UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 44. Diciembre 2015
Páginas 133-146

Determinación de registros semióticos en una investigación didáctica: un caso aplicado a números complejos

María Andrea Aznar, María Laura Distéfano, Marta Azucena Pesa, Emilce Graciela Moler

Fecha de recepción: 16/10/2014
Fecha de aceptación: 29/11/2015

Resumen	En el presente trabajo se describe el proceso de determinación de los registros semióticos pertinentes para una investigación didáctica. La misma se refiere a conversiones de representaciones semióticas de subconjuntos de números complejos. Se exponen y ejemplifican las argumentaciones que, siguiendo los lineamientos teóricos de Duval y las observaciones planteadas por D'Amore, marcaron las etapas del proceso. Se detallan los criterios y preguntas que orientaron la selección y delimitación de los registros, esperando que contribuyan como insumo para investigaciones que utilicen registros semióticos como herramienta teórico-metodológica. **Palabras clave**: registros semióticos pertinentes, criterios de delimitación, números complejos
Abstract	In this paper is described the process of determining the apropiated semiotic registers for educational research. This research is related to conversions of semiotic representations of subsets of complex numbers. Following the Duval's theoretical guidelines and D'Amore's remarks, the arguments that marked the stages of the process are exhibited and exemplified. Criteria and questions that guided the selection and delineation of registers are detailed, hoping they can be helpful in researches that use semiotic registers as a theoretical and methodological tool. **Keywords**: apropiated semiotic registers, demarcation criteria, complex numbers
Resumo	No presente trabalho se descreve o processo de determinação dos registros semióticos pertinentes a uma investigação didática. A mesma se refere a conversões de representações semióticas de subconjuntos de números complexos. São expostas e exemplificadas argumentações que, seguindo as diretrizes teóricas de Duval e as observações sugeridas por D'Amore, marcam as etapas do processo. Os critérios e questões que orientaram a seleção e delimitação dos registros são detalhados, esperando que contribuam como insumo a investigações que utilizem registros semióticos como ferramenta teórico-metodológica. **Palavras-chave:** registros semióticos pertinentes, critérios de delimitação, números complexos.

1. Introducción

La Teoría de Registros semióticos de Raymond Duval (1998, 2004) ha tenido gran trascendencia al alertar sobre la importancia del rol que juegan las representaciones, en sus variados registros semióticos, para la conceptualización de los objetos matemáticos.

Al abordar un problema de aprendizaje de un objeto matemático, desde el punto de vista de sus representaciones semióticas, surge de inmediato la necesidad de determinar cuáles son los registros de representación pertinentes a considerar para el objeto matemático estudiado. Esta delimitación puede no ser trivial ya que, por un lado, para algunos objetos matemáticos pueden ser muy variadas las maneras de representarlos y, por economía de esfuerzos, hay que seleccionar las realmente necesarias. Por otra parte, ya ha sido señalado por D'Amore (2009/11) que la definición de un registro de representación, inherente a un objeto matemático, no depende únicamente de los rasgos de la forma de la representación sino que es relativa al significado del objeto matemático a contemplar.

El siguiente artículo muestra el proceso de esta determinación en una investigación relativa al trabajo didáctico con representaciones de subconjuntos de números complejos. Se detallan los planteamientos y criterios seguidos en dicho proceso esperando que sea un insumo para quienes aborden este tipo de pesquisas vinculadas a los registros semióticos.

2. Marco Teórico

El aprendizaje de las matemáticas requiere el desarrollo de actividades cognitivas tales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, etc. La Teoría de Registros Semióticos de Raymond Duval (1998, 2004) pone en foco el rol que las representaciones, y las acciones asociadas de interpretarlas, generarlas y transformarlas, tienen sobre dichas actividades. Esta teoría subraya el hecho de que, por la naturaleza de los objetos matemáticos, no se puede acceder a ellos si no es a través de sus representaciones semióticas en sus distintos sistemas de representación (numérico, algebraico, gráfico, simbólico,etc.).

A partir de la noción de *semiosis*, entendida como la aprehensión o producción de representaciones semióticas, Duval (1998,2004) caracteriza a los sistemas de representación que son escenarios de la misma. Dichos sistemas, a los que denomina *registros*, deben cumplir las siguientes condiciones:

- en ellos se debe poder constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como la representación de un objeto en un en dicho sistema. A esto es a lo que Duval denomina *formación de representaciones*.

- se deben poder realizar, con reglas internas al sistema, transformaciones de una representación a otra dentro de ese mismo registro; dichas transformaciones internas de las representaciones son llamadas *tratamientos*.

- se deben poder realizar transformaciones de una representación de un sistema a otra representación del mismo objeto en otro sistema semiótico. A tales transformaciones se las denomina *conversiones*.

Formación, tratamiento y conversión son distinguidas como tres tipos de actividades cognitivas ligadas a la semiosis.

Esta teoría sostiene que las representaciones semióticas, además de ser los medios de exteriorización de representaciones mentales a los fines de la comunicación, son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Duval (1998, 2004) afirma que no hay *noesis* (aprehensión conceptual de un objeto) sin *semiosis*, afirmando su inseparabilidad.

Al mismo tiempo, Duval (1998, 2004) señala que, para lograr la conceptualización, no se debe confundir el objeto matemático con su representación. Esto plantea una paradoja pues, las representaciones que son las que permiten el acceso a los objetos matemáticos, pueden ser el obstáculo para conceptualizarlos si el aprendiz confunde significante con significado.

Duval (1998, 2004), plantea una salida a la paradoja en la construcción de conceptos matemáticos a partir del imperativo de proveer al estudiante de prácticas matemáticas en las que coordine diferentes representaciones del mismo objeto matemático. Esto implica que pueda realizar conversiones de las representaciones del mismo objeto matemático plasmadas en, por lo menos, dos registros. Se busca, por una parte, contribuir a evitar la confusión entre objeto representado y representación; por otra parte, dado que cada representación muestra un significado parcial con respecto a lo que representa, la interacción de distintas representaciones favorecerá a la formación integral del concepto.

Particularmente, la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos y, con frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales. Esto se debe al fenómeno de *no congruencia* entre representaciones, que se produce cuando la conversión no resulta transparente pues no pueden ponerse en correspondencia unívoca los elementos que las constituyen. Al respecto, es importante señalar que la conversión entre dos representaciones semióticas planteadas en distintos registros, no presenta el mismo nivel de dificultad al cambiar el sentido de la conversión. Así, por ejemplo, es más utilizada y más sencilla, la conversión de fórmulas del registro algebraico al registro gráfico que la tarea de hallar, para una representación gráfica, la fórmula o ecuación que la representa en el registro algebraico. (Duval, 2004).

Al respecto del estudio de este tipo de problemas, D’Amore advierte: “Una duda de naturaleza teórica asalta a quien estudia este tipo de problemas: ¿un registro de representación semiótica es un absoluto o no?” (2009/11, p.19). Es decir, si se considera un signo, un dibujo, una fórmula, una escritura,... como representación semiótica de un cierto objeto ¿se puede establecer con certeza a qué registro pertenece?

D’Amore sostiene que la caracterización de los registros es relativa a los objetos que representan pues no sólo los rasgos de una representación definen a un registro semiótico. Al respecto afirma que “la característica específica de un registro semiótico depende estrechamente del objeto que se quiere representar; por lo tanto para “entender” el mensaje propuesto se necesita tener ya indicaciones preliminares acerca del objeto” (2009/11, p.19).

El tipo de duda descripta anteriormente surgió en el desarrollo de una investigación relativa a la enseñanza de números complejos y dio lugar a una serie de planteos y reformulaciones que se describen a continuación.

3. Descripción de la investigación en la cual surgió el problema de determinación de registros

El extraer información a partir de una representación gráfica para resolver un problema no era un recurso habitual o utilizado espontáneamente por parte de los estudiantes de primeros años de las carreras de Ingeniería que se dictan en la Universidad Nacional de Mar del Plata (Aznar,Distéfano, Figueroa, Moler, 2010). Sin embargo, los profesionales que resuelven problemas a través de las matemáticas coinciden en que es la visualización del problema lo que lleva a hallar su solución. Así, F. Hitt (2003) señala que la visualización matemática de un problema tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del mismo.

Al analizar las prácticas en el álgebra inicial, se comprobó que, en la unidad de Números Complejos se había subvaluado el uso de las representaciones gráficas. En particular esto se apreciaba fuertemente, en el cierre de dicha unidad temática, en la cual se trabaja habitualmente con subconjuntos de números complejos que definen curvas o regiones en el plano complejo. En las actividades propuestas, a partir de la expresión de las características de dichos conjuntos como ecuaciones o inecuaciones, se les solicitaba a los estudiantes su representación gráfica. Un ejemplo de tales actividades puede observarse en la Figura 1.

Determinar y representar en el plano complejo todos los $z \in C$ tales que:

a) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$

b) $\arg(z) = \arg(\pi \cdot \bar{z}^2)$ y $|z| = 2$

c) $|z| \leq \left|(2-i)^2\right|$ y $\arg(z) = \arg(2 \cdot z^{-1})$ $z \neq 0$

d) $\left|z - (1+i)\right|^2 = 9$ y $\operatorname{Re}(z) = |z|$

Figura 1: Ejemplo de actividades presentadas habitualmente en la asignatura. Fuente: material de asignatura Álgebra A durante 2010, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata

Sin embargo, no se les planteaba a los estudiantes realizar actividades en el sentido inverso: es decir, a partir de representaciones de curvas o regiones del plano complejo, expresar condiciones que los caracterizaran. Un enunciado de este tipo alternativo de actividades se muestra en la Figura 2. Esta clase de prácticas involucran habilidades de visualización de gran utilidad; por ejemplo, en análisis de funciones de variable compleja.

Escribir por comprensión cada uno de los subconjuntos del plano complejo representados a continuación

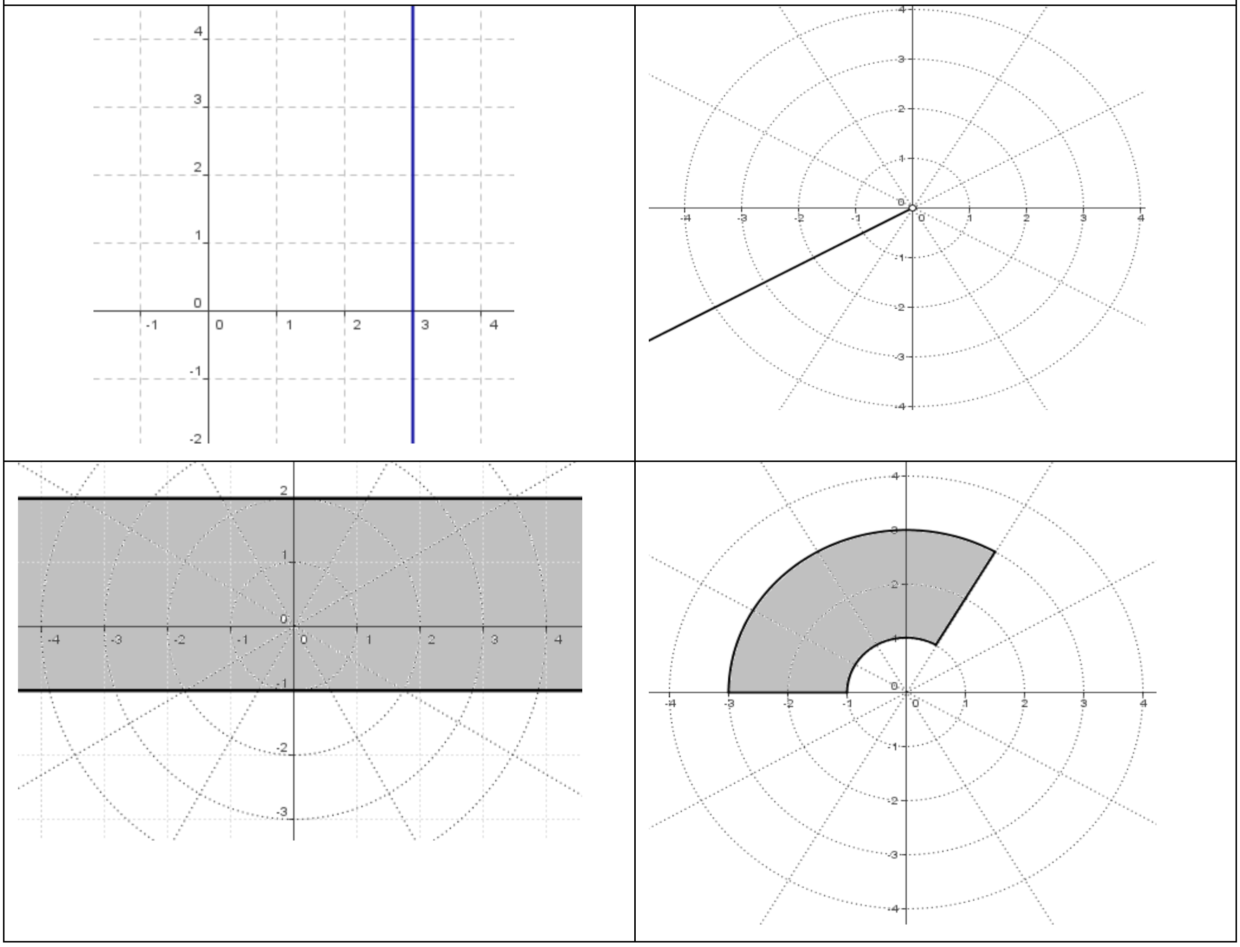

Figura 2. Enunciado de tareas que requieren caracterización de curvas y regiones del plano complejo no presentadas habitualmente en la asignatura.
Fuente: desarrollado por los autores (2010).

Aunque pudiera parecer que las dos actividades de las figuras 1 y 2 referenciadas son similares, tienen niveles de dificultad muy diferentes.

Desde la teoría de registros semióticos (Duval,1998, 2004), los dos tipos de tareas matemáticas descriptas están asociados a las actividades cognitivas de conversión. En el primer caso, se trata de conversiones de representaciones, de subconjuntos de números complejos, desde una serie de condiciones como ecuaciones o inecuaciones hacia una representación en el registro gráfico. En el caso de las caracterizaciones, las conversiones tienen el sentido inverso; esto es, se parte de representaciones de los mencionados subconjuntos en forma de curvas o regiones en el registro gráfico y se arriba a su caracterización en forma de ecuaciones o inecuaciones. Este último sentido de conversión, como se ha reportado en distintas investigaciones aplicadas a otros temas (González-Martín y Camacho Machín (2005), Duval (2006), Díaz Lozano y cols. (2013)) no es trivial y tiene un alto nivel de dificultad.

Lo anterior llevó a la formulación de los siguientes interrogantes: ¿es conveniente enseñar a hacer este tipo de conversiones para caracterizar de curvas o regiones del plano complejo? ¿es factible implementar una propuesta didáctica que satisfaga tal requerimiento siguiendo los lineamientos teóricos de la teoría de registros semióticos?

En la búsqueda de respuesta a estos interrogantes se planteó, como problema de investigación, realizar un estudio que permita conocer los resultados de la aplicación de una propuesta didáctica, orientada a favorecer la habilidad de efectuar conversiones, entre representaciones de subconjuntos de números complejos, partiendo de representaciones gráficas, para llegar a representarlos mediante ecuaciones o inecuaciones que los caracterizaran.

Para todas las tareas atenientes a la investigación, comenzando por la formulación de los objetivos de la misma, se impuso la necesidad de seleccionar y describir los registros de representación a considerar. La delimitación de los registros implicados en el problema planteado, como se verá más adelante, no fue trivial. La misma resultó de un proceso que se describe a continuación.

4. Un problema inicial dentro de la tarea de investigación: la delimitación de los registros.

Una investigación didáctica, basada en la Teoría de Registros Semióticos y focalizada en la actividad cognitiva de conversión, impone la clara definición de cuáles serán los registros de partida y de llegada en dicha actividad.

Claramente, el plano complejo o plano de Argand-Gauss se configura como registro gráfico y sería el punto de partida de las conversiones que se desean favorecer. Para trabajarlo didácticamente se lo dotó de elementos que, como señales tipográficas, sirvan de referencia para la formación de expresiones. Esto es, marcas que ayuden a representar y a identificar las componentes del número complejo: marcas en el eje real, en el eje imaginario, líneas auxiliares para valores de módulo y para valores de argumento. Pueden observarse estas marcas en la actividad de la Figura 2.

La delimitación de el o de los registros de llegada, que permitieran expresar las caracterizaciones de los subconjuntos, no se presentó de forma tan obvia al inicio de la investigación. En una primera instancia, la selección estuvo sujeta a las distintas formas de representar los números complejos, escogiendo la forma binómica y la forma polar, entre todas las disponibles, de acuerdo a un criterio de reducción. En una instancia posterior, se revisó esta selección, tomando en cuenta el objeto matemático a representar, los rasgos necesarios para dicha representación, las prácticas matemáticas que se pretendían que los estudiantes realizaran y sus actividades semióticas asociadas. Dichas instancias se describen a continuación.

4.1. Primera instancia: la selección de los registros a partir de las formas de representar números complejos

Como punto de partida se consideraron las distintas formas no gráficas de representar un número complejo que se muestran en la Figura 3.

z = (-1 , 1) Representación asociada a la forma de *par ordenado*.	z = -1 + 1 i Representación asociada a la *forma binómica*, que se muestra	$z = \sqrt{2}_{\frac{3}{4}\pi}$ Representación asociada a la *forma polar*.

	como una *combinación lineal* de los números -1 con *i*.	
$z=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+\sqrt{2}.sen\left(\frac{3}{4}\pi\right).i$ Representación asociada a la *forma trigonométrica.*	z= $\sqrt{2}.e^{i\frac{3}{4}\pi}$ Representación asociada a la forma exponencial.	

Figura 3. Distintas formas de representación de un número complejo en registros de características aritmético-algebraicas.
Fuente: desarrollado por los autores.

Pueden observarse múltiples representaciones del mismo número complejo, en registros donde figuran números, combinaciones lineales, y relaciones de igualdad, por lo que puede decirse que los registros tienen características aritmético-algebraicas.

Dada la cantidad de formas de representación disponibles, se consideró la posibilidad de reducir, para este estudio, la cantidad de formas a emplear. Para ello, se tomó en cuenta un criterio de reducción que contempla la información que aparece como evidente u ostensible en cada forma de representación. Así, tanto la forma de par ordenado como la forma binómica, exponen las componentes real e imaginaria del número complejo. Por otra parte, las formas polar, trigonométrica y exponencial hacen visibles los valores del módulo y del argumento. Se pueden considerar a estas dos agrupaciones de formas de representación como clases de una relación de equivalencia definida por "ostenta la misma información que" y, consecuentemente, seleccionar un representante de la clase. En este caso, se optó por la forma binómica como representante de la primera clase y la forma polar como representante de la segunda. Si se comparan ambas formas de representación y se consideran prácticas relativas a la resolución de operaciones de adición, producto o potencia entre números complejos, puede observarse que el costo en tratamientos es muy diferente en el registro asociado a la forma binómica que a la polar; así, una suma resulta más sencilla de expresar en el registro asociado a la forma binómica, en tanto que la resolución de una potencia se simplifica en el registro asociado a la forma polar.

Posteriormente se observó que, para caracterizar las curvas o regiones no sólo son necesarios los rasgos correspondientes a valores numéricos o a operaciones de números complejos. Como está detallado en la Figura 4, también son requeridas expresiones que hacen referencia a elementos de números complejos, es decir, *expresiones elementales* tales como "| z |", "Re(z)", "Im(z)", "arg(z)" o "Arg(z)" que están asociados a las formas binómica y polar. A través de estas expresiones elementales se pueden representar condiciones como ecuaciones o inecuaciones.

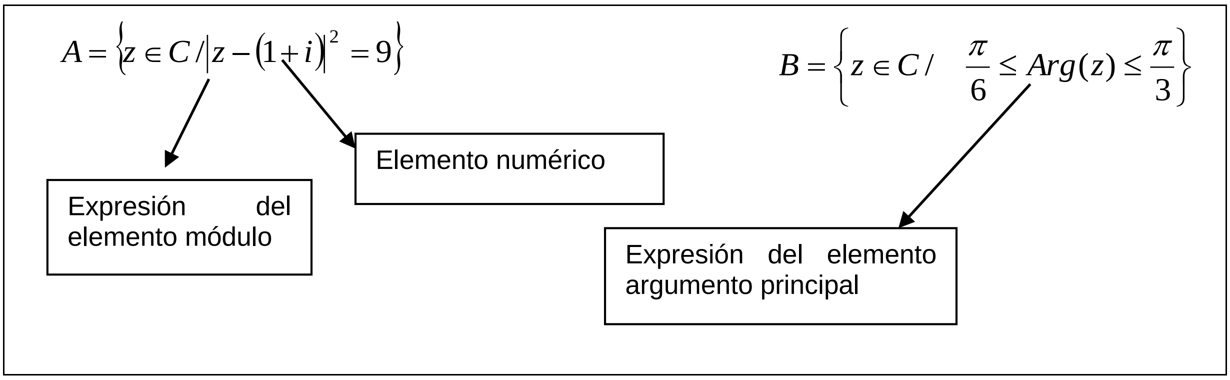

Figura 4. Expresiones elementales en caracterizaciones de curvas o regiones del plano complejo
Fuente: desarrollado por los autores.

Por lo anteriormente expuesto, los registros semióticos inicialmente seleccionados fueron: el registro algebraico asociado a la forma binómica, el registro algebraico asociado a la forma polar y el registro gráfico. Los mismos son esquematizados en la Figura 5 señalando las tareas de conversión involucradas.

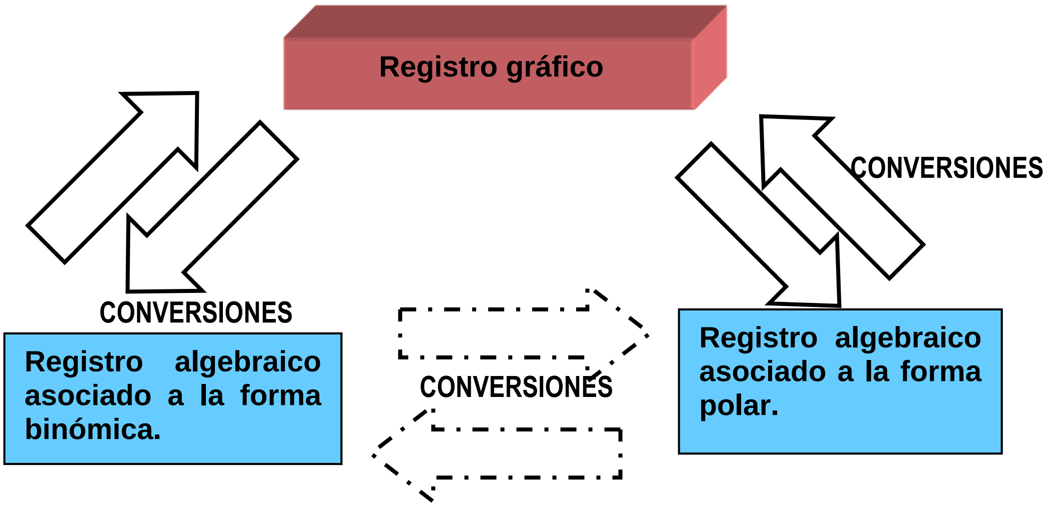

Figura 5. Esquema de los registros semióticos contemplados en la etapa inicial del proceso de determinación de registros.
Fuente: desarrollado por los autores.

En la figura 5 pueden observarse las flechas que señalan los sentidos posibles de conversión. Entre los dos registros algebraicos considerados las flechas están en línea punteada. Con ellas se pretende marcar el surgimiento de ciertos interrogantes, acerca de la necesidad y posibilidad de realizar dichas conversiones, para los subconjuntos de números complejos estudiados. Por ejemplo, se observaron subconjuntos en los que sólo es conveniente su caracterización utilizando rasgos correspondientes a elementos de la forma binómica y no a la polar o viceversa. Por ejemplo, la recta representada en la figura 6, se puede caracterizar con la expresión $B = \{z \in C / \quad \mathrm{Re}(z) = 1\}$. La representación de esa misma recta usando expresiones elementales como "| z |" o "Arg(z)" resultaría,

$B=\left\{ z\in C/ \quad |z|=\dfrac{1}{Cos(Arg(z))} \; y \; Arg(z)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)\right\}$ que, por una parte, requiere de un rasgo adicional dado por la expresión "Cos( )" . Por otra parte, adquiere un nivel de complejidad no deseable para una tarea de caracterización.

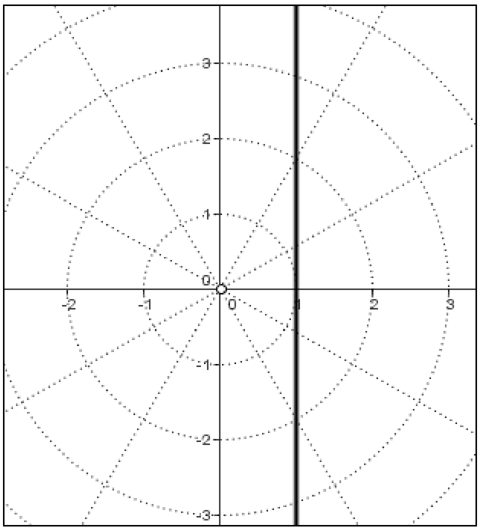

Figura 6. Recta en el plano complejo.
Fuente: desarrollado por los autores.

Las observaciones y cuestionamientos realizados acerca de los registros algebraicos iniciales condujeron a una segunda instancia en la que se revisó la definición del objeto matemático y los registros algebraicos implicados.

4.2. Segunda instancia: la revisión de los registros de naturaleza algebraica.

En esta instancia se plantearon algunas preguntas que surgieron a partir de las observaciones de D'Amore (2009/11) en relación a la definición de los registros, considerándolos relativos al significado que se quiere estudiar en los objetos matemáticos. Las preguntas formuladas fueron:

- ¿Qué objetos matemáticos se busca representar en estos registros?
- ¿Qué práctica/s matemática/s se pretende que realicen los estudiantes?
- ¿Qué rasgos de representación requieren dichas prácticas?

La primera pregunta tuvo como respuesta que los objetos matemáticos a considerar, no son números complejos aislados sino, específicamente, los subconjuntos de números complejos que definen curvas y o regiones en el plano asociado. Esta reconsideración del objeto matemático en juego tendrá impacto al contemplar las prácticas matemáticas que se busca favorecer y los rasgos de representación que las mismas solicitan.

Respecto de las prácticas matemáticas que se quiere trabajar con los estudiantes, se subrayaron dos. Por una parte, representar gráficamente conjuntos definidos por comprensión. Por otra, caracterizar una curva o región representada gráficamente. Las operaciones entre números complejos fueron trabajadas al inicio de la unidad temática y no constituyen las prácticas sobre las que se quiere poner el foco de atención. Para las tareas de caracterización sobre las que se desea hacer hincapié son demandados rasgos de representación semiótica de características algebraicas. Sin embargo, dado que las operaciones no constituyen el centro de las prácticas requeridas, deja de ser forzosa la distinción entre el registro algebraico asociado a la forma binómica y el asociado a la forma polar, entre los que se diferencian los costos cognitivos de llevar a cabo tales las operaciones.

Buscando responder al tercer interrogante y tomando en cuenta lo anterior, se consideraron los rasgos necesarios para las caracterizaciones mencionadas. En ellas juegan un rol fundamental las expresiones elementales. Las mismas están asociadas a la forma binómica o a la forma polar de un número complejo. Al respecto, surgió el siguiente cuestionamiento: los rasgos de estas expresiones elementales que componen las ecuaciones e inecuaciones que representan las caracterizaciones ¿deben ser considerados como pertenecientes a dos sistemas semióticos diferentes?

En los ejemplos de la Figura 2, para efectuar la caracterización es suficiente el uso de una o dos expresiones elementales, asociadas ambas, o a la forma binómica, o a la forma polar. Sin embargo, hay subconjuntos que requieren para su caracterización una combinación de expresiones de elementos de la forma polar y binómica. Por ejemplo, la región representada en la Figura 7 podría caracterizarse como $D = \{z \in C / \quad 3 \leq |z| \leq 4 \wedge 2 \leq \operatorname{Im}(z)\}$.

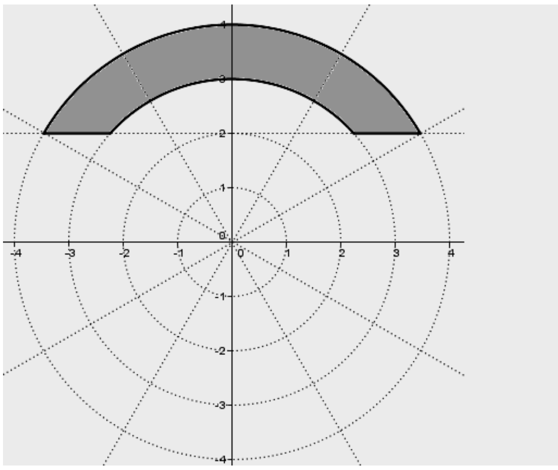

Figura 7. Región del plano complejo que para su caracterización requiere una combinación de expresiones elementales asociadas tanto a la forma binómica y como a la polar.
Fuente: desarrollado por los autores.

Si se consideran regiones como la del ejemplo anterior, que no pueden ser representadas en un registro algebraico con rasgos únicamente asociados a la forma binómica o únicamente asociados a la forma polar, quiere decir que existen objetos matemáticos que queremos estudiar para los que *no puede realizarse la formación* de sus representaciones en registros así definidos. Esto último viola una de las condiciones que debe cumplir un sistema de representación para ser considerado un registro. En consecuencia determinó la necesidad de redefinir, un único registro donde convivan rasgos que hagan referencia a los elementos de un número complejo, tanto en forma polar como en forma binómica, de manera que permitan la formación de expresiones como la ejemplificada.

Los análisis anteriores condujeron a una nueva delimitación de los registros semióticos pertinentes para el estudio de los subconjuntos de números complejos considerados. Los mismos se esquematizan en la Figura 8.

El registro algebraico incluye entre sus rasgos componentes elementales y valores numéricos, tanto asociados a la forma binómica como polar, y símbolos de igualdad o desigualdad. Así definido, transformaciones entre las componentes elementales asociadas a las formas mencionadas, tales como la que lleva a considerar $|z|$ como $\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2}$, siendo internas al registro, serán calificadas como tratamientos.

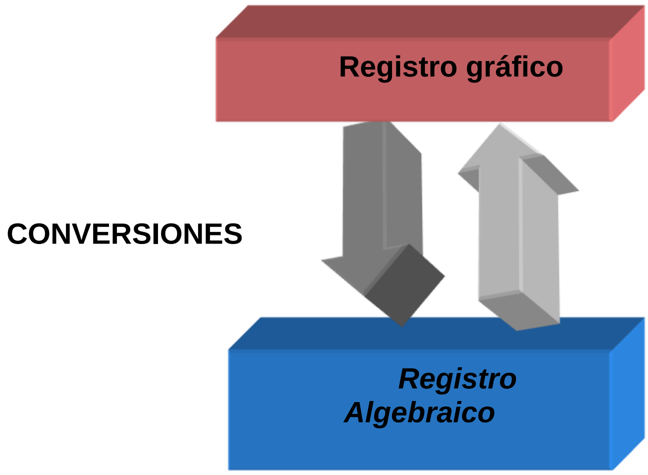

Figura 8. Esquema de los registros semióticos resultantes del proceso de determinación de registros.
Fuente: desarrollado por los autores.

5. Consideraciones finales

En este trabajo se describió un proceso de análisis para la delimitación de los registros semióticos pertinentes, para una investigación vinculada a números complejos, focalizada en curvas o regiones en el plano complejo. En dicho proceso se distinguen dos instancias.

En la primera de ellas se contemplaron como objetos matemáticos en juego a los números complejos. Para su representación, se consideraron un registro con rasgos gráficos y varios registros con rasgos algebraicos. De estos últimos, se seleccionaron dos, de acuerdo a un criterio de reducción basado en la relación de equivalencia “ostenta la misma información que”. Los registros seleccionados fueron: registro algebraico asociado a la forma binómica y registro algebraico asociado a la forma polar.

La segunda etapa se inició a partir de una contemplación más profunda de ciertos rasgos necesarios para la caracterización de las curvas y regiones en los registros algebraicos: los relativos a expresiones elementales. Se determinó que, por una parte, resultaba innecesariamente arduo representar una misma curva o región en ambos registros algebraicos. Por otra parte, se advirtió que, para la caracterización de algunas regiones, se requiere de expresiones elementales tanto asociadas a la forma binómica como a la polar. Lo anterior llevó a redefinir los registros respondiendo a los siguientes cuestionamientos: *¿Qué objetos matemáticos se busca representar en estos registros? ¿Qué práctica/s matemática/s se pretende que realicen los estudiantes? ¿Qué rasgos de representación requieren dichas prácticas?*.

Las respuestas a dichos cuestionamientos condujeron a la delimitación de dos registros pertinentes para la investigación mencionada: el registro gráfico y un único registro algebraico. Este último fue considerado con una estructura más global. Esta estructura admite entre sus rasgos, además de símbolos de igualdad o desigualdad, componentes elementales y valores numéricos, tanto asociados a la forma binómica como polar de un número complejo.

La práctica de caracterización de las curvas y regiones consideradas, que forma parte del significado de estos objetos, requiere del uso de expresiones elementales. El rol jugado por dichas expresiones en estas prácticas condujo a la redefinición de los registros que resultaban pertinentes para esta investigación. Las preguntas planteadas, que guiaron el refinamiento para la adecuación de definición de los registros, giran en torno a la especificidad del objeto que se buscaba representar y de las prácticas matemáticas ligadas al mismo. Es decir que los registros fueron definidos no sólo por los rasgos de los objetos matemáticos en juego sino también por el significado de dichos objetos, el cual está fuertemente vinculado a las prácticas de las que participan. Todo este proceso es acorde a lo planteado por D’Amore (2009/11):

> “Una duda de naturaleza teórica asalta a quien estudia este tipo de problemas: ¿un registro de representación semiótica es un absoluto o no? […] Es decir: ¿existen en absoluto registros de representación semiótica deducibles a partir de la forma de una representación específica singular? Desde mi punto de vista, la respuesta es negativa: la característica específica de un registro semiótico depende estrechamente del objeto que se quiere representar; por lo tanto para ‘entender’ el mensaje propuesto se necesita tener ya indicaciones preliminares acerca del objeto.” (p. 19)

A partir de la experiencia aquí expuesta puede seguirse que, al momento de enfrentar una investigación didáctica que requiera de la definición de registros semióticos, es necesario determinar claramente los objetos matemáticos a trabajar y su contexto. Esto demanda considerar, tanto los rasgos de las representaciones de los objetos como las prácticas matemáticas involucradas. Los criterios y preguntas que se han presentado como regentes para los refinamientos efectuados, no se restringen necesariamente al ámbito de los números complejos sino que resultan lo suficientemente generales como para ser utilizadas en investigaciones cuyos objeto de estudio sea cualquier otro objeto matemático.

Referências

Aznar, M., Distéfano, M., Figueroa, S., Moler, E. (2010). Análisis de conversiones entre representaciones semióticas de números complejos. Memorias de la Tercera Reunión Pampeana de Educación Matemática (III REPEM) recuperado en marzo del 2014 de

http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem10/memorias/comunicaciones/Trabajos%20Inves/CB%2021.pdf

D'Amore B. (2009/2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Cientifica*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas,Bogotà. 11, 150-164. ISSN: 0124-2253. [El número 2009 fue impreso en el mayo 2011; esto explica la fecha puesta al articulo: 2009/11]. Recuperado el 11 de enero de 2012, de

http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/viewFile/419/648

Díaz Lozano, M. L., Haye, E. E., Montenegro, F., Córdoba, L. (2013) Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. Memorias del I Congreso de educación Matemática de América Central y el Caribe. Recuperado el 20 de Agosto de 2014, de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Cali. Colombia.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1): 143-168. Recuperado el 18 de marzo de 2010, de http://www.rsme.es/gacetadigital/abrir.php?id=546

González-Martín, A. S., Camacho Machín, M. (2005) Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), pp. 81–96 . Recuperado el 20 de Agosto de 2014, de

www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/22006/332748

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la asociación matemática venezolana*, 10 (2), 213-223. Recuperado el 10 de febrero de 2011 de, http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf

Aznar, María Andrea: Profesora en Matemática. Especialista en investigación educativa. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina**.** maznar@fi.mdp.edu.ar
Distéfano, María Laura: Profesora en Matemática. Ms. en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. mldistefano@fi.mdp.edu.ar
Pesa, Marta Azucena: Licenciada en Física. Doctora en Física. Docente e investigadora del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina. Directora de Posgrado de la Facultad Regional Tucumán de la Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. mpesa@herrera.unt.edu.ar
Moler, Emilce Graciela: Profesora en Matemática. Magister Scientiae en Epistemología y Metodología de la Ciencia. Doctora en Ciencias Biológicas (Orientación en Bioingeniería). Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. egmoler@yahoo.com.ar