UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union
http://asenmacformacion.com/ojs/index.php/union/index

ISSN: 1815-0640
Número 45. Marzo 2016
Página 76-95

Proposição de Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação

Josélia Euzébio da Rosa, Ademir Damazio, Josiane Cruz Goularte Dorigon

Fecha de recepción: 11/03/2014
Fecha de aceptación: 20/01/2016

Resumen	Es ese trabajo fue investigada la introducción del concepto de ecuación en las proposiciones desarrolladas por Davýdov y sus colegas. La investigación de naturaleza teórica fue desarrollada con base en presuposiciones de la Teoría Histórico-cultural. Durante el análisis de las proposiciones, fueron destacados multiplex relaciones en las proposiciones de Davýdov entre las significaciones aritméticas, geométricas y algébricas en nivel teórico. Características esenciales fueron reveladas en el movimiento entre las dimensiones particular, singular y universal en el procedimiento de ascensión del abstracto para el concreto. Por Davýdov, las ecuaciones son presentadas partiendo de situaciones de análisis interpretadas por medio de esquemas en relación parte-todo. **Palabras clave**: Proposición de Davydov. Relación *todo-partes*. Ecuación.
Abstract	In this work, the introduction of equation concept in the propositions for teaching developed by Davýdov and his co-workers was investigated. The research is theoretical and was developed based on the assumptions of Historical Cultural Theory. Along the analysis of propositions, multiple relations were highlighted on the propositions by Davydov, among arithmetic, geometric and algebraic significations in theoretical level. Essential characteristics were revealed in the movement among particular singular and universal dimensions in the procedure of ascension from abstract to the concrete. By Davýdov, the equations are represented from situations of analysis interpreted by schemes relative to the whole-part relationship. **Keywords**: Proposition by Davydov. Whole-part relationship. Equation.
Resumo	Neste trabalho investigou-se a introdução do conceito de equação conforme proposição de ensino, desenvolvida por Davýdov e colaboradores. A pesquisa, de natureza teórica, foi desenvolvida com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural. Durante a análise das proposições, destacaram-se as múltiplas relações na proprosição davydoviana entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas em nível teórico. Foram reveladas as características essenciais no movimento entre as dimensões particular, singular e universal no procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Em Davýdov, as equações são apresentadas a partir de situações de análise, interpretadas por meio de esquemas referentes à relação *parte-todo*. **Palavras-chave:** Proposição davydoviana. Relação *todo-partes*. Equação.

1. Introdução

A introdução do conceito de equação foi investigada na proposição de ensino desenvolvida por Davýdov e colaboradores. De acordo com Galperin, Zaporózhets, Elkonin (1987) e Rosa (2012), Davýdov e colaboradores, seguidores de Vygotski, elaboraram uma proposta para o ensino de Matemática que expressa os princípios da Teoria Histórico-Cultural.

A partir dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, no ensino, os conceitos devem ser organizados de forma orientada do geral e universal para o particular e singular no procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Mas, em que consiste organizar o ensino a partir destes pressupostos?

De acordo com Jardinetti (1996), abstrato e concreto manifestam-se no método dialético como uma tendência no processo de conhecimento. Concreto e abstrato são momentos de pensamentos diferentes de um mesmo objeto.

O procedimento em que se eleva do abstrato ao concreto está apoiado na formação do pensamento teórico, composto pelas dimensões universal, particular e singular do conhecimento. O concreto, como ponto de partida, é o aspecto sincrético dado empiricamente. Neste momento do processo de cognição, o pensamento identifica os aspectos essenciais do objeto e extrai as relações essenciais, universais, que vêm a serem as abstrações teóricas. Estas constituem as mediações que possibilitam a superação do aspecto sincrético do objeto de conhecimento e proporcionam um salto qualitativo, no período analítico, para o concreto como ponto de chegada. O concreto como ponto de chegada, ou concreto como síntese, é um nível superior atingido pelo pensamento no processo de conhecimento: trata-se das suas múltiplas determinações (Jardinetti, 1996).

Considerar esses momentos de pensamento, no ensino, requer um movimento específico. Deste modo, o objetivo, na presente investigação, foi compreender o movimento conceitual inerente a uma proposição fundamentada nos pressupostos da Teria Histórico-Cultural. Especificamente, o movimento conceitual apresentado por Davýdov e colaboradores para introdução ao ensino do conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental I (Segundo ano escolar).

Os dados da pesquisa, de natureza teórica, foram extraídos do livro didático davydoviano para o segundo ano do Ensino Fundamental (Давыдов, et al. 2012) e do respectivo livro de orientação ao professor (Горбов, Микулина, Савельева, 2009). O material, originalmente escrito na língua russa, foi traduzido para a língua portuguesa por Elvira Kim. No livro didático são apresentadas as tarefas, que correspondem no contexto educacional brasileiro, aos exercícios ou atividades, para serem desenvolvidas pelos estudantes. No livro de orientações constam os direcionamentos teórico-metodológicos para o professor desenvolver as tarefas do livro didático. Ambos foram elaborados com base nos resultados das investigações realizadas por Davýdov e colaboradores, em sala de aula, por mais de vinte e cinco anos.

Foram selecionadas quatro tarefas davydovianas que representam a síntese do movimento conceitual adotado por Davýdov e colaboradores para introdução do conceito de equação no segundo ano do Ensino Fundamental. Tais tarefas são apresentadas, no presente artigo, de modo a colocar o leitor em atividade, por meio de perguntas que o levem a pensar nas possíveis respostas. Durante a análise das tarefas foram reveladas as múltiplas relações entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas em nível teórico. Em Davýdov, as equações são apresentadas a partir de situações de análise interpretadas por meio de esquemas referentes à relação *parte-todo*. Tal relação é representada na forma algébrica e constitui o modelo universal de equação referente às operações de adição e subtração, conforme se apresenta na sequência. Vale ressaltar que há todo um movimento conceitual que antecede a introdução do conceito de equação em Davýdov desde o primeiro ano escolar. Neste trabalho, apresentamos apenas um recorte do mesmo. Para os interessados na totalidade das tarefas recomendamos as seguintes leituras: Rosa (2012), Madeira (2012), Alves (2012), Matos (2012), Dorigon (2012), Silveira (2012), Crestani (2012), Souza (2013) e Rosa, Damazio e Alves (2013).

2. Análise do objeto de estudo

Na presente seção descrevemos quatro tarefas extraídas do livro didático davydoviano e as explicamos com base no manual de orientação ao professor. Concomitantemente, procedemos às reflexões teóricas com base nos Fundamentos da Teoria Histórico-Cultural. Tais tarefas fazem parte de um sistema mais amplo que se inicia, na proposição davydoviana de ensino, desde o primeiro ano escolar. Os elementos de álgebra, aritmética e geometria já foram introduzidos, nas tarefas precedentes, a partir do estudo das relações entre grandezas discretas e contínuas (ROSA, 2012). As tarefas apresentadas na sequência contemplam a sistematização da relação parte e todo, já abordada nas tarefas precedentes no plano objetal (Rosa, Damazio e Alves, 2013).

<u>Tarefa 1:</u> Analise o esquema (Figura 1) e escreva as *partes* e o *todo* nos quadros abaixo da igualdade a + b = c (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Figura 1: Tarefa 1 – Esquema todo-partes e representação algébrica
Fonte: Elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise do esquema é possível concluir que treze (13) é o valor do *todo*. Então, qual é o valor das duas partes que compõem o *todo*? Inicialmente faz-se necessário identificar qual das significações algébricas, ***a***, ***b*** ou ***c***, representa o *todo* (13) na relação *parte-todo* expressa na igualdade ***a + b = c*** (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Igualdade, de acordo com Pereira (1986, p. 123), "é o conjunto de duas expressões do mesmo valor unidas pelo sinal = (de igual) [...] dois ou mais termos são iguais quando são exatamente similares em grandeza e quantidade". Quanto aos membros da igualdade, estes "são as expressões ou grandezas separadas pelo sinal de igualdade. O elemento à esquerda do sinal de igualdade é o primeiro membro e o que está à direita é o segundo membro da igualdade" (Pereira, 1986, p. 149).

Na igualdade ***a + b = c***, ***a + b*** constituem o primeiro membro da igualdade e ***c*** o segundo membro da igualdade. Tal igualdade é expressa por meio da operação de adição, a mais simples e da qual todas outras operações dependem (Caraça, 1951). Ao número ***a*** dá-se o nome de *adicionando,* este representa o papel passivo da operação. O número ***b*** é denominado *adicionador:* desempenha o papel ativo. Os dois são as *parcelas* da adição (Caraça, 1951).

Na tarefa em análise, as *partes* juntas (**a** e **b**) compõem o *todo*. A operação que se utiliza para determinar o *todo* a partir das *partes* é a adição. Deste modo, o *todo* é registrado, na operação da adição, após a igualdade. Na presente tarefa, o *todo* (13) corresponde ao valor algébrico ***c*** (Figura 2).

Figura 2: Tarefa 1 – esquema todo-partes: representação algébrica com todo
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Se o *todo* (13) corresponde ao valor ***c***, as *partes* ***a*** e ***b*** serão menores que o *todo* ***c***. Assim, atribui-se um valor aleatório para uma das *partes* (Figura 3).

Figura 3: Tarefa 1 – Uma das partes conhecida
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Dentre as opções de valores aritméticos para uma das *partes* optou-se pelo número sete (7). Este, pela propriedade comutativa da adição (a + b = b + a), pode representar tanto a parte de valor algébrico ***a*** quanto a parte de valor ***b***. Optou-se, aleatoriamente, a título de exemplificação, por **a = 7**.

Neste estágio de resolução da tarefa já se tem o valor aritmético do *todo* (13) e o valor aritmético da *parte* ***a*** (7). O professor sugere vários valores para representar a outra parte desconhecida (9, 2, 5, etc.). A síntese a ser elaborada, a partir das observações do professor, com base na relação do *todo* com suas *partes*, é que somente um destes números corresponde à *parte* desconhecida. O valor aritmético para ***b*** não pode ser determinado aleatoriamente (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

A sugestão apresentada no manual de orientações ao professor é que continuidade da tarefa seja realizada no plano mental: quanto será necessário adicionar ao número sete (*parte)* para obter o *todo* (13)? (Figura 4).

Figura 4: Tarefa 1 – Esquema e representação algébrica todo-partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise referente à figura 4 (7 + 6 = 13), têm-se as seguintes relações: a *parte* sete (7) adicionada a outra *parte* seis (6) resulta no *todo* treze (13). Ou, comutativamente, a *parte* seis (6) adicionada à *parte* sete (7) resulta no *todo* treze (13). A partir da operação inversa, a subtração, tem-se que a *parte* sete (7) subtraída do *todo* treze (13) resulta em seis (6). Ou a *parte* seis (6) subtraída do *todo* treze (13) resulta em sete (7). Vale o alerta de que poderiam ser outros valores para as partes. A opção pelos números 7 e 6 foi aleatória, a título de exemplificação de uma possível resolução da tarefa.

A segunda questão da tarefa 1 (Figura 5) consiste novamente na análise da relação entre as *partes* e o *todo*.

Figura 5: Tarefa 1 – Questão 2) Esquema todo-partes e representação algébrica
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A partir da análise do esquema (Figura 5) conclui-se que o *todo* corresponde ao valor quatorze (14). Para relacionar este *todo* à representação algébrica, faz-se necessário considerar que, na primeira parte da tarefa, a operação considerada foi adição, agora se trata da subtração.

A subtração é a operação pela qual se determina um número ***c*** que, somado com ***b***, resulta em ***a*** **(*c* + *b* = *a*)***,* ou seja: ***a* – *b* = *c***. Para o número ***a***, dá-se o nome de diminuendo, para ***b***, de diminuidor ou subtrativo, e para ***c*** de resto ou diferença.

Para que a operação da subtração seja possível, nos limites dos números inteiros positivos, o aditivo deve ser maior que o subtrativo, ou igual a ele (Caraça, 1951).

Pereira (1986), define a operação de subtração, como a inversa da adição. Dada a soma de dois números (minuendo e subtraendo determinar um outro (resto ou diferença). Para que uma subtração seja possível de ser operada, nos números Naturais, é necessário que o minuendo, representado genericamente por ***m***, seja igual ou maior ao subtraendo, representado por ***s***. Assim, tem-se que m ≥ s. Por meio da operação de subtração entre dois números obtém-se um terceiro que, adicionado ao segundo, resulta no primeiro.

Na tarefa em análise, **m** representa o valor do *todo*, e as duas partes estão representadas por ***n*** e ***k***. Logo, estabelecem-se as seguintes relações subtrativas: ***m – n = k*** ou ***m – k = n*****,** nas quais, do *todo* **m** subtrai-se uma das *partes,* **n** ou **k**. Porém, a tarefa já determina que ***n*** é o subtrativo, ***k*** o resto e quatorze (14) o *todo* (Figura 6).

Figura 6: Tarefa 1 – Questão 2) Esquema todo-partes representação algébrica com o todo
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Para representar as *partes* do esquema, entre várias opções escolhe-se um valor aleatoriamente (Figura 7):

Figura 7: Tarefa 1 – Questão 2) Todo e uma parte completa
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Optou-se, aleatoriamente, a título de exemplificação, por ***n = 8***. Tem-se o valor aritmético do *todo* (14) e de uma das *partes* (8). Quanto será a outra *parte*? (Figura 8).

Figura 8: Tarefa 1 – Questão 2) Todo-partes completa
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na igualdade formada (**14 - 8 = 6)**, do *todo* quatorze, subtraiu-se a *parte* oito e resultou na outra *parte,* seis.

Escolheu-se o número oito (8), dentre as várias possibilidades, para representar uma das *partes*. Por outro lado, o valor aritmético seis (6) foi determinado a partir dos valores conhecidos. Ou seja, a última *parte* desconhecida não pode ser determinada aleatoriamente. Em síntese, se existem dois valores conhecidos na relação entre *duas partes* e *todo*, o terceiro número não pode surgir de uma escolha arbitrária, este depende estritamente dos valores conhecidos (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Os modelos abstratos **a + b = c**, e **m – n = k** representam o movimento universal determinado pela relação *todo-partes*. A tarefa pré-determinava um valor singular para cada modelo. Na adição, o valor aritmético era treze (13) e, na subtração, o valor aritmético era quatorze (14). A partir da determinação dos demais valores singulares, obteve-se a representação concreta do modelo universal abstrato. As demais tarefas são pensadas com base na relação universal entre as partes e o todo, conforme segue.

<u>Tarefa 2:</u> A partir do registro **k + b = c**, na sua forma geométrica, elabore o enunciado de um problema (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

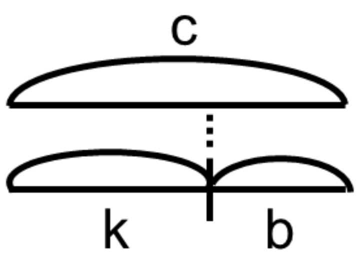

Figura 9: Tarefa 2 – Esquema genérico
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Tem-se o registro da representação universal da relação *todo-partes* por meio da operação de adição (**k + b = c)** no esquema (Figura 9). Trata-se de uma representação geométrica da igualdade. Há uma *parte* ***k***, que adicionada à *parte* ***b***, resulta no *todo* ***c***. A título de exemplificação, a história elaborada foi a seguinte: “Há ***c*** lápis na caixa, entre eles ***k*** vermelhos e ***b*** azuis”. Deste modo, ***c*** é o *todo* (total de lápis na caixa). Uma das *partes* é denominada por ***k*** (referente aos lápis vermelhos) e ***b*** é a outra *parte* (para lápis azuis).

A partir da história, com base na relação universal (*todo-partes*), elabora-se o enunciado de um problema particular como, por exemplo: havia na caixa, lápis vermelhos e azuis, em um total de ***c*** lápis. Sabe-se que eram ***k*** vermelhos. Quantos eram azuis?

Elaborado o enunciado do problema, constata-se que há um valor desconhecido a ser calculado, mas qual deles ***c***, ***b*** ou ***k***? Após análises, o valor desconhecido é representado no esquema (Figura 10).

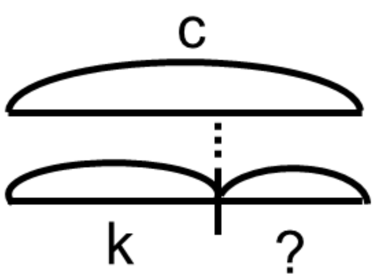

Figura 10: Tarefa 2 – Esquema genérico com interrogação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

No problema, a pergunta consistia em "quantos eram azuis?". Sabe-se, a partir da história, que eram ***b*** azuis. Logo, ***b*** é o valor desconhecido. Este é substituído, nas representações, por um sinal de interrogação.

k + b = c

k + ? = c

Em Matemática, quando se pretende calcular um valor desconhecido, costuma-se utilizar uma letra, que designa uma incógnita (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Mas, qual seria esta letra? Geralmente, utiliza-se a letra ***x***. Assim, substitui-se o sinal de interrogação pela incógnita ***x*** (Figura 11):

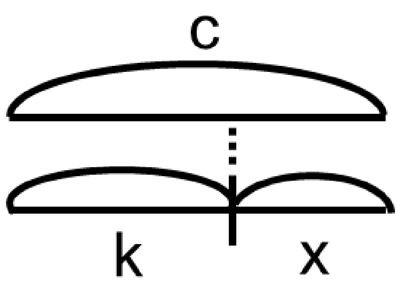

Figura 11: Tarefa 2 – esquema genérico com incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

k + b = c
k + ? = c
k + x = c

Até o momento elaborou-se a história, em seguida o problema, mas somente com valores algébricos no movimento orientado do geral para o particular (o problema). A partir do problema, os valores algébricos (***k*** e ***c***) serão substituídos por valores aritméticos singulares.

Para exemplificação, os números utilizados serão 8 e 15 (Figura 12), estes serão representados tanto na igualdade quanto no esquema (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Os números genéricos ***k*** e ***c*** são substituídos pelos valores aritméticos 8 e 15. Mas 8 representa o valor de ***k*** ou ***c***? O mesmo questionamento também é válido para o número 15.

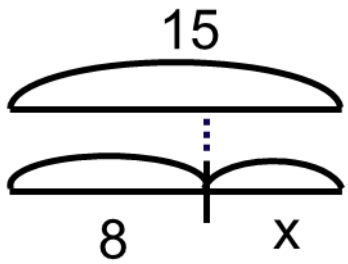

Figura 12: Tarefa 2 – esquema com valores aritméticos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

k + x = c
8 + x = 15

Sabe-se que nesta tarefa, com base na relação *todo-partes*, que o valor aritmético de uma das *partes* é desconhecido. Como quinze (15) é maior que oito (8), o primeiro representa o *todo* e o segundo (oito), a outra *parte*. A sugestão apresentada no manual do professor é que este informe às crianças que as igualdades com a incógnita são denominadas, em Matemática, de equações.

Após a alteração da igualdade e do esquema reformula-se, também, o enunciado do problema com a substituição dos valores representados algebricamente pelos aritméticos (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Enunciado reformulado: havia, na caixa, lápis vermelhos e azuis, em um total de quinze (15) lápis. Sabe-se que eram oito (8) vermelhos. Quantos eram azuis?

O cálculo do valor desconhecido é fundamentado no seguinte raciocínio: qual número que, adicionado a oito (8), resulta em quinze (15)?

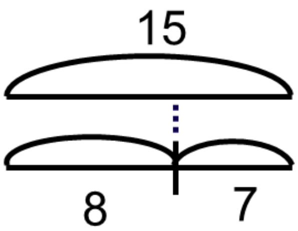

Figura 13: Tarefa 2 – Esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

8 + x = 15
8 + 7 = 15
x = 7

Ao número oito adiciona-se um valor desconhecido para atingir o quinze (**8 + x = 15**). O cálculo deve ser realizado por meio da reta numérica. A partir do número oito, adiciona-se sete unidades para a direita até atingir o número quinze. O total de unidades acrescidas representa o valor de ***x***. Portanto, o valor aritmético que representa a quantidade singular de lápis azuis, neste problema particular, é sete.

De igual maneira, em Davýdov entende-se a equação, em primeiro lugar, como a descrição do problema, e só depois como certo registro. A equação, antes de tudo, é mais um formato de representação do problema junto ao esquema (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Portanto, a incógnita (representada aqui pela letra ***x***) faz mais o papel do sinal de interrogação do que representa um número e, como as outras letras, trata-se de um número a ser determinado (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

Por conseguinte, Davýdov e colaboradores apresentam o conceito de equação, suas relações com o conceito de incógnita no movimento mediado pela composição e estruturação de um problema, e na inter-relação com um sistema de representações (aritméticas, algébricas e geométricas). Tal movimento seguiu, na especificidade da tarefa em análise, orientado do geral para o particular e singular, o fio condutor desse movimento foi a relação universal.

A forma universal da equação do primeiro grau é expressa por $ax + b = 0, a \neq 0$. Pela propriedade de equivalência, se somar a ambos os membros da igualdade o número $-b$, ela não se altera ($ax + b - b = 0 - b$), o que resulta em: ax = -b. Toda equação do 1º grau, ax + b = 0, tem uma só raiz, e a solução de uma equação é dada pelo valor que satisfaz a igualdade (Caraça, 1951).

Na tarefa 1, Davýdov e colaboradores iniciavam pela representação genérica de uma operação. O desenvolvimento da tarefa culminava em uma representação particular composta por valores aritméticos e valores desconhecidos, mas sem a sistematização da incógnita. Esta é introduzida em Davýdov durante o desenvolvimento do sistema de tarefas, a partir de situações geradoras de necessidade da mesma, durante o cálculo do valor desconhecido. Trata-se de uma introdução teórica, como síntese das múltiplas determinações que a envolvem no movimento entre todas as dimensões conceituais (geral, universal, particular e singular). O procedimento de resolução, ponto de partida predominante nas proposições atuais (Rosa, 2012), é apresentado após o estudo das relações internas entre a parte o o todo, conforme a tarefa 3.

<u>Tarefa 03:</u> Determine o valor aritmético da incógnita: **x – 27 = 46** e **84 – x = 52.**

A primeira igualdade (**x – 27 = 46**) é uma equação? Sim, pois possui igualdade e incógnita. Mas, é possível resolvê-la? Sim, pois existe um número que, ao subtrair 27, resulta em 46. Ou seja, 27 e 46 são *partes* que compõem o *todo* ainda desconhecido. Qual operação matemática, nesta equação, pode ser realizada para determinar o valor da incógnita ***x***? (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

Antes do cálculo do valor desconhecido, representa-se o *todo* e as *partes* da equação (Figura 14).

$$\overbrace{x}^{\text{Todo}} - \overbrace{27}^{\text{Parte}} = \overbrace{46}^{\text{Parte}}$$

Figura 14: Tarefa 3 – Todo e partes da equação
Fonte: elaboração com base nas proposições davydovianas

Do *todo* (x) subtrai-se a *parte* (27), e resulta na outra *parte* (46). Qual número que, subtraído de vinte e sete (27), resulta em quarenta e seis (46)? Para responder a esta questão, faz-se necessário, por meio da operação de adição, adicionar as *partes* para resultar no *todo* desconhecido (Figura 15).

$$\overbrace{x}^{\text{Todo}} - \overbrace{27}^{\text{Parte}} = \overbrace{46}^{\text{Parte}}$$
$$x = 46 + 27$$
$$x = 73$$

Figura 15: Tarefa 3 – Cálculo do valor aritmético da incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Conforme ilustrado anteriormente, para determinar o valor da incógnita ***x*** opera-se com as duas partes (46 + 27) que compõem o *todo*, por meio da operação de adição. O resultado é setenta e três (73). Logo, **x = 73**.

A mesma equação também pode ser representada geometricamente no esquema (Figura 16). Nesta representação, explicita-se a necessidade de se unir as *partes* para compor o *todo* antes desconhecido.

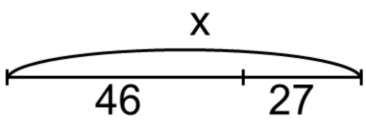

Figura 16: Tarefa 3 – Equação representada por esquema
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Por meio do esquema, pode-se visualizar, geometricamente, que à *parte* quarenta e seis (46) se adiciona a outra *parte,* vinte e sete (27). Juntas elas compõem o *todo*, representado por ***x***. A partir do cálculo (46 + 27) determina-se o valor aritmético do *todo* (73). Assim, tem-se que ***x* = 73** (Figura 17).

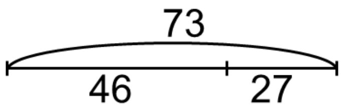

Figura 17: Tarefa 3 – Esquema com valor da incógnita calculado
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Em síntese, do *todo* (73) subtrai-se a *parte* (46), e resulta no valor da outra *parte* (27). Ou, do *todo* (73), subtrai-se o valor da *parte* (27) e resulta no valor da outra *parte* (46). Ou, ainda, as *partes* (46 e 27), por meio da adição, compõem o *todo* (73).

A segunda parte da tarefa em análise consiste em determinar se a igualdade **84 – x = 52** é uma equação. Sim, pois possui igualdade e incógnita. É possível resolvê-la? A resposta é afirmativa, pois existe um número que se subtrai de oitenta e quatro (84) resulta em cinquenta e dois (52). Antes de calcular o valor da incógnita, representa-se o *todo* e as *partes* da equação **84 – x = 52**, conforme a figura 18 (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

$$\overbrace{84}^{\text{Todo}} - \overbrace{x}^{\text{Parte}} = \overbrace{52}^{\text{Parte}}$$

Figura 18: Tarefa 3 – Todo e partes da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84) subtrai-se a *parte* de valor aritmético desconhecido, e resulta no valor da outra *parte* (52). Deste modo, quanto se subtrai de 84 (***x***) para resultar 52?

Qual operação deve ser realizada para determinar o valor de ***x***? É a subtração, uma vez que o *todo* e uma das *partes* são conhecidos. Assim, do *todo* (84) subtrai-se a *parte* conhecida (52) e resulta no valor de quanto (Figura 19)?

$$\overbrace{84}^{\text{Todo}} - \overbrace{x}^{\text{Parte}} = \overbrace{52}^{\text{Parte}}$$
$$84 - 52 = x$$
$$32 = x$$

Figura 19: Tarefa 3 – Cálculo do valor aritmético da incógnita x
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84) subtrai-se a *parte* (52) e resulta no valor da outra *parte* (32).

A equação **84 – x = 52** pode ser representada geometricamente pelo esquema (Figura 20). Nele é possível visualizar a relação entre o *todo* e as *partes* que determina a realização da operação de subtração (84 – 52) para obtenção do valor da incógnita ***x*** (32).

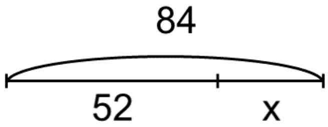

Figura 20: Tarefa 3 - Equação representada por esquema
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* (84), se subtrai a *parte* (52) e resulta no valor até então desconhecido (32), conforme figura 21.

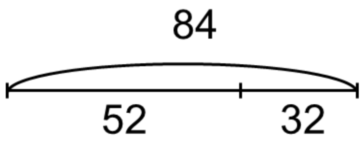

Figura 21: Tarefa 3 – Esquema com valores aritméticos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

As duas equações resolvidas na tarefa em análise (x – 27 = 46 e 84 – 52 = 32) são apresentadas com o operador “menos”. Mas a operação utilizada para calcular o valor da incógnita foi diferente. Na primeira foi utilizada a adição e, na segunda, a subtração. Onde está o erro? Na solução da primeira equação ou da segunda? (Горбов, Микулина е Савельева, 2009).

Na primeira equação, as *partes* juntas resultavam no *todo* desconhecido. Ou seja, nesta equação, a incógnita era o *todo* (Figura 22).

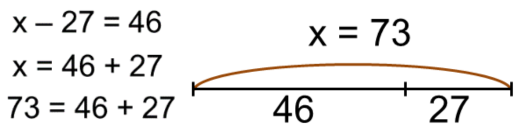

Figura 22 Tarefa 3 – Esquema de comparação todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na segunda equação, a incógnita era uma das *partes*: do *todo se* subtrai uma *parte* conhecida e resulta no valor da outra *parte* (Figura 23).

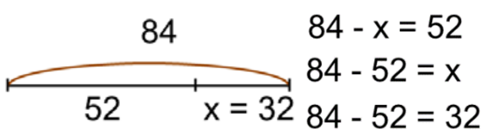

Figura 23 Tarefa 3 – Esquema de comparação todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Não se trata de um erro. Em um caso o valor desconhecido era o *todo* e, no outro, era a *parte* (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Em Davýdov, o procedimento de resolução de equações não é apresentado por meio de regras do tipo: se está somando, passa para o outro lado da igualdade diminuindo; ou, se está diminuindo, para o outro lado da igualdade somando. Tal orientação é característica do ensino tradicional. Na proposição davydoviana, após as reflexões sobre o procedimento de resolução ocorre a generalização (Tarefa 04)

Tarefa 04: Componha as equações e compare as soluções.

Com base no esquema (Figura 24), devem-se compor as três igualdades da tarefa (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

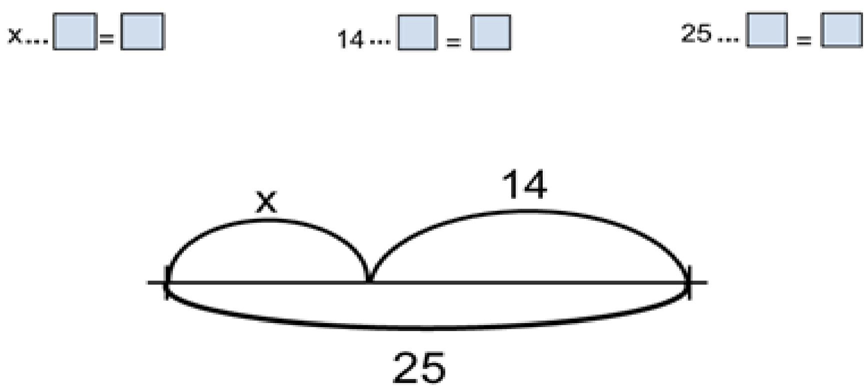

Figura 24: Tarefa 04 – esquema todo e partes
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

No esquema geométrico, o *todo* de valor aritmético vinte e cinco (25) e as *partes* que compõem este *todo* são o valor desconhecido (***x***) e o valor aritmético quatorze (14).

Primeira igualdade (Figura 25):

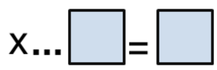

Figura 25: Tarefa 04 - Primeira igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A incógnita (***x***) já está apresentada no primeiro termo da equação. Serão representados, aritmeticamente, o segundo e terceiro termo, juntamente com a operação a ser definida.

Por meio do esquema (Figura 24), constata-se que a incógnita (***x***) é uma *parte* e, para representar a equação, restam o *todo*, vinte e cinco (25), e a *parte* quatorze

(14). Se a incógnita (***x***) é uma *parte*, não poderá ser adicionada ao *todo* vinte e cinco (25).

Logo, para representar a igualdade, a incógnita (***x***), que é uma *parte,* deverá ser unida à outra *parte,* quatorze (14). Juntas, por meio da operação de adição, comporão o *todo,* vinte e cinco (25), conforme figura 26.

$$x \dot{+} \boxed{14} = \boxed{25}$$

Figura 26: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Qual número que, adicionado a quatorze, resulta em vinte e cinco? Ou, de outro modo, do *todo,* vinte e cinco (25), subtrai-se a *parte* conhecida, quatorze (14), e resulta em quanto (Figura 27)?

$$x \dot{+} \boxed{14} = \boxed{25}$$
$$x + 14 = 25$$
$$x = 25 - 14$$
$$x = 11$$

Figura 27: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo,* vinte e cinco (25), subtrai-se a *parte* quatorze (14) e resulta no valor singular da outra *parte,* onze (11). Ou seja, para **x = 11**, temos a *parte* onze (11), adicionada a outra *parte,* quatorze (14), estas compõem o *todo,* vinte e cinco (25).

A segunda igualdade (Figura 28).

$$14 \cdots \boxed{} = \boxed{}$$

Figura 28: Tarefa 04 – Segunda igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na segunda igualdade, já está representado o valor aritmético quatorze (14) no primeiro termo. Serão representados o segundo e terceiro termo, juntamente com a operação a ser definida.

Por meio do esquema, constata-se que quatorze (14) é uma *parte* e, para representar a equação, restam o *todo,* vinte e cinco (25), e a *parte* (***x***).

Se a *parte* quatorze (14) já está representada na igualdade, a operação é adição, visto que as *partes* juntas compõem o *todo*.

Conforme o esquema (Figura 24), a outra *parte* é a incógnita (***x***) e, para representar o segundo membro, resta o *todo* vinte e cinco (25), conforme a figura 29.

$$14 \overset{+}{\dots} \boxed{x} = \boxed{25}$$

Figura 29: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Na equação ilustrada anteriormente (Figura 29) tem-se a *parte* quatorze (14) adicionada a outra *parte* de valor desconhecido (***x***). Ambas compõem o *todo*, vinte e cinco (25).

Ao quatorze (14) adiciona-se quanto para resultar em vinte e cinco (25)? Ou, de vinte e cinco (25), ao se subtrair a *parte* quatorze (14), resultará em quanto (Figura 30)?

$$14 \overset{+}{\dots} \boxed{x} = \boxed{25}$$
$$14 + x = 25$$
$$x = 25 - 14$$
$$x = 11$$

Figura 30: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Assim, o valor singular da incógnita é 11 (**x = 11).** Quatorze (14) e onze (11) são as *partes* que compõem o *todo*, vinte e cinco (25).

Terceira igualdade (Figura 31):

$$25 \dots \boxed{} = \boxed{}$$

Figura 31: Tarefa 04 – Terceira igualdade para completar
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A terceira igualdade está representada, inicialmente, pelo valor aritmético vinte e cinco (25). Por meio do esquema (Figura 24), constata-se que é o *todo.* A operação não poderá ser adição, pois ao *todo* não se adiciona a *parte.*

Do *todo* vinte e cinco (25) subtrai-se uma *parte* para obter o valor de outra *parte*. Logo, o esquema, possui duas partes: quatorze (14) e ***x***. Escolheu-se, aleatoriamente, a *parte* quatorze para o segundo termo, e a incógnita (***x***) foi registrada após a igualdade (Figura 32).

$$25 \overset{-}{\dots} \boxed{14} = \boxed{x}$$

Figura 32: Tarefa 04 – Todo, parte e operação completos
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do todo vinte e cinco (25) subtrai-se a *parte* de valor aritmético quatorze (14) e resulta no valor desconhecido (***x***). Assim, de vinte e cinco (25) subtrai-se quatorze (14), e resulta em quanto?

$$25 \overset{-}{\dots} \boxed{14} = \boxed{x}$$
$$25 - 14 = x$$
$$11 = x$$
$$x = 11$$

Figura 33: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

A *parte* referente ao valor aritmético da incógnita (***x***), no esquema, é onze (11), assim como no esquema. Para **x = 11**, tem-se (Figura 34):

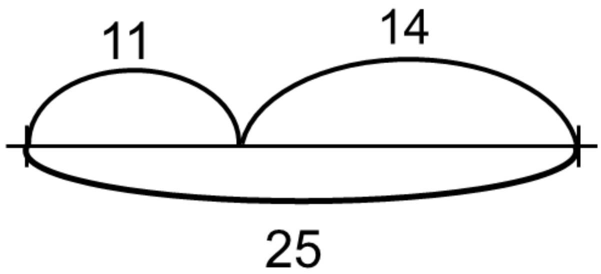

Figura 34: Tarefa 04 – Cálculo da equação
Fonte: elaboração com base na proposição davydoviana

Do *todo* vinte e cinco (25) subtrai-se a *parte* quatorze (14), que resulta no valor da outra *parte*, onze (11). Qual a solução das três equações?

Simultaneamente, para as três equações, a solução resultou no mesmo valor aritmético onze (11). Ou seja, o valor das incógnitas, nas três equações (**x + 14 = 25**, **14 + x = 25** e **25 – 14 = x)** foi o mesmo: **x = 11**.

Cabe o seguinte questionamento: por que este resultado (**x = 11**) repetiu-se para nas três equações? (Горбов, Микулина e Савельева, 2009).

As três equações possuíam os mesmo termos (25, 14 e x). Porém, em cada equação estes estavam posicionados em lugares diferentes. Entretanto, foram elaboradas a partir de um mesmo esquema universal, que continha os mesmos números singulares *parte* (14), *todo* (25) e a *outra parte* desconhecida. Por isso, para cada equação particular, formada com base na relação universal *todo-partes,* obteve-se o mesmo valor aritmético singular onze (11).

O valor numérico de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos. Além disso, é possível construir tantas equações quantos componentes existirem na igualdade (Горбов, Микулина e Савельева, 2009). Tal síntese é elaborada durante o desenvolvimento das tarefas. Neste, reproduz-se o sistema de conexões internas do conceito de equação até atingir sua concretude em nível teórico.

Na proposição davydoviana as diferentes representações da relação *todo-partes* são alternadas e são exploradas as diversas possibilidades. Tal relação fundamenta a representação algébrica e a determinação do valor desconhecido, representado pela letra ***x***.

O movimento interno da relação universal (*todo-partes*), ao ser concretizado, permite a generalização do conceito de equação, no que se refere à operação a ser realizada para resolvê-la. Se as duas *partes* são conhecidas, para determinar o *todo* basta adicioná-las. Por outro lado, se o *todo* e uma das *partes* são conhecidos, para determinar a outra *parte*, faz-se necessário subtrair a *parte* conhecida do *todo*. Em síntese, o valor numérico de cada termo da equação pode ser determinado a partir do valor numérico dos outros termos.

O sistema de tarefas davydovianas, para a introdução ao conceito de equação,

> permite construir, sobre a base da igualdade dada, vários tipos de equações (os estudantes concluem que a quantidade de tais equações é igual à quantidade de elementos incluídos na igualdade: $x + a = c$, $c – x = a$, $c – a = x$. De acordo com estas equações, as crianças transformam qualquer situação inicial na quantidade correspondente dos chamados problemas texto (DAVÍDOV, 1988, p. 211).

Enfim, o conceito de equação é introduzido em Davýdov com base no movimento do geral (representado no modelo geometricamente e algebricamente) para o singular (as significações aritméticas), mediado pelas particularidades (problemas textos). O fio condutor desse movimento é a relação universal entre o todo e as partes. Diferentemente das proposições de ensino que predominam atualmente, cujo foco inside no procedimento de resolução de situações particulares e singulares, sem a devida atenção ao movimento interno da relação entre as partes e o todo. Portanto, considera-se que a proposição davydoviana pode contribuir para se repensar o ensino de matemática.

Com essa finalidade, no Brasil, há um um movimento de articulação entre a proposição davydoviana e a atividade orientadora de ensino, criada inicialmente pelo professor Manoel Oriosvaldo de Moura. Crestani (2016) e Galdino (2016) elaboraram uma história virtual e desenvolveram, matemáticamente, como base no movimento conceitual matemático propoto por Davýdov. Trata-se de estudos iniciais, mas que indicam possibilidades de transformação da Educação Matemática brasileira, que, atualmente, atinge resultados pouco satisfatórios.

Bibliografia

ALVES, E. de S. B. (2012). *Proposições Brasileiras e davydovianas: limites e possibilidades.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 119 f.

CARAÇA, B. J. (1951). *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa.

CRESTANI, S. (2012). *Análise conceitual das proposições de Davydov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão*. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 70 f**.**

CRESTANI, S. (2016). *Organização do ensino de Matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão*. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, SC, Brasil.

DAVIDOV, V. V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación teórica y experimental.* Trad. Marta Shuare Moscú: Editorial Progreso.

DAVÝDOV, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la enseñanza.* Habana: Editorial Pueblo y Educación.

DORIGON, J. C. G. (2012). *Proposições de Davydov para introdução ao conceito de equação.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 90 f.

GALDINO, A. P. S. 2016. *O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação: um estudo com base na Teoria Histórico-Cultural.* Dissertação de Mestrado. Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão.

GALPERIN, P.; ZAPORÓZHETS A.; ELKONIN, D. (1987). *Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades enlos escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela.* In: SUARE, M. *La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS*. Moscú, Progreso, p. 300-316.

JARDINETTI, J. R. B. (1996). *Abstrato e o concreto no Ensino da Matemática: algumas reflexões.* Bolema, ano 11, nº 12, p. 45 – 57.

MADEIRA, S. C. (2012). *"Prática": Uma leitura Histórico-Crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação.* Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 165 f.

MATOS, C. F. (2012). *Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 168 f.

PEREIRA, M. A. M. (1986). (Ed.). *Enciclopédia Sysamérika.* Curitiba: Editora Argos, Ltda.

ROSA, J. E. (2012). *Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de sistema de significações numéricas.* Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná 244 f.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. **(**2013**).** *Adição e subtração em Davydov.* Boletim GEPEM / Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Rio de Janeiro, n. 63, p. 61-75, Jul./Dez..

SILVEIRA, G. M. (2012). *Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davydov.* Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 112 f.

SOUZA, M.B. (2013). *O ensino do conceito de número: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna.* Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma. 237 f.

ГОРБОВ С. Ф.; МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. (2008) *Обучение Математике. 1класс: Пособиедляучителейначальнойшколы* (Система Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида, перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб. 128р. [GORBOV, S.F.; MIKULINA, G.G.; SAVIELIEV, O.V. (2009). *Ensino de Matemática. 1 ano: livro do professor do ensino fundamental* (Sistema do D.B. Elkonin – V.V. Davidov). 2ª edição redigida, Moscou, Vita-Press.]

ДАВЫДОВ, В. В. О. (2012). et al. *Математика, 1-Kjiacc.* Mockba: Mпрос - Аргус. [Davidov, V.V. (2012) *Matemática, 1ª série. Livro didático e de exercícios para os estudantes da primeira série.* Moscou: MIROS, Argus.

Josélia Euzébio da Rosa, E-mail: joselia.rosa@unisul.br. Licenciada em Matemática. Doutora em Educação, linha de pesquisa Educação Matemática. Professora do Mestrado em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina – UNISUL. Pesquisa com base na Teoria Histórico-Cultural, cujo foco é para a obra de Davydov.

Ademir Damazio, E-mail: add@unesc.net. Licenciado em Matemática pela UNIPLAC. Especialista Matemático pela FUESS. Especialista em Ciências Matemáticas pela FURB. Mestre em Educação pela UFSC. Doutor em Educação pela UFSC. Professor da UNESC. Pesquisa: Conceitos Matemáticos Científicos, Cotidianos e Histórico-Cultural.

Josiane Cruz Goularte Dorigon, e-mail: josyanecg@yahoo.com.br, Licenciada em Matemática. Pós-graduada em Educação Matemática na Pós-graduação Latu Sensu da Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC. Especialização em Metodologia da Matemática e Física na faculdade de Ensino Superior Dom Bosco, FDB, Brasil.