revela a partir de uma pedagogia geral, na medida em que, no último caso, se interessaria pela busca de regras de aprendizagem e de educação que se mostram independentes do conteúdo preciso e visado para o ensino, considerando qualquer conteúdo em geral. Ao menos no caso de disciplinas complexas e altamente estruturadas, como as disciplinas científicas e as Matemáticas, se mostra pouco provável que um conhecimento pertinente possa ser dominado pela compreensão de fenômenos de ensino que deixam de lado os saberes específicos“ (Joshua & Dupin, 1993, p. 3).

Referendados a partir de uma vasta literatura (Artigue, 1984; Haddad, 2012; Laborde, 1997), podemos relatar as clássicas etapas previstas por uma Engenharia Didática: (1) análises preliminares; (2) concepção e análise a priori; (3) experimentação; (4) análise a posteriori e validação. Porém, no presente trabalho aplica-se as duas primeiras fases (Artigue, 1988), com o viés de distinguir a etapa da análise a priori, o momento de descrição e elaboração de situações didáticas voltadas ao ensino de determinadas noções, relacionadas a Sequência de Padovan e Tridovan.

A análise preliminar, é onde será analisada a didática e a epistemologia do conteúdo abordado, identificando as variáveis didáticas potenciais, onde essas serão reveladas e manipuladas nas fases posteriores. A análise a priori, é feito um estudo dos contextos, objetivos e hipóteses dos alunos, determinando como as escolhas realizadas conseguem monitorar os comportamentos dos discentes. A experimentação, coloca-se em execução todo o escopo construído durante as fases anteriores. Na análise a posteriori e validação, será validado se todo o procedimento obteve êxito ou se houve falha em alguma das fases. Ressalta-se que uma abordagem mais profunda dessas etapas da Engenharia Didática é feita por Artigue (1990).

Assim, nestas duas fases, iremos perceber a relevância das situações de ensino, visando permitir aos alunos uma construção do conhecimento matemático, além de modificá-las, realizando modificações oriundas dos professores no momento de aplicação das atividades propostas. Observa-se ainda que, a presença do professor na participação do debate coletivo é fundamental, sendo este instalado a partir das relações entre a tríade (alunos-professor-conhecimento) (Douady, 1995).

A Teoria das Situações Didáticas consiste num metodologia de ensino, a qual o aluno apropria-se dos seus conhecimentos prévios existentes ou em desenvolvimento, instigando a aflorar o seu lado investigativo durante a solução de situações de ensino em matemática. Segundo Brousseau (2000), e a Figura 1:

> "Este esquema tripolar é geralmente associado a uma concepção de ensino em que o professor organiza o conhecimento a ser ensinado em uma série de mensagens a partir das quais o aluno leva o que deve adquirir. Este esquema facilita a determinação dos objetos a serem estudados, o papel dos atores e a atribuição do estudo do ensino às diversas disciplinas. Por exemplo, a matemática é responsável pelo conteúdo, as ciências da comunicação são responsáveis pela tradução em ensaios adaptados, pela pedagogia cognitiva e pela psicologia para compreender e organizar a aquisição e a aprendizagem dos alunos. O objetivo dessas mensagens é essencialmente a aculturação do aluno pela sociedade. É claro que esse esquema não exclui a intervenção de outras disciplinas como complemento para esclarecer algum aspecto do processo, mas esse esquema hierarquiza o impacto que pode ter" (Brousseau, 2000, p. 7).

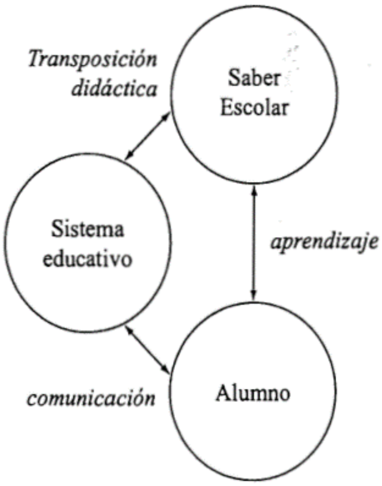

Figura 1. Origem da Teoria das Situações Didáticas.
Fonte: (Brousseau, 2000).

Uma situação, segundo Brousseau (2008) é "um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado, reunindo as circunstâncias nas quais uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao milieu. O Milieu seria subsistema autônomo, antagônico ao sujeito".

As variáveis didáticas podem ser de dois tipos: situação didática e adidática. Em ambas as situações são elaboradas em forma de jogo, porém na primeira o aluno é motivado a participar do processo de aprendizagem, desenvolvendo determinada autonomia. Na outra situação, o discente possui uma estratégia básica para adquirir o conhecimento, conforme as regras do jogo. Na situação adidática a estratégia pedagógica não é revelada ao aluno.

Durante essas situações na Teoria das Situações Didáticas, o docente esclarece os elementos predominantes nas etapas de ensino elaboradas por Brousseau, sendo essas de ação, formulação, validação e institucionalização (Brousseau, 1986b). Definidas por Teixeira e Passos (2013) como:

Situação de ação.

> O aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o milieu, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema (Teixeira & Passos, 2013, p.165).

Nesta etapa, o aluno realiza procedimentos imediatos, segundo os seus conhecimentos prévios, a fim de resolver a situação-problema proposta, apresentando um raciocínio de natureza mais experimental do que teórico.

Situação de formulação, definida por Brousseau (2002) com:

> A formulação consiste em estabelecer progressivamente, uma linguagem que todos possam entender, levando em conta os objetos e as relações

> relevantes da situação de maneira adequada (em outras palavras, permitindo raciocínio e ações úteis). A cada momento, essa linguagem construída é testada do ponto de vista da inteligibilidade, facilidade de construção e o duração das mensagens que permitem trocas. A construção de tal linguagem ou código (repertório, vocabulário, às vezes sintaxe) em uma linguagem comum ou formalizada possibilita a explicação de ações e modelos de ação (Brousseau, 2002, p. 12, tradução nossa)

Neste momento, o aluno apresenta uma estratégia de resolução (seja escrita ou oral) voltada para o conhecimento teórico e mais elaborado, havendo uma formalização da linguagem utilizada habitualmente, visto que os argumentos utilizados serão validados posteriormente. Nesta etapa aparece o professor ou colega.

Situação de validação.

> Os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação didática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador (Teixeira & Passos, 2013, p.165-166).

Na etapa da validação os alunos irão tentar convencer os interlocutores que os seus argumentos utilizados nas resoluções das situações-problema são válidos, validando ainda suas conjecturas através de demonstrações e provas, apropriando-se de uma linguagem mais científica.

Situação de institucionalização, definida por Margolinas (2015), como:

> No entanto, essas situações têm um objetivo de ensinar e transmitir o conhecimento para que o aluno possa estabelecer uma relação entre o conhecimento que encontrou e o conhecimento matemático mais frequentemente designado com antecedência (por currículo e programas) (Margolinas, 2015, p.35, tradução nossa).

Por fim, na última etapa a intenção do professor é revelada aos alunos, havendo conferência das resoluções que foram até então demonstradas para saber se essas estão corretas. Pode-se notar a presença do docente neste período, finalizando assim as quatro fases das situações da Teoria das Situações Didáticas.

As situações devem estimular o conhecimento dos alunos de forma não visível, havendo uma única intenção didática prevista. Algumas vezes, o discente encontra a resposta de maneira fácil, neste caso é mostrado somente o conhecimento, estando ainda em processo de construção o saber. É fundamental que, durante o processo de ensino e aprendizagem, haja interação entre a pessoa que aprende e a que ensina, utilizando materiais didáticos apropriados. Assim, quando um problema é proposto, um dispositivo é acionado para ajudar a resolvê-lo, obedecendo as regras estabelecidas, visando chegar à um caminho correto do resultado. Contudo, segundo Oliveira (2018) "a Teoria das Situações Didáticas serve de fundamentação para a concepção e proposição das situações-problema, que irão compor uma realização didática".

Assim, ressaltamos o significado de realizar uma transposição didática, diante do conteúdo matemático, relacionada à Sequência de Padovan, por intermédioda Engenharia Didática, amparada a Teoria das Situações Didáticas, em cursos de formação inicial de professores. Com isso, realiza-se um estudo teórico do objeto de estudo matemático, visando aprimorar o ensino e aprendizagem e, instigar o pensamento intuitivo e investigativo dos alunos. Trazemos a Tabela 1, como meio de simplificar as fases das duas metodologias aplicadas neste estudo.

Engenharia Didática	Teoria das Situações Didáticas
Conceito: Consiste em uma metodologia de pesquisa com vertente francesa, a qual busca realizar um estudo investigativo, elencando os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática de um determinado objeto de estudo matemático.	Conceito: Metodologia de ensino, visando ressaltar o lado intuitivo e investigativo dos alunos em análise, diante de situações didáticas de ensino. Esta é então dividida em quatro fases: ação, formulação, validação e institucionalização.
Análise preliminar: Realiza-se um levantamento bibliográfico em torno do objeto de estudo, para que sejam discutidas definições e teoremas matemáticos, a fim de aprofundar na etapa seguinte.	Fase da ação: Momento em que o aluno depara-se com a atividade proposta, e com base em seus conhecimentos existentes, busca possíveis resoluções para o problema.
Concepção e análise a priori: Diante do campo epistêmico-matemático estudado na etapa anterior, são elaboradas situações-problema, havendo a necessidade de utilizar uma metodologia de ensino, sendo então selecionada a Teoria das Situações Didáticas.	Fase da formulação: É necessário que os alunos modifiquem a linguagem utilizada, aderindo uma linguagem mais formal.
Experimentação: São realizados os experimentos, devendo ocorrer registros durante a coleta de dados, podendo ser por meio de gravações de áudios, vídeos e entre outros recursos.	Fase da validação: Os alunos irão demonstrar as suas resoluções, através de métodos matemáticos.
Análise a posterior e validação: Nesta fase, os dados apresentados na fase de concepção e análise a priori e na experimentação são confrontados, ocorrendo uma validação, para saber se o objetivo foi alcançado.	Fase da institucionalização: O professor retoma à atividade proposta, revelando a intenção matemática.

Tabela 1. Resumo das fases da Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas.
Fonte: Elaboração dos autores.

3. Análise preliminar

Segundo Artigue (1995), a fase inicial da Engenharia Didática, tem como objetivos: analisar a epistemologia do conteúdo visado no ensino deste trabalho (visto na seção anterior), analisar os entraves no campo de ensino, examinar as concepções e conhecimentos prévios dos alunos, e analisar o ensino atual e seus efeitos. Durante essa fase, o professor necessitará promover uma discussão entre os alunos, onde esses produzirão o próprio conhecimento, estabelecendo domínio com base no conteúdo transmitido em sala de aula. Para isso, deve-se ainda elencar alguns elementos, permitindo prever as ações dos alunos, sendo esses: o estudo da organização matemática e uma observação didática da Sequência de Padovan e Tridovan. Assim, para o primeiro elemento, observa-se a origem dos conceitos matemáticos abordados, compreendendo a sua aplicação e os seus teoremas, os seus obstáculos epistemológicos, entre outros aspectos (Artigue, 1995). Já para o último elemento, nota-se a relevância em analisar os livros de História da Matemática, investigando a abordagem realizada em tal material, identificando os obstáculos epistemológicos, para que seja possível prever o comportamento dos alunos, e diversos outros requisitos.

Uma outra vertente defendida por Almouloud (2007) relata a discussão da abordagem realizada em livros de História da Matemática sobre determinados assuntos, negligenciados por esses livros, ficando fora do currículo visto pelos discentes conteúdos importantes, a exemplo a Sequência de Fibonacci, servindo como um apoio para essa pesquisa em torno da Sequência de Padovan e Tridovan, como uma extensão desses números. Com isso, houve o interesse da objetivação deste assunto, constatando as suas propriedades e percursos de generalizações, tornando-se possível a obtenção da extensão desses números.

Nesse contexto, é possível apontar a existência de obstáculos epistemológicos. Isso faz com que o discente tenha uma maior aprendizagem sobre o conteúdo, visto que irá entender a parte histórica desde o princípio, não apenas sendo mostradas as fórmulas as quais poderão serem utilizadas. Isso mostra ainda que o ensino e aprendizagem do aluno vai além das resoluções dos problemas.

Vale ressaltar que quando uma sequência é adotada de uma maneira generalizada epistemologicamente, com base no conteúdo matemático selecionado, esta deve ser demonstrada em lento processo de avanços e retrocessos (Pais, 2011, p.49). Contudo, o plano pedagógico deve ser bem elaborado, realizando um longo processo de investigação em torno do conteúdo matemático.

Por esse motivo, conclui-se que durante esta fase, o domínio do conteúdo e a experiência do professor, devem ser fundamentais para a elaboração das situações-problema propostas, baseado no conteúdo matemático a ser trabalhado durante a pesquisa. Considerando os limites do trabalho atual, e o amplo estudo investigativo da extensão desta sequência, não serão realizados os exames de concepções prévias dos estudantes. Por outro lado, a partir de alguns estudos investigativos na área, temos o ensino da Sequência de Padovan, dado por meio de definições e conceitos matemáticos, sendo trabalhados nas seções subsequentes com as atividades propostas.

4. O processo histórico da Sequência de Padovan e sua extensão Tridovan

Criado por Richard Padovan (1935 - ?), italiano e arquiteto, a Sequência de Padivan é semelhante aos números de Fibonacci, sendo portanto, aritmética, linear e recorrente (Stewart, 2000). Sendo uma sequência de terceira ordem, temos que os os seus primeiros termos são definidos como $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, possuindo assim os seguintes elementos: 1,1,1,2,2,3,4,5,7,...

Definição 1. A Sequência de Padovan, é definida pela relação de recorrência:

$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$ e onde P_n é o n-ésimo termo da sequência.

Encontra-se uma diferente forma de representar geometricamente essa sequência, dada pelo espiral de Padovan, apresentado na Figura 2. Logo, esse modelo é construído através da adição de triângulos equiláteros, com base no lado de maior tamanho segundo o polígono formado. Iniciando com o triângulo de lado 1, destacado na figura na cor azulada, temos que a construção desse espiral, é dada ao realizar a conexão dos arcos das extremidades do novo triângulo inserido.

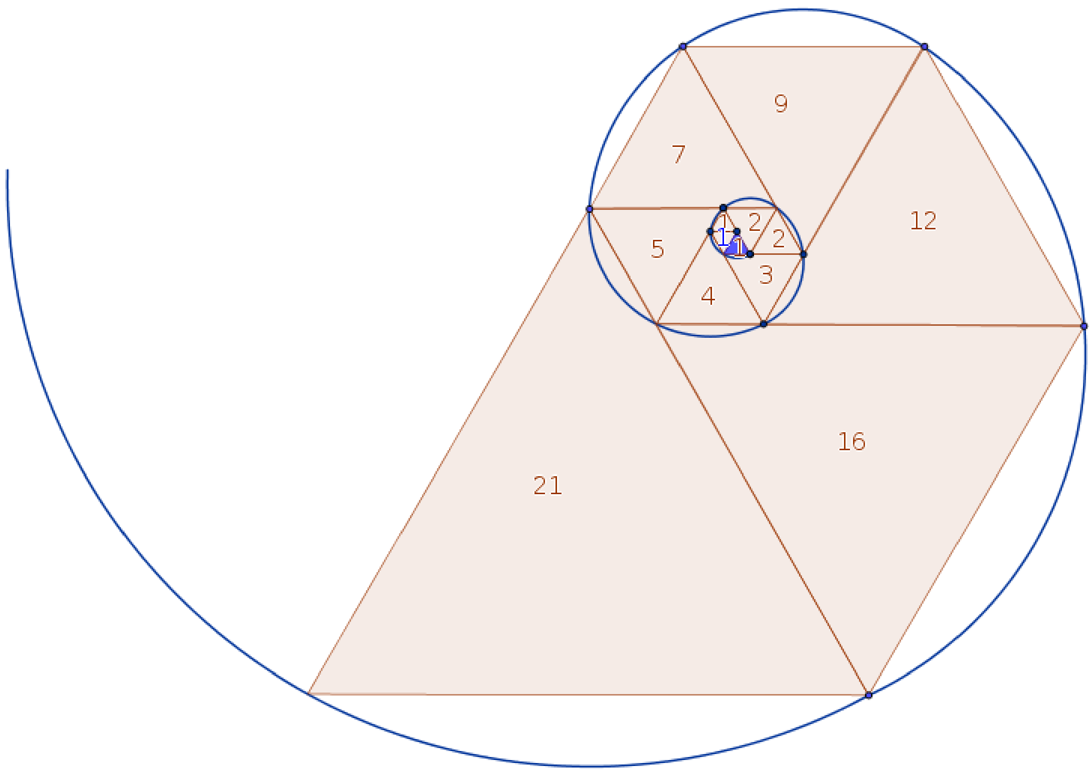

Figura 2. Espiral de Padovan.
Fonte: Elaboração dos autores.

Existe uma forma matricial, matriz geradora, de alcançar os termos de uma sequência linear e recorrente, sem utilizar a sua recursividade, como estudado para Fibonacci (Falcón & Plaza, 2007). Assim, temos que a Sequência de Padovan, por ser de terceira ordem, possui uma matriz de ordem três, que ao elevar-se a n-ésima potência, é capaz de obter os seus elementos da sequência.

Teorema 1. A forma matricial da Sequência de Padovan, com os valores $P_0 = P_1 = 0, P_2 = 1$, é dada por (Sokhuma, 2013; Seenukul & Netmanee, 2015):

Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}, n \geq 3$.

Teorema 2. Alterando os valores iniciais, atrasando um pouco a sequência, temos uma nova matriz, dada por $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$ (Vieira & Alves, 2019):

Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $Q^n = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-2} + P_{n-3} & P_{n-3} + P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix}, n \geq 4$.

Demonstração. Através do primeiro princípio da indução finita, podemos demonstrar este teorema. Assim, tem-se que para n+1:

$$Q^{n+1} = Q^n . Q$$

$$Q^{n+1} = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-2} + P_{n-3} & P_{n-3} + P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (P_{n-1} + P_{n-2}) & P_n & P_{n-1} \\ (P_{n-2} + P_{n-3} + P_{n-3} + P_{n-4}) & (P_{n-1} + P_{n-2}) & (P_{n-2} + P_{n-3}) \\ (P_{n-2} + P_{n-3}) & P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$Q^{n+1} = \begin{bmatrix} P_{(n+1)} & P_{(n+1)-1} & P_{(n+1)-2} \\ (P_{(n+1)-1} + P_{(n+1)-2}) & (P_{(n+1)-2} + P_{(n+1)-3}) & (P_{(n+1)-3} + P_{(n+1)-4}) \\ P_{(n+1)-1} & P_{(n+1)-2} & P_{(n+1)-3} \end{bmatrix}$$

Uma outra maneira de obter os termos de uma sequência, é dado através da obtenção da sua função geradora, permitindo a solução de recorrências lineares cujos os coeficientes sejam constantes (Koshy, 2001).

Teorema 3. Uma função geradora é uma série formal, a qual os seus coeficientes carregam dados sobre uma determinada sequência (a_n) com $n \in \mathbb{N}$, sendo uma função $G(a_n, x)$ definida pela série (Vieira & Alves, 2019):

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n = a_0.x^0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \ldots$$

De modo análogo à Sequência de Fibonacci, temos que para Sequência de Padovan é multiplicada por x^2, x^3 nas equações abaixo, devido o salto existente na sua recorrência definida. Assim, temos que a função geradora de Padovan é dada por:

$$\begin{aligned}
G(P_n, x) &= P_0 + P_1.x + P_2.x^2 + P_3.x^3 + P_4.x^4 + \ldots \\
x^2 G(P_n, x) &= P_0 x^2 + P_1.x^3 + P_2.x^4 + P_3.x^5 + P_4.x^6 + \ldots \\
x^3 G(P_n, x) &= P_0 x^3 + P_1.x^4 + P_2.x^5 + P_3.x^6 + P_4.x^7 + \ldots
\end{aligned}$$

Baseado na equação $G(P_n, x) - [x^2 G(P_n, x) + x^3 G(P_n, x)]$ e assumindo $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) &= P_0 + P_1.x + (P_2 - P_0).x^2 \\
G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) &= 1 \\
G(P_n, x) &= \frac{1}{(1 - x^2 - x^3)}
\end{aligned}$$

$\square$

A seguir, na Figura 3, mostra-se uma descrição com base no trabalho de Huntley (1985), em que é realizada uma divisão direta de $1/(1 - x^2 - x^3)$, obtendo os termos da sequência. Podemos realizar essa divisão, utilizando o *software Maxima*, sendo portanto, um recurso computacional gratuito, desenvolvido para realizar cálculos matemáticos, possibilitando a manipulação de expressões algébricas e plotagem de gráficos (Prado et al., 2008).

(%i1) 1/(1-x^2-x^3);

(%o1) $\frac{1}{-x^3-x^2+1}$

(%i2) taylor(1/(-x^3-x^2+1), x, 0, 70);

(%o2)/T/ $1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+4x^8+5x^9+7x^{10}+9x^{11}+12x^{12}+16x^{13}+21x^{14}+28x^{15}+37x^{16}+49x^{17}+65x^{18}+86x^{19}+114x^{20}+151x^{21}+200x^{22}+265x^{23}+351x^{24}+465x^{25}+616x^{26}+816x^{27}+1081x^{28}+1432x^{29}+1897x^{30}+2513x^{31}+3329x^{32}+4410x^{33}+5842x^{34}+7739x^{35}+10252x^{36}+13581x^{37}+17991x^{38}+23833x^{39}+31572x^{40}+41824x^{41}+55405x^{42}+73396x^{43}+97229x^{44}+128801x^{45}+170625x^{46}+226030x^{47}+299426x^{48}+396655x^{49}+525456x^{50}+696081x^{51}+922111x^{52}+1221537x^{53}+1618192x^{54}+2143648x^{55}+2839729x^{56}+3761840x^{57}+4983377x^{58}+6601569x^{59}+8745217x^{60}+11584946x^{61}+15346786x^{62}+20330163x^{63}+26931732x^{64}+35676949x^{65}+47261895x^{66}+62608681x^{67}+82938844x^{68}+109870576x^{69}+145547525x^{70}+\ldots$

Figura 3. Função Geradora de Sequência de Padovan.
Fonte: Elaboração dos autores.

Teorema 4. Temos ainda outra forma função geradora, baseado no estudo de Ferreira (2015). Assim, considerando $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, tem-se que:

$$G(P_n, x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}$$

De modo análogo, é possível validar a divisão direta desta outra representação da função geradora, por meio do *software Maxima,* conforme mostrado na Figura 4.

(%i1) (1+x)/(1-x^2-x^3);

(%o1) $\frac{x+1}{-x^3-x^2+1}$

(%i2) taylor((x+1)/(-x^3-x^2+1), x, 0, 70);

(%o2)/T/ $1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+7x^8+9x^9+12x^{10}+16x^{11}+21x^{12}+28x^{13}+37x^{14}+49x^{15}+65x^{16}+86x^{17}+114x^{18}+151x^{19}+200x^{20}+265x^{21}+351x^{22}+465x^{23}+616x^{24}+816x^{25}+1081x^{26}+1432x^{27}+1897x^{28}+2513x^{29}+3329x^{30}+4410x^{31}+5842x^{32}+7739x^{33}+10252x^{34}+13581x^{35}+17991x^{36}+23833x^{37}+31572x^{38}+41824x^{39}+55405x^{40}+73396x^{41}+97229x^{42}+128801x^{43}+170625x^{44}+226030x^{45}+299426x^{46}+396655x^{47}+525456x^{48}+696081x^{49}+922111x^{50}+1221537x^{51}+1618192x^{52}+2143648x^{53}+2839729x^{54}+3761840x^{55}+4983377x^{56}+6601569x^{57}+8745217x^{58}+11584946x^{59}+15346786x^{60}+20330163x^{61}+26931732x^{62}+35676949x^{63}+47261895x^{64}+62608681x^{65}+82938844x^{66}+109870576x^{67}+145547525x^{68}+192809420x^{69}+255418101x^{70}+\ldots$

Figura 4. Função Geradora de Sequência de Padovan com valores originais.
Fonte: Elaboração dos autores.

Definição 2. A Sequência de Tridovan, com $T_0 = 1, T_1 = 0, T_2 = T_3 = 1$, é dada pela relação (Vieira & Alves, 2019):

$T_n = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4}, n \geq 4$ e onde T_n é o n-ésimo termo da sequência.

A seguir, é resumida as definições e teoremas matemáticos discutidos nesta seção, ressaltando a construção do campo epistêmico-matemático, ensinado inicialmente por Padovan, assim trazemos a Tabela 2, contendo as informações referentes ao processo de extensão da Sequência de Padovan (Alves, 2016b; 2016c).

Definições e teoremas matemáticos	Descrição
$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$	Descrição da sequência numérica de Padovan. (Richard Padovan)
Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}, n \geq 3$	Matriz geradora da sequência de Padovan (Sokhuma, 2013).
Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $Q^n = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-2} + P_{n-3} & P_{n-3} + P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix}, n \geq 4$	Outra matriz geradora da sequência de Padovan
$G(P_{n,} x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}$, $P_0 = P_1 = P_2 = 1$,	Funções Geradoras da Sequência de Padovan (Ferreira, 2015).
$G(P_{n,} x) = \frac{1}{1-x^2-x^3}$, $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$	Função Geradora da Sequência de Padovan com outros valores de entrada
$T_n = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4}, n \geq 4$	Sequência de Tridovan (Vieira & Alves, 2019)

Tabela 2. Definição epistemológico-evolutiva da Sequência de Padovan.
Fonte: Elaboração dos autores.

Diante disso, serão selecionados alguns elementos, com o viés de realizar um novo processo investigativo, desenvolvendo um esquema de estudo para a Sequência de Padovan, aplicando a metodologia de pesquisa e de ensino, como meio para aflorar o lado investigativo matemático dos discentes.

5. Análise *a priori*

Nesta fase, o docente realizará uma ação de maneira controlada, ocorrendo uma intervenção adequada e no momento oportuno, diante de conseguir obter um olhar mais investigativo dos alunos. Assim, o professor, possuindo o papel de mediador, deverá prever as ações e comportamentos dos alunos, favorecendo ou não a concepção da compreensão, procedendo de maneira simultânea com os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática (Almouloud & Coutinho, 2008).

Alves (2014) destaca ainda que uma situação didática caracteriza-se quando um aluno consegue atingir o sucesso com os seus próprios passos, podendo ser por intermédio de recursos introduzidos pelo professor. Assim, o docente, agindo como mediador, deve prever alguns comportamentos dos estudantes favorecendo o conhecimento lógico matemático. O discente tem a função de perceber a situação-problema elaborada, cabendo ao professor supervisionar as tarefas executadas e medindo a aprendizagem.

Três pontos de extrema importância para a pesquisa, devem ser considerados: descrever as escolhas realizadas no local e comparando-as com a situação didática escolhida; analisar se a situação proposta possui importância para o aluno; prever campos de possíveis comportamentos, tentando demonstrar como esta fase permitirá controlá-los. Nesse sentido o professor/pesquisador deve primeiramente estar convicto das escolhas das variáveis locais, podendo essas sofrer modificações no decorrer do procedimento, e desse modo arquitetar situações-problema para serem aplicadas aos alunos, para que o objetivo traçado seja alcançado.

Nesta fase serão elaboradas situações didáticas de ensino, por meio do conteúdo da Sequência de Padovan e a sua extensão, Tridovan. Com isso, amparada pela Teoria das Situações Didáticas, é papel do professor desvendar os elementos essenciais nas etapas didáticas, sendo essas de: ação, formulação, validação e institucionalização (Brousseau, 1986a).

Segundo Teixeira e Passos (2013), na situação didática de ação o aluno simula tentativas para resolver a atividade proposta; na situação didática de formulação, ocorrerá a troca de informações entre o aluno e o professor intermediador, utilizando uma linguagem mais adequada; na situação didática de validação, os alunos deverão convencer os interlocutores com as suas afirmações encontradas durante a atividade proposta; e na situação didática de institucionalização, as respostas dos alunos e a intenção da atividade proposta é revelada pelo professor.

Vale salientar que no momento das análises preliminares, deve-se acentuar a dimensão epistemológica associada às características do saber em jogo; a dimensão cognitiva, em associação às características cognitivas do sistema de ensino, considerando as variáveis micro-didáticas, sendo essas, responsáveis pela organização da Engenharia Didática.

O professor-pesquisador deve elaborar uma sequência de situações propostas do tipo de questões abertas e/ou fechadas, destacando o campo conceitual que se pretende explorar, além de estarem organizadas de tal modo que os alunos sejam capazes de apresentar soluções. Com isso, devem-se ainda desenvolver habilidades de agir, expressar, refletir e evoluir matematicamente e didaticamente.

Devido ao presente texto apresentar somente duas fases da Engenharia Didática, pode-se notar que a análise a priori é fundamenta com um conjunto de hipótese investigativa, dada em alguns momentos através de recursos tecnológicos (*software Maxima*), permitindo uma melhor visualização e percepção das propriedades abordadas.

Várias hipóteses investigativas são vistas nesta presente etapa, onde podem ser indicadas através de: exploração da matriz geradora de Padovan, para que sejam encontrados os demais números da extensão dessa sequência; aprofundamento da lei de recorrência da Sequência de Padovan, com o viés de calcular a função geradora. Nesta fase não serão respondidos tais questionamentos, ficando ao decurso das próximas seções, entretanto, são passíveis de adaptações visando uma futura experimentação.

6. Concepção e construção de situações didáticas

Durante a escolha das hipóteses, o engenheiro-professor deve envolver o entendimento de ensino e aprendizagem dos alunos. Em relação a este trabalho, nos deparamos com três hipóteses aqui formuladas, em que parte delas possui um caráter investigativo em relação a Sequência de Padovan, com o viés de obter a sua extensão, denominada neste trabalho de Tridovan.

Situação-problema I: Considerando a Sequência de Padovan 1,1,1,2,2,3,4,5,7,... e a sua relação de recorrência, dada por: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$, como podemos escrever a recorrência da sequência de ordem 4 e com os seguintes termos: 1,0,1,1,2,2,4,5,8,11,17,... ?

Situação de ação: Os alunos deverão manifestar uma ação em situação, na condição de que a situação-problema desperte um interesse investigativo, para que se obtenha a recorrência da Sequência de Tridovan. De modo semelhante como ocorre para as extensões de Fibonacci (Alves, 2015), o mesmo deve ser realizado para Padovan, afim de que se obtenha a resposta da problemática acima.

Situação de formulação: Nesta etapa, a troca de informações entre os alunos é indispensável, assim, estes devem perceber que o termo seguinte da nova sequência mostrada, deve ser encontrado através da soma dos três anteriores com um salto, ou seja, 1+0+1 = 2 (5° termo de Tridovan).

Situação de validação: Para validar o que foi pensado na etapa anterior, deve-se escrever matematicamente a fórmula de recorrência, para que consiga alcançar o objetivo da situação-problema I. Assim, os estudantes devem pensar na fórmula semelhante à apresentada para a Sequência de Padovan, escrevendo:

$$T_n = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4}, n \geq 4$$

Situação de institucionalização: Uma vez que ocorre a construção e validação do conhecimento, este terá uma parcela no legado da classe (Almouloud, 2007). O professor poderá valorizar o papel de visualização e comparar esta relação de recorrência de Padovan com a de Fibonacci, para efeito de generalização desta extensão da sequência.

Situação-problema II: Considerando a matriz geradora da Sequência de Padovan (Teorema 2) e a sua recorrência, podemos obter a forma matricial da Sequência de Tridovan?

Situação de ação: Nesta fase, o professor deverá encorajar os alunos para que a obtenção da matriz geradora, a partir da matriz do Teorema 2:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } Q^n = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-2} + P_{n-3} & P_{n-3} + P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix}, n \geq 4 .$$

Situação de formulação: Neste momento, os estudantes deverão construir a matriz geradora de Tridovan, a partir da matriz de Padovan, assumindo os valores iniciais como $T_0 = 1, T_1 = 0, T_2 = T_3 = 1$. Assim, esta matriz pode ser dada por:

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix}, n \geq 3$$

Visando simplificar a forma de visualização dos termos dessa matriz, apresentamos o cálculo dos termos, de modo separado por linhas:

$Q_3^{n+1}(1,1) = T_n$,

$Q_3^{n+1}(1,2) = T_{n-1}$,

$Q_3^{n+1}(1,3) = T_{n-2}$,

$Q_3^{n+1}(1,4) = T_{n-3}$,

$Q_3^{n+1}(2,1) = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$,

$Q_3^{n+1}(2,2) = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4}$,

$Q_3^{n+1}(2,3) = T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-5}$,

$Q_3^{n+1}(2,4) = T_{n-4} + T_{n-5} + T_{n-6}$,

$Q_3^{n+1}(3,1) = T_{n-1} + T_{n-2}$,

$Q_3^{n+1}(3,2) = T_{n-2} + T_{n-3}$,

$Q_3^{n+1}(3,3) = T_{n-3} + T_{n-4}$,

$Q_3^{n+1}(3,4) = T_{n-4} + T_{n-5}$,

$Q_3^{n+1}(4,1) = T_{n-1}$,

$Q_3^{n+1}(4,2) = T_{n-2}$,

$Q_3^{n+1}(4,3) = T_{n-3}$,

$Q_3^{n+1}(4,4) = T_{n-4}$.

Situação de validação: Através do método da indução, os alunos deverão demonstrar a propriedade da matriz geradora de Tridovan.

Demonstração: Utilizando o princípio da indução finita, para validar o teorema da matriz geradora de Tridovan, tem-se que para n+1:

$$Q_3^{n+1} = Q_3^{n}.Q_3^{1}$$

$$Q_3^{n+1} = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix}^n . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada elemento da matriz geradora Q_3^{n+1}, é definido por:

$Q_3^{n+1}(1,1) = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} = T_{n+2}$,

$Q_3^{n+1}(1,2) = T_{n} = T_{(n+1)-1}$,

$Q_3^{n+1}(1,3) = T_{n-1} = T_{(n+1)-2}$,

$Q_3^{n+1}(1,4) = T_{n-2} = T_{(n+1)-3}$,

$Q_3^{n+1}(2,1) = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-5} + T_{n-4} + T_{n-5} + T_{n-6} =$
$T_{n} + T_{n-1} + T_{n-2} = T_{(n+1)-1} + T_{(n+1)-2} + T_{(n+1)-3}$,

$Q_3^{n+1}(2,2) = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} = T_{(n+1)-2} + T_{(n+1)-3} + T_{(n+1)-4}$,

$Q_3^{n+1}(2,3) = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4} = T_{(n+1)-3} + T_{(n+1)-4} + T_{(n+1)-5}$,

$Q_3^{n+1}(2,4) = T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-5} = T_{(n+1)-4} + T_{(n+1)-5} + T_{(n+1)-6}$,

$Q_3^{n+1}(3,1) = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-4} + T_{n-5} = T_{n} + T_{n-1} = T_{(n+1)-1} + T_{(n+1)-2}$,

$Q_3^{n+1}(3,2) = T_{n-1} + T_{n-2} = T_{(n+1)-2} + T_{(n+1)-3}$,

$Q_3^{n+1}(3,3) = T_{n-2} + T_{n-3} = T_{(n+1)-3} + T_{(n+1)-4}$,
$Q_3^{n+1}(3,4) = T_{n-3} + T_{n-4} = T_{(n+1)-4} + T_{(n+1)-5}$,
$Q_3^{n+1}(4,1) = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4} = T_n = T_{(n+1)-1}$,
$Q_3^{n+1}(4,2) = T_{n-1} = T_{(n+1)-2}$,
$Q_3^{n+1}(4,3) = T_{n-2} = T_{(n+1)-3}$,
$Q_3^{n+1}(4,4) = T_{n-3} = T_{(n+1)-4}$.

$\square$

Situação de institucionalização: O conhecimento matemático deverá ser fixado seguindo os rituais acadêmicos. Assim, o processo de demonstração por indução matemática, para provar a matriz geradora da extensão desta sequência deve ser trabalhado, e mostrado aos alunos este meio que permite a obtenção dos termos da sequência, sem necessitar conhecer os outros termos anteriores.

Situação-problema III: Considerando a função geradora de Padovan: $G(P_n, x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3)}$, com valores iniciais $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$ (Teorema 3), assim como a outra maneira $G(P_n, x) = \frac{1+x}{(1 - x^2 - x^3)}$ (Ferreira, 2015), com valores iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ (Teorema 4), encontre a função geradora para a extensão de Padovan, utilizando a recorrência encontrada na situação-problema I.

Situação de ação: O professor repete os procedimentos das ações anteriores, estimulando a discussão dos alunos para obter tais funções, tornando-se possível obter os termos desta extensão da sequência sem a utilização da recorrência.

Situação de formulação: Os alunos deverão discutir os procedimentos realizados nas definições 4 e 5, e atribuí-los na equação abaixo, denominada de $G(T_n, x)$, devido ao fato de ser da extensão de Padovan de ordem 3 (Tridovan):

$$G(T_n, x) = T_0 + T_1.x + T_2.x^2 + T_3.x^3 + T_4.x^4 + \dots$$

De modo semelhante à Sequência de Fibonacci e Padovan, temos que para Tridovan essa função é multiplicada por: x^2, x^3, x^4 nas equações abaixo devido a sua relação de recorrência.

$$G(T_n, x) = T_0 + P_{3(1)}.x + T_2.x^2 + T_3.x^3 + T_4.x^4 + \dots$$
$$x^2 G(T_n, x) = T_0 x^2 + T_1.x^3 + T_2.x^4 + T_3.x^5 + T_4.x^6 + \dots$$
$$x^3 G(T_n, x) = T_0 x^3 + T_1.x^4 + T_2.x^5 + T_3.x^6 + T_4.x^7 + \dots$$
$$x^4 G(T_n, x) = T_0 x^4 + T_1.x^5 + T_2.x^6 + T_3.x^7 + T_4.x^8 + \dots$$

Situação de validação: Como demandado no enunciado, os estudantes precisam obter a função geradora de Tridovan conforme a mostrada abaixo:

$$G(T_n,x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n.x=\frac{1}{(1-x^2-x^3-x^4)}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
G(T_n,x)&=T_0+T_1.x+T_2.x^2+T_3.x^3+T_4.x^4+\ldots\\
x^2G(T_n,x)&=T_0x^2+T_1.x^3+T_2.x^4+T_3.x^5+T_4.x^6+\ldots\\
x^3G(T_n,x)&=T_0x^3+T_1.x^4+T_2.x^5+T_3.x^6+T_4.x^7+\ldots\\
x^4G(T_n,x)&=T_0x^4+T_1.x^5+T_2x^6+T_3.x^7+T_4.x^8+\ldots
\end{aligned}$$

Com base na equação $G(T_n,x)-[x^2G(T_n,x)+x^3G(T_n,x)+x^4G(T_n,x)]$ e assumindo $T_0=1, T_1=0, T_2=1$, temos que:

$$\begin{aligned}
&G(T_n,x)(1-x^2-x^3-x^4)=1\\
&G(T_n,x)=\frac{1}{(1-x^2-x^3-x^4)}
\end{aligned}$$

$\square$

Pode-se ainda verificar a validade desta função encontrada utilizando o *software Maxima*, dessa forma é possível encontrar os coeficientes da função geradora de Tridovan, através da divisão direta, como mostrado na Figura 5.

(%i1) 1/(1-x^2-x^3-x^4);

(%o1) $\frac{1}{-x^4-x^3-x^2+1}$

(%i2) taylor (1/(-x^4-x^3-x^2+1), x, 0, 70);

(%o2)/T/ $1+x^2+x^3+2x^4+2x^5+4x^6+5x^7+8x^8+11x^9+17x^{10}+24x^{11}+36x^{12}+52x^{13}+77x^{14}+112x^{15}+165x^{16}+241x^{17}+354x^{18}+518x^{19}+760x^{20}+1113x^{21}+1632x^{22}+2391x^{23}+3505x^{24}+5136x^{25}+7528x^{26}+11032x^{27}+16169x^{28}+23696x^{29}+34729x^{30}+50897x^{31}+74594x^{32}+109322x^{33}+160220x^{34}+234813x^{35}+344136x^{36}+504355x^{37}+739169x^{38}+1083304x^{39}+1587660x^{40}+2326828x^{41}+3410133x^{42}+4997792x^{43}+7324621x^{44}+10734753x^{45}+15732546x^{46}+23057166x^{47}+33791920x^{48}+49524465x^{49}+72581632x^{50}+106373551x^{51}+155898017x^{52}+228479648x^{53}+334853200x^{54}+490751216x^{55}+719230865x^{56}+1054084064x^{57}+1544835281x^{58}+2264066145x^{59}+3318150210x^{60}+4862985490x^{61}+7127051636x^{62}+10445201845x^{63}+15308187336x^{64}+22435238971x^{65}+32880440817x^{66}+48188628152x^{67}+70623867124x^{68}+103504307940x^{69}+151692936093x^{70}+\ldots$

Figura 5. Função Geradora de Sequência de Tridovan.
Fonte: Elaboração dos autores.

Situação de institucionalização: Tal discussão, dar-se-á recursos para a promoção e compreensão da evolução do modelo matemático estudado, a fim de contribuir com o tema. Observamos, que o papel assumido pelo conhecimento matemático foi amparado pelo modelo computacional, o qual foi utilizado como alternativa de aprimorar a visualização dos coeficientes da função geradora.

7. Elementos oriundos de uma validação da Engenharia Didática

Nesta seção, é realizada a validação das fases anteriores aplicadas, podendo ser interna ou externa. Durante as duas fases iniciais da Engenharia Didática, foram identificadas características referentes aos aspectos históricos, definições e teoremas da sequência estudada, apesar desse objeto de estudo possuir acesso limitado em livros didáticos. Com tudo, as situações-problema elaboradas e discutidas, poderão ser utilizadas em sala de aula, transformando este conteúdo a ser ensinado. Assim, temos que durante a primeira fase, foi realizado um estudo e análise da evolução do procedimento referente à sequência de Padovan. Na segunda fase, foram realizadas produções, comparando-as durante o estudo de tal sequência, podendo ser realizado através de atividades propostas (Laborde, 1997).

Alves e Dias (2017) relatam que a investigação histórica de uma Engenharia Didática proporciona uma prática com foco no entendimento dos fenômenos de ensino-aprendizado, obtendo uma maior aprendizagem dos estudantes. Durante as aulas, para que seja alcançado o objetivo, é crucial que os professores tenham em mente as três fases fundamentais, a saber: preparação, realização da aula e avaliação das etapas predecessoras (Alves & Catarino, 2017).

Por fim, o professor realizará uma discussão com os estudantes, podendo construir uma tabela resumida, constando o progresso da Sequência de Padovan e de Tridovan, baseada na Sequência de Fibonacci, onde foi a partir desta que iniciou o estudo desta sequência numérica, extensão, e o processo de generalização. Assim, a formulação das ideias irá fornecer condições aos alunos para que possam construir uma linguagem compreensível para todos (Almouloud, 2007, p. 38).

É importante notar que, através de investigações referentes Sequência de Fibonacci e Padovan, seja possível obter a Sequência de Tridovan, e assim descobrir novas propriedades relacionadas a esta sequência. Isso se dará através das atividades então propostas e estruturadas neste escrito. A Tabela 3, auxilia o professor, conforme a situação didática, aprimorando o conhecimento dos estudantes (Brousseau, 1986a).

Definições e teoremas matemáticos de Padovan	**Definições e teoremas matemáticos de Tridovan**
$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$ $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ (Richard Padovan)	$T_n = T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4}, n \geq 4$, $T_0 = 1, T_1 = 0, T_2 = T_3 = 1$

$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$, novos valores de entrada: $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$	(Relação de recorrência de Tridovan) (Vieira e Alves, 2019)
Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}, n \geq 3$ (Sokhuma, 2013) Para $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $Q^n = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-2} + P_{n-3} & P_{n-3} + P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix}$, $n \geq 4$ (Sequência de Padovan)	Para $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que $Q_3^n = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix}, n \geq 3$ (Sequência de Tridovan) (Vieira e Alves, 2019)
$G(P_n, x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}, P_0 = P_1 = P_2 = 1$ (Ferreira, 2015) $G(P_n, x) = \frac{1}{1-x^2-x^3}$, $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$	$G(T_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n.x = \frac{1}{(1-x^2-x^3-x^4)}$, $T_0 = 1, T_1 = 0, T_2 = T_3 = 1$ (Sequência de Tridovan) (Vieira e Alves, 2019)

Tabela 3. Simplificação do processo evolutivo e da extensão das definições matemáticas formais oriundas da Sequência de Padovan.
Fonte: Elaboração dos autores.

Antes de concluir, podemos notar que algumas das propriedades estudadas acima podem ser verificadas através de softwares matemáticos, e assim tornar os resultados mais facilmente visualizados pelos estudantes ao praticarem tais atividades. Visto que a função geradora da extensão de Padovan permite calcular os termos da sequência através da sua divisão direta, e assim obter os coeficientes destes resultados como sendo os termos desta sequência (ver Figura 4).

8. Considerações Finais

Neste trabalho, foi praticada uma transposição didática envolvendo as Sequências de Padovan e Tridovan, discutindo os fatores cruciais existentes durante o planejamento e preparação desse processo. Baseado na Sequência de Fibonacci, percebe-se a possibilidade de ocorrer a generalização e extensão de outras sequências numéricas, dando origem a novas propriedades, das quais são negligenciadas nos livros de História da Matemática.

A Engenharia Didática, foi aplicada devido às dificuldades existentes identificados no método ensino e aprendizagem, manifestando um planejamento e modelagem das atuações dos docentes, devendo ainda existir uma importância pelo tratamento de conteúdos matemáticos por parte dos professores. À vista disso, apresentamos a Sequência de Padovan e Tridovan, em que essas não estão presentes em livros de História da Matemática, porém, são consideradas semelhantes aos números de Fibonacci.

Com base na Engenharia Didática, discutimos nas seções anteriores a extensão da Sequência de Padovan, definindo a sua recorrência, matriz geradora e função geradora (Vieira & Alves, 2019; Ferreira, 2015; Sokhuma, 2013). Estas últimas são alternativas que permitem calcular os termos da sequência, sem necessitar conhecer o seu anterior. Assim, foram elaboradas e discutidas três situações-problema, abrangendo algumas propriedades, sendo validadas por passos indutivos matemáticos, além de uma busca histórica e epistemológica, ocorrendo um conhecimento mais complexo em uma disciplina de curso de formação inicial de professores em Matemática, em que apresenta a ementa da disciplina de História da Matemática mais adequada.

Com tudo, temos o objetivo de repassar aos estudantes a compreensão dos processos matemáticos e históricos, devendo ser alcançado por meio das metodologias aplicadas. Os professores deverão informar aos estudantes, em sala de aula, o estado inicial dos conceitos matemáticos, sempre existindo a possibilidade de adaptações e alterações durante a aplicação.

Conclui-se que, o alcance deste estudo, em relação a metodologia de ensino e a de pesquisa, com a teoria das situações didáticas aqui estudadas, foram trabalhadas para que houvesse situações-problema usuais de educação, onde permitem progressos no entendimento dos discentes (Artigue, 2018). Vale salientar que apesar deste trabalho apresentar somente as duas primeiras fases da metodologia de ensino, as outras fases não serão afetadas, visto que essas poderão ser aplicadas posteriormente com os discentes.

Bibliografia

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Almouloud, S., Coutinho, C. Q. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3(1), 62-77.

Alves, F. R. V. (2014). Engenharia didática para o teorema da função implícita: análises preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia,* 7(3), 148-168.

Alves, F. R. V. (2015). Sequência Generalizada de Fibonacci e Relações com o número áureo. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 2(6), 30-36.

Alves, F. R. V. (2016a). Engenharia Didática para generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa,* 18(1), 61-93.

Alves, F. R. V. (2016b). Engenharia Didática no contexto de Transição Complexa do Cálculo: aspectos epistemológicos e metodológicos sobre a noção de integração de funções na variável complexa. *Thema*, 13(1), 47-64.

Alves, F. R. V. (2016c). Didática da Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces da Educação*, 7(21), 131-150.

Alves, F. R. V, Dias, M. A. (2017). Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 12(2), 192-209.

Alves, F. R. V, Catarino, P. M. M. C. (2017). Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercussões para a Formação do Professor de Matemática no Brasil. *Educação Matemática em Revista*, 2(18), 121-137.

Artigue, M. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. (1984). *Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques*, 8(1), 1-38.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. *Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions*, 9.3, 281-308.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 241-286.

Artigue, M. (1995). Ingenieria Didática. In: Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. Gomez, P. *Ingeniéria didática em Educacion Matemática***.** Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica. Cap.4, 33-61.

Artigue, M. (2018). Didáctica de las matemáticas y reproducibilidad. *Educación Matemática*, 30(2), 9-32.

Brousseau, G. (2002). Theory of Didactical Situationsin Mathematics Didactique de Mathématiques, 1970–1990. Mathematics Education Library, 19.

Brousseau, G. (1986a). *Theorisation des phénomènos d´enseignement des mathématiques***.** These détat, Univesité de Bordeaus I.

Brousseau, G. (1986b). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherchesen Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12(1), 5-38.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1-7.

Falcón, S., Plaza, A. (2007). On the fibonacci k-numbers. *Chaos, Solitons & Fractals,* 32(5), 1615-1624.

Ferreira, R. C. (2015). *Números mórficos*. João Pessoa - PB: Universidade Federal da Paraíba – Mestrado Profissional em Matemática.

Haddad, S. (2012). *L´enseignement de L´intégrale en classe terminale de l´enseignement tunisien*. (these de doctorat). Paris: Université Paris VII.

Huntley, H. E. (1985). *A divina proporção***.** Tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília.

Jesus, M. D. N. (2011). *Sucessão de Fibonacci e uma sua generalização*. Projeto Educacional I do Mestrado em Ensino de Matemática no 3° ciclo do Ensino Básico e no Secundário. Faculdade de Ciências e Tecnologia – Universidade de Coimbra.

Joshua, S., Dupin, J. (1993). *Introduction à la Didactiques des Sciences et des Mathématiques.* Paris: Presses Universitaires de France.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley-Interscience.

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *Didaskalia*, 10(1), 97-112.

Magolinas, C. (2015). Situations, savoirs et connaissances...comme lieux de rencontre? *Formation et pratiques d'enseignement en questions*, 19, 31-39.

Oliveira, R. R. de. (2018*). Engenharia didática sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci: relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais.* Fortaleza-CE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática.

Pais, L. C. (2011). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa.* 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Prado, N. V. do et al. (2008). *O Emprego do Software Maxima no apoio ao Ensino da Matemática*. Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Financiadora de Estudos e Projetos, Fundação de Desenvolvimento da Pesquisa e Colégio Estadual Wilson Joffre.

Santos, A. A. S, Alves, F. R. V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Acta Scientiae*, 19(3), 447-465.

Seenukul, S. T. R. S., Netmanee, P. (2015). *Matrices which have similar properties to Padovan Q-Matrix and its generalized relations*. Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology.

Sokhuma, K. (2013). Padovan q-matrix and the generalized relations. *Applied Mathematical Sciences*, 7, 2777-2780.

Stewart, I.(2000). *L´Univers des Nombres.* Paris: Belin pour la Science.

Teixeira, P. J. M., Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *Zetetiké*, 21(39), 155-168.

Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V. (2019). Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. *C. Q. D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 15, 24-40.

Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V. (2018). Sequência de Padovan Afim e as suas propriedades. *Revista Thema*, 15(4), 11269-1276.

Dados dos autores

Vieira, Renata Passos Machado: Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE – Fortaleza/CE, Brasil. Site pessoal: https://www.researchgate.net/profile/Renata_Vieira22. E-mail: re.passosm@gmail.com ORCID: 0000-0002-1966-7097

Alves, Francisco Regis Vieira: Doutor em Educação com ênfase no ensino de Matemática. Professor Titular do Departamento de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE – Fortaleza/CE, Brasil. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ - PQ2, Brasil. Docente do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática PGECM/IFCE. Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática ENCIMA/UFC. Docente do Mestrado Acadêmico em Educação Profissional e Tecnológica PROEPT/IFCE. Site pessoal: https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco/Journal-Articles. E-mail: fregis@ifce.edu.br. ORCID: 000-0003-3710-1561