ISSN: 1815-0640
Número 65. Agosto 2022
Páginas 1-18

Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación

Sebastián Castañeda Martínez, Carolina Castañeda Martínez, Ligia Amparo Torres Rengifo

Fecha de recepción: 25/03/2022
Fecha de aceptación: 1/07/2022

Resumen	Este artículo presenta los resultados de una investigación pedagógica que busca favorecer un acercamiento al álgebra escolar, mediante la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación. Se realizó el diseño y puesta en acto de una propuesta de aula que articula aspectos didácticos, curriculares y matemáticos. Esta propuesta constó de dos situaciones, con nueve problemas aritméticos. Los análisis de resultados permiten inferir que los estudiantes de este ciclo de escolaridad identifican las relaciones entre las cantidades y representan en lenguaje algebraico la estructura de los problemas planteados al reconocer la relación de equivalencia. **Palabras clave**: Introducción al álgebra escolar, resolución de problemas aritméticos, ecuaciones reales de primer grado, pensamiento aritmético.
Abstract	This article presents the results of a pedagogical research that seeks to favor an approach to school algebra by solving arithmetic problems through the concept of equation. The design and implementation of a classroom proposal that articulates didactic, curricular and mathematical aspects was carried out. This proposal consisted of two situations, with nine arithmetic problems. The analysis of the results allows inferring those students at this school cycle identify the relationships between quantities and represent in algebraic language the structure of the problems posed by recognizing the equivalence relationship. **Keywords**: Introduction to school algebra, arithmetic problem solving, first degree real equations, arithmetic thinking.
Resumo	Este artigo apresenta os resultados de uma investigação pedagógica que procura promover uma abordagem da álgebra escolar através da resolução de problemas aritméticos através do conceito de equação. A concepção e implementação de uma proposta de sala de aula que articula aspectos didáticos, curriculares e matemáticos foi levada a cabo. Esta proposta consistia em duas situações, com nove problemas aritméticos. A análise dos resultados permite-nos inferir que os estudantes neste ciclo de escolarização identificam as relações entre quantidades e representam em linguagem algébrica a estrutura dos problemas colocados pelo reconhecimento da relação de equivalência. **Palavras-chave:** Introdução à álgebra escolar, resolução de problemas aritméticos, equações reais de primeiro grau, pensamento aritmético

1. Introducción

Este documento presenta los resultados de una investigación pedagógica realizada como trabajo de grado que se inscribe en la Línea de formación en Didáctica de las Matemáticas, del Programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Surge como una motivación para favorecer un acercamiento al álgebra escolar, en estudiantes de grado octavo, a través del concepto de ecuación mediante la resolución de problemas aritméticos, en estudiantes de la Institución Educativa Veinte de Julio, a través de una propuesta de aula basada en la resolución de problemas aritméticos.

Para esta propuesta, se toman en consideración algunos referentes conceptuales como Bednarz, Kieran y Lee (1996), centrando la atención en Bednarz y Janvier (1996), Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), Zill y Dewar (2012).

Estos referentes permitieron la construcción y consolidación de la propuesta de aula, ya que en primer lugar desde lo didáctico se logró establecer una categorización de problemas desde el más simple al más complejo según sus relaciones y dominio numérico, desde la perspectiva curricular se logra evidenciar la resolución de problemas como un proceso que permite construir y desarrollar significativamente el pensamiento de los estudiantes, por último, la perspectiva matemática define los conceptos que se utilizaron en la construcción de la propuesta de aula.

Para Socas (1997) dichas dificultades se originan en el microsistema educativo, es decir, en las relaciones entre estudiante, materia, profesor e institución escolar, las cuales han llevado a que sean un foco de estudio e investigación en Educación Matemática de gran importancia.

La falta de comprensión parece tener sus causas en la naturaleza misma de los objetos matemáticos, dado que, entender los conceptos matemáticos, las bases del cálculo, el lenguaje de los símbolos matemáticos y ser capaces de resolver problemas matemáticos, se puede convertir en un verdadero desafío para los estudiantes. Algunos de los problemas relacionados con la naturaleza y la falta de comprensión de los objetos matemáticos se deben a su alto nivel de abstracción, la adquisición del lenguaje particular de representación que está sometido a reglas exactas, (por ejemplo dificultad al momento de leer los enunciados de los problemas) y a la relación de los conceptos, que a su vez tienen diferente significado en el lenguaje común y en las matemáticas, además de conceptos que el estudiante escucha en su mayoría sólo en la clase de matemáticas, pueden ser mal entendidos y por ende ocasionar dificultades que impiden que los estudiantes se apropien de dicha área del conocimiento (Socas, 1997).

Particularmente, en la enseñanza y aprendizaje del álgebra, estas dificultades son categorizadas por Socas (2011) en cinco grandes dificultades, dos asociadas a la propia disciplina (complejidad de los objetos matemáticos y procesos de pensamiento matemático), una tercera relacionada con los procesos de enseñanza, la cuarta asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes y la quinta asociada a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Así mismo, Castro (1994) caracteriza las dificultades que se evidencian en los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje del álgebra como, dificultades intrínsecas al objeto (epistemológico), dificultades inherentes al propio sujeto (ontológico) y dificultades en las técnicas de enseñanza (didáctico).

Por su parte, en investigaciones como Gallardo y Rojano (1988), Filloy y Rojano (1984), se manifiesta que estas dificultades se presentan debido a una “ruptura” o un “corte didáctico” del pensamiento aritmético, en el cual es necesario operar lo representado, como por ejemplo, en el caso de la resolución de ecuaciones, operar las incógnitas, (pasar de tratar ecuaciones de tipo aritmético, que poseen solo una ocurrencia de la incógnita, a ecuaciones no aritméticas, con doble ocurrencia de la incógnita), para que se produzca una nueva construcción del conocimiento. En efecto, para dar paso al conocimiento algebraico es necesario romper con los conceptos y hábitos aritméticos, (romper con el plano de las cantidades para avanzar al plano de las relaciones), puesto que aunque el saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos, muchas veces estos modelos aparecen como obstáculos para el saber matemático nuevo.

Así pues, dicha ruptura se presenta como consecuencia de obstáculos didácticos, los cuales para Brousseau (1989) surgen de la enseñanza y por lo tanto se pueden evitar, pues impiden ver las cosas de una nueva manera. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, al presentarse esa ruptura, no significa que no se van a considerar los procesos matemáticos desarrollados por los estudiantes hasta el momento, sino que se abordará de tal manera que se propicie una reconstrucción y redefinición de los conceptos presentes en el pensamiento aritmético (operaciones, naturaleza de los números, etc).

Ahora bien, se tendrá en cuenta la Resolución de Problemas como una de las aproximaciones al álgebra expuestas por Bednarz, Kieran y Lee (1996) que mencionan los posibles tratamientos o vías de aproximación al álgebra, tales como “la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y matemáticos y la introducción de problemas funcionales.” (p. 8).

En este sentido, La resolución de problemas se presenta como una alternativa para la aproximación al álgebra, que permite diferenciar y caracterizar los problemas de tipo algebraico (transformar cantidades y encontrar relaciones entre las cantidades) y de tipo aritmético (buscar cantidades conocidas y desconocidas), es decir, que existe un puente significativo, puesto que los problemas aritméticos abordados desde lo algebraico, podrían influenciar una iniciación al álgebra más flexible, puesto que al analizar un problema tanto desde la aritmética como el álgebra, se pueden identificar nuevas características en la estructura algebraica, y además le permiten al estudiante apropiarse de esos conocimientos, para así cambiar esa visión que limitaba la enseñanza del álgebra sólo al estudio de estructuras algebraicas, que marcó fuertemente el currículo en los años 60’s con la influencia de la matemática moderna, y tuvo como consecuencia que en la mente del estudiante se concibiera la idea, que el aprendizaje del álgebra y las matemáticas en general se obtiene principalmente por la memorización de reglas y procedimientos, para cubrir la falta de comprensión.

Por lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorecer el acercamiento al álgebra escolar, en estudiantes de grado octavo de la Educación Básica de una Institución particular de la ciudad de Santiago de Cali, a través de la resolución de problemas aritméticos?

Se puede señalar, además, que el diseño de la propuesta de aula contribuye a cambiar la forma tradicional de enseñanza, (definición, ejemplo, ejercicio) que es una problemática expuesta por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) que afirman: "Si el estudio del álgebra se hace partiendo de expresiones simbólicas, como se ha hecho tradicionalmente, se está privando al alumno de la experiencia de modelación para llegar a esos sistemas simbólicos." (p.80). Por ello, se pretende propiciar en los estudiantes una forma activa y autónoma de aprender, desarrollar estrategias para afrontar individual y colectivamente problemas en contexto, sin que se dejen de aprender nuevos conceptos, lo cual aporta significativamente a sustentar la importancia del presente trabajo de investigación.

En consecuencia, este proyecto pretende contribuir a docentes interesados en este campo y a la formación de los estudiantes objeto de estudio, con el fin de aportar estrategias que permitan una aproximación significativa al álgebra por medio de la resolución de problemas a través del concepto de ecuación, dado que, a partir de las limitaciones que tengan los estudiantes en ciertos conceptos, hay que crear recursos que contribuyan a la superación de los estudiantes. Además, la propuesta que se presentó puede ser adaptada e implementada por docentes que busquen alternativas pertinentes para iniciar el álgebra en los estudiantes.

2. Marco Teórico

En este apartado, se proponen las perspectivas didáctica, curricular y matemática para consolidar y fundamentar algunos referentes conceptuales que sustentan la problemática planteada, el diseño de la propuesta de aula y análisis de los resultados obtenidos de su implementación, en estudiantes de grado octavo de la Educación Básica Secundaria.

2.1. Perspectiva Didáctica

En Bednarz y Janvier (1996), se procura esclarecer las condiciones de la evolución del razonamiento algebraico en un contexto de resolución de problemas, al ser esta una de las perspectivas más significativas desde la historia y enseñanza del álgebra, es decir, solucionan problemas que se habían resuelto sin álgebra, para después resolver los mismos problemas usando métodos algebraicos. Además, cabe resaltar que, a pesar del contexto de resolución de problemas se desestimó la transición entre los dominios aritméticos y algebraicos. En consecuencia, el álgebra fue despojada de toda significación, al darle más importancia a la manipulación simbólica que al uso como herramienta poderosa para resolver problemas.

En la investigación, se considera importante y pertinente la resolución de problemas como una aproximación al álgebra para analizar los problemas planteados inicialmente a los estudiantes, de tal forma que se gradúe la complejidad de estos problemas y observar un progreso en el estudiante. Lo anterior, tiene en cuenta los procedimientos disponibles que poseen los estudiantes para manipular estos primeros problemas presentados en el álgebra para entender mejor el paso de la aritmética al álgebra utilizando los conocimientos previos.

Así mismo, hay que tener presente que al introducir el álgebra desde la perspectiva de resolución de problemas se debe considerar una construcción sobre una aritmética consistente, debido a que los estudiantes tienen un pasado aritmético de 6 años que los precede, por tanto fueron expuestos a un grupo de problemas, que tienen una característica y naturaleza propia del pensamiento aritmético, de modo que, hay que identificar si estos problemas pueden motivar a los estudiantes para la construcción del pensamiento algebraico.

De igual modo, los estudiantes desarrollan estrategias, modelos y convicciones para resolver problemas, los cuales se ven reflejados cuando ellos se enfrentan a problemas algebraicos. En efecto estas concepciones desarrolladas en la aritmética son el punto en el cual surgen nuevas soluciones, estas concepciones pueden ser consideradas como obstáculos o como principios en la construcción del conocimiento, debido a que por una parte los estudiantes tienen arraigado una forma o estrategia para resolver problemas, lo cual puede presentar una resistencia para una evolución del pensamiento aritmético al algebraico. Por otro lado, esas concepciones pueden ayudar al estudiante a identificar estrategias más efectivas, para reconstruir los conocimientos previos de tal forma que se propicie un acercamiento al pensamiento algebraico.

Además, se deben determinar los criterios para entender el paso de la resolución de problemas aritméticos a los problemas algebraicos, para lo cual se tuvo en consideración los factores que podrían influir en el proceso de resolución como lo son el dominio numérico, la naturaleza de los datos conocidos o desconocidos y el contexto de la estructura de las relaciones involucradas. Por último, se tienen en cuenta los modelos y estrategias que desarrollan los estudiantes para resolver problemas con altos grados de complejidad.

El análisis de la complejidad del problema se determina gracias a la naturaleza del mismo, es decir, que a partir de las relaciones entre las cantidades se pueden encontrar el grado de dificultad para los estudiantes y la resolución posible de este. Los autores analizaron problemas de aritmética y de álgebra de varios grados con el objetivo de sistematizarlos. Por lo anterior se caracterizaron los problemas que se encuentran difíciles para los estudiantes, y se lograron identificar problemas relacionados con las cantidades presentadas y las relaciones entre estas.

Estas relaciones en la estructura del problema se pueden presentar de forma explícita, lo cual le permite al estudiante reconocer un camino de solución reconstruyendo el problema planteado, al operar cantidades conocidas, y también se da de forma implícita en el problema, y por tanto el estudiante tiene que reconocer las cantidades, asociarlas y encontrar una solución.

En efecto, se pueden analizar y detallar aspectos importantes relacionados con las dificultades para resolver problemas, entre ellos se tienen en cuenta el establecimiento de una relación entre los datos conocidos, si esta relación es implícita, se encontró que el estudiante organiza y opera cantidades conocidas y reconoce relaciones entre ellas con el fin de hallar las cantidades desconocidas. Además, se puede observar la dificultad que presentan los estudiantes al resolver problemas con dos tipos de relaciones (multiplicativa y aditiva), que constituye una compleja composición.

Por lo anterior, se identificaron diferencias entre problemas aritméticos y problemas algebraicos, de los cuales la naturaleza de las cantidades y sus relaciones permite evidenciar el primer paso de la aritmética al álgebra. En el caso de la aritmética los problemas planteados a los estudiantes son convexos, es decir, que pueden establecer relaciones fácilmente entre los datos conocidos. Por el contrario, en álgebra se plantean problemas desconvexos, en los cuales el estudiante no puede establecer una relación explícita entre las cantidades.

Por otra parte, en el análisis de los razonamientos de los estudiantes al resolver problemas algebraicos, se encontró que ellos lo reconstruyen y lo transforman en un problema convexo, es decir, que se organizan los datos conocidos y se encuentran vínculos para hallar los desconocidos. En consecuencia, se observan grandes diferencias en los razonamientos aritméticos por parte de los estudiantes al resolver problemas algebraicos antes de la introducción al álgebra, lo cual conlleva a que los estudiantes representen las cantidades y relaciones entre cantidades de distintas formas.

En conclusión, esta investigación permite entender el paso de los estudiantes para ir desde una solución aritmética a una algebraica. Para ello, se tiene presente la naturaleza en estos dos dominios y las diferencias entre el razonamiento aritmético y algebraico. Además, se pueden reconocer procedimientos aritméticos en la solución de los primeros problemas de tipo algebraico y en los que tienen un mayor grado de complejidad debido a la composición de varias relaciones. Este tipo de problemas rompen con procedimientos aritméticos a causa de su dificultad, y pueden ser utilizados para llegar al álgebra de tal forma que permita pensar en problemas que ayuden a la enseñanza y se gradúe el tipo de problema.

2.1. Perspectiva Didáctica

En esta perspectiva se analizaron Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2006), que promueven los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones algebraicas, indispensables para la realización del trabajo de investigación.

En este sentido, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), se propone una estructura que tiene como propósito fundamental desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes. Para desarrollar este pensamiento se propone un currículo que no concibe los contenidos como eje central en la enseñanza. El currículo debe ser visto como un dispositivo que articula varios elementos: Procesos generales, Conocimientos Básicos y Contextos.

Los procesos generales se relacionan con el aprendizaje y tienen como ejes fundamentales, el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Para objeto de este trabajo se centra la atención en la resolución y planteamientos de problemas, puesto que aparece como un proceso de pensamiento de gran importancia que debe tener todo sujeto que aprende matemáticas, debido a que favorece un acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias. Es un contexto de gran importancia para fomentar el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para aportar significativamente al sentido y al uso de las matemáticas.

La resolución y planteamiento de problemas en las más recientes propuestas curriculares se plantea como un eje central en el currículo de matemáticas, es decir, es un objetivo principal en la enseñanza y por ende parte integradora de la actividad matemática, además promueve un contexto que permita que los conceptos y herramientas sean aprendidos. Su importancia se debe a la manera en cómo los estudiantes adquieren confianza, desarrollan una mente curiosa e insistente, aumentan su capacidad para comunicar y procesar el pensamiento con mayor fluidez en el uso de las matemáticas a medida que resuelven problemas.

Así mismo, los estándares proponen una estructura desde una coherencia vertical y horizontal de las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes, categorizadas por grados de escolaridad, es decir, 1° a 3°, de 4° a 5°, de 6° a 7°, de 8° a 9°, de 10° a 11° y por tipo de pensamiento matemático. Para fines de este trabajo se tendrán en cuenta la coherencia vertical y horizontal del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de grado octavo a noveno, relacionados con el proceso de resolución de problemas en un contexto real.

2.1. Perspectiva Matemática

Como se mencionó anteriormente, existen dificultades en la naturaleza misma del álgebra, es decir, problemas de concepciones y conceptualizaciones de conceptos algebraicos (polinomio, ecuación, variable, etc.), es decir, que las dificultades del paso de la aritmética al álgebra no tienen su origen solamente desde la perspectiva didáctica. Por lo anterior se presentan conceptos netamente matemáticos acerca de los polinomios y las ecuaciones, las cuales son de vital importancia en la construcción de la propuesta didáctica, y el enfoque esperado desde la resolución de problemas en el paso de la aritmética al álgebra, pretende hacer que los estudiantes aborden estos conceptos.

2.1.1. Expresiones Algebraicas

Las variables están representadas por letras, para lo cual Zill y Dewar (2012) considera conveniente usar los símbolos x o y para expresar las variables, las cuales permiten hacer la construcción de expresiones algebraicas, por tanto, son consideradas como el resultado de operaciones (sumas, restas, multiplicaciones, etc.) de variables y números reales.

2.1.1. Polinomios

Los polinomios son una expresión algebraica, los cuales tienen una característica fundamental y es que su dominio son todos los reales, y además los valores para cada variable siempre representan números reales. Un polinomio de grado n en la variable x se representa de la siguiente forma:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ con $a_n \neq 0$, donde n es un entero no negativo y a_i =0,1,2,3,...,n son números reales.

2.1.1. Ecuaciones

Una ecuación es una relación de equivalencia que establece la igualdad entre dos expresiones algebraicas, específicamente cuando en una de las igualdades aparece una variable se dice que está en una ecuación de una sola variable, así:

(2x-4=2, 7x+3=5x -2, √(x-1)=4, etc)

En particular una ecuación polinómica está definida como:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$ con $a_n \neq 0$

En donde n es un entero no negativo y los coeficientes a_i=0,1,2,3,...,n son números reales siendo $a_n \neq 0$, y las raíces de la ecuación polinómica son los valores de x para los cuales se cumple la igualdad, es decir, 0=0. Particularmente en definida la ecuación lineal o de grado 1 a la ecuación cuyo exponente de la variable es n =1, siendo la ecuación general a_1 x+ a_0=0, de la cual despejando la variable x se tiene x=(-a_0)/ a_1.

3. Diseño de la propuesta de Aula.

La propuesta de aula consta de dos situaciones en contexto real, la primera situación está relacionada con el día de Halloween y la segunda situación está relacionada con la Navidad. Dicha propuesta está dirigida a estudiantes de grado 8° de la Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio de la ciudad de Santiago de Cali. Las situaciones se diseñaron a partir del marco conceptual presentado en el segundo capítulo, que recalca la importancia de la resolución de problemas, como una alternativa para favorecer el tránsito de la aritmética al álgebra.

La tabla 3 contiene la estructura de la propuesta de aula, es decir, el número de situaciones que la componen, y a partir de cada situación se definen la cantidad de problemas que se realizan y y las respectivas preguntas que tiene cada uno. La tabla se realizó con el fin de estructurar y organizar la propuesta de aula según la complejidad de los problemas de cada situación.

Situaciones	Problemas	Tareas
Situación 1: Fiesta de los niños y problemas aritméticos	**Problema 1**: Voy a la fiesta de Halloween y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.	**Tarea 1:** No. de preguntas: 7
	Problema 2: Recojo dulces y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.	**Tarea 2:** No. de preguntas: 7
	Problema 3: Nos disfrazamos para Halloween y resolvemos problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.	**Tarea 3:** No. de preguntas: 10
	Problema 4: Disfruto de los dulces recogidos y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.	**Tarea 4:** No. de preguntas: 6
Situación 2: Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos.	**Problema 1:** Preparo buñuelos y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.	**Tarea 1:** No. de preguntas: 5
	Problema 2: Preparo arequipe y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.	**Tarea 2:** No. de preguntas: 5
	Problema 3: Preparo arroz con leche y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.	**Tarea 3:** No. de preguntas: 5
	Problema 4: Preparo dulce de leche cortada y resuelvo problemas de composición homogénea de dos relaciones multiplicativas	
	Problema 5: Preparo natilla y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones	

Tabla 1. Situaciones, Problemas y Tareas de la Propuesta de aula

La tabla 2, permite describir como está estructurado cada uno de los problemas desde el dominio numérico, la naturaleza de las cantidades, las relaciones entre las cantidades y las relaciones implícitas.

Situaciones	Problemas	Análisis
Situación 1	Problema 1 y Problema 2	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Total de estudiantes que asistieron / Total de dulces **Datos desconocidos:** Estudiantes que asistieron / dulces recogidos en los grados 3°,4°,5°. **Estructura Relaciones:** Composición homogénea con dos relaciones aditivas. **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 3	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Gasto total de la compra de Pelucas Máscaras y Maquillaje. **Datos desconocidos:** Costo de las Pelucas, Máscaras y Maquillaje. **Estructura Relaciones:** Composición homogénea con dos relaciones multiplicativas **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 4	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Total de dulces entre los tres estudiantes. **Datos desconocidos:** Dulces de Carolina, Karen y Sebastián. **Estructura Relaciones:** Composición no homogénea de dos relaciones. **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
Situación 2	Problema 1	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Total de tazas de masa de buñuelos. **Datos desconocidos:** Cantidad de tazas de agua, de queso costeño y de maizena. **Estructura Relaciones:** Composición homogénea con dos relaciones aditivas **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 2 Problema 4	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números racionales positivos. **Datos conocidos:** Total de tazas de arequipe / Total de tazas de dulce de leche cortada. **Datos desconocidos:** Cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche / Cantidad de tazas de azúcar, de zumo de limón y de leche. **Estructura Relaciones:** Composición homogénea con dos relaciones multiplicativas. **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 3	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números naturales. **Datos conocidos:** Total de tazas de arroz con leche. **Datos desconocidos:** Cantidad de tazas de arroz, de azúcar y de leche. **Estructura Relaciones:** Composición no homogénea con dos relaciones **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 5	**Dominio Numérico:** Conjunto de los números racionales positivos. **Datos conocidos:** Total de tazas de natilla. **Datos desconocidos:** Cantidad de tazas de fécula de maíz, de azúcar y de leche. **Estructura Relaciones:** Composición no homogénea con dos

		relaciones **Relación implícita:** Cantidad total en relación con sus partes.

Tabla 2. Análisis de cada problema de la propuesta de aula

La tabla 3, permite evidenciar los contenidos matemáticos y los desempeños que se esperan desarrollar en la propuesta de aula, permitiendo una estructuración apropiada para la organización de los problemas y tareas planteados en esta propuesta.

Situaciones	Contenidos Matemáticos	Desempeños
Situación 1: Fiesta de los niños y problemas aritméticos	Enteros positivos Expresiones algebraicas Ecuaciones de primer grado con una incógnita	Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de problemas. Construir expresiones algebraicas con una o dos operaciones y con solo un valor desconocido, referido a una situación problema. Identificar en situaciones problema cantidades conocidas y desconocidas. Identificar las relaciones que se presentan entre las cantidades en una situación problema. Establecer relaciones de equivalencia a partir de situaciones problemas. Representar la informa que brindan situaciones problemas por medio de expresiones algebraicas (ecuación).
Situación 2: Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos	Racionales positivos Expresiones algebraicas Ecuaciones de primer grado con una incógnita	Identificar la posibilidad de crear varias expresiones algebraicas equivalentes que representan una situación problema. Construir a partir de una situación problema, una expresión algebraica que evidencie cada una de las relaciones inmersas Construir expresiones algebraicas con una o dos operaciones y con solo un valor desconocido, referido a una situación problema.

Tabla 3. Contenidos matemáticos y desempeños de las Situaciones de la Propuesta de aula.

3.1 Propósito de la Propuesta de aula

El propósito de la propuesta de aula es acercar a los estudiantes de grado octavo de una forma significativa al álgebra por medio de la resolución de problemas aritméticos, para el cual se establecen los propósitos de cada situación así:

La situación 1 pretende que los estudiantes comprendan el enunciado de un problema, por medio de una serie de preguntas orientadoras que permitan una interpretación acertada, y logren resolverlo. Asimismo, se tendrán en cuenta los pasos para resolver un problema propuestos por Polya (1845) y las heurísticas que se pueden presentar al momento de resolver un problema como el ensayo y error, realizar diagramas o tablas, etc. (Schoenfeld, 1985). A continuación, se presenta la situación 1, con cada uno de los problemas.

Situación 1. Fiesta de los niños y problemas aritméticos

En el mes de octubre, en muchos países se realizan actividades dedicadas a los niños y niñas. Entre esas actividades están: compartir dulces y colocarse el disfraz de su personaje favorito. La Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio no es la excepción. Por ello, los profesores de primaria realizan actividades acordes a esta fecha. Particularmente, la profesora Mayerleny acompaña a sus estudiantes de grado 3°, 4° y 5° de primaria disfrazados a pedir dulces por los salones. Ayuda a la profesora a resolver las situaciones que se le presentan:

Problema 1: Voy a la fiesta de Halloween y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

La profesora Mayerleny necesita saber cuántos estudiantes asistieron al colegio en los grados 3°, 4° y 5° antes de comenzar la actividad de pedir dulces por los salones. Si se sabe que en los tres grados asistieron 90 estudiantes, y el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°. ¿Cuántos estudiantes asistieron en cada grado?

Problema 2: Recojo dulces y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

Los grados 3°, 4° y 5° en compañía de la profesora Mayerleny recogieron 300 dulces. Los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°, y los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que los estudiantes de grado tercero. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Problema 3: Nos disfrazamos para Halloween y resolvemos problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.

La profesora Mayerleny ayudó a disfrazar a los niños de grado 3º, para lo cual los dividió en tres grupos, los que querían usar pelucas, los que querían usar máscaras y los que querían pintarse la cara con maquillaje. La profesora en total gastó $94.500. Si las máscaras cuestan el doble que el maquillaje y las pelucas cuestan el triple de las máscaras. ¿Cuánto tiene que pagar cada grupo?

Problema 4: Disfruto de los dulces recogidos y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

La profesora Mayerleny accidentalmente juntó los dulces de Carolina, Karen y Sebastián, estudiantes de grado 4º. Ayúdala a saber cuántos dulces tenía cada uno, sabiendo que entre los tres estudiantes hay 147 dulces. Si Carolina tiene tres veces tantos dulces como Sebastián y Karen tiene 28 dulces más que Carolina. ¿Cuántos dulces tiene cada estudiante?

En la situación 2 se espera que el estudiante logre resolver el problema, de forma directa, es decir, con pocas preguntas orientadoras en los tres primeros problemas y que solucione los problemas 4 y 5 sin ningún tipo de ayuda u orientación. Lo anterior, con el objetivo de observar el progreso del estudiante al resolver problemas, en el sentido que él logre ver la estructura algebraica y la manipule para resolver el problema. Por otra parte, el dominio numérico son los racionales positivos en contraste con la situación 1 que se trabajan los enteros positivos. Además, se pretende que los estudiantes logren identificar expresiones algebraicas que representen las relaciones expuestas en cada problema y logren resolverlo a partir de esta expresión. A continuación, se presenta la situación 1, con cada uno de los problemas:

Situación 2. Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos

La navidad es una fecha en la que tiene lugar comidas especiales que se realizan para estar en familia y compartir momentos agradables. La institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio propuso recetas para la elaboración de un plato navideño que consta de buñuelos, arroz con leche, arequipe, leche cortada y natilla. Los estudiantes de la Institución y las familias ayudaron a preparar cada una de las recetas que hacen parte del plato navideño y pasar un momento agradable en familia. A continuación, se presentan las recetas que realizaron algunas familias.

Problema 1: Preparo buñuelos y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

La abuela Ana quiere preparar 7 tazas de masa de buñuelos, para la cual se necesita una cierta cantidad de agua, de queso costeño y de maizena. Si la cantidad de agua tiene una taza más que la cantidad de queso costeño y la cantidad de maizena tiene 2 tazas más que la cantidad de agua, ¿qué cantidad se necesita de cada ingrediente para que tú y tu familia puedan hacer esta receta en casa?

Problema 2: Preparo arequipe y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.

Daniela en compañía de su madre desean preparar una receta de arequipe, ayúdales a encontrar las cantidades exactas de cada uno de los ingredientes de acuerdo con la información que se presenta a continuación:

Para preparar 4 tazas de arequipe se necesita una cierta cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche. Si se sabe que la cantidad de tazas de azúcar es 3 veces la cantidad de tazas de bicarbonato y la cantidad de tazas de leche es 4 veces la cantidad de azúcar, ¿qué cantidad de tazas se necesita de cada ingrediente para que Daniela y su madre puedan preparar la receta?

Problema 3: Preparo arroz con leche y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

Una familia desea preparar 10 tazas de arroz con leche, para lo cual se necesita una cierta cantidad de arroz, de azúcar y de leche. Si se sabe que la cantidad de arroz tiene 2 tazas más que la cantidad de azúcar y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de arroz. ¿Qué cantidad de arroz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?

Problema 4: Preparo dulce de leche cortada y resuelvo problemas de composición homogénea de dos relaciones multiplicativas.

Doña Marlene quiere preparar 11 tazas de dulce de leche cortada, para lo cual se necesita una cierta cantidad de azúcar, de zumo de limón y de leche. Si se sabe que la cantidad de azúcar es 5 veces la cantidad de zumo de limón y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de azúcar. ¿Qué cantidad de azúcar, de zumo de limón y de leche se necesita para preparar la receta?

Problema 5: Preparo natilla y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

Mariana desea preparar 5 tazas de natilla, para lo cual se necesita una cierta cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche. Si se sabe que la cantidad de fécula de maíz es 2 veces la cantidad de azúcar y la cantidad de leche tiene 5/2 de taza más que la cantidad de fécula de maíz. ¿Qué cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?

4. Discusión de resultados y algunas conclusiones

Las conclusiones presentadas a continuación están relacionadas con la documentación desde tres referentes: el curricular, el matemático y el didáctico; relacionadas con el diseño de la propuesta de aula y la implementación y análisis de los resultados.

Se puede concluir que, se logró documentar la problemática desde la perspectiva didáctica en tanto se identificaron las dificultades que se presentan en los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra, las cuales se categorizaron en tres tipos (Castro, 1994). Por otra parte, se describe la necesidad de una ruptura entre el pensamiento aritmético y algebraico, para lo cual se considera pertinente disminuir esta ruptura, es decir, que sea más suave entre los dos tipos de pensamiento. Adicional a eso, se establecen las diferentes alternativas propuestas por Bednarz, Kieran y Lee (1996), de las cuales se escogió la resolución de problemas como una alternativa significativa, que puede acortar la brecha presente entre los dos tipos de pensamiento. Lo anterior, es un aspecto que se logra a partir de la propuesta de aula. Particularmente, se consideran las investigaciones de Bednarz y Janvier (1996), para categorizar los tipos de razonamiento que presentan los estudiantes al resolver problemas que se pueden resolver tanto aritmética como algebraicamente.

Desde la perspectiva curricular del Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006), se logró identificar características del pensamiento numérico y del pensamiento algebraico, que promueven los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nociones algebraicas, haciendo énfasis en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Se incluye el trabajo a través de la resolución de problemas procedentes de la vida diaria que fomentan el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamientos y para aportar significativamente al sentido y al uso de las matemáticas. Finalmente, los elementos que fueron de gran importancia para documentar y articular la propuesta de aula son los Procesos Generales, Conocimientos Básicos y Contextos, centrando la atención en la resolución y planteamientos de problemas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y los contextos de la vida diaria respectivamente.

El estudio matemático permitió establecer las características fundamentales de lo que son las expresiones algebraicas con el fin de articular la propuesta de aula a las representaciones simbólicas algebraicas presentadas en esta, asimismo las representaciones que pueden plantear los estudiantes para representar y resolver un problema. Además, se define el concepto de ecuación, el cual es de gran importancia al representar las equivalencias entre las cantidades. Lo anterior, con el objetivo de que los estudiantes resuelvan problemas utilizando las representaciones en lenguaje algebraico y comprender su significado en el contexto del problema.

Por otra parte, Los referentes conceptuales fueron importantes a la hora del diseño puesto que se logra articular lo planteado en los referentes curriculares, más específicamente el contexto, ya que la perspectiva curricular dice que toda la actividad matemática debe ser desarrollada en contexto. Por lo anterior, se reconocen los contextos de Halloween y de la Navidad, significativos para los estudiantes de la Institución Educativa en Santiago Cali - Colombia, debido a las proximidades de las fechas y por las actividades que se realizan en la institución.

Además, para la construcción y diseño de la propuesta de aula se tuvo en cuenta la investigación realizada por Bednarz y Janvier (1996), específicamente las categorizaciones de los problemas según el tipo de relación, es decir, relaciones de composición homogénea con dos relaciones aditivas, relaciones de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas y relaciones de composición no homogénea de dos relaciones, cabe resaltar que el orden en el que se presentan las relaciones van de menor a mayor complejidad. Por lo anterior, la propuesta de aula se estructuró de la siguiente manera: La situación 1, consta de 4 problemas, los dos primeros presentan una relación de composición homogénea de dos relaciones aditivas, el tercer problema presenta una relación de composición homogénea de dos relaciones multiplicativas y el cuarto problema presenta una relación de composición no homogénea de dos relaciones. La situación 2, consta de 5 problemas, el primer problema presenta una relación de composición homogénea con dos relaciones aditivas, el segundo y el cuarto problema presentan una relación de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas, mientras que el tercero y quinto problema presentan una relación de composición no homogénea entre dos relaciones.

Asimismo, la complejidad de los problemas está determinado por el dominio numérico, ya que es más complejo realizar la resolución de un problema donde las cantidades desconocidas están determinadas por números racionales positivos, y el estudiante verá la necesidad de utilizar las expresiones algebraicas y ecuaciones para determinar dichas cantidades, dado que por ensayo y error no se puede hacer uso del tanteo de una forma directa como en el dominio de los números enteros positivos.

Ahora bien, se puede concluir que la situación 1 permitió un acercamiento al álgebra, debido a que los estudiantes lograron comprender el problema y la gran mayoría logró resolverlo utilizando diferentes métodos, como lo son encontrar un número ficticio y a partir de él generar las otras cantidades. Además, los estudiantes tuvieron presente las relaciones entre las partes (estudiantes de cada grado) y el todo (total de estudiantes). Por otro lado, es de gran importancia que la mayoría de los estudiantes identificaran las relaciones entre las cantidades, y que no le dieran el valor de cantidad, lo cual parece indicar que se está presentando una ruptura entre el pensamiento aritmético para introducirse en un pensamiento algebraico. Además, los estudiantes encontraron la representación simbólica algebraica del problema y utilizaron esta representación algebraica para probar por ensayo y error los números que cumplen con las relaciones; sin embargo, los estudiantes no operaron la ecuación que permite resolver el problema.

En este sentido, en la situación 2, los estudiantes en su gran mayoría utilizaron representaciones algebraicas que les permitieron resolver los problemas, lo anterior debido a la necesidad de utilizar este sistema de representación ya que el método de ensayo y error o encontrar un numero ficticio que genere las otras cantidades es más complejo de hallar debido a que se presentan cantidades racionales. Además, cabe resaltar que a pesar de no resolver de forma correcta la ecuación, los estudiantes están pensando algebraicamente, ya que en primer lugar comprenden las relaciones entre las cantidades y la relación de equivalencia presentado por el signo igual, asimismo, logran generar una ecuación que modela el problema presentado.

A lo largo del trabajo de investigación se presentaron avances significativos en los estudiantes y que en una primera instancia ninguno resolvió el problema haciendo uso de una ecuación, es decir, que en un principio se observó que el pensamiento de los estudiantes estaba orientado hacia los valores numéricos a pesar de tener en cuenta las operaciones. Al final se evidencia que la gran mayoría utiliza ecuaciones para resolver el problema, es decir, que están pensando analíticamente en cómo solucionar el problema.

Por otra parte, se observó que las gráficas y tablas presentadas ayudaron a la comprensión del problema, y de cómo pasar de un lenguaje natural a un lenguaje simbólico algebraico, ya que en primera instancia se identificaba la cantidad desconocida de la cual dependían las demás cantidades, para este caso se denoto x como la incógnita del problema, la cual fue identificada por los estudiantes y a partir de esta realizaron la construcción de la ecuación que modelaba el problema. Además, las gráficas de las relaciones permitieron comprender a los estudiantes las relaciones presentes en el problema y lograr una comprensión de este.

Además, las ecuaciones presentadas en la propuesta de aula en primer lugar ayudaron a comparar expresiones previas o a reemplazar valores que les permitieron a los estudiantes identificar las cantidades desconocidas. Del cual, se puede inferir que los estudiantes comprendieron la estructura de la ecuación en relación con el problema y también al identificarla como una herramienta que permite estructurar y solucionar un problema.

Finalmente, se logra dar respuesta a la pregunta de investigación porque la propuesta de aula a través del contexto empleado en cada situación (Fiesta de los niños y problemas aritméticos y Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos) permite a los estudiantes tener un primer acercamiento a conceptos y proceso relacionados con el álgebra, como las relaciones entre las cantidades, las relaciones de dependencia, y las relaciones de equivalencia; por lo tanto, se logra favorecer un acercamiento al algebra escolar, en estudiantes de grado octavo, a través del concepto de ecuación mediante la resolución de problemas aritméticos.

5. Algunas reflexiones didácticas

En primer lugar, el lenguaje utilizado en el diseño de los problemas en cada situación debe ser claro para el estudiante y debe ser acorde al grado de escolaridad, por tal motivo es recomendable que en el diseño de la propuesta se cuente con la colaboración de por lo menos dos estudiantes que tengan las características de la población a la que va dirigida la propuesta para desarrollar cada situación.

Además, Se considera de gran importancia que el docente tenga en cuenta la estructura de los problemas aritméticos que se van a presentar en el aula, puesto que permiten un acercamiento suave entre el pensamiento aritmético y el algebraico, asimismo, el docente tenga la capacidad de resignificar los conocimientos previos del estudiante, ya que el estudiante ha pasado la mayor parte del tiempo desarrollando el pensamiento numérico.

Por otra parte, se espera que los docentes de matemáticas tengan en cuenta la resolución de problemas como un proceso que permite desarrollar en el estudiante de forma significativa pensamiento matemático en el estudiante, en particular desarrollar pensamiento algebraico a partir de la resignificación de conceptos desde el pensamiento aritmético.

Además, los contextos presentados en este trabajo fueron significativos para los estudiantes de la Institución Educativa de Santiago de Cali, por esto para trabajar desde la resolución de problemas es necesario abordarla desde un contexto significativo para los estudiantes, en este caso se presentaron dos situaciones, la primera situación con el Halloween y la segunda situación basada en la Navidad. Las anteriores pueden motivar al estudiante para resolver los problemas y las dota de un significado para el estudiante.

De igual forma, Es conveniente que el dominio numérico sean los números enteros, ya que los estudiantes presentaron dificultades al realizar operaciones entre números racionales, lo que puede causar dificultades en la representación simbólica algébrica, debido a que los estudiantes tienen arraigado el conjunto de los números enteros. Por lo anterior, es pertinente que de ser abordado este dominio se realice un acompañamiento sobre cómo se interpretan y operan los números racionales.

Por último, es conveniente realizar pocas preguntas por problema, debido a que los estudiantes cuando ven lo extenso de la actividad se condicionan y no se interesan por hacerla pues piensan que no la van a terminar. Además, puede causar confusiones al momento de cómo comprender el problema.

6. Proyecciones del trabajo de investigación

En el desarrollo de este trabajo surgieron interrogantes que estaban por fuera del alcance del objetivo planteado. Por lo tanto, se presentan a continuación y se sugieren para trabajos posteriores:

¿Qué resultados se pueden obtener en el desarrollo del pensamiento algebraico si se diseña una propuesta de aula que integre material digital como por ejemplo Excel, GeoGebra, Scratch, etc?

¿Cómo se podría diseñar una propuesta de aula que permita al estudiante la resolución y comprensión de una ecuación que representa la estructura de un problema?

¿La resolución de problemas se podría utilizar para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra temprana?

Referencias bibliográficas

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N y Janvier, B. (1996). Surgimiento y desarrollo del álgebra como una herramienta en la solución de problemas. Continuidad y discontinuidad con aritmética. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Aproximaciones al álgebra*. *Perspectivas para la investigación y enseñanza* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1989), Les obstacles ´epist´emologiques et la didactique des math´ematiques. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits, Les Editions Agence d'ARC*.41-63. Quebec.

Castro, E. (1994). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años). [Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada]. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/25009

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. L'Educazione Matematica, 3, 278-306.

Gallardo, A., y Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. Researchs in Didactique dec Mathématiques, 9, 155- 188.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares para matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. (Academic press: Orlando, FL.)

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números, revista de didáctica de las matemáticas, 77, 5-34.

Zill, D. G., y Dewar, J. M. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (3ra. edición.). México: McGraw Hill.

Castañeda Martínez Sebastián: Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Universidad del valle). Estudiante de Maestría en Educación Matemática. (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla). Colombia sebastian.castanedam@alumno.buap.mx

Castañeda Martínez Carolina: Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Universidad del valle). Estudiante de Maestría en Matemática Educativa. Docente de primaria (Colegio Hispanoamericano). Colombia castaneda.carolina@correounivalle.edu.co

Torres Rengifo Ligia Amparo: Profesora del Área de Educación Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali – Colombia. ligia.torres@correounivalle.edu.co