UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 285-293
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

El rincón de los problemas

Estímulo del pensamiento matemático. Una experiencia didáctica con profesores, usando un acertijo.

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Construir una matriz con más de 15 números naturales, de modo que si alguien selecciona en ella un número ***m****, no dice cuál es, sino solamente en qué columna(s) está ubicado, se puede identificar el número* ***m*** *sin mirar la matriz.*

Con una solución de este problema, en el contexto que explico a continuación, me propongo ilustrar aspectos importantes del pensamiento matemático, como son *analizar, conjeturar, demostrar o descartar lo conjeturado, y crear.*

Este problema surgió en un taller con profesores de primaria, como un reto nuevo ante la presentación de un conocido juego de "adivinación" que hice usando un arreglo rectangular (una matriz) de números naturales del 1 al 15 (Figura 1), en el cual cualquiera de los participantes en el taller seleccionaba un número y solo me decía en qué columnas estaba ubicado. Sin mirar el arreglo rectangular, yo "adivinaba" qué número había sido seleccionado.

D	C	B	A
8	4	2	1
9	5	3	3
10	6	6	5
11	7	7	7
12	12	10	9
13	13	11	11
14	14	14	13
15	15	15	15

Figura 1. Matriz con números naturales del 1 al 15

Naturalmente, el primer reto era descubrir "el truco" para poder "adivinar" el número seleccionado. El problema y la secuencia en clase en el taller resultó tan interesante, que dio lugar a una historieta que escribí con este tema para el Ministerio de Educación del Perú, en un proyecto que apoyaba UNICEF.

En tal historieta, una pareja de niños de primaria (Carlos y María) hacen "el truco" a su profesor (Pedro) (Figura 2.) y le piden que los ayude a construir un arreglo rectangular con más números para que sus amigos no piensen que el truco consiste simplemente en memorizarse todas las ubicaciones de los números. Partes de esa historieta ilustran este artículo.

Como se ve, el arreglo rectangular de números tiene 8 filas y 4 columnas y estas últimas están identificadas con las letras D, C, B y A, para facilitar el mensaje en el que se diga en qué columnas está el número seleccionado.

El lector queda invitado a usar la matriz de números dada en la Figura 1 y a averiguar cómo, conociendo sólo en qué columnas está ubicado un número, se puede “adivinar” – en verdad deducir – cuál es tal número. Esta es una característica importante del pensamiento matemático: *analizar*; lo cual supone observar, hacerse preguntas, buscar una estructura, examinar casos particulares, buscar relaciones lógicas, practicar el ensayo y error.

A continuación escribiré algunas observaciones, conjeturas y procedimientos que surgieron en el taller con los profesores – algunos de los cuales se plasmaron en la historieta – ante el reto inicial de descubrir el truco.

Observación: (De carácter global). Con 8 filas y 4 columnas hay 32 lugares en la matriz para ser ocupados con números naturales del 1 al 15; esto significa que necesariamente algunos números estarán en más de una columna

Observaciones de casos particulares: Les pedí que me digan en qué columnas estaban algunos números para yo “adivinar” qué número habían escogido y que prestaran mucha atención a esos casos particulares. En la Figura 2, como parte de la historieta, se ilustran dos casos particulares, pues se ve que el profesor escoge el número 5 y comunica a sus alumnos que ha escogido un número que está en las columnas C y A y María le dice inmediatamente que el número que escogió es el 5. Posteriormente escoge el 13, comunica que es un número que está en las columnas D, C y A y Carlitos le dice inmediatamente que el número que escogió es el 13.

Figura 2: María y Carlos juegan con su profesor Pedro

Preguntas a partir de los casos particulares:

- ¿Qué relación hay entre el número 5 y las columnas C y A?
- ¿Qué relación hay entre el número 13 y las columnas D, C y A?

Para responder las preguntas invité a observar con más detenimiento la matriz con los números (Figura 1), formularse nuevas preguntas y hacer alguna(s) *conjetura(s)*. En un grupo de trabajo se llegó a las siguientes *conjeturas*:

- *5 tiene que ser el único número que esté en las columnas C y A.*
- *13 tiene que ser el único número que esté en las columnas D, C y A*.

Usted, amigo lector, se da cuenta por qué se hacen estas conjeturas ¿verdad? Tómese unos segundos para verificar empíricamente las conjeturas mirando la matriz y para encontrar una razón lógica para que las conjeturas sean verdaderas.

Escoja usted un número, o más, diferente(s) de 5 y 13; formule conjetura(s) similar(es) a las anteriores y verifique que se cumplen. Por ejemplo, 11 es el único número que está en las columnas D, B y A.

Luego que los profesores verificaron que las conjeturas enunciadas se cumplen en todos los casos y en consecuencia son verdaderas, formulé la siguiente pregunta:

¿Qué afirmación general se puede inducir a partir de estas proposiciones verdaderas?

Lo invitamos, amigo lector, a hacer una pausa y escribir la afirmación general que usted considera que se puede deducir.

Posiblemente usted llegó a una proposición equivalente a la siguiente:

- *En la matriz dada, no pueden existir dos números naturales **m** y **n** entre 1 y 15 inclusive, (**m** ≠ **n**), que figuren en las mismas columnas*

Observamos que si esta proposición no fuera verdadera, sería imposible deducir qué número se eligió, conociendo solo en qué columnas está, porque, por ejemplo, si los números ***m*** *y* ***n*** están ambos en las columnas A, C y D, y una persona escoge ***m***, deberá decir que se encuentra en tales columnas, pero "el adivinador" tendría información de dos números y no sabría si se trata de ***m*** o de ***n***.

Entonces formulé la siguiente pregunta:

Al construir la matriz de la Figura 1, ¿con qué criterio se ha decidido en qué columna(s) debe figurar cada número?

Para obtener la respuesta, sugerí, nuevamente, analizar casos particulares y hacer algunas conjeturas.

Observaron:

- El número 1 está solamente en la columna A; el número 2 solamente en la columna B; el número 3 en las columnas A y B; ….

Un profesor afirmó:

- Todos los números impares están en la columna A

Una colega hizo una aclaración al respecto: Eso es cierto, pero los impares están también en otras columnas; o sea que no están solamente en la columna A

Un grupo hizo la siguiente *conjetura*:

- Cuanto mayor es el número, en mayor número de columnas está.

¿Esta conjetura es verdadera o falsa? Verificaron que, por ejemplo, 5 es mayor que 4, y 5 está en dos columnas mientras 4 solo en una; 7 es mayor que 5 y figura en tres columnas, mientras que 5 solo figura en dos; sin embargo 8 es mayor que 7 y figura solo en una columna. Esto último es un *contraejemplo* para la conjetura, y en consecuencia **no** es verdadera y la descartamos.

Otro grupo hizo la siguiente *observación*:

- Los únicos números que figuran en una sola columna son el 1, el 2, el 4 y el 8.

Esta observación fue complementada con la siguiente:

- Los números 1, 2, 4 y 8 están solamente en las columnas A, B, C y D respectivamente y encabezan estas columnas:

D	**C**	**B**	**A**
8	4	2	1

Entonces, sugerí examinar qué pasa con los números que están en dos columnas.

Escribieron todos los casos:

El 3 en la B y la A;

El 5 en la C y la A;

El 6 en la C y la B;

El 9 en la D y la A;

El 10 en la D y la B;

El 12 en la D y la C.

Pregunta: ¿Qué relación hay entre el número y las columnas en las que está ubicado?

Retomaron el hecho que 3 está en B y en A y advirtieron que B está encabezado por el 2 y A está encabezado por el 1… ¡y 2 + 1 es 3 !

Similarmente: 5 está en C y A; los números que encabezan estas columnas son 4 y 1; ¡ y 4 + 1 es 5 !

Ante estas verificaciones y otras similares, los invité a formular una conjetura y enunciaron la siguiente:

Conjetura:

- *Los números que están en dos columnas, están en las columnas cuyas "cabezas de columna" suman ese número.*

¿Cómo demostramos o descartamos esta conjetura? Tratándose de una forma de construir la matriz de un conjunto finito de números, verificamos en todos los casos y no encontramos un contraejemplo, por lo cual, la conjetura es verdadera.

Pregunta: ¿Se puede generalizar la proposición enunciada en la conjetura?

Observaciones:

- El 7 está en tres columnas: la A, la B y la C; y la suma de los números que encabezan estas columnas es 1 + 2 + 4, que es 7.

- El 14 está en tres columnas: la B, la C y la D; y la suma de los números que encabezan estas columnas es 2 + 4 + 8, que es 14.

Conjetura:

- Los números que están en tres columnas, están en las columnas cuyas “cabezas de columna” suman ese número.

Esta conjetura fue demostrada como la conjetura anterior y se formuló la siguiente observación:

Observación:

- 15 es el único número que está en las cuatro columnas y la suma de los cuatro números que son cabeza de columna es 1 + 2 + 4 + 8 = 15.

Así se agotó el análisis para todos los números y para los cuatro casos (en una columna, en dos columnas, en tres y en cuatro). Teníamos información suficiente para enunciar las reglas de construcción de la matriz de números. Para llegar a enunciarlas, solicité que cada grupo haga el experimento de construir la matriz de números de la Figura 1, haciendo uso de las observaciones y proposiciones examinadas. Así lo hicieron, con apoyo de la intuición, y luego de propuestas, comentarios y ajustes, se llegó a las siguientes reglas:

Regla 1: Poner como cabeza de las columna A, B, C y D a los números 1, 2, 4 y 8 respectivamente.

Regla 2: Expresar cada uno de los otros once números como una suma de los números cabeza de columna, sin repetir sumandos.

Regla 3: Escribir cada uno de los otros once números solamente en las columnas correspondientes a los sumandos con los que fue expresado tal número usando la regla 2.

Algunos profesores manifestaron que con todo lo hecho ya estaba claro cuál era “el truco” para “adivinar” el número si alguien nos da como información en qué columnas de la matriz está. ¿Usted se anima a enunciarlo, amigo lector?

Llegamos a la siguiente regla para deducir (“adivinar”) de qué número se trata y sugirieron llamarla “regla clave”

Regla clave: Si se tiene la información de las columnas en las que está un número, entonces ese número es la suma de los números que encabezan tales columnas.

Se hicieron algunas verificaciones; por ejemplo, si mirando la matriz, alguien escoge el número 11 y da como información que está en la columnas D, B y A, “el adivinador” suma 8 + 2 + 1 y así “adivina” que el número escogido es el 11. Ciertamente, “el adivinador” debe tener en la memoria qué números encabezan las columnas A, B, C y D.

Luego de la alegría de haber descubierto el truco, surgieron nuevas preguntas:

Pregunta: ¿Por qué este truco funciona así?

Pregunta: ¿Se puede usar cualquier número como cabeza de lista y la regla clave sigue funcionando?

Fue fácil responder a la segunda pregunta haciendo algunas experiencias; por ejemplo con los números 1, 2, 3 y 4 como cabezas de lista. Pronto aparecieron los tropiezos, pues el 5 es 3 + 2 pero también es 4 + 1, lo cual significaría que finalmente se tendría que ubicar en las cuatro columnas… Además los números del 11 al 15 no pueden expresarse como suma de estas cabezas de lista, sin repetir sumandos.

Entonces surge la pregunta:

Pregunta: ¿Qué de especial tienen los números 1, 2, 4 y 8 para que todos los números naturales del 1 al 15 se puedan expresar usando a estos como sumandos y sin repeticiones?

Una primera observación fue la siguiente:

Observación: 2 es el doble de 1; 4 es el doble de 2; y 8 es el doble de 4.

Sugerí usar símbolos matemáticos para expresar esta observación. Así, escribieron:

$$2 = 2x1$$

$$4 = 2x2$$

$$8 = 2\ x4$$

Sugerí que observen la presencia muy especial, muy fuerte del número 2 y que esto se traduzca en la simbolización.

Luego de unos minutos llegaron a lo siguiente:

$$2 = 2x1 = 2$$

$$4 = 2x2 = 2^2$$

$$8 = 2\ x4 = 2x\ 2^2 = 2^3$$

Con lo cual una profesora observó que todos los números cabeza de columna pueden expresarse como potencias de 2:

$$1= 2^0$$

$$2 = 2^1$$

$$4 = 2^2$$

$$8 = 2^3$$

Pregunta: ¿Y para qué sirve esto si lo que tratamos de saber es por qué estos números son buenos para ser cabeza de columna?

Sugerí que recuerden que el sistema de numeración decimal que usamos para escribir los números naturales mayores que 9, en verdad son códigos que resultan de agrupaciones y reagrupaciones de diez en diez y que también pueden usarse códigos que resulten de las agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos de los elementos de un conjunto. En concreto, les pedí que escriban el código que expresa la cantidad de vocales de nuestro abecedario castellano, usando solamente agrupaciones de dos en dos y los símbolos 0 y 1. Llegaron al código correspondiente a cinco en el sistema de base dos (binario), como se muestra en la Figura 3.

Como puede observar, amigo lector, el código es 101 y las columnas, de derecha a izquierda, corresponden, según las agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos, respectivamente, a elementos sueltos (1); a óvalos sueltos que agrupan a dos elementos (0); y a rectángulos sueltos que agrupan a dos óvalos (1).

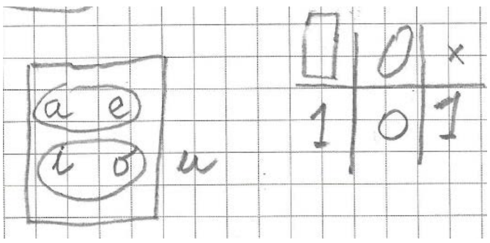

Figura 3. Codificación de un conjunto de cinco elementos, haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos

Les pedí que hagan algo análogo con el número 13. Tuvieron que añadir una columna más a la izquierda, considerando ahora rombos sueltos agrupando a dos rectángulos (Como se ve en la Figura 4). Tarea importante – espontánea y orientada – fue encontrar las similitudes entre los códigos binarios de los números 5 y 13, con la ubicación del 5 y el 13 en la matriz dada (en qué columnas están). Ciertamente, se usaron las observaciones ya hechas y las reglas que habíamos encontrado.

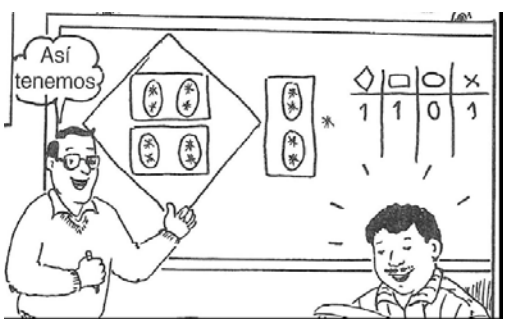

Figura 4. . Codificación de un conjunto de trece elementos, haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos.

Luego de una fase de exploración bastante animada, con codificaciones, decodificaciones y comparaciones, los grupos concluyeron que existe gran relación entre las columnas denominadas A, B, C y D y las columnas usadas al escribir códigos haciendo agrupaciones y reagrupaciones de dos en dos.

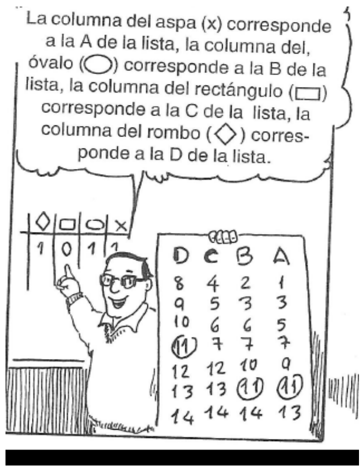

Figura 5. Correspondencia entre el código en base dos de un conjunto de once elementos, y la ubicación del número 11 en la matriz,

Así, el 13 está en las columnas D, C y A; y por otra parte, el 13 en base 2 (haciendo agrupaciones y reagrupaciones de 2 en 2) se codifica 1 1 0 1. Los 1 indican su presencia en la columnas D, C y A y el 0 su no presencia en la columna B. De esta manera, decir que un número está en las columnas D, C y A equivale a decir que se trata de un número que en base 2 se escribe 1101 y para "adivinar" de qué número se trata, basta decodificar y en cualquiera de los casos, eso se hace sumando $1 + 2^2 + 2^3$.

Así quedó aclarado el "misterio" del juego de "adivinar" el número pensado y propuse pasar a otro aspecto importante del pensamiento matemático: *crear*.

Propuse pensar en una manera de modificar el juego, haciendo alguna variación o añadido a la matriz dada. Surgieron dos ideas:

- ampliar la matriz dada escribiendo más números en las columnas
- hacer una matriz usando la base tres

Los grupos que optaron por la primera idea observaron que tendrían que usar por lo menos una columna más y superaron fácilmente la dificultad inicial de escribir el número cabeza de la nueva columna, que la llamaron E. Ud., amigo lector, puede hacer una pausa para encontrar tal número.

¡Claro! Es el 16. Con esta nueva columna, elaboraron la matriz correspondiente, con 31 números naturales, que es una solución del problema planteado al inicio de este artículo. No la escribo para dar paso a la satisfacción personal de los lectores, que estoy seguro podrán escribirla, luego de todo el análisis expuesto y disfrutar "adivinando" números que escojan sus amigos en esa matriz, sabiendo solamente en qué columnas está ubicado.

Los grupos que optaron por la segunda idea, consideraron cuatro columnas y pusieron como cabeza de columna a los números 1, 3, 9 y 27. Encontraron "sorpresas" – situaciones diferentes en relación a la experiencia usando base dos – al escribir los números en un arreglo rectangular y finalmente obtuvieron un conjunto adecuado de números de los cuales escoger para "adivinar".

Amigo lector, queda invitado a vivir estas experiencias.

Consideraciones finales

1. La experiencia didáctica muestra formas de estimular el *pensamiento matemático*, a partir de una situación lúdica, que encierra un problema matemático. Como lo dijimos al inicio del artículo, consideramos cuatro características fundamentales del pensamiento matemático, que las hemos destacado en la experiencia descrita y ahora nos referimos a ellas con más detalle:
   i. *Analizar*, lo cual conlleva observar; plantear(se) preguntas; examinar casos particulares; practicar el ensayo y error así como el tanteo inteligente; descubrir relaciones lógicas; buscar una visión global, una estructura.
   ii. *Conjeturar*, lo cual conlleva formular hipótesis y generalizar; es decir, ir más allá de los casos particulares (intuir "lo general en lo particular"); sistematizar y representar.
   iii. *Demostrar o descartar lo conjeturado*, lo cual conlleva resolver problemas; argumentar; hacer demostraciones; dar contraejemplos.
   iv. *Crear,* lo cual conlleva establecer conexiones dentro de la propia matemática y con otros campos del conocimiento; hacer contextualizaciones; formular hipótesis; inventar nuevos problemas.

2. La resolución y creación de problemas, así como la comprensión y elaboración de demostraciones de proposiciones, brindan excelentes oportunidades para desarrollar el pensamiento matemático, con el fuerte apoyo de la intuición.
3. Es muy importante que las experiencias de aprendizaje – en todos los niveles educativos – se desarrollen poniendo énfasis en el estímulo del pensamiento matemático. Así se contribuirá a generar una actitud científica de los estudiantes y a una formación para el autoaprendizaje, con espíritu crítico y creativo, lo cual es fundamental no solamente en la matemática, sino en los diversos campos del conocimiento y en la vida cotidiana.
4. Mención especial merece referirse al estímulo del pensamiento matemático en la formación de los futuros profesores y de los profesores en servicio. Es esencial que ellos vivan experiencias de aprendizaje en las que el desarrollo del pensamiento matemático predomine sobre el aprendizaje de reglas o de algoritmos, para que esta forma de aprender sea cultivada con sus estudiantes.