REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

www.fisem.org/web/union
http://www.revistaunion.org

ISSN: 1815-0640
Número 46. Junio 2016
Página 220-226

El rincón de los problemas
Patrones y generalizaciones a partir de un juego

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú – IREM
umalasp@pucp.edu.pe

Problema

Juegan dos personas, diciendo alternadamente números naturales. El que inicia el juego puede hacerlo diciendo 1, 2, 3 o 4. El otro jugador debe decir un número mayor que el que dijo su competidor, pero a lo más mayor por cuatro unidades, y así sucesivamente. Gana el jugador que en su turno dice 38.
¿Siempre gana el que empieza el juego? ¿Existe una estrategia ganadora?

El juego es fácil de practicarlo. Recomiendo al lector vivir la experiencia de jugarlo con un colega, amigo, familiar o con un niño, por lo menos dos veces. No importa si gana o pierde; lo importante es familiarizarse con el juego y entenderlo bien, practicándolo, y asumir el reto de encontrar una estrategia ganadora. Por las grandes potencialidades matemáticas y didácticas que tiene este juego, yo lo he usado varias veces para iniciar un curso, taller o una conferencia, unas veces con profesores, otras con estudiantes de diversos niveles educativos. Comentaré las experiencias con este juego.

Una fase inicial es presentar más claramente las reglas del juego:

1. *Juegan dos personas, diciendo números naturales del 1 al 38.*
2. *Para empezar el juego, uno de los jugadores dice un número natural entre 1 y 4 (inclusive).*
3. *El juego continúa de la siguiente manera:*

   Cada jugador dice, en su turno, un número natural que sea mayor que el número que dijo su competidor, pero a lo más mayor por 4 unidades.
4. *Gana el jugador que en su turno dice* ***38.***

Y así, animar a que alguno de los participantes se decida a jugar conmigo, destacando la importancia de familiarizarse con las reglas del juego y quitando importancia inicial a ganar o perder.

Ciertamente, el reto es que me ganen y esto facilita inducir al auditorio a descubrir una estrategia ganadora. Pronto se dan cuenta que el jugador que empieza el juego no necesariamente es el que gana. También advierten fácilmente que si yo digo 33, ya es prácticamente imposible que mi competidor gane, pues solo tiene las alternativas 34, 35, 36 y 37 y con cualquiera de ellas ya puedo decir 38 y ganar.

La observación anterior es una buena ocasión para invitarlos a pensar cómo evitar que yo diga 33. Valoro el *ensayo y error* al resolver el problema, pero recomiendo hacer *tanteos inteligentes* y buscar patrones. Recomiendo hacer anotaciones, pues suele ocurrir que muchos no las hacen. Luego de jugar con varios participantes, advierten que si digo 28, ya es imposible evitar que diga 33. Celebro este avance y los invito a continuar observando y razonando en esa línea, para descubrir "números clave". Obviamente yo conozco la estrategia ganadora y en los juegos sucesivos me cuido de usar los números de la estrategia para ganar; sin embargo en los primeros juegos me arriesgo y no uso todos los números de la estrategia ganadora desde el inicio. Esto dificulta un poco descubrir la secuencia de números de la estrategia ganadora, pero hace más retador el juego.

Es realmente satisfactorio cuando alguno(a) de los(as) participantes, con gran decisión y mirando sus anotaciones, me reta a jugar, me pide ser él o ella quien inicie el juego y me gana. ¡Todos felices! Evidentemente yo también, pues ese era el objetivo al hacerlos jugar: *que me ganen, descubriendo la secuencia de números de la estrategia ganadora*.

¿Cuál es esa secuencia de números? ¿La encontró usted amigo lector? ¡No se pierda la oportunidad de tener la satisfacción de encontrarla! Puede hacer una pausa en la lectura de este artículo.

Bien, como ya habíamos comentado antes, se encuentra fácilmente un número de la secuencia: el *33* (el jugador que lo dice podrá decir 38, cualquiera que sea el número que diga el otro jugador); otro número de la secuencia es el *28*, pues quien lo dice ya aseguró decir 33; con el mismo razonamiento se encuentran los otros números de la secuencia ganadora: *23* (para asegurar decir el 28); *18* (para asegurar decir el 23); *13* (para asegurar decir el 18); *8* (para poder decir el 13); y *3* (para poder decir el 8). Así, la secuencia ganadora completa es

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38.

Evidentemente, el que empieza el juego diciendo 3, puede decir cada uno de los números de la secuencia y llegar inevitablemente al 38.

Nuevos retos

Aparentemente, al tener ya la estrategia ganadora, "el juego terminó", pero no es así. Es el momento de plantearnos nuevas preguntas y de usar una muy importante al resolver y crear problemas: *¿Qué pasaría si…?*

Entonces, ¿Qué pasaría si cambiamos un poco las reglas del juego y, en lugar de llegar al número 38, ahora proponemos que el ganador será el que llegue al número **39**? ¿La estrategia ganadora será la misma? Luego de cierto asombro, los participantes concluyen que la secuencia de números de la nueva estrategia ganadora es

4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39.

¿Y ahora?

¿Qué pasaría si en lugar de llegar al 39, el ganador debe llegar a otro número cualquiera, por ejemplo al **51**? ¿Cuál sería la estrategia ganadora? Con la experiencia ganada, un camino para encontrar la secuencia de números de la estrategia ganadora, es empezar por el final y armar la secuencia ganadora restando 5 unidades cada vez. Así, tal secuencia, en orden descendiente, es

51, 46, 41, 36, 31, 26, 21, 16, 11, 6, 1.

Con estos ejemplos ya se tiene descubierto el patrón que caracteriza a la secuencia de la estrategia ganadora, empezando por el final; sin embargo es muy importante saber cuál es el primer número de la secuencia de la estrategia ganadora; es decir, el número por el cual se empieza.

¿Será indispensable conocer todos los números de la secuencia para conocer cuál debe ser el primero?

A estas alturas resulta interesante preguntarse:

¿Qué operaciones matemáticas están involucradas en este juego y en su estrategia ganadora?

Obviamente están involucradas la adición y la sustracción de números naturales. Pero… ¿solo estas operaciones? Recordemos que hacemos sustracciones repetidas, lo cual nos hace pensar en la división.

Volvamos a la primera pregunta y veamos:

para llegar a 38 se empieza por 3;

para llegar a 39 se empieza por 4;

para llegar a 51 se empieza por 1.

Como se partió del final y se fue haciendo restas sucesivas de 5, resulta claro que el primer elemento de la secuencia es el número natural al cual ya no se le puede restar 5 unidades; es decir, el residuo de dividir el número objetivo entre 5; así,

$$38 = 5 \times 7 + 3$$

$$39 = 5 \times 7 + 4$$

$$51 = 5 \times 10 + 1$$

Una generalización

En general, si el número objetivo es ***M***, el primer número de la secuencia creciente de la estrategia ganadora, será el residuo de dividir ***M*** entre 5. Así, si $M = 5k + p$, donde k y p son números naturales y $0 \leq p < 5$, entonces los números de la secuencia ganadora son

$$p,\ p + 5,\ p + 2\times 5,\ p + 3\times 5,\ \ldots,\ p + k\times 5 = M$$

Cabe aclarar que si el número *M* es múltiplo de 5, el residuo *p* será 0 y como este número no está entre los posibles números de partida, entonces el jugador que NO empieza es el que "se apropia" de la estrategias ganadora, desde el 5.

Hacia otra generalización

La generalización anterior provino de ir cambiando el número objetivo (inicialmente fue 38, luego se cambió a 39, a 51 y finalmente se consideró el número objetivo *M*). También podríamos mantener el número objetivo del juego inicial y cambiar el "número tope". Así estamos llamando al número que se debe sumar al número que diga cada jugador en su turno. En el juego inicial, el "número tope" es 4, pues en la regla 3 se especifica que "Cada jugador dice, en su turno, un número natural que sea mayor que el número que dijo su competidor, pero a lo más mayor por 4 unidades". Entonces,

¿Qué pasaría si…? Modificamos el juego inicial y en lugar de que sea 4 el número tope, establecido en la regla 3, solo cambiamos esta regla y establecemos que:

3. *Cada jugador dice, en su turno, un número natural que sea mayor que el número que dijo su competidor, pero a lo más mayor por **7** unidades.*

¿Cuál es ahora la secuencia de números de la estrategia ganadora?

Por analogía con lo ya experimentado, construimos tal secuencia decreciente, comenzando por 38 y restando sucesivamente 8 unidades (***7*** + 1)

38, 30, 22, 14, 6.

Es claro que se puede construir esta secuencia en forma creciente, determinando el primer número (que sería el que tiene que decir el primer jugador para ganar en el juego). Tal número es, por razonamiento análogo al hecho cuando el número tope era 4, el residuo de dividir 38 entre 8. Tal residuo es 6, pues

$$38 = 8 \times 4 + 6 ,$$

Entonces, el primer número de la secuencia ascendente de la estrategia ganadora es 6 y los siguientes se obtienen sumando 8 sucesivamente, hasta llegar a 38.

Ahora bien, si el "número tope" es n (obviamente $n < 38$), entonces para armar la secuencia creciente de números de la estrategia ganadora se parte del número p, que es el residuo de dividir 38 entre $n+1$ y se le va añadiendo, sucesivamente, $n+1$ unidades, hasta llegar al número objetivo 38. Así,

$$38 = k(n+1) + p, \text{ donde } k \text{ y } p \text{ son números naturales y } 0 \leq p < n + 1;$$

por consiguiente, la secuencia creciente de la estrategia ganadora es

$$p$$

$$p + (n+1)$$

$$p + 2(n + 1)$$

$$p + 3(n + 1)$$

$$\dots.$$

$$p + k(n + 1) = 38$$

Generalizando aún más:

Podemos plantear el juego de una manera más general, con las siguientes reglas:

1. Juegan dos personas, diciendo números naturales del 1 al ***M***.
2. Para empezar el juego, uno de los jugadores dice un número natural entre 1 y ***n*** (inclusive).
3. El juego continúa de la siguiente manera:

   Cada jugador dice, en su turno, un número natural que sea mayor que el número que dijo su competidor, pero a lo más mayor por ***n*** unidades.
4. Gana el jugador que en su turno dice ***M.***

En tal caso, la secuencia de la estrategia ganadora se puede construir, en forma decreciente, siguiendo un patrón similar al del juego inicial y que se repitió en las variaciones hechas:

Partiendo del número objetivo M y restando sucesivamente n + 1 unidades, hasta que esta resta sea imposible entre números naturales.

Tener en cuenta que $n + 1$ en este caso es la generalización correspondiente a $n = 4$ en el juego inicial, pues en él las restas sucesivas se hicieron de 5 en 5

Como en la generalización anterior, la secuencia ganadora se puede construir también a partir del primer número de la secuencia creciente, siendo este el residuo p de dividir M entre $n + 1$. Consideremos $M = k(n + 1) + p$, donde k y p son números naturales y $0 \leq p < 5$. Así, la secuencia ganadora es

$$p$$

$$p + (n + 1)$$

$$p + 2(n + 1)$$

$$p + 3(n + 1)$$

$$\dots$$

$$p + k(n + 1) = M$$

Comentarios

1. Un caso particular de la generalización que acabamos de ver, es el juego "La carrera al 20" (basta considerar M = 20 y n = 2). Brousseau lo muestra como ejemplo de una modelización de una situación matemática. De hecho, el conocimiento matemático asociado a "La carrera al 20" es la división euclídea.

2. Una manera de caracterizar el patrón de los números de la secuencia correspondiente a la estrategia ganadora es observando que todos son números que tienen el mismo residuo que se obtiene al dividir el número objetivo M, por n + 1, siendo n el "número tope". Así, en el juego inicial, el residuo de dividir 38 entre 5 es 3 y los números 3, 8, 13, 18, 23, 28 y 33 tienen, todos, residuo 3 si se les divide por 5.

   Otra manera de enunciar esta propiedad es usando un concepto de la aritmética modular; así, decimos que estos números naturales son menores o iguales que 38 y congruentes con 38, módulo 5.

3. Hemos podido ver la riqueza de estos juegos para estimular el pensamiento matemático, pues permite identificar patrones, hacer razonamientos inductivos y deductivos, razonamientos por analogía y generalizaciones. También, identificar los diversos conceptos matemáticos involucrados en el juego. En particular, la división euclidea, que suele no identificarse en las primeras reflexiones.

4. Un reto interesante, desde el punto de vista didáctico, es imaginar una situación particular y presentarla con material concreto a niños que solo conocen números naturales, por ejemplo del 1 al 20 y saben hacer sumas y restas "pequeñas". El juego, además de atractivo debe mantener el reto de encontrar una estrategia ganadora. A continuación mostramos las fotografías del material concreto preparado por tres grupos de profesoras de primaria de un colegio de Lima, luego de un taller desarrollado con ellas y en el que trabajamos con este juego. Cada tablero tiene su propia historia y sus propias reglas (similares a las del juego inicial) para llegar al objetivo.

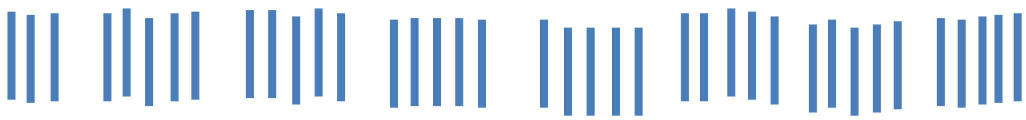


5. Lo hecho por las profesoras muestra una vez más las capacidades creativas de nuestros docentes. Ellos pueden crear "juegos matemáticos" y

problemas cuando son incentivados para ello y se les da los elementos básicos. Los lectores quedan invitados a crear sus propios juegos para diversos niveles educativos, inspirados en lo expuesto.

6. Otra idea interesante para trabajar con material concreto, es disponer, por ejemplo, 38 palitos en la mesa y poner como regla, para dos jugadores, retirar por turnos a lo más 4 palitos. Gana el que retira el último palito. En esta perspectiva, una manera de inducir la división euclídea es acomodar los palitos en 8 grupos: el primero de tres palitos y los otros 7 de 5 palitos cada uno. Se mantiene la regla anterior, pero se añade que

Los palitos que saque cada jugador en su turno deben pertenecer a un mismo grupo.



Dejamos para entretenimiento del lector, encontrar la estrategia ganadora retirando palitos, ubicados en los ocho grupos descritos, respetando las reglas dadas.