UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 152-158

El rincón de los problemas
Actividades lúdicas y creación de problemas (2)
Análisis y comentarios

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Sean los conjuntos finitos A y B. A tiene ***n*** *elementos y están relacionados con los elementos de B de modo que a cada uno de* ***p*** *elementos de A* (***p*** < ***n***) *le corresponde dos elementos del conjunto B. Mediante esta correspondencia quedan algunos elementos de A sin correspondiente en B, pero todos los elementos de B son correspondientes de algún elemento de A. ¿Es verdad que el conjunto A tiene* (***n*** – 2***p***) *elementos más que el conjunto B?*

Este problema es una forma de presentar en contexto intra matemático el problema enunciado en el número anterior de UNIÓN, en contexto extra matemático, que a su vez es una generalización de un problema propuesto por Abril, una niña de 6 años, de educación inicial, como parte de un juego con cartas de una baraja incompleta y una cierta cantidad de granos de maíz.

Como anuncié en el número anterior, ahora haré algunos comentarios a la actividad lúdica que dio lugar a los problemas enunciados y también mostraré una manera de responder a la pregunta que se plantea.

En la experiencia lúdica desarrollada espontáneamente con Abril, surgieron varios problemas de matemáticas para educación inicial. A continuación explicito tales problemas, de manera un tanto formal, para hacer algunos análisis y comentarios.

Problema 1: Clasificar los elementos de un conjunto de cartas de una baraja incompleta, según el color predominante en las figuras de una de sus caras.

Problema 2: Dados dos conjuntos de cartas de una baraja, determinar cuál de ellos tiene más cartas, sin contar.

Problema 3: Dados dos conjuntos de cartas de una baraja y habiendo observado que uno de ellos tiene más cartas que el otro, determinar cuántas cartas más tiene, sin contar todas las cartas.

Problema 4: Dados un conjunto de cartas de una baraja y un conjunto de granos de maíz, determinar cuál de los conjuntos tiene más elementos y cuántos son tales elementos adicionales, sin contar todas las cartas ni todos los granos de maíz.

Problema 5: (El propuesto por Abril, aunque – obviamente – no en estos términos). Dados un conjunto de cartas de una baraja y un conjunto de granos de maíz en un recipiente, se colocan dos granos de maíz sobre algunas cartas. Así, no quedan granos de maíz en el recipiente, pero quedan algunas cartas sin granos de maíz. Determinar cuál de los conjuntos tiene más elementos y cuántos son tales elementos adicionales, sin tocar los granos de maíz y sin contar todas las cartas ni todos los granos de maíz.

Antes de hacer un análisis de los problemas mismos, de los conceptos matemáticos, de las proposiciones, de los argumentos y otros objetos matemáticos presentes en los problemas y sus soluciones, haré algunos comentarios generales sobre la experiencia desarrollada con la niña.

Comentarios:

a) Es importante estimular el pensamiento matemático y una actitud positiva hacia la resolución de problemas y hacia las matemáticas, respetando la libertad de los niños y partiendo de las inquietudes de ellos y en general de los estudiantes, cualquiera sea su nivel académico. Algunas muestras de las inquietudes de Abril, que fueron tomadas en cuenta en la experiencia didáctica:
   - *¿Qué es esto, abuelo?*
   - *¡Inventemos un juego!*
   - *Pero yo quiero que jueguen también Preciosa y Lucerito…*
   - *(Abril saca algunas cartas del montoncito de Preciosa para que sea de la misma altura que el montoncito de Lucerito)*
   - *Ya, pero no mires hasta que yo te diga.*
   - *¡NO!. Eso no vale porque ese juego ya lo hemos hecho antes. No vale mover el maíz.*

b) No debe olvidarse que un objetivo fundamental de la educación debe ser desarrollar la autonomía del estudiante (ya lo decía Piaget, refiriéndose a la educación de los niños). Así, debe incentivarse a resolver problemas reflexionando, encontrando razones y yendo más allá de recursos mecánicos. Es fundamental el estímulo de la creatividad del estudiante y en ese sentido el profesor tiene que ser particularmente cuidadoso con las preguntas que le haga. En la experiencia didáctica se estimula a responder preguntas sobre comparación de cantidades sin usar el recurso mecánico del conteo. Cabe destacar que en la niña se nota la tendencia a responder las preguntas usando el conteo, posiblemente por el énfasis a esta actividad que suele darse en los centros de educación inicial; sin embargo, muchas veces el conteo se queda a nivel de "recitar los nombres de los números", con las limitaciones que esto conlleva, además de las inseguridades que puede suscitar si se trata de contar cantidades un tanto grandes. En la experiencia narrada, se incentiva el uso de la correspondencia biunívoca entre conjuntos finitos para determinar si un conjunto tiene o no más elementos que otro. Este es un recurso más general, que tiene un soporte más fuerte en la observación y en la intuición, que está en el fundamento del conteo y que muchas veces en los centros de educación inicial se pone poco énfasis y se pasa directamente a que los niños practiquen mecánicamente el conteo.

Se me ocurren algunas situaciones con preguntas que pueden responderse sin efectuar un conteo:

Situación 1: Un naranjal en plena producción (todas las plantas tienen naranjas)
Pregunta: ¿Qué hay más? ¿Naranjas o plantas de naranja?

Situación 2: Los carritos en buen estado que tiene un niño
Pregunta: ¿Qué hay más? ¿Carritos o ruedas de carritos?

Situación 3: Todas la muñecas de una niña tienen vestidos y algunas tienen más de un vestido para cambiarlas.
Pregunta: ¿La niña tiene más muñecas o más vestidos de muñeca?

Situación 4: Los habitantes de un país y los habitantes del continente en el que está ese país.
Pregunta: ¿Qué hay más? ¿Habitantes en España o habitantes en Europa?

Situación 5: Médicos y pacientes en un hospital
Pregunta: Normalmente ¿hay más médicos o más pacientes en un hospital? ¿Por qué? ¿En qué caso se puede tener una situación crítica?

Evidentemente, no todas las situaciones expuestas puede responderla un niño de 6 años, pero mi conjetura es que responderá las tres primeras y otras similares, relacionadas con su entorno, si es adecuadamente estimulado a pensar en correspondencias biunívocas entre conjuntos y entre un conjunto y un subconjunto de otro conjunto. ¡Es un tema a investigar con más minuciosidad!

c) En la experiencia se observa que la niña admite con naturalidad un error "cometido por ambos" (por ella y el abuelo) al afirmar que Princesa tenía 5 ó 6 cartas más que Lucerito. Se siente acompañada en el error, pero al mismo tiempo convencida de que la respuesta correcta es que Preciosa tiene 9 cartas más que Lucerito. Esta actitud hacia el error es algo que debe tenerse en cuenta en todos los niveles educativos y es un camino para incentivar la estimación, así como para conjeturar y demostrar o rechazar las conjeturas.

d) Otro aspecto interesante, que ya lo recomendaba Polya, es llegar a la solución de un problema resolviendo en el camino problemas más sencillos. Esto contribuye a comprender mejor el problema y a visualizar un camino para resolverlo. La niña resuelve con naturalidad y sin recurrir al conteo, el problema de determinar si Preciosa o Lucerito tiene más cartas, cuando el abuelo le pone muy pocas cartas a ambos. Con el recurso de las "cartas amigas" se facilita el establecimiento de la correspondencia biunívoca entre el conjunto de cartas de Lucerito y un subconjunto propio de las cartas de Preciosa.

Análisis de los objetos matemáticos[1]

1. En la experiencia didáctica, jugando, proponiendo y resolviendo los cinco problemas enunciados, se usó un lenguaje coloquial. Destaco algunas expresiones: tarjetas, cartas, baraja, jugar, inventar, igual, rojo, negro, repartir, más cartas que, contar, no contar todas, más alto que, la misma altura que, exactamente cuántas cartas más, correspondencia, cartas amigas, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, granos de maíz.
2. Todos los problemas son de contexto extra matemático.
3. El entorno matemático en cada caso es la correspondencia biunívoca y el conteo de pocas unidades (digamos hasta diez)
4. La información en cada uno de los problemas está dada por los elementos concretos de los conjuntos considerados (cartas de maíz, granos de maíz). En el caso del problema 5, adicionalmente se tiene una información relacional, que es la asociación de algunas cartas con dos granos de maíz cada una, el agotamiento de los granos de maíz que había en un pocillo y el hecho de haber algunas cartas que no están asociadas a grano de maíz alguno.
5. Los requerimientos varían en cada problema:

   Prob. 1: Clasificar

   Prob. 2: Determinar cuál de dos conjuntos de cartas considerados tiene más elementos.

   Prob. 3: Determinar cuántas cartas más tiene un conjunto de cartas, respecto a otro.

   Prob. 4 y Prob. 5: Determinar qué hay más ¿cartas o granos de maíz?, ¿cuántas o cuántos?.
6. Algunos conceptos matemáticos involucrados en la experiencia lúdica que comentamos, son: clasificación de los elementos de un conjunto, conjuntos finitos, subconjuntos de un conjunto, comparación de cantidades (sin contar), estimación, correspondencia biunívoca y conteo de cantidades pequeñas (hasta diez)
7. Algunas proposiciones sobre conjuntos finitos, implícitas en las soluciones de los problemas:

   Prob. 1: Las cartas a y b están en el mismo conjunto si y sólo si sus figuras tienen el mismo color predominante

   Prob. 2: i) Si los conjuntos E y F están en correspondencia biunívoca, entonces los conjuntos tienen el mismo número de elementos.

   ii) Todo conjunto tiene más elementos que cualquiera de sus subconjuntos propios.

[1] Usaré como pauta la herramienta "configuración epistémica", formulada en el EOS (Godino y colaboradores) y los elementos que conforman un problema, considerados en artículos anteriores en esta sección de UNIÓN.

Prob. 3: Si G es subconjunto propio de A y n(A) y n(G) representan, respectivamente el número de elementos de estos conjuntos, entonces A tiene n(A) – n(G) elementos más que G.

Prob. 4: Las proposiciones i y ii del Prob. 2 y la proposición del Prob. 3.

Prob. 5: Si existen p subconjuntos propios A_j de A y p subconjuntos propios B_j de B, de modo que cada A_j está en correspondencia biunívoca con B_j y la unión de todos los B_j es el conjunto B, pero la unión de todos los A_j es un subconjunto propio C de A, entonces A tiene más elementos que B. Tal número de elementos es n(A-C).

8. Los procedimientos empleados para resolver los problemas enunciados fueron todos empíricos, manipulando las cartas y los granos de maíz y efectuando el conteo de algunos conjuntos de pocos elementos.

9. En cuanto a argumentos, todos son de verificación empírica o de aplicación intuitiva de las proposiciones enunciadas:

Prob. 1: Verificación empírica que todos los elementos de cada uno de los dos subconjuntos formados tienen el mismo color predominante: rojo o negro. No existe ninguna carta roja entre las cartas negras ni ninguna carta negra entre las rojas. En el fondo, la relación “tener el mismo color que” es una relación de equivalencia y determina una partición en el conjunto de cartas de la baraja.

Prob. 2: Tesis 1: El conjunto de cartas B (las cartas de Lucerito) tiene el mismo número de elementos que un subconjunto propio del conjunto A (las cartas de Preciosa)

Demostración: Se establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de B y un subconjunto propio de A, al poner sobre cada carta de B una carta de A y quedar algunas cartas de A sin poder colocarlas sobre una carta de B.

Tesis 2: El conjunto de cartas de A es mayor que el conjunto de cartas de B.

Demostración: A tiene más elementos que cualquiera de sus subconjuntos propios (Proposición ii); en particular, más elementos que el subconjunto propio que está en correspondencia biunívoca con B; pero como tal subconjunto propio tiene el mismo número de elementos que B, se deduce que A tiene más elementos que B.

Prob. 3: Aplicación empírica de la proposición enunciada para este problema, mediante conteo de las cartas de A que no se pusieron encima de una carta de B.

Prob. 4: Argumentación similar a las tesis 1 y 2 del problema 2 y a la del problema 3, pero ahora con un conjunto de cartas y un conjunto de granos de maíz.

Prob. 5: Tesis 1: Si los elementos de un conjunto T de n cartas se asocian con los elementos de un conjunto M de granos de maíz, de modo que existen p cartas asociadas ($p < n$) con dos granos de maíz cada una y $n > 2p$, entonces, T tiene n- 2p elementos más que M.

Demostración:

En la configuración mostrada, de las n cartas de T, p de ellas tienen dos granos de maíz cada una, pero como $n > 2p$, podemos escribir $n = p + p + q$, donde q es un número natural mayor que cero, y afirmar que hay $p + q$ cartas sin granos de maíz; entonces podemos usar p cartas de estas y poner cada una debajo de las cartas con dos granos de maíz. Así tenemos p subconjuntos propios de T, cada uno con dos elementos y en correspondencia biunívoca con sendos subconjuntos propios de M. Uniendo todos estos subconjuntos propios de M obtenemos M, pero uniendo los correspondientes subconjuntos propios de T no obtenemos T. Aplicando la proposición enunciada para este problema, concluimos que T tiene más elementos que M. Exactamente, tiene q elementos más que M y vemos que $q = n – 2p$. (En el caso particular de la experiencia lúdica, se tiene $n = 28$, $p = 10$)

Comentarios finales

I. El problema enunciado al inicio del artículo del número anterior, es una generalización del Problema 5 aquí enunciado y por los argumentos dados, vemos que no siempre es verdad que hay $n – 2p$ cartas más que granos de maíz. Para que esto sea verdad es necesario que $n > 2p$. Que n sea mayor que p no garantiza que n sea mayor que 2p. Si en la experiencia con la niña hubieran quedado 10 cartas con dos granos de maíz cada una y menos de 10 cartas sin granos de maíz (por ejemplo 8) habría más granos de maíz que cartas y serían $2p – n$ granos de maíz más que cartas (En el ejemplo que estamos armando, $n= 18$ y $p = 10$).

   El problema enunciado al inicio de este artículo es esencialmente el mismo que el problema que acabamos de analizar, con la única diferencia de estar presentado en contexto intra matemático. En consecuencia su solución es esencialmente la misma.

II. La experiencia desarrollada, muestra que es posible generar un ambiente de juego, de manera espontánea y con material estructurado o no, que conduzca a reflexionar y resolver situaciones problemáticas; más aún, a que el niño invente problemas y que tales problemas puedan ser enunciados luego con una redacción adecuada y aun haciendo una generalización, ya sea manteniendo el contexto extra matemático o en un contexto intra matemático.

III. La interacción entre lo didáctico y lo matemático es fundamental en la creación de problemas. Así, la proposición enunciada para el Problema 5 permite generalizar el tipo de problema que creó la niña, pues podría ponerse no solo dos granos de maíz sobre algunas cartas de la baraja sino cantidades diferentes y no necesariamente las mismas. El requerimiento sería el mismo ¿hay más cartas o granos de maíz? ¿Cuántas o cuántos?. Tenemos así nuevos problemas, creados por variación del problema creado por la niña. La proposición, elaborada a partir de la experiencia didáctica, permite resolver los nuevos problemas creados, de un modo esencialmente similar al usado para resolver el problema propuesto por la niña. Ciertamente, pueden presentarse situaciones problemáticas diferentes cuyo análisis, con base en lo realizado, llevará a su solución. Es interesante examinar los problemas en los que el número de cartas sin granos de maíz es menor que el número de cartas con granos de maíz.